

풍산짜

공통수학 2

정답과 풀이

도형의 방정식

1 평면좌표

1 두 점 사이의 거리

12~17쪽

002

$\overline{AB} = \sqrt{10}$ 이므로

$$\sqrt{\{a - (-1)\}^2 + \{2 - (a+1)\}^2} = \sqrt{10}$$

양변을 제곱하면 $(a+1)^2 + (-a+1)^2 = 10$

$$2a^2 + 2 = 10, a^2 = 4$$

$$\therefore a = 2 \text{ 또는 } a = -2$$

답 ± 2

+ 풍산자 방법

$\overline{AB} = k$ (k 는 상수)로 길이가 주어지면 $\overline{AB}^2 = k^2$ 과 같이 양변을 제곱하여 계산한다.

004

$\sqrt{(a-1)^2 + b^2}$ 은 점 (a, b) 와 점 $(1, 0)$ 사이의 거리이고, $\sqrt{(a+2)^2 + (b-3)^2}$ 은 점 (a, b) 와 점 $(-2, 3)$ 사이의 거리이다.

따라서 주어진 식은 점 (a, b) 에서 두 점 $(1, 0)$, $(-2, 3)$ 에 이르는 거리의 합이고, 이는 점 (a, b) 가 점 $(1, 0)$ 과 점 $(-2, 3)$ 을 잇는 선분 위에 있을 때 최소이다. 즉, 최솟값은 두 점 $(1, 0)$, $(-2, 3)$ 사이의 거리와 같다.

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt{(a-1)^2 + b^2} + \sqrt{(a+2)^2 + (b-3)^2} \\ \geq \sqrt{(-2-1)^2 + (3-0)^2} \\ = 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 $3\sqrt{2}$ 이다.

답 $3\sqrt{2}$

006

[1단계] 점 P의 좌표를 $(a, 0)$ 이라 하면 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 이므로

$$\sqrt{(a-2)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{(a-4)^2 + (0-1)^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$4a = 4 \quad \therefore a = 1$$

$$\therefore P(1, 0)$$

[2단계] 점 Q의 좌표를 $(0, b)$ 라 하면 $\overline{AQ} = \overline{BQ}$ 이므로

$$\sqrt{(0-2)^2 + (b-3)^2} = \sqrt{(0-4)^2 + (b-1)^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$4b = -4 \quad \therefore b = -1$$

$$\therefore Q(0, -1) \quad \text{답 } P(1, 0), Q(0, -1)$$

008

[1단계] 점 P의 좌표를 (a, b) 라 하자.

[2단계] 점 P가 직선 $x+2y=1$ 위의 점이므로

$$a+2b=1 \quad \therefore a=1-2b$$

따라서 점 P의 좌표는 $(1-2b, b)$

[3단계] 점 P가 두 점 A, B와 같은 거리에 있으므로

$$\overline{AP} = \overline{BP}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\{(1-2b)-(-1)\}^2 + \{b-2\}^2} \\ = \sqrt{\{(1-2b)-(-2)\}^2 + \{b-1\}^2} \end{aligned}$$

양변을 제곱하여 정리하면 $b=1$

점 P의 좌표는 $(1-2b, b)$ 이므로 $P(-1, 1)$

답 $P(-1, 1)$

다른 풀이

점 P의 좌표를 (a, b) 라 하면

점 P가 직선 $x+2y=1$ 위의 점이므로

$$a+2b=1$$

.....㉠

점 P가 두 점 A, B에서 같은 거리에 있으므로

$$\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2 \text{에서}$$

$$(a+1)^2 + (b-2)^2 = (a+2)^2 + (b-1)^2$$

$$\text{정리하면 } a+b=0$$

.....㉡

$$\text{㉠, ㉡을 연립하여 풀면 } a=-1, b=1$$

$$\therefore P(-1, 1)$$

010

삼각형 ABC의 세 변의 길이를 각각 구하면

$$\overline{AB} = \sqrt{(-2-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{20}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(-3+2)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{10}$$

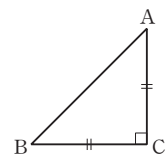
$$\overline{CA} = \sqrt{(0+3)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{10}$$

$$\therefore \overline{BC} = \overline{CA}, \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2$$

따라서 삼각형 ABC는

$\overline{BC} = \overline{CA}$ 이고, $\angle C = 90^\circ$ 인

직각이등변삼각형이다.



답 $\overline{BC} = \overline{CA}$ 이고, $\angle C = 90^\circ$ 인 직각이등변삼각형

012

삼각형 ABC의 외심의 좌표를 $P(x, y)$ 라 하면

$$\overline{AP} = \overline{BP} = \overline{CP}$$

$\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$x + 3y = 5$$

.....㉠

$\overline{AP} = \overline{CP}$ 에서

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$x + 2y = 5$$

.....㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=5, y=0$

$$\therefore P(5, 0)$$

답 P(5, 0)

014

점 B(1, 4)와 y축에

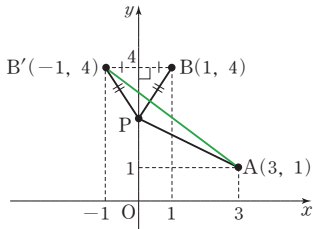
대하여 대칭인 점을

B'이라 하면 점 B'

의 좌표는 점 B의 x

좌표의 부호를 바꾼

(-1, 4)이다.



B'(-1, 4)에 대하여 $\overline{BP} = \overline{B'P}$ 이므로

$$\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{AP} + \overline{B'P}$$

$$\geq \overline{AB'}$$

$$= \sqrt{(-1-3)^2 + (4-1)^2}$$

$$= 5$$

따라서 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은 5이다.

답 5

016

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$$

$$= \{(x-5)^2 + (y-2)^2\} + \{(x-1)^2 + (y-6)^2\}$$

$$= 2x^2 - 12x + 2y^2 - 16y + 66$$

$$= 2(x-3)^2 + 2(y-4)^2 + 16$$

따라서 $x=3, y=4$ 일 때 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 은 최솟값 16을 가지므로 P(3, 4)이다.

답 P(3, 4)

018

점 M이 변 BC의 중점이므로

$$\overline{BM} = \frac{1}{2}\overline{BC} = 2\sqrt{6}$$

중선 정리에 의하여

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$$

$$8^2 + 6^2 = 2\{\overline{AM}^2 + (2\sqrt{6})^2\}, \overline{AM}^2 = 26$$

$$\therefore \overline{AM} = \sqrt{26} (\because \overline{AM} > 0)$$

답 $\sqrt{26}$

필수 확인 문제

18쪽

019

$\overline{AC} = \overline{BC}$ 이므로

$$\sqrt{(a+1)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{(a-6)^2 + (4-7)^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$a^2 + 2a + 17 = a^2 - 12a + 45, 14a = 28$$

$$\therefore a = 2$$

답 2

020

$\sqrt{(x+3)^2 + (y+2)^2}$ 은 점 (x, y)와 점 (-3, -2) 사이의 거리이고,

$\sqrt{(x-2)^2 + (y-10)^2}$ 은 점 (x, y)와 점 (2, 10) 사이의 거리이다.

따라서 주어진 식은 점 (x, y)에서 두 점 (-3, -2), (2, 10)에 이르는 거리의 합이고, 이는 점 (x, y)가 점 (-3, -2)와 (2, 10)을 잇는 선분 위에 있을 때 최소이다.

즉, 최솟값은 두 점 (-3, -2), (2, 10) 사이의 거리와 같다.

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt{(x+3)^2 + (y+2)^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (y-10)^2} \\ \geq \sqrt{(2+3)^2 + (10+2)^2} = 13 \end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 13이다.

답 13

021

점 P의 좌표를 (a, b)라 하자.

점 P가 직선 $x+y-2=0$ 위의 점이므로

$$a+b-2=0 \quad \therefore b=2-a$$

따라서 점 P의 좌표는 (a, 2-a)

점 P가 두 점 A, B와 같은 거리에 있으므로 $\overline{AP} = \overline{BP}$

$$\sqrt{(a-3)^2 + (2-a-2)^2} = \sqrt{(a-2)^2 + (2-a-3)^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$4a=4 \quad \therefore a=1$$

따라서 점 P(a, 2-a)의 좌표는 (1, 1)이므로 두 점 A, P 사이의 거리는

$$\overline{AP} = \sqrt{(1-3)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{5}$$

답 $\sqrt{5}$

022

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$$

$$= \{(x-4)^2 + (y-2)^2\} + \{(x-2)^2 + (y-6)^2\} + \{x^2 + (y+2)^2\}$$

$$= 3x^2 - 12x + 3y^2 - 12y + 64$$

$$= 3(x-2)^2 + 3(y-2)^2 + 40$$

따라서 $x=2, y=2$ 일 때 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$ 은 최솟값 40을 갖는다. $\therefore P(2, 2)$ **답** $P(2, 2)$

023

삼각형 ABC의 세 변의 길이를 각각 구하면

$$\overline{AB} = \sqrt{(-1-a)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{a^2 + 2a + 2}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(3+1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{20}$$

$$\overline{CA} = \sqrt{(a-3)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{a^2 - 6a + 18}$$

이때 삼각형 ABC가 $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형이므로

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 \text{에서}$$

$$20 = (a^2 + 2a + 2) + (a^2 - 6a + 18)$$

$$a^2 - 2a = 0, a(a-2) = 0$$

$$\therefore a = 2 (\because a > 0)$$

답 2

024

오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x 축, 직선 AB를 y 축으로 하는 좌표평면에서 점 B는 원점이 된다.

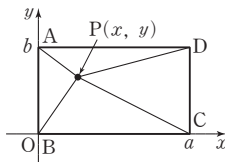
$$A(0, b), C(a, 0), P(x, y)$$

라 하면 점 D의 좌표는 (a, b) 이므로

$$\begin{aligned} \overline{PA}^2 + \overline{PC}^2 &= x^2 + (y-b)^2 + (x-a)^2 + y^2 \\ &= 2x^2 + 2y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{PB}^2 + \overline{PD}^2 &= x^2 + y^2 + (x-a)^2 + (y-b)^2 \\ &= 2x^2 + 2y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{PA}^2 + \overline{PC}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PD}^2 \quad \text{답 풀이 참조}$$



2 선분의 내분점

19~27쪽

026

[1단계] 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점 P는

$$\left(\frac{2 \times 5 + 1 \times (-7)}{2+1}, \frac{2 \times (-5) + 1 \times 1}{2+1} \right)$$

$$\therefore P(1, -3)$$

[2단계] 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점 Q는

$$\left(\frac{1 \times 5 + 2 \times (-7)}{1+2}, \frac{1 \times (-5) + 2 \times 1}{1+2} \right)$$

$$\therefore Q(-3, -1)$$

[3단계] 선분 PQ의 중점 M의 좌표는

$$\left(\frac{1+(-3)}{2}, \frac{-3+(-1)}{2} \right)$$

$$\therefore M(-1, -2) \quad \text{답 } M(-1, -2)$$

028

선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times (-1) + 1 \times a}{2+1}, \frac{2 \times 7 + 1 \times 4}{2+1} \right)$$

$$\therefore P\left(\frac{a-2}{3}, 6\right)$$

y 축 위의 점의 x 좌표는 0이므로

$$\frac{a-2}{3} = 0 \quad \therefore a = 2$$

따라서 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점 P의 좌표는

$$P(0, 6) \quad \text{답 } P(0, 6), a = 2$$

030

선분 AB를 $t : (1-t)$ 로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{t \times (-7) + (1-t) \times 3}{t + (1-t)}, \frac{t \times 3 + (1-t) \times (-2)}{t + (1-t)} \right)$$

$$\therefore (-10t + 3, 5t - 2)$$

이 점이 제2사분면 위에 있으므로

$$-10t + 3 < 0, 5t - 2 > 0$$

$$\therefore t > \frac{2}{5}$$

이때 $0 < t < 1$ 이므로

$$\frac{2}{5} < t < 1 \quad \text{답 } \frac{2}{5} < t < 1$$

032

선분 AB를 2 : k 로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times (-1) + k \times 0}{2+k}, \frac{2 \times 2 + k \times 8}{2+k} \right)$$

$$\therefore \left(\frac{-2}{2+k}, \frac{4+8k}{2+k} \right)$$

이 점이 직선 $x+y=6$ 위에 있으므로

$$\frac{-2}{2+k} + \frac{4+8k}{2+k} = 6, 2+8k = 12+6k$$

$$\therefore k = 5$$

답 5

034

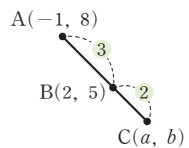
$$2\overline{AB} = 3\overline{BC} \text{에서 } \overline{AB} : \overline{BC} = 3 : 2$$

이때 점 C의 x 좌표가 양수이므로

위의 식을 만족시키도록 그림으로 나타내면 오른쪽과 같다.

즉, 점 B는 선분 AC를 3 : 2로

내분하는 점이다.



점 C의 좌표를 (a, b) 라 하면 선분 AC를 3 : 2로 내분하는 점의 좌표가 $(2, 5)$ 이므로

$$\frac{3 \times a + 2 \times (-1)}{3+2} = 2, \quad \frac{3 \times b + 2 \times 8}{3+2} = 5$$

$$\therefore a=4, b=3$$

$$\therefore C(4, 3) \quad \text{답 } C(4, 3)$$

036

꼭짓점 D의 좌표를 (x, y) 라 하면 평행사변형의 성질에 의하여

$$(\overline{AC} \text{의 중점}) = (\overline{BD} \text{의 중점})$$

$$\text{이때 선분 AC의 중점의 좌표는 } \left(\frac{-1+3}{2}, \frac{0+3}{2} \right),$$

$$\text{즉 } \left(1, \frac{3}{2} \right) \text{이고 선분 BD의 중점의 좌표는}$$

$$\left(\frac{2+x}{2}, \frac{1+y}{2} \right) \text{이므로}$$

$$1 = \frac{2+x}{2}, \quad \frac{3}{2} = \frac{1+y}{2}$$

$$\therefore x=0, y=2$$

$$\therefore D(0, 2) \quad \text{답 } D(0, 2)$$

038

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 (b, b) 이므로

$$\frac{a+2+2}{3} = b, \quad \frac{2+2+(-a)}{3} = b$$

$$\therefore a+4=3b, \quad -a+4=3b$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$\therefore a=0, b=\frac{4}{3} \quad \text{답 } a=0, b=\frac{4}{3}$$

040

변 BC의 중점을 $M(a, b)$ 라 하면 삼각형 ABC의 무게중심은 중선 AM을 2 : 1로 내분하는 점이고, 무게중심의 좌표가 $(-3, 5)$ 이므로

$$\frac{2 \times a + 1 \times 1}{2+1} = -3, \quad \frac{2 \times b + 1 \times 6}{2+1} = 5$$

$$\therefore a=-5, b=\frac{9}{2}$$

따라서 구하는 좌표는 $(-5, \frac{9}{2})$ 이다.

$$\text{답 } \left(-5, \frac{9}{2} \right)$$

다른 풀이

꼭짓점 B, C의 좌표를 각각 $(a, b), (c, d)$ 라 하면 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(-3, 5)$ 이므로

$$\frac{1+a+c}{3} = -3, \quad \frac{6+b+d}{3} = 5$$

$$\therefore a+c=-10, b+d=9$$

따라서 변 BC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2} \right), \text{ 즉 } \left(-5, \frac{9}{2} \right)$$

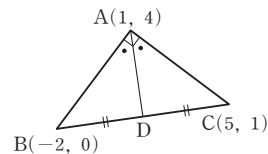
042

$$\overline{AB} = \sqrt{(-2-1)^2 + (0-4)^2} = 5$$

$$\overline{BC} = \sqrt{\{5-(-2)\}^2 + (1-0)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(5-1)^2 + (1-4)^2} = 5$$

즉, 삼각형 ABC는 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 이고, $\angle A = 90^\circ$ 인 직각 이등변삼각형이다.



이때 선분 AD가 $\angle A$ 의 이등분선이므로

$$\overline{BD} : \overline{DC} = \overline{AB} : \overline{AC} = 1 : 1$$

따라서 점 D는 변 BC를 1 : 1로 내분하는 점, 즉 변 BC의 중점이므로

$$D\left(\frac{-2+5}{2}, \frac{0+1}{2} \right)$$

$$\therefore D\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right) \quad \text{답 } D\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

044

[1단계] 선분 OC는 $\angle AOB$ 의

이등분선이므로

$$\overline{OA} : \overline{OB} = \overline{AC} : \overline{BC}$$

$$\overline{OA} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$\overline{OB} = \sqrt{3^2 + (-6)^2} = 3\sqrt{5}$$

에서

$$\overline{OA} : \overline{OB} = \sqrt{5} : 3\sqrt{5} = 1 : 3$$

[2단계] 점 C는 변 AB를 1 : 3으로 내분하는 점이므로

$$C\left(\frac{1 \times 3 + 3 \times 2}{1+3}, \frac{1 \times (-6) + 3 \times 1}{1+3} \right)$$

$$\therefore C\left(\frac{9}{4}, -\frac{3}{4} \right)$$

[3단계] 선분 OC의 길이를 구하면

$$\overline{OC} = \sqrt{\left(\frac{9}{4} \right)^2 + \left(-\frac{3}{4} \right)^2} = \frac{3\sqrt{10}}{4}$$

$$\text{답 } \frac{3\sqrt{10}}{4}$$

045

구하는 두 점은 선분 AB를 각각 1:2, 2:1로 내분하므로

$$\left(\frac{1 \times 7 + 2 \times 1}{1+2}, \frac{1 \times 10 + 2 \times (-2)}{1+2} \right)$$

$$\therefore (3, 2)$$

$$\left(\frac{2 \times 7 + 1 \times 1}{2+1}, \frac{2 \times 10 + 1 \times (-2)}{2+1} \right)$$

$$\therefore (5, 6)$$

따라서 구하는 두 점의 좌표는 (3, 2), (5, 6)이다.

답 (3, 2), (5, 6)

046

마름모의 성질에 의하여

($\overline{AC}$ 의 중점) = ($\overline{BD}$ 의 중점)이고

선분 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-2+b}{2}, \frac{3+5}{2} \right)$$

선분 BD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{a+2}{2}, \frac{7+1}{2} \right)$$

$$\therefore \frac{-2+b}{2} = \frac{a+2}{2} \text{ 이므로}$$

$$b = a + 4$$

..... ㉠

마름모의 성질에 의하여 $\overline{AB} = \overline{DA}$ 이므로

$$\sqrt{(a+2)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{(-2-2)^2 + (3-1)^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$a^2 + 4a = 0, a(a+4) = 0$$

$$\therefore a = 0 \text{ 또는 } a = -4$$

..... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $a = 0, b = 4$ 또는 $a = -4, b = 0$

$$\therefore a + b = 4 \text{ 또는 } a + b = -4$$

답 ± 4

참고 마름모의 성질

① 네 변의 길이가 모두 같다.

② 두 대각선은 서로 다른 것을 수직이등분한다.

→ 두 대각선의 중점이 일치한다.

047

변 AB를 1:2로 내분하는 점 D의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times (-1) + 2 \times 1}{1+2}, \frac{1 \times (-1) + 2 \times 6}{1+2} \right)$$

$$\therefore D\left(\frac{1}{3}, \frac{11}{3}\right)$$

변 BC를 1:2로 내분하는 점 E의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times 6 + 2 \times (-1)}{1+2}, \frac{1 \times 1 + 2 \times (-1)}{1+2} \right)$$

$$\therefore E\left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

변 CA를 1:2로 내분하는 점 F의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times 1 + 2 \times 6}{1+2}, \frac{1 \times 6 + 2 \times 1}{1+2} \right)$$

$$\therefore F\left(\frac{13}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

따라서 삼각형 DEF의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{\frac{1}{3} + \frac{4}{3} + \frac{13}{3}}{3}, \frac{\frac{11}{3} + \left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{8}{3}}{3} \right)$$

$$\therefore (2, 2)$$

답 (2, 2)

다른 풀이

삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA를 각각 1:2로 내분하는 점을 차례대로 D, E, F라 하면 삼각형 DEF의 무게중심과 삼각형 ABC의 무게중심이 일치하므로 구하는 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{1 + (-1) + 6}{3}, \frac{6 + (-1) + 1}{3} \right) \therefore (2, 2)$$

+ 풍산자 비법

삼각형 ABC에 대하여 세 변

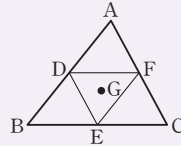
AB, BC, CA를 각각

$m : n$ ($m > 0, n > 0$)으로 내분

하는 점을 각각 D, E, F라 할 때,

삼각형 DEF의 무게중심은 삼각

형 ABC의 무게중심과 일치한다.



048

[1단계] 두 점 B, C를 $B(a, b), C(c, d)$ 라 하자.

[2단계] 변 AB의 중점의 좌표가 (4, 4)이므로

$$\frac{6+a}{2} = 4, \frac{5+b}{2} = 4$$

$$\therefore a = 2, b = 3 \therefore B(2, 3)$$

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 (2, 5)이므로

$$\frac{6+2+c}{3} = 2, \frac{5+3+d}{3} = 5$$

$$\therefore c = -2, d = 7 \therefore C(-2, 7)$$

[3단계] 두 점 B(2, 3), C(-2, 7)에 대하여 변 BC를

3:1로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{3 \times (-2) + 1 \times 2}{3+1}, \frac{3 \times 7 + 1 \times 3}{3+1} \right)$$

$$\therefore (-1, 6)$$

답 (-1, 6)

049

내각의 이등분선의 성질에 의하여

$$\overline{AO} : \overline{AB} = \overline{OC} : \overline{CB}$$

$$\text{이때 } \overline{AO} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5},$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(5-1)^2 + (4-2)^2} = 2\sqrt{5} \text{ 이므로}$$

$$\overline{AO} : \overline{AB} = \overline{OC} : \overline{CB} = \sqrt{5} : 2\sqrt{5} = 1 : 2$$

따라서 점 C는 변 OB를 1 : 2로 내분하는 점이므로

$$C\left(\frac{1 \times 5 + 2 \times 0}{1+2}, \frac{1 \times 4 + 2 \times 0}{1+2}\right)$$

$$\therefore C\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right) \quad \text{답 } C\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

050

선분 AB를 $m:n$ 으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{m \times 10 + n \times (-5)}{m+n}, \frac{m \times 1 + n \times (-4)}{m+n}\right)$$

$$\text{즉, } \left(\frac{10m-5n}{m+n}, \frac{m-4n}{m+n}\right)$$

이 점이 x 축 위에 있으므로 y 좌표는 0이다.

$$\frac{m-4n}{m+n} = 0 \text{에서 } m=4n \quad \therefore m:n=4:1$$

이때 m, n 은 서로소인 자연수이므로 $m=4, n=1$

$$\therefore m+n=5 \quad \text{답 } 5$$

● 실전 연습문제

30~32쪽

051

두 점 $A(a+1, 4), B(5, a-4)$ 에 대하여

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \sqrt{\{5-(a+1)\}^2 + \{(a-4)-4\}^2} \\ &= \sqrt{(4-a)^2 + (a-8)^2} \\ &= \sqrt{2a^2 - 24a + 80} \end{aligned}$$

$$\text{이때 } \overline{AB} = \sqrt{14} \text{에서}$$

$$\overline{AB}^2 = 2a^2 - 24a + 80 = 14$$

$$\therefore a^2 - 12a + 33 = 0$$

따라서 조건을 만족시키는 모든 a 의 값의 곱은 33이다.

답 33

참고

a 에 대한 이차방정식 $a^2 - 12a + 33 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-6)^2 - 1 \times 33 = 3 > 0$$

이므로 a 의 값에 대하여 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용할 수 있다.

052

정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 a 라 하면

$$a = \overline{AB} = \sqrt{(4-1)^2 + \{-3-(-1)\}^2} = \sqrt{13}$$

즉, 정사각형 ABCD의 넓이 S 는

$$S = a^2 = (\sqrt{13})^2 = 13$$

한 변의 길이가 a 인 정사각형의 대각선의 길이는

$$\sqrt{2}a \text{ 이므로 대각선 AC의 길이 } l \text{은}$$

$$l = \sqrt{2}a = \sqrt{26}$$

$$\therefore l^2 = (\sqrt{26})^2 = 26$$

$$\therefore S + l^2 = 13 + 26 = 39$$

답 39

053

삼각형 ABC가 선분 AB를 빗변으로 하는 직각이등변

삼각형이므로

$$\overline{AB} = \sqrt{2} \overline{BC} = \sqrt{2} \overline{CA}$$

$$\text{이때 } \overline{AB} = \sqrt{\{3-(-1)\}^2 + \{-3-1\}^2} = 4\sqrt{2} \text{ 이므로}$$

$$\overline{BC} = \overline{CA} = 4$$

$$(i) \overline{BC} = \sqrt{(a-3)^2 + \{(2a-5)-(-3)\}^2} = 4 \text{에서}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$5a^2 - 14a - 3 = 0$$

$$(5a+1)(a-3) = 0$$

$$\therefore a = -\frac{1}{5} \text{ 또는 } a = 3$$

$$(ii) \overline{CA} = \sqrt{\{a-(-1)\}^2 + \{(2a-5)-1\}^2} = 4 \text{에서}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$5a^2 - 22a + 21 = 0$$

$$(5a-7)(a-3) = 0$$

$$\therefore a = \frac{7}{5} \text{ 또는 } a = 3$$

$$(i), (ii) \text{에서 } a = 3$$

답 3

054

삼각형 ABC의 외심 P가 변 BC

위에 있으므로 삼각형 ABC는

빗변이 변 BC인 직각삼각형이다.

따라서 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$ 이고

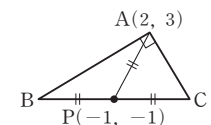
$$\overline{AP} = \overline{BP} = \overline{CP} \text{이다.}$$

$$\overline{AP} = \sqrt{\{2-(-1)\}^2 + \{3-(-1)\}^2} = 5 \text{에서}$$

$$\overline{BC} = 2\overline{AP} = 10 \text{ 이므로}$$

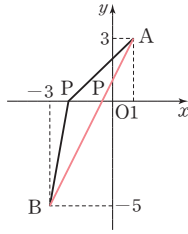
$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 = 10^2 = 100$$

답 100



055

두 점 A(1, 3), B(-3, -5)와
x축 위의 점 P는 오른쪽 그림과
같으므로 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 의 값이 최소
인 경우는 점 P가 선분 AB 위
의 점일 때이다.



$$\therefore \overline{PA} + \overline{PB}$$

$$\geq \overline{AB}$$

$$= \sqrt{(-3-1)^2 + (-5-3)^2}$$

$$= 4\sqrt{5}$$

따라서 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 의 최솟값은 $4\sqrt{5}$ 이다.

답 $4\sqrt{5}$

056

수직선 위의 점 A의 좌표를 0이라 하고
 $\overline{AB} = a$ 라 하면 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = a$ 이므로
A(0), B(a), C(2a), D(3a), E(4a)

ㄱ은 옳다.

선분 AE의 중점의 좌표는

$$\frac{0+4a}{2} = 2a$$

즉, 선분 AE의 중점은 점 C(2a)이다.

ㄴ도 옳다.

선분 BE를 1:2로 내분하는 점의 좌표는

$$\frac{1 \times 4a + 2 \times a}{1+2} = 2a$$

즉, 선분 BE를 1:2로 내분하는 점은 점 C이다.

ㄷ은 옳지 않다.

선분 AC의 중점의 좌표는 $\frac{0+2a}{2} = a$

선분 BD의 중점의 좌표는 $\frac{a+3a}{2} = 2a$

즉, 선분 AC의 중점은 점 B, 선분 BD의 중점은 점 C이므로 일치하지 않는다.

ㄹ은 옳다.

선분 AD를 2:1로 내분하는 점의 좌표는

$$\frac{2 \times 3a + 1 \times 0}{2+1} = 2a$$

선분 BE를 1:2로 내분하는 점의 좌표는

$$\frac{1 \times 4a + 2 \times a}{1+2} = 2a$$

즉, 선분 AD를 2:1로 내분하는 점과 선분 BE를 1:2로 내분하는 점은 점 C로 일치한다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

057

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$$

$$= \{(a-2)^2 + (b-3)^2\} + \{(a+3)^2 + (b+2)^2\} + \{(a-4)^2 + (b-2)^2\}$$

$$= 3a^2 - 6a + 3b^2 - 6b + 46$$

$$= 3(a-1)^2 + 3(b-1)^2 + 40$$

따라서 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 의 값은 $a=1, b=1$ 일 때 최소이고 최솟값은 $c=40$ 이므로

$$a+b+c=1+1+40=42$$

답 42

+ 풍산자 방법

삼각형 ABC와 임의의 점 P에 대하여 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$ 의 값이 최소가 되도록 하는 점 P는 삼각형 ABC의 무게 중심이다.

058

$$\overline{AC} = \sqrt{(a+2)^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + 4a + 4}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{a^2 + (b-4)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 - 8b + 16}$$

이때 $\overline{AC} = \overline{BC}$ 에서 $\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$ 이므로

$$a^2 + b^2 + 4a + 4 = a^2 + b^2 - 8b + 16$$

$$\therefore a + 2b = 3$$

..... ㉠

한편, 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{-2+0+a}{3}, \frac{0+4+b}{3} \right)$$

$$\therefore \left(\frac{a-2}{3}, \frac{b+4}{3} \right)$$

이때 이 점이 y축 위에 있으므로 x좌표는 0이다.

$$\text{즉, } \frac{a-2}{3} = 0 \text{에서 } a=2$$

$a=2$ 를 ㉠에 대입하면

$$2+2b=3 \quad \therefore b=\frac{1}{2}$$

$$\therefore a+b=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

답 $\frac{5}{2}$

059

점 P의 좌표를 (p, q)라 하자.

점 P는 직선 $x+y+3=0$ 위의 점이므로

$$p+q+3=0$$

..... ㉠

선분 PA의 중점 M의 좌표를 (x, y)라 하면

$$x = \frac{2+p}{2}, y = \frac{3+q}{2}$$

$$\therefore p=2x-2, q=2y-3$$

..... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$$(2x-2) + (2y-3) + 3 = 0$$

$$2x+2y-2=0$$

$$\therefore y=-x+1$$

이 도형의 방정식이 $y=ax+b$ 와 일치하므로

$$a=-1, b=1$$

$$\therefore ab=(-1) \times 1 = -1$$

답 -1

060

C지점에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 원점으로 하는 좌표평면에서 점 A의 좌표는 $(-2, 0)$, 점 B의 좌표는 $(-6, 0)$, 점 C의 좌표는 $(0, 2)$ 로 놓을 수 있다.

물류 창고를 지으려는 지점을 $P(a, b)$ 라 하면

$$\overline{PA} = \overline{PB} \text{에서}$$

$$\sqrt{\{a-(-2)\}^2+b^2} = \sqrt{\{a-(-6)\}^2+b^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$8a+32=0 \quad \therefore a=-4$$

$$\overline{PB} = \overline{PC} \text{에서}$$

$$\sqrt{\{a-(-6)\}^2+b^2} = \sqrt{a^2+(b-2)^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$12a+4b+32=0$$

$$a=-4 \text{를 대입하여 풀면 } b=4$$

즉, $P(-4, 4)$ 이므로

$$\overline{PA} = \sqrt{\{-2-(-4)\}^2+(0-4)^2} = 2\sqrt{5}$$

따라서 구하는 거리는 $2\sqrt{5}$ km이다.

답 $2\sqrt{5}$ km

061

점 A의 좌표를 (α, α^2-4) , 점 B의 좌표를 (β, β^2-4) 라 하면 $\alpha > 0$, $\beta < 0$ 이고 선분 AB를 1:3으로 내분하는 점이 원점이므로

$$\frac{\beta+3\alpha}{1+3}=0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\frac{\beta^2-4+3(\alpha^2-4)}{1+3}=0 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠에서 $\beta=-3\alpha$ 이므로 이를 ㉡에 대입하면

$$(-3\alpha)^2-4+3(\alpha^2-4)=0, \alpha^2=\frac{4}{3}$$

$$\therefore \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3} (\because \alpha > 0)$$

이때 k 는 원점과 점 $A(\alpha, \alpha^2-4)$, 즉 $A(\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{8}{3})$ 을

지나는 직선의 기울기이므로

$$k = \frac{-\frac{8}{3}-0}{\frac{2\sqrt{3}}{3}-0} = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

답 $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$

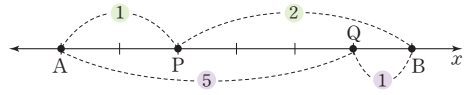
062

선분 AB를 1:2로 내분하는 점이 P이므로

$$\overline{AP} : \overline{PB} = 1 : 2 \quad \therefore \overline{AP} = \frac{1}{3}\overline{AB}$$

선분 AB를 5:1로 내분하는 점이 Q이므로

$$\overline{AQ} : \overline{QB} = 5 : 1 \quad \therefore \overline{QB} = \frac{1}{6}\overline{AB}$$



$$\overline{PQ} = \overline{AB} - \overline{AP} - \overline{QB}$$

$$= \overline{AB} - \frac{1}{3}\overline{AB} - \frac{1}{6}\overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{AB}$$

이므로

$$\overline{AB} : \overline{PQ} = \overline{AB} : \frac{1}{2}\overline{AB} = 2 : 1$$

즉, $m=2$, $n=1$ 이므로

$$m^2+n^2=2^2+1^2=5$$

답 5

063

세 점 A, B, C와 변

BC 위의 점 P는 오

른쪽 그림과 같으

로 두 삼각형 ABP,

ACP의 밑변을 각

각 선분 BP, 선분

CP라 하면 두 삼각형의 높이는 서로 같다.

즉, 두 삼각형의 넓이의 비는 밑변의 길이의 비와 같고,

삼각형 ABP의 넓이가 삼각형 ACP의 넓이의 3배이

므로

$$\overline{BP} = 3\overline{CP} \quad \therefore \overline{BP} : \overline{CP} = 3 : 1$$

따라서 점 P는 변 BC를 3:1로 내분하는 점이므로 점

P의 좌표는

$$\left(\frac{3 \times 5 + 1 \times (-3)}{3+1}, \frac{3 \times (-3) + 1 \times 1}{3+1} \right)$$

$$\therefore P(3, -2)$$

따라서 선분 AP의 길이는

$$\sqrt{(3-0)^2+(-2-2)^2}=5$$

답 5

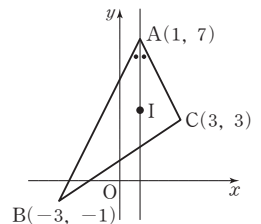
064

오른쪽 그림과 같이 점 I가

삼각형 ABC의 내심이므로

직선 AI는 $\angle A$ 의 이등분선

이다.



$$\text{이때 } \overline{AB} = \sqrt{(-3-1)^2 + (-1-7)^2} = 4\sqrt{5},$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(3-1)^2 + (3-7)^2} = 2\sqrt{5} \text{ 이므로}$$

$$\overline{AB} : \overline{AC} = 4\sqrt{5} : 2\sqrt{5} = 2 : 1$$

따라서 직선 AI와 변 BC의 교점은 변 BC를 2 : 1로 내분하는 점이므로 그 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 3 + 1 \times (-3)}{2+1}, \frac{2 \times 3 + 1 \times (-1)}{2+1} \right)$$

$$\therefore \left(1, \frac{5}{3} \right) \quad \text{답 } \left(1, \frac{5}{3} \right)$$

065

$$\overline{AB} = \sqrt{\{0 - (-6)\}^2 + \{3 - (-5)\}^2} = 10$$

$$\overline{AC} = \overline{AD} = \sqrt{(4-0)^2 + (0-3)^2} = 5$$

$$\therefore \overline{BD} = \overline{AB} - \overline{AD} = 10 - 5 = 5$$

이때 $\overline{DC} \parallel \overline{AP}$ 이므로

$$\overline{BC} : \overline{CP} = \overline{BD} : \overline{DA} = 5 : 5 = 1 : 1$$

즉, 점 C는 선분 BP의 중점이다.

이때 P(a, b)라 하면 선분 BP의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-6+a}{2}, \frac{-5+b}{2} \right)$$

이 점이 점 C와 일치하므로

$$\frac{-6+a}{2} = 4, \quad \frac{-5+b}{2} = 0$$

$$\therefore a = 14, b = 5$$

$$\therefore P(14, 5) \quad \text{답 } P(14, 5)$$

066

변 BC의 중점을 M이라 하면 삼각형 ABC의 높이는 선분 AM이다.

정삼각형의 외심과 무게중심이 일치하므로 원점 O는 점 A(4, 3)과 점 M을 이은 선분 AM을 2 : 1로 내분하는 점이다.

$$\text{이때 } \overline{OA} = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} = 5 \text{ 이므로}$$

$$\overline{AM} = \frac{3}{2} \overline{OA} = \frac{3}{2} \times 5 = \frac{15}{2} \quad \text{답 } \frac{15}{2}$$

다른 풀이

변 BC의 중점을 M(x, y)라 하면 선분 AM을 2 : 1로 내분하는 점이 원점 (0, 0)이므로

$$\frac{2x+4}{2+1} = 0, \quad \frac{2y+3}{2+1} = 0$$

$$\text{즉, } x = -2, y = -\frac{3}{2} \text{ 이므로 } M\left(-2, -\frac{3}{2}\right)$$

$$\therefore \overline{AM} = \sqrt{(-2-4)^2 + \left(-\frac{3}{2}-3\right)^2} = \frac{15}{2}$$

2 직선의 방정식

1 직선의 방정식

34~42쪽

068

(1) $y = mx + n$ 에 $m = 3, n = 2$ 를 대입하면 구하는 직선의 방정식은

$$y = 3x + 2$$

(2) $y - y_1 = m(x - x_1)$ 에 $m = 2, x_1 = 1, y_1 = 3$ 을 대입

하면 구하는 직선의 방정식은

$$y - 3 = 2(x - 1) \quad \therefore y = 2x + 1$$

$$\text{답 } (1) y = 3x + 2 \quad (2) y = 2x + 1$$

070

직선의 기울기는 $\tan 45^\circ = 1$ 이므로 구하는 직선의 방정식은

$$y - 1 = 1 \times (x - 2) \quad \therefore y = x - 1$$

$$\text{답 } y = x - 1$$

072

$$(1) y = -mx \Rightarrow y - 0 = -m(x - 0)$$

따라서 m 의 값에 관계없이 원점을 지난다.

$$(2) y = mx - 3 \Rightarrow y + 3 = m(x - 0)$$

따라서 m 의 값에 관계없이 점 (0, -3)을 지난다.

$$(3) mx + y - 2m + 4 = 0 \Rightarrow y + 4 = -mx + 2m$$

$$\Rightarrow y + 4 = -m(x - 2)$$

따라서 m 의 값에 관계없이 점 (2, -4)를 지난다.

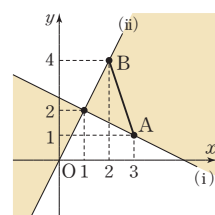
$$\text{답 } (1) \text{ 원점 } (2) \text{ 점 } (0, -3) \quad (3) \text{ 점 } (2, -4)$$

074

$$y = m(x - 1) + 2$$

..... ㉠

직선 ㉠은 m 의 값에 관계없이 항상 점 (1, 2)를 지나므로 이 점을 중심으로 직선 ㉠을 돌려 보면 선분 AB와 만나는 경우는 오른쪽 그림의 색칠한 부분을 지날 때이다.



(i) 직선 ㉠이 점 A(3, 1)을 지날 때

$$1 = 2m + 2 \quad \therefore m = -\frac{1}{2}$$

(ii) 직선 ㉠이 점 B(2, 4)를 지날 때

$$4 = m + 2 \quad \therefore m = 2$$

(i), (ii)에서 구하는 m 의 값의 범위는

$$-\frac{1}{2} \leq m \leq 2 \quad \text{답 } -\frac{1}{2} \leq m \leq 2$$

076

(1) $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ 에 각 값을 대입하면 구하는 직선의 방정식은

$$y - 5 = \frac{5 - 2}{2 - 1}(x - 2)$$

$$\therefore y = 3x - 1$$

(2) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 에 $a=2, b=8$ 을 대입하면 구하는 직선의 방정식은

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{8} = 1 \quad \therefore y = -4x + 8$$

답 (1) $y = 3x - 1$ (2) $y = -4x + 8$

다른 풀이

(2) x 절편이 2이고, y 절편이 8인 직선의 기울기는

$$\frac{0 - 8}{2 - 0} = -4$$

$y = mx + n$ 에 대입하면 구하는 직선의 방정식은

$$y = -4x + 8$$

078

[1단계] 선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{1+3}{2}, \frac{-1+5}{2}\right), \text{ 즉 } (2, 2)$$

[2단계] 두 점 $(2, 2), (1, 4)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y - 2 = \frac{4 - 2}{1 - 2}(x - 2)$$

$$\therefore y = -2x + 6$$

답 $y = -2x + 6$

080

$$(\text{직선 AB의 기울기}) = \frac{4 - 3}{5 - 3} = \frac{1}{2}$$

$$(\text{직선 BC의 기울기}) = \frac{2 - 4}{a - 5} = \frac{-2}{a - 5}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{-2}{a - 5} \text{에서}$$

$$a - 5 = -4 \quad \therefore a = 1$$

답 1

다른 풀이

두 점 $A(3, 3), B(5, 4)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y - 3 = \frac{4 - 3}{5 - 3}(x - 3)$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으면 점 $C(a, 2)$ 가 직선 AB 위의 점이므로

$$2 = \frac{1}{2}a + \frac{3}{2} \quad \therefore a = 1$$

082

점 A를 지나는 직선이 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하려면 변 BC의 중점을 지나야 한다.

변 BC의 중점을 M이라 하면

$$M\left(\frac{0+8}{2}, \frac{1+(-7)}{2}\right) \quad \therefore M(4, -3)$$

따라서 구하는 직선은 두 점 $A(1, 3), M(4, -3)$ 을 지나는 직선이므로

$$y - 3 = \frac{-3 - 3}{4 - 1}(x - 1)$$

$$\therefore y = -2x + 5$$

답 $y = -2x + 5$

084

기울기가 -2 이고, y 절편이 4인 직선의 방정식은

$$y = -2x + 4$$

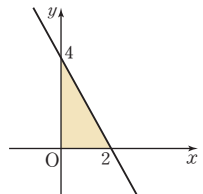
..... ㉠

㉠에 $y=0$ 을 대입하면

$$0 = -2x + 4 \quad \therefore x = 2$$

따라서 직선 ㉠의 x 절편은 2이므로 오른쪽 그림에서 구하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times |2| \times |4| = 4$$



답 4

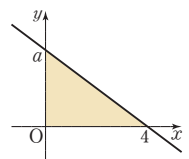
086

직선 $\frac{x}{4} + \frac{y}{a} = 1$ 의 x 절편과 y 절편은 각각 4, a ($a > 0$)이다.

오른쪽 그림에서 색칠한 삼각형의 넓이가 6이므로

$$\frac{1}{2} \times 4 \times a = 6, 2a = 6$$

$$\therefore a = 3$$



답 3

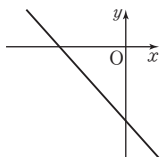
088

(1) $ax + by + c = 0$ 에서 기울기는 $-\frac{a}{b}$, x 절편은 $-\frac{c}{a}$ 이다.

그런데 $ab > 0, ac > 0$ 이므로 $\frac{a}{b} > 0, \frac{c}{a} > 0$

$$\therefore -\frac{a}{b} < 0, -\frac{c}{a} < 0$$

따라서 기울기가 음수이고, x 절편이 음수인 직선이므로 개형은 오른쪽 그림과 같고 제2사분면, 제3사분면, 제4사분면을 지난다.



(2) $ax+by+c=0$ 에서 $a=0$ 이므로 $y=-\frac{c}{b}$

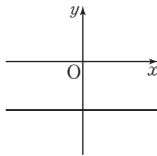
그런데 $bc>0$ 이므로 $\frac{c}{b}>0 \quad \therefore -\frac{c}{b}<0$

따라서 x 축에 평행하고 y 절편이

음수인 직선이므로 개형은 오른

쪽 그림과 같고 제3사분면, 제4

사분면을 지난다.



답 (1) 제2사분면, 제3사분면, 제4사분면

(2) 제3사분면, 제4사분면

필수 확인 문제

43쪽

089

직선 $\sqrt{3}x+my-n-2=0$ 에서

$$y=-\frac{\sqrt{3}}{m}x+\frac{n+2}{m} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

직선 $\textcircled{1}$ 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 60° 이므로 기울기는

$$\tan 60^\circ=\sqrt{3}$$

$$\text{즉, } -\frac{\sqrt{3}}{m}=\sqrt{3} \text{에서 } m=-1$$

또, 직선 $\textcircled{1}$ 의 y 절편이 -4 이므로

$$\frac{n+2}{m}=-4, n+2=4 \quad \therefore n=2$$

$$\therefore m+n=-1+2=1$$

답 1

090

직선 $y=mx+m+2$ 에서

$$y=m(x+1)+2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

즉, 직선 $\textcircled{1}$ 은 m 의 값에 관계없이 항상 점 $(-1, 2)$ 를 지나는 직선이다.

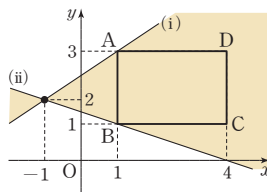
직선의 기울기가 m 이므로

이 직선이 직사각형

ABCD와 만나는 경우는

오른쪽 그림의 색칠한 부

분을 지날 때이다.



(i) 직선 $\textcircled{1}$ 이 점 $A(1, 3)$ 을 지날 때, 직선의 기울기가 최대이므로 최댓값은

$$3=2m+2 \quad \therefore m=\frac{1}{2}$$

(ii) 직선 $\textcircled{1}$ 이 점 $B(1, 1)$ 을 지날 때, 기울기가 최소이므로 최솟값은

$$1=2m+2 \quad \therefore m=-\frac{1}{2}$$

(i), (ii)에서 실수 m 의 최댓값과 최솟값의 합은

$$\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)=0$$

답 0

091

$$2x+3y=k \text{에서 } \frac{x}{\frac{k}{2}}+\frac{y}{\frac{k}{3}}=1 \text{이므로 주어진 직선의 } x$$

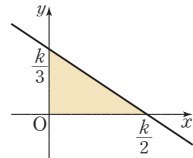
절편과 y 절편은 각각 $\frac{k}{2}, \frac{k}{3}$ 이다.

오른쪽 그림에서 색칠한 삼각형의

넓이가 $\frac{3}{4}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times \frac{k}{2} \times \frac{k}{3}=\frac{3}{4}, k^2=9$$

$$\therefore k=3 (\because k>0)$$



답 3

092

직사각형의 두 대각선의 교점을 지나는 직선은 직사각형의 넓이를 이등분한다. 또, 직사각형의 두 대각선의 교점은 각 대각선의 중점이다.

네 점 $(1, 1), (5, 1), (5, 3), (1, 3)$ 을 꼭짓점으로 하는 직사각형의 두 대각선의 교점의 좌표는

$$\left(\frac{1+5}{2}, \frac{1+3}{2}\right) \quad \therefore (3, 2)$$

네 점 $(0, 0), (-2, 0), (-2, -2), (0, -2)$ 를 꼭짓점으로 하는 직사각형의 두 대각선의 교점의 좌표는

$$\left(\frac{-2+0}{2}, \frac{-2+0}{2}\right) \quad \therefore (-1, -1)$$

따라서 구하는 직선은 두 점 $(3, 2), (-1, -1)$ 을 지나는 직선이므로

$$y+1=\frac{-1-2}{-1-3}(x+1)$$

$$\therefore 3x-4y-1=0$$

$$\text{답 } 3x-4y-1=0$$

+ 풍산자 비법

정사각형, 직사각형, 마름모, 평행사변형의 넓이를 이등분하는 직선은 두 대각선의 교점을 지나는 직선이다.

093

$$bc=0 \text{이므로 } b=0 \text{ 또는 } c=0$$

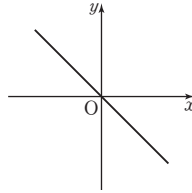
$$\text{그런데 } ab>0 \text{이므로 } b \neq 0 \quad \therefore c=0$$

$$\text{즉, } ax+by+c=0 \text{에서 } ax+by=0 \text{이므로}$$

$$y=-\frac{a}{b}x$$

$$\text{이때 } ab>0 \text{에서 } \frac{a}{b}>0 \quad \therefore -\frac{a}{b}<0$$

따라서 기울기가 음수이고 원점을
지나는 직선이므로 개형은 오른쪽
그림과 같고 제2사분면과 제4사분
면을 지난다.



답 제2사분면, 제4사분면

094

직선 $y=mx+4$ 의 y 절편은 4이므로 이 직선은 삼각형
ABC의 꼭짓점 A(0, 4)를 지난다.

이때 두 삼각형 ABC, ADC의 밑변을 각각 선분 BC,
선분 DC라 하면 두 삼각형의 높이는 서로 같다.

즉, 두 삼각형의 넓이의 비는 밑변의 길이의 비와 같고,
삼각형 ABC와 삼각형 ADC의 넓이의 비가 3 : 2이므로
 $\overline{BC} : \overline{DC} = 3 : 2 \quad \therefore \overline{BD} : \overline{DC} = 1 : 2$

따라서 점 D는 변 BC를 1 : 2로 내분하는 점이므로 점
D의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times 1 + 2 \times 7}{1 + 2}, \frac{1 \times 5 + 2 \times 2}{1 + 2} \right) \quad \therefore D(5, 3)$$

이때 점 D(5, 3)은 직선 $y=mx+4$ 위의 점이므로

$$3 = 5m + 4 \quad \therefore m = -\frac{1}{5} \quad \text{답 } -\frac{1}{5}$$

2 두 직선의 위치 관계

44~50쪽

096

$2x+y=1$ 에서 $y=-2x+1$ 이므로 이 직선의 기울기는
 -2 이고 이 직선에 평행한 직선의 기울기는 -2 이다.

따라서 점 (2, 1)을 지나고, 기울기가 -2 인 직선의 방
정식은

$$y-1=-2(x-2)$$

$$\therefore y=-2x+5 \quad \text{답 } y=-2x+5$$

098

직선 $y=-\frac{1}{2}x+3$ 에 수직인 직선의 기울기를 m 이라
하면

$$-\frac{1}{2} \times m = -1 \quad \therefore m = 2$$

따라서 점 $(-3, 4)$ 를 지나고, 기울기가 2인 직선의 방
정식은

$$y-4=2(x+3)$$

$$\therefore y=2x+10 \quad \text{답 } y=2x+10$$

100

두 직선 $x+ay+1=0$, $x-y+1=0$ 이 수직이므로

$$1 \times 1 + a \times (-1) = 0 \quad \therefore a = 1$$

두 직선 $x+ay+1=0$, $x+(2-b)y-1=0$ 이 평행하므로

$$\frac{1}{1} = \frac{a}{2-b} \neq \frac{1}{-1}, a=2-b \quad \therefore b=1$$

답 $a=1$, $b=1$

102

(1) 두 직선이 평행할 조건에 의하여

$$\frac{a-2}{1} = \frac{1}{a-2} \neq \frac{3}{a}$$

$$\frac{a-2}{1} = \frac{1}{a-2} \text{에서 } a^2-4a+3=0$$

$$(a-1)(a-3)=0 \quad \therefore a=1 \text{ 또는 } a=3$$

$$\text{그런데 } \frac{1}{a-2} \neq \frac{3}{a} \text{에서 } a \neq 3 \text{이어야 하므로 } a=1$$

(2) 두 직선이 일치할 조건에 의하여

$$\frac{a-2}{1} = \frac{1}{a-2} = \frac{3}{a}$$

$$\frac{a-2}{1} = \frac{1}{a-2} \text{에서 } a^2-4a+3=0$$

$$(a-1)(a-3)=0 \quad \therefore a=1 \text{ 또는 } a=3$$

$$\text{그런데 } \frac{1}{a-2} = \frac{3}{a} \text{이어야 하므로 } a=3$$

(3) 두 직선이 서로 수직일 조건에 의하여

$$(a-2) \times 1 + 1 \times (a-2) = 0$$

$$2a-4=0 \quad \therefore a=2$$

답 (1) 1 (2) 3 (3) 2

104

$$x+y-2=0 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$3x-y-2=0 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$$ax-y-3=0 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

두 직선 ㉠, ㉡이 서로 평행하지 않으므로 다음 세 경우
만 생각하면 된다.

(i) 두 직선 ㉠, ㉢이 평행할 때

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{-1} \neq \frac{-2}{-3} \quad \therefore a = -1$$

(ii) 두 직선 ㉡, ㉢이 평행할 때

$$\frac{3}{a} = \frac{-1}{-1} \neq \frac{-2}{-3} \quad \therefore a = 3$$

(iii) 세 직선이 한 점에서 만날 때, 즉 직선 ㉢이 두 직선

㉠, ㉡의 교점을 만날 때

$$\textcircled{A}, \textcircled{B} \text{을 연립하여 풀면 } x=1, y=1$$

$$\text{이것을 } \textcircled{C} \text{에 대입하면 } a-1-3=0 \quad \therefore a=4$$

(i)~(iii)에서 실수 a 의 값은 $-1, 3, 4$ 이다.

답 $-1, 3, 4$

106

두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은
 $(x+y-5)+k(2x-y-1)=0$ (k 는 실수) ㉠
 이 직선이 원점을 지나므로 $x=0, y=0$ 을 대입하면
 $-5-k=0 \quad \therefore k=-5$

이것을 ㉠에 대입하여 정리하면

$$3x-2y=0 \quad \text{답 } 3x-2y=0$$

다른 풀이

두 식 $x+y-5=0, 2x-y-1=0$ 을 연립하여 풀면

$$x=2, y=3$$

즉, 두 직선의 교점의 좌표는 (2, 3)이다.

따라서 두 점 (0, 0), (2, 3)을 지나는 직선의 방정식은

$$y-0=\frac{3-0}{2-0}(x-0)$$

$$\therefore 3x-2y=0$$

108

주어진 식을 k 에 대하여 정리하면

$$(x+3y-2)+k(x-2y+3)=0$$

이 식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$x+3y-2=0, x-2y+3=0$$

두 식을 연립하여 풀면

$$x=-1, y=1$$

$$\therefore P(-1, 1) \quad \text{답 } P(-1, 1)$$

110

두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$(x+y-1)+k(2x-y+1)=0 \quad (k\text{는 실수})$$

$$\therefore (1+2k)x+(1-k)y-1+k=0 \quad \dots\dots ㉠$$

직선 ㉠이 직선 $4x+y+1=0$ 에 평행하므로

$$\frac{1+2k}{4}=\frac{1-k}{1} \neq \frac{-1+k}{1}$$

$$\frac{1+2k}{4}=\frac{1-k}{1} \text{에서}$$

$$1+2k=4-4k \quad \therefore k=\frac{1}{2}$$

이는 $\frac{1-k}{1} \neq \frac{-1+k}{1}$ 을 만족시킨다.

따라서 $k=\frac{1}{2}$ 을 ㉠에 대입하면

$$2x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}=0$$

$$\therefore 4x+y-1=0 \quad \text{답 } 4x+y-1=0$$

다른 풀이

두 식 $x+y-1=0, 2x-y+1=0$ 을 연립하여 풀면

$$x=0, y=1$$

즉, 두 직선의 교점의 좌표는 (0, 1)이다.

이때 직선 $4x+y+1=0$, 즉 $y=-4x-1$ 의 기울기는 -4 이다.

따라서 기울기가 -4 이고, 점 (0, 1)을 지나는 직선의 방정식은

$$y-1=-4(x-0) \quad \therefore 4x+y-1=0$$

필수 확인 문제

51쪽

111

직선 AB의 기울기는 $\frac{-1-1}{3-(-3)}=-\frac{1}{3}$ 이므로 선분

AB에 평행한 직선의 기울기는 $-\frac{1}{3}$ 이다.

따라서 기울기가 $-\frac{1}{3}$ 이고, 점 (1, -4)를 지나는

직선의 방정식은

$$y+4=-\frac{1}{3}(x-1) \quad \therefore y=-\frac{1}{3}x-\frac{11}{3}$$

$$\text{답 } y=-\frac{1}{3}x-\frac{11}{3}$$

112

두 직선이 두 개 이상의 교점을 가지려면 두 직선은 일치해야 한다.

두 직선 $ax+2y+a+1=0, 2x+(a+3)y+4=0$ 이 일치할 조건에 의하여

$$\frac{a}{2}=\frac{2}{a+3}=\frac{a+1}{4}$$

$$(i) \frac{a}{2}=\frac{2}{a+3} \text{에서 } a^2+3a-4=0$$

$$(a+4)(a-1)=0 \quad \therefore a=-4 \text{ 또는 } a=1$$

$$(ii) \frac{a}{2}=\frac{a+1}{4} \text{에서 } 4a=2a+2 \quad \therefore a=1$$

$$(i), (ii) \text{에서 } a=1$$

답 1

113

직선 $ax+3y-1=0$ 이 점 (-1, 1)을 지나므로

$$-a+3-1=0 \quad \therefore a=2$$

직선 $3x+by+c=0$ 도 점 (-1, 1)을 지나므로

$$-3+b+c=0 \quad \therefore b+c=3 \quad \dots\dots ㉠$$

두 직선 $2x+3y-1=0, 3x+by+c=0$ 이 서로 수직이므로

$$2 \times 3 + 3 \times b = 0 \quad \therefore b = -2$$

$b=-2$ 를 ㉠에 대입하면 $c=5$

$$\therefore a-b+c=2-(-2)+5=9$$

답 9

114

직선 AB의 기울기는 $\frac{4-2}{2-1}=2$

즉, 선분 AB에 수직인 직선의 기울기를 m 이라 하면
 $2m=-1 \quad \therefore m=-\frac{1}{2}$ ← 마이너스 역수

선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{1+2}{2}, \frac{2+4}{2}\right) \quad \therefore \left(\frac{3}{2}, 3\right)$$

기울기가 $-\frac{1}{2}$ 이고, 점 $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$ 을 지나는 직선의 방정식

$$y-3=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{3}{2}\right)$$

$$\therefore y=-\frac{1}{2}x+\frac{15}{4} \quad \text{답 } y=-\frac{1}{2}x+\frac{15}{4}$$

참고

선분 AB의 수직이등분선을 l 이라 하면

① 직선 l 과 직선 AB의 기울기의 곱은 -1 이다.

② 직선 l 은 선분 AB의 중점을 지난다.

115

두 직선 $2x+y-7=0$, $x-3y+10=0$ 의 교점을 지나는 직선 l 의 방정식은

$$(2x+y-7)+k(x-3y+10)=0 \quad (\text{단, } k \text{는 실수이다.})$$

직선 l 이 점 $(1, 1)$ 을 지나므로

$$(2+1-7)+k(1-3+10)=0$$

$$8k-4=0 \quad \therefore k=\frac{1}{2}$$

$k=\frac{1}{2}$ 을 대입하면 직선 l 의 방정식은

$$(2x+y-7)+\frac{1}{2}(x-3y+10)=0$$

$$\therefore 5x-y-4=0$$

따라서 직선 l 과 x 축, y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \left|\frac{4}{5}\right| \times |-4| = \frac{8}{5} \quad \text{답 } \frac{8}{5}$$

116

세 직선으로 둘러싸인 도형이 직각삼각형이 되려면 세 직선 중 두 직선은 서로 수직이어야 한다.

이때 두 직선 $3x+y=0$, $x+2y-4=0$ 은 서로 수직이 아니므로 다음 두 가지 경우만 생각하면 된다.

(i) 두 직선 $x+ay+2=0$, $3x+y=0$ 이 수직일 때

$$1 \times 3 + a \times 1 = 0 \quad \therefore a = -3$$

(ii) 두 직선 $x+ay+2=0$, $x+2y-4=0$ 이 수직일 때

$$1 \times 1 + a \times 2 = 0 \quad \therefore a = -\frac{1}{2}$$

(i), (ii)에서 구하는 정수 a 의 값은 -3 이다.

답 -3

참고

두 식 $3x+y=0$, $x+2y-4=0$ 을 연립하여 풀면

$$x=-\frac{4}{5}, y=\frac{12}{5}$$

즉, 서로 수직이 아닌 두 직선의 교점의 좌표는

$$\left(-\frac{4}{5}, \frac{12}{5}\right)$$

이때 $x+ay+2=0$, 즉 $x-3y+2=0$ 에

$$x=-\frac{4}{5}, y=\frac{12}{5} \text{를 대입하면}$$

$$-\frac{4}{5}-3 \times \frac{12}{5}+2=-6 \neq 0$$

이므로 점 $\left(-\frac{4}{5}, \frac{12}{5}\right)$ 는 직선 $x+ay+2=0$ 위의 점 이 아니다.

따라서 주어진 세 직선은 한 점에서 만나지 않으므로 삼각형을 만든다.

3 점과 직선 사이의 거리

52~56쪽

118

(1) $3x-4y=10$ 을 일반형으로 고치면

$$3x-4y-10=0$$

점 $(0, 0)$ 과 이 직선 사이의 거리는

$$\frac{|0-0-10|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{10}{5}=2$$

(2) $y=\frac{1}{2}x+1$ 을 일반형으로 고치면

$$x-2y+2=0$$

점 $(-1, 3)$ 과 이 직선 사이의 거리는

$$\frac{|-1+(-2) \times 3+2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

답 (1) 2 (2) $\sqrt{5}$

120

원점과 직선 $2x-y+a=0$ 사이의 거리가 2이므로

$$\frac{|a|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=2$$

$$\frac{|a|}{\sqrt{5}}=2, |a|=2\sqrt{5}$$

$$\therefore a=2\sqrt{5} (\because a>0)$$

답 $2\sqrt{5}$

122

직선 $3x-4y+3=0$ 의 기울기가 $\frac{3}{4}$ 이므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{4}{3}$ 이다.

구하는 직선의 방정식을 $y=-\frac{4}{3}x+k$ (k 는 실수)로 놓으면

$$4x+3y-3k=0 \quad \cdots \textcircled{7}$$

원점과 직선 $\textcircled{7}$ 사이의 거리가 1이므로

$$\frac{|-3k|}{\sqrt{4^2+3^2}}=1$$

$$|-3k|=5, 3k=\pm 5$$

$$\therefore k=\pm \frac{5}{3} \quad \cdots \textcircled{8}$$

따라서 $\textcircled{8}$ 을 $\textcircled{7}$ 에 대입하면 구하는 직선의 방정식은

$$4x+3y-5=0 \text{ 또는 } 4x+3y+5=0$$

$$\text{답 } 4x+3y-5=0 \text{ 또는 } 4x+3y+5=0$$

124

두 직선 사이의 거리는 직선 $x-3y+6=0$ 위의 점 $(0, 2)$ 와 직선 $x-3y-4=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|0-3 \times 2-4|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10} \quad \text{답 } \sqrt{10}$$

+ 풍산자 비법

평행한 두 직선 l_1, l_2 사이의 거리는 다음과 같은 순서로 구한다.

① 직선 l_1 위의 한 점의 좌표 (x_1, y_1) 을 구한다.

② 점 (x_1, y_1) 과 직선 l_2 사이의 거리를 구한다.

126

[1단계] 밑변을 선분 BC라 하면 밑변의 길이는

$$\overline{BC}=\sqrt{(2-3)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{10}$$

[2단계] 직선 BC의 방정식은

$$y-2=\frac{-1-2}{2-3}(x-3)$$

$$\therefore 3x-y-7=0$$

점 A(1, 1)과 직선 BC 사이의 거리를 h 라 하면

$$h=\frac{|3 \times 1-1 \times 1-7|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{10}}$$

[3단계] 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{BC} \times h = \frac{1}{2} \times \sqrt{10} \times \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{5}{2}$$

$$\text{답 } \frac{5}{2}$$

128

각의 이등분선 위의 임의의 점을 $P(x, y)$ 라 하면

점 P에서 두 직선에 이르는 거리는 같으므로

$$\frac{|3x+4y+2|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|4x-3y+1|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}$$

$$|3x+4y+2|=|4x-3y+1|$$

$$3x+4y+2=\pm(4x-3y+1)$$

$$\therefore x-7y-1=0 \text{ 또는 } 7x+y+3=0$$

$$\text{답 } x-7y-1=0 \text{ 또는 } 7x+y+3=0$$

필수 확인 문제

57쪽

129

점 $(-2, 3)$ 과 직선 $3x-4y+k=0$ 사이의 거리가 2이므로

$$\frac{|3 \times (-2)-4 \times 3+k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=2$$

$$|k-18|=10, k-18=\pm 10$$

$$\therefore k=28 \text{ 또는 } k=8$$

따라서 모든 상수 k 의 값의 합은

$$28+8=36$$

$$\text{답 } 36$$

130

두 직선 $5x-12y+3=0, 12x+ay-b=0$ 이 서로 수직이므로

$$5 \times 12 + (-12) \times a = 0 \quad \therefore a=5$$

점 $(1, -1)$ 과 직선 $12x+5y-b=0$ 사이의 거리가 1이므로

$$\frac{|12-5-b|}{\sqrt{12^2+5^2}}=1, |7-b|=13$$

$$7-b=\pm 13 \quad \therefore b=-6 \text{ 또는 } b=20$$

이때 $b>0$ 이므로 $b=20$

$$\therefore a+b=5+20=25$$

$$\text{답 } 25$$

131

두 직선 $x-y+1=0, x-2y+3=0$ 의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$(x-y+1)+k(x-2y+3)=0 \text{ (단, } k \text{는 실수이다.)}$$

$$\therefore (k+1)x-(2k+1)y+(3k+1)=0 \quad \cdots \textcircled{7}$$

원점과 직선 $\textcircled{7}$ 사이의 거리가 1이므로

$$\frac{|3k+1|}{\sqrt{(k+1)^2+(2k+1)^2}}=1$$

$$|3k+1| = \sqrt{(k+1)^2 + (2k+1)^2}$$

$$|3k+1| = \sqrt{5k^2 + 6k + 2}$$

양변을 제곱하면

$$9k^2 + 6k + 1 = 5k^2 + 6k + 2$$

$$4k^2 = 1, k^2 = \frac{1}{4} \quad \therefore k = \pm \frac{1}{2}$$

이것을 ㉠에 대입하면 구하는 직선의 방정식은

$$3x - 4y + 5 = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

$$\text{답 } 3x - 4y + 5 = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

132

두 직선 $2x + y - 6 = 0$, $(m-3)x + my + 3 = 0$ 이 서로
평행하므로

$$\frac{2}{m-3} = \frac{1}{m} \neq -\frac{6}{3}$$

$$\frac{2}{m-3} = \frac{1}{m} \text{에서 } 2m = m-3 \quad \therefore m = -3$$

이때 $m = -3$ 은 $\frac{1}{m} \neq -\frac{6}{3}$ 을 만족시킨다.

$m = -3$ 을 $(m-3)x + my + 3 = 0$ 에 대입하면

$$-6x - 3y + 3 = 0$$

$$\therefore 2x + y - 1 = 0$$

따라서 구하는 두 직선 사이의 거리는 직선

$2x + y - 6 = 0$ 위의 점 $(0, 6)$ 과 직선 $2x + y - 1 = 0$ 사

이의 거리와 같으므로

$$\frac{|0+6-1|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$\text{답 } \sqrt{5}$$

133

밑변을 선분 AB라 하면 밑변의 길이는

$$\overline{AB} = \sqrt{(4+2)^2 + (-5-3)^2} = 10$$

직선 AB의 방정식은

$$y - 3 = \frac{-5-3}{4-(-2)}(x+2)$$

$$\therefore 4x + 3y - 1 = 0$$

점 C(3, 4)와 직선 $4x + 3y - 1 = 0$ 사이의 거리를 h 라
하면

$$h = \frac{|4 \times 3 + 3 \times 4 - 1|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{23}{5}$$

삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times h = \frac{1}{2} \times 10 \times \frac{23}{5} = 23$$

$$\text{답 } 23$$

134

각의 이등분선 위의 임의의 점을 $P(x, y)$ 라 하면

점 P에서 두 직선에 이르는 거리는 같으므로

$$\frac{|4x+y+12|}{\sqrt{4^2+1^2}} = \frac{|x+4y+3|}{\sqrt{1^2+4^2}}$$

$$|4x+y+12| = |x+4y+3|$$

$$4x+y+12 = \pm(x+4y+3)$$

$$x-y+3=0 \text{ 또는 } x+y+3=0$$

$$\therefore y=x+3 \text{ 또는 } y=-x-3$$

따라서 기울기가 음수인 직선의 방정식은 $y = -x - 3$

이므로

$$a = -1, b = -3$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 10$$

$$\text{답 } 10$$

135

오른쪽 그림과 같이 정삼각형

ABC의 한 변의 길이를

$\overline{AC} = a$ 라 하고 꼭짓점 A에서

변 BC에 내린 수선의 발을 H

라 하자.

이때 선분 AH의 길이는 정삼

각형 ABC의 높이이므로

$$\overline{AH} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$\dots\dots \textcircled{1}$$

또, 선분 AH의 길이는 점 A(3, 7)과 직선

$x + y - 4 = 0$ 사이의 거리이므로

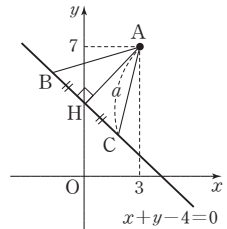
$$\overline{AH} = \frac{|3+7-4|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

$$\dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } \frac{\sqrt{3}}{2}a = 3\sqrt{2} \text{이므로 } a = 2\sqrt{6}$$

따라서 정삼각형 ABC의 한 변의 길이는 $2\sqrt{6}$ 이다.

$$\text{답 } 2\sqrt{6}$$



● 실전 연습문제

59~61쪽

136

두 점 A(-2, -4), B(3, 1)을 지나는 직선의 기울기

가 $\frac{1-(-4)}{3-(-2)} = 1$ 이므로 직선 AB에 수직인 직선의 기
울기는 -1이다.

또, 선분 AB를 2:3으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 3 + 3 \times (-2)}{2+3}, \frac{2 \times 1 + 3 \times (-4)}{2+3} \right), \text{ 즉 } (0, -2)$$

따라서 구하는 직선은 기울기가 -1이고, 점 $(0, -2)$

를 지나므로 그 방정식은

$$y - (-2) = -(x - 0) \quad \therefore y = -x - 2$$

$$\text{답 } y = -x - 2$$

137

직선 $\frac{x}{a} + \frac{y}{6} = 1$ 의 x 절편은 a ($a > 0$)이고 y 절편은 6이다.

이때 이 직선과 x 축, y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 15이므로

$$\frac{1}{2} \times a \times 6 = 15 \quad \therefore a = 5 \quad \text{답 5}$$

138

세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형이 존재하지 않으므로 이 세 점은 한 직선 위에 있다.

즉, 세 점 $A(1-k, -k)$, $B(k-2, 1-k)$,

$C(3k-5, k-4)$ 에 대하여 직선 AB와 직선 AC의 기울기가 서로 같아야 하므로

$$\frac{(1-k)-(-k)}{(k-2)-(1-k)} = \frac{(k-4)-(-k)}{(3k-5)-(1-k)}$$

$$\frac{1}{2k-3} = \frac{2k-4}{4k-6}$$

$$4k-6 = (2k-3)(2k-4)$$

$$2k^2 - 9k + 9 = 0, (2k-3)(k-3) = 0$$

$$\therefore k = \frac{3}{2} \text{ 또는 } k = 3$$

따라서 정수 k 의 값은 3이다. 답 3

139

직선 $ax+by+c=0$ 에서 $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ 이므로

기울기는 $-\frac{a}{b} < 0$, y 절편은 $-\frac{c}{b} > 0$ 이다.

즉, $ab > 0$, $bc < 0$ 이므로 $ac < 0$

직선 $bx+cy+a=0$ 에서 $y = -\frac{b}{c}x - \frac{a}{c}$ 이므로

기울기는 $-\frac{b}{c} > 0$, y 절편은 $-\frac{a}{c} > 0$ 이다.

따라서 직선 $bx+cy+a=0$ 의 기울기와 y 절편이 모두 양수이므로 제4사분면을 지나지 않는다. 답 ④

140

ㄴ은 옳지 않다.

$k = -2$ 이면 주어진 두 직선의 방정식은

$$y = -x - 2, y = -x + 4$$

즉, 두 직선의 기울기가 서로 같고 y 절편이 다르므로 두 직선은 평행하다.

ㄴ도 옳지 않다.

$k = 1$ 이면 주어진 두 직선의 방정식은

$$y = 2x + 1, y = 2x + 1$$

즉, 두 직선의 기울기가 서로 같고 y 절편도 서로 같으므로 두 직선은 일치한다.

ㄷ은 옳다.

$k = -1$ 이면 주어진 두 직선의 방정식은

$$y = -2x - 1, y = 1$$

즉, 두 직선은 한 점에서 만난다.

ㄹ도 옳다.

$k = -\frac{2}{3}$ 이면 주어진 두 직선의 방정식은

$$y = -3x - \frac{2}{3}, y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{9}$$

두 직선의 기울기의 곱이 $-3 \times \frac{1}{3} = -1$ 이므로

두 직선은 서로 수직이다.

따라서 옳은 것은 ㄷ, ㄹ이다. 답 ⑤

다른 풀이

두 직선 $y = \frac{2}{k}x + k$, $y = (k+1)x + k^2$ 에서

(i) 두 직선이 평행하려면 $\frac{2}{k} = k+1$, $k \neq k^2$

$$\frac{2}{k} = k+1 \text{에서 } k(k+1) = 2$$

$$k^2 + k - 2 = 0, (k+2)(k-1) = 0$$

$$\therefore k = -2 \text{ 또는 } k = 1 \quad \dots\dots ㉠$$

$$k \neq k^2 \text{에서 } k^2 - k \neq 0, k(k-1) \neq 0$$

$$\therefore k \neq 0 \text{ 또는 } k \neq 1 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $k = -2$ 일 때, 두 직선은 서로 평행하다. (ㄴ은 거짓)

(ii) 두 직선이 일치하려면 $\frac{2}{k} = k+1$, $k = k^2$

$$k = k^2 \text{에서}$$

$$k = 0 \text{ 또는 } k = 1 \quad \dots\dots ㉢$$

㉠, ㉢에서 $k = 1$ 일 때, 두 직선은 서로 일치한다. (ㄴ은 거짓)

(iii) 두 직선이 한 점에서 만나려면 $\frac{2}{k} \neq k+1$

즉, ㉠에 의하여 $k \neq -2$ 또는 $k \neq 1$ (ㄷ은 참)

(iv) 두 직선이 수직이려면 $\frac{2}{k} \times (k+1) = -1$

$$2k + 2 = -k, 3k = -2$$

$$\therefore k = -\frac{2}{3} \text{ (ㄹ은 참)}$$

(i)~(iv)에서 옳은 것은 ㄷ, ㄹ이다.

141

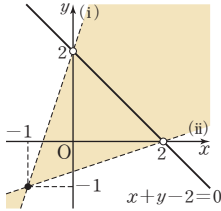
$$2kx - y + 2k - 1 = 0 \text{에서}$$

$$y = 2k(x+1) - 1$$

..... ㉠

직선 ㉠은 k 의 값에 관계없이 점 $(-1, -1)$ 을 지난다.

오른쪽 그림과 같이 직선 ㉠을 점 $(-1, -1)$ 을 중심으로 돌려 보면 두 직선이 제1사분면에서 만나는 경우는 색칠한 부분을 지날 때이다.



(i) 직선 $y = 2k(x+1) - 1$ 이

점 $(0, 2)$ 를 지날 때

$$2 = 2k - 1 \quad \therefore k = \frac{3}{2}$$

(ii) 직선 $y = 2k(x+1) - 1$ 이 점 $(2, 0)$ 을 지날 때

$$0 = 2k \times 3 - 1 \quad \therefore k = \frac{1}{6}$$

(i), (ii)에서 구하는 k 의 값의 범위는

$$\frac{1}{6} < k < \frac{3}{2}$$

$$\text{따라서 } a = \frac{1}{6}, b = \frac{3}{2}$$

$$\text{이므로 } ab = \frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

142

점 $A(2, 0)$ 을 지나는 직선 l 의 기울기를 m 이라 하면 직선 l 의 방정식은

$$y - 0 = m(x - 2) \quad \therefore mx - y - 2m = 0$$

점 $B(0, 1)$ 과 직선 l 사이의 거리가 $\sqrt{5}$ 이므로

$$\frac{|m \times 0 - 1 \times 1 - 2m|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}$$

$$|-2m - 1| = \sqrt{5(m^2 + 1)}$$

양변을 제곱하면

$$4m^2 + 4m + 1 = 5m^2 + 5, m^2 - 4m + 4 = 0$$

$$(m - 2)^2 = 0 \quad \therefore m = 2$$

따라서 직선 l 의 기울기는 2이다.

답 2

143

직선 $ax + by - 6 = 0$ 위의 한 점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하자.

주어진 두 직선 사이의 거리는 점 (x_1, y_1) 과 직선

$ax + by + 4 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|ax_1 + by_1 + 4|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \dots\dots ㉠$$

점 (x_1, y_1) 은 직선 $ax + by - 6 = 0$ 위의 점이므로

$$ax_1 + by_1 - 6 = 0$$

$$\therefore ax_1 + by_1 = 6$$

..... ㉡

또, 주어진 조건에서

$$a^2 + b^2 = 25$$

..... ㉢

따라서 ㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면 구하는 거리는

$$\frac{|ax_1 + by_1 + 4|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|6 + 4|}{\sqrt{25}} = 2$$

답 2

144

$$f(x) = x^2 + px + p = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + p - \frac{p^2}{4}$$

$$\therefore A\left(-\frac{p}{2}, p - \frac{p^2}{4}\right), B(0, p)$$

이때 두 점 A, B를 지나는 직선 l 의 기울기는

$$\frac{p - \left(p - \frac{p^2}{4}\right)}{0 - \left(-\frac{p}{2}\right)} = \frac{p}{2}$$

즉, 기울기가 $\frac{p}{2}$ 이고 y 절편이 p 인 직선 l 의 방정식은

$$y = \frac{p}{2}x + p$$

위의 식에 $y = 0$ 을 대입하면

$$0 = \frac{p}{2}x + p, \frac{p}{2}x = -p \quad \therefore x = -2$$

따라서 직선 l 의 x 절편은 -2 이다.

답 -2

145

조건 (가)에서 직선 CD의 기울기는

$$\frac{q - p}{3\sqrt{2} - \sqrt{2}} = \frac{q - p}{2\sqrt{2}} < 0 \quad \therefore q < p$$

조건 (나)에서 $\overline{AB} = \overline{CD}$ 이므로

$$|4 - 1| = \sqrt{(3\sqrt{2} - \sqrt{2})^2 + (q - p)^2}$$

양변을 제곱하면 $9 = 8 + (q - p)^2$

즉, $(q - p)^2 = 1$ 이고 $q < p$ 이므로

$$q - p = -1$$

$$\therefore p - q - 1 = 0$$

..... ㉠

또, 조건 (나)에서 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ 이므로 두 직선 AD, BC의 기울기가 서로 같다.

$$\text{즉, } \frac{q - 1}{3\sqrt{2} - 0} = \frac{p - 4}{\sqrt{2} - 0} \text{에서}$$

$$\sqrt{2}(q - 1) = 3\sqrt{2}(p - 4)$$

$$q - 1 = 3p - 12$$

$$\therefore 3p - q - 11 = 0$$

..... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p = 5, q = 4$

$$\therefore p + q = 9$$

답 9

146

직선 $mx - y - 3m + 3 = 0$ 에서

$$y = m(x - 3) + 3 \quad \dots\dots ①$$

직선 ①은 실수 m 의 값에 관계없이 항상 점 $(3, 3)$ 을 지나므로 직선 ①이 m 의 값에 관계없이 항상 직사각형 ABCD의 넓이를 이등분하려면 점 $(3, 3)$ 이 직사각형의 대각선 AC의 중점과 일치해야 한다.

이때 선분 AC의 중점의 좌표는 $\left(\frac{p+6}{2}, \frac{q+1}{2}\right)$ 이므로

$$\frac{p+6}{2} = 3, \quad \frac{q+1}{2} = 3$$

즉, $p=0, q=5$ 이므로 $p+q=5$ 답 5

147

원점 $O(0, 0)$ 과 직선 $(k+2)x - (2k-1)y - 10 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-10|}{\sqrt{(k+2)^2 + (2k-1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{5k^2+5}} \quad \dots\dots ①$$

①의 값이 최대가 되려면 분모 $\sqrt{5k^2+5}$ 의 값이 최소가 되어야 한다.

$k=0$ 일 때 $\sqrt{5k^2+5}$ 가 최솟값 $\sqrt{5}$ 를 가지므로 ①의 최댓값은

$$\frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

따라서 $a=0, b=2\sqrt{5}$ 이므로

$$a^2 + b^2 = 0 + (2\sqrt{5})^2 = 20 \quad \text{답 20}$$

다른 풀이

직선 $(k+2)x - (2k-1)y - 10 = 0$ 에서

$$(2x + y - 10) + k(x - 2y) = 0$$

즉, 이 직선은 두 직선 $2x + y - 10 = 0, x - 2y = 0$ 의 교점을 지나는 직선이다.

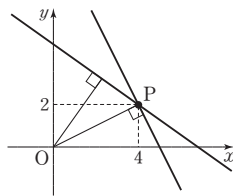
두 직선의 방정식을 연립하여 풀면

$$x=4, y=2$$

두 직선 $2x + y - 10 = 0,$

$x - 2y = 0$ 의 교점을 P라 하면 점 P(4, 2)를 지나는 직선 중 원점 O와의 거리가 최

대인 직선은 오른쪽 그림과 같이 직선 OP에 수직인 직선이다.



직선 OP의 기울기가 $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ 이므로 주어진 직선

$(k+2)x - (2k-1)y - 10 = 0$ 의 기울기는 -2 이다.

즉, $\frac{k+2}{2k-1} = -2$ 에서 $k+2 = -4k+2$ 이므로

$$k=0 \quad \therefore a=0$$

또, 구하는 최댓값은 $\overline{OP} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$ 이므로

$$b=2\sqrt{5}$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 0 + (2\sqrt{5})^2 = 20$$

148

삼각형의 내심으로부터 세 변까지의 거리는 내접원의 반지름의 길이로 모두 같다.

즉, 오른쪽 그림과 같이 주어진

삼각형 OAB에 대하여 내

심을 $I(-a, a)$ ($a > 0$)라

하면 내접원의 반지름의

길이는 a 이다.

직선 AB의 방정식은

$$\frac{x}{-4} + \frac{y}{3} = 1 \quad \therefore 3x - 4y + 12 = 0$$

내심 I에서 변 AB까지의 거리는 내접원의 반지름의 길이와 같으므로

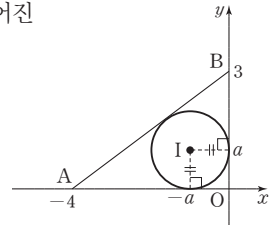
$$a = \frac{|-3a - 4a + 12|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}}, \quad |12 - 7a| = 5a$$

$$12 - 7a = \pm 5a$$

$$\therefore a=1 \text{ 또는 } a=6$$

이때 $0 < a < 3$ 이므로 $a=1$

따라서 삼각형 OAB의 내접원의 반지름의 길이는 1이다. 답 1



149

사다리꼴 OABC의 넓이는 $\frac{1}{2} \times (2+6) \times 5 = 20$

삼각형 OBC의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 2 \times 5 = 5$

즉, 직선 $y=mx$ 는 오른쪽 그림과 같이 사다리꼴의 변 AB와 만나야 한다.

직선 $y=mx$ 와 변 AB의 교점을 D(a, b)라 하면 삼각형 OAD의 넓이가 $\frac{1}{2} \times 20 = 10$

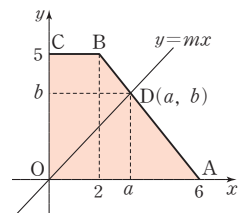
이어야 하므로

$$\frac{1}{2} \times 6 \times b = 10 \quad \therefore b = \frac{10}{3}$$

한편, 직선 AB의 방정식은

$$y - 0 = \frac{5-0}{2-6}(x-6)$$

$$\therefore y = -\frac{5}{4}x + \frac{15}{2}$$



이때 점 $D(a, b)$, 즉 $D\left(a, \frac{10}{3}\right)$ 은 직선 AB 위의 점이므로

$$\frac{10}{3} = -\frac{5}{4}a + \frac{15}{2} \quad \therefore a = \frac{10}{3}$$

따라서 점 $D\left(\frac{10}{3}, \frac{10}{3}\right)$ 이 직선 $y=mx$ 위의 점이므로

$$\frac{10}{3} = \frac{10}{3}m \quad \therefore m=1 \quad \text{답 1}$$

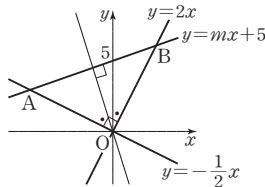
150

두 직선 $y=2x$, $y=-\frac{1}{2}x$ 의 기울기의 곱이 -1 이므로 두 직선은 서로 수직이다.

따라서 다음 그림에서 삼각형 OAB 는 $\angle AOB=90^\circ$ 이고 $\overline{OA}=\overline{OB}$ 인 직각이등변삼각형이므로 두 직선

$y=2x$, $y=-\frac{1}{2}x$ 가 이루는 각의 이등분선과 직선

$y=mx+5$ 는 수직으로 만난다.



두 직선 $y=2x$, $y=-\frac{1}{2}x$, 즉 $2x-y=0$, $x+2y=0$

이 이루는 각의 이등분선 위의 임의의 점 (x, y) 에서 두 직선에 이르는 거리는 같으므로

$$\frac{|2x-y|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{|x+2y|}{\sqrt{1^2+2^2}}$$

$$2x-y=\pm(x+2y)$$

$$\therefore y = \frac{1}{3}x \text{ 또는 } y = -3x \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①의 두 직선 중 직선 $y=mx+5$ ($m>0$)와 수직으로 만나는 직선은 기울기의 부호가 반대인 $y=-3x$ 이다.

이 두 직선은 서로 수직이어야 하므로

$$(-3) \times m = -1$$

$$\therefore m = \frac{1}{3} \quad \text{답 } \frac{1}{3}$$

3 원의 방정식

1 원의 방정식

63~72쪽

152

중심이 점 $(-1, -1)$ 이므로 원의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 = r^2$$

이 원이 점 $(2, 2)$ 를 지나므로

$$(2+1)^2 + (2+1)^2 = r^2 \quad \therefore r^2 = 18$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 = 18$$

$$\text{답 } (x+1)^2 + (y+1)^2 = 18$$

154

원의 중심은 두 점을 잇는 선분의 중점이므로 그 좌표는

$$\left(\frac{1+3}{2}, \frac{2+4}{2}\right) \quad \therefore (2, 3)$$

또, 원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}\sqrt{(3-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{2}$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = (\sqrt{2})^2$$

$$\therefore (x-2)^2 + (y-3)^2 = 2$$

$$\text{답 } (x-2)^2 + (y-3)^2 = 2$$

+ 풍산자 비법

두 점 A, B를 지름의 양 끝점으로 하는 원에 대하여

(1) (원의 중심) = (선분 AB의 중점)

(2) (반지름의 길이) = $\frac{1}{2}AB$

156

원의 중심을 점 $(a, a+1)$, 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-a-1)^2 = r^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(i) 원 ①이 점 $(1, 6)$ 을 지나므로

$$(1-a)^2 + (6-a-1)^2 = r^2$$

$$\therefore 2a^2 - 12a + 26 = r^2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

(ii) 원 ①이 점 $(-3, 2)$ 를 지나므로

$$(-3-a)^2 + (2-a-1)^2 = r^2$$

$$\therefore 2a^2 + 4a + 10 = r^2 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

②, ③을 연립하여 풀면

$$a=1, r^2=16$$

따라서 ㉠에서 구하는 원의 방정식은

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 16$$

답 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 16$

158

(1) 주어진 식을 표준형으로 고치면

$$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 6y + 9) = -6 + 1 + 9$$

$$\therefore (x+1)^2 + (y-3)^2 = 4$$

$\therefore$ 중심의 좌표: $(-1, 3)$, 반지름의 길이: 2

(2) 주어진 식의 양변을 4로 나누면

$$x^2 + y^2 - 2y + \frac{3}{4} = 0$$

$$\text{표준형으로 고치면 } x^2 + (y^2 - 2y + 1) = -\frac{3}{4} + 1$$

$$\therefore x^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{4}$$

$\therefore$ 중심의 좌표: $(0, 1)$, 반지름의 길이: $\frac{1}{2}$

답 (1) 중심의 좌표: $(-1, 3)$, 반지름의 길이: 2

(2) 중심의 좌표: $(0, 1)$, 반지름의 길이: $\frac{1}{2}$

160

주어진 방정식을 표준형으로 고치면

$$(x^2 - 2ax + a^2) + (y^2 + 6ay + 9a^2) = -10 + a^2 + 9a^2$$

$$\therefore (x-a)^2 + (y+3a)^2 = 10a^2 - 10$$

이 방정식이 원을 나타내려면 우변이 양수이어야 하므로

$$10a^2 - 10 > 0, a^2 - 1 > 0, (a+1)(a-1) > 0$$

$$\therefore a < -1 \text{ 또는 } a > 1 \quad \text{답 } a < -1 \text{ 또는 } a > 1$$

162

구하는 원의 방정식을

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \quad (A, B, C \text{는 상수})$$

으로 놓으면 이 원이 점 $(0, 0)$ 을 지나므로 $C=0$

원 $x^2 + y^2 + Ax + By = 0$ 이 점 $(1, 1)$ 을 지나므로

$$2 + A + B = 0 \quad \therefore A + B = -2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또, 원 $x^2 + y^2 + Ax + By = 0$ 이 점 $(0, 2)$ 를 지나므로

$$4 + 2B = 0 \quad \therefore B = -2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

②을 ①에 대입하여 풀면 $A=0$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 2y = 0 \quad \text{답 } x^2 + y^2 - 2y = 0$$

164

(1) 중심이 점 $(3, 4)$ 이고 x 축에 접하는 원의 반지름의

길이는 4이므로 $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 16$

(2) 중심이 점 $(-1, -2)$ 이고 y 축에 접하는 원의 반지

름의 길이는 $|-1|=1$ 이므로

$$(x+1)^2 + (y+2)^2 = 1$$

답 (1) $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 16$

(2) $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 1$

166

중심을 점 $(a, -a+1)$ 이라 하면 x 축에 접하므로 원의 방정식은

$$(x-a)^2 + \{y - (-a+1)\}^2 = (-a+1)^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

원 ①이 점 $(3, -1)$ 을 지나므로

$$(3-a)^2 + (-1+a-1)^2 = (-a+1)^2$$

$$a^2 - 8a + 12 = 0, (a-2)(a-6) = 0$$

$$\therefore a=2 \text{ 또는 } a=6$$

따라서 ①에서 구하는 원의 방정식은

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 1 \text{ 또는 } (x-6)^2 + (y+5)^2 = 25$$

답 $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 1$ 또는

$(x-6)^2 + (y+5)^2 = 25$

168

[1단계] 원의 반지름의 길이를 r 라 하면 제1사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하는 원의 방정식은

$$(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2$$

[2단계] 원의 중심 (r, r) 가 직선 $8x-5y=9$ 위에 있으

$$\text{므로 } 8r-5r=9, 3r=9 \quad \therefore r=9$$

[3단계] 구하는 원의 방정식은

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 9$$

답 $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 9$

170

두 점 A, B로부터 같은 거리에 있는 점을 $P(x, y)$ 로

놓으면 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\sqrt{(x-3)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$

양변을 제곱하면 $(x-3)^2 + y^2 = x^2 + (y-1)^2$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 = x^2 + y^2 - 2y + 1$$

$$\therefore 3x - y - 4 = 0$$

답 $3x - y - 4 = 0$

172

두 점 A, B로부터의 거리의 비가 1 : 2인 점을

$P(x, y)$ 로 놓으면 $\overline{AP} : \overline{BP} = 1 : 2$ 에서 $2\overline{AP} = \overline{BP}$

즉, $2\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x-3)^2 + y^2}$ 이므로

양변을 제곱하여 정리하면

$$x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$$

답 $x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$

174

[1단계] 원 위의 점을 $P(a, b)$ 로 놓으면

점 P는 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의 점이므로

$$a^2 + b^2 = 4 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

[2단계] 선분 OP의 중점을 $Q(x, y)$ 로 놓으면

점 Q는 선분 OP의 중점이므로

$$x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}$$

두 식을 a 와 b 에 대하여 정리하면

$$a = 2x, b = 2y \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

[3단계] ⑧을 ⑦에 대입하여 x 와 y 의 관계식으로

정리하면

$$(2x)^2 + (2y)^2 = 4 \quad \therefore x^2 + y^2 = 1$$

$$\text{답 } x^2 + y^2 = 1$$

176

[1단계] 점 $P(a, b)$ 가 직선 $3x + 2y + 1 = 0$ 위의 점이므로

$$3a + 2b + 1 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

[2단계] 점 Q를 $Q(x, y)$ 로 놓으면

$$x = b - 2, y = a - 1$$

$$\therefore a = y + 1, b = x + 2 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

[3단계] ⑧을 ⑦에 대입하여 정리하면

$$2x + 3y + 8 = 0 \quad \text{답 } 2x + 3y + 8 = 0$$

178

(1) a 의 값의 범위 $\Rightarrow x$ 의 값의 범위로 전달된다.

[1단계] 점 P의 좌표를 (x, y) 로 놓으면

$$x = 1 - a, y = a^2 + 1$$

$a = 1 - x$ 를 $y = a^2 + 1$ 에 대입하면

$$y = (1 - x)^2 + 1$$

$$\therefore y = (x - 1)^2 + 1$$

[2단계] $-1 \leq a < 1$ 에서 $-1 \leq 1 - x < 1$

$$-2 \leq -x < 0 \quad \therefore 0 < x \leq 2$$

따라서 점 P가 나타내는 도형의 방정식은

$$y = (x - 1)^2 + 1 \quad (0 < x \leq 2)$$

(2) 모든 실수 a 에 대하여 a^2 의 값의 범위

$\Rightarrow a^2 \geq 0 \Rightarrow x$ 의 값의 범위로 전달된다.

[1단계] 점 P의 좌표를 (x, y) 로 놓으면

$$x = 2a^2 - 1, y = 2 - a^2$$

$a^2 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ 을 $y = 2 - a^2$ 에 대입하면

$$y = 2 - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

$$[2단계] a^2 \geq 0 \text{에서 } \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \geq 0 \quad \therefore x \geq -1$$

따라서 점 P가 나타내는 도형의 방정식은

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \quad (x \geq -1)$$

$$\text{답 } (1) y = (x - 1)^2 + 1 \quad (0 < x \leq 2)$$

$$(2) y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \quad (x \geq -1)$$

필수 확인 문제

73쪽

179

구하는 원의 중심을 점 C라 하면 점 C는 선분 AB의 중점이므로 점 C의 좌표는

$$\left(\frac{-1+a}{2}, \frac{3+(-5)}{2}\right)$$

$$\therefore C\left(\frac{-1+a}{2}, -1\right) \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

구하는 원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{5}$ 이므로 지름은 $4\sqrt{5}$ 이다.

즉, $\overline{AB} = 4\sqrt{5}$ 에서 $\overline{AB}^2 = 80$ 이므로

$$(a+1)^2 + (-5-3)^2 = 80$$

$$a^2 + 2a - 15 = 0, (a+5)(a-3) = 0$$

$$\therefore a = 3 \quad (\because a > 0)$$

이를 ⑦에 대입하면 $C(1, -1)$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 20$$

$$\text{답 } (x-1)^2 + (y+1)^2 = 20$$

180

중심을 점 $(a, a+1)$ 이라 하면 x 축에 접하므로 원의 방정식은

$$(x-a)^2 + \{y-(a+1)\}^2 = (a+1)^2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

원 ⑦이 점 $(-1, -1)$ 을 지나므로

$$(-1-a)^2 + \{-1-(a+1)\}^2 = (a+1)^2$$

$$a^2 + 4a + 4 = 0$$

$$(a+2)^2 = 0 \quad \therefore a = -2$$

따라서 ⑦에서 구하는 원의 방정식은

$$(x+2)^2 + (y+1)^2 = 1$$

$$\text{답 } (x+2)^2 + (y+1)^2 = 1$$

181

구하는 원의 중심을 $P(a, b)$ 라 하면

$$\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 \text{에서}$$

$$(a-1)^2 + (b-1)^2 = (a+1)^2 + (b-1)^2$$

$$\therefore a = 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\overline{PA}^2 = \overline{PC}^2 \text{에서}$$

$$(a-1)^2 + (b-1)^2 = (a-3)^2 + (b-5)^2$$

$$\therefore a+2b=8$$

위의 식에 ⑤를 대입하여 풀면 $b=4$

따라서 구하는 원의 중심은 $P(0, 4)$ 이고 반지름의 길이는

$$\overline{PA} = \sqrt{(0-1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{10}$$

이므로 구하는 원의 둘레의 길이는 $2\sqrt{10}\pi$ 이다.

답 $2\sqrt{10}\pi$

+ 풍산자 비법

① 원점과 두 점을 지나는 원의 방정식

→ 원의 방정식을 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ 으로 놓고 원점과 두 점의 좌표를 대입하여 A, B, C 의 값을 구한다.

② 원점이 아닌 세 점을 지나는 원의 방정식

→ 원의 중심을 $P(a, b)$ 로 놓고 원이 지나는 세 점 A, B, C 에 대하여 $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$ 임을 이용하여 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구한다.

182

$$x^2 + y^2 + 2x - 8y + k + 10 = 0 \text{에서}$$

$$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 8y + 16) = -k - 10 + 1 + 16$$

$$\therefore (x+1)^2 + (y-4)^2 = 7-k$$

이 방정식이 원을 나타내려면

$$7-k > 0 \quad \therefore k < 7$$

따라서 정수 k 의 최댓값은 6이다.

답 6

183

제2사분면 위의 점 $(-6, 3)$

을 지나므로 구하는 원은 오

른쪽 그림과 같이 제2사분면

위에 있다.

원의 반지름의 길이를 r 라 하

면 제2사분면에서 x 축과 y 축

에 동시에 접하는 원의 방정식은

$$(x+r)^2 + (y-r)^2 = r^2$$

이 원이 점 $(-6, 3)$ 을 지나므로

$$(-6+r)^2 + (3-r)^2 = r^2$$

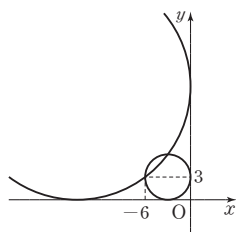
$$r^2 - 18r + 45 = 0, (r-3)(r-15) = 0$$

$$\therefore r=3 \text{ 또는 } r=15$$

따라서 두 원의 넓이의 합은

$$\pi \times 3^2 + \pi \times 15^2 = 9\pi + 225\pi = 234\pi$$

답 234π



184

두 점 A, B 로부터의 거리의 비가 $2:1$ 인 점 P 의 좌표

를 (x, y) 라 하면 $\overline{AP} : \overline{BP} = 2:1$ 에서

$$\overline{AP} = 2\overline{BP}$$

$$\text{즉, } \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-2)^2 + y^2} \text{이므로}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0 \quad \therefore (x-3)^2 + y^2 = 4$$

즉, 점 P 가 나타내는 도형은 중심이 점 $C(3, 0)$ 이고 반

지름의 길이가 2인 원이다.

이때 $\angle PAB$ 의 크기가 최대

가 되려면 오른쪽 그림과 같

이 직선 AP 가 원에 접해야

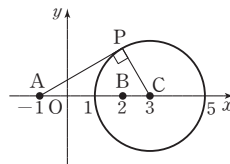
한다.

따라서 삼각형 PAC 는

$\angle APC = 90^\circ$ 인 직각삼각형이므로

$$\overline{AP} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{PC}^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$$

답 $2\sqrt{3}$



2 원과 직선의 위치 관계

74~77쪽

186

$$(1) x^2 + y^2 - 3x = 0 \text{에서 } \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$$

즉, 원의 중심은 점 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$, 반지름의 길이는 $r = \frac{3}{2}$

이다. 원의 중심과 직선 $y = x + 1$, 즉 $x - y + 1 = 0$

사이의 거리 d 는

$$d = \frac{\left|\frac{3}{2} - 0 + 1\right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{\frac{5}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{4}$$

이때 $\frac{3}{2} < \frac{5\sqrt{2}}{4}$, 즉 $r < d$ 이므로 원과 직선은 만나

지 않는다.

$$(2) x^2 + y^2 - 4y + 2 = 0 \text{에서 } x^2 + (y-2)^2 = 2$$

즉, 원의 중심은 점 $(0, 2)$, 반지름의 길이는 $r = \sqrt{2}$

이다. 원의 중심과 직선 $x + y = 4$, 즉 $x + y - 4 = 0$

사이의 거리 d 는

$$d = \frac{|0 + 2 - 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

이때 $r = d = \sqrt{2}$ 이므로 원과 직선은 한 점에서 만난

다.(접한다.)

답 (1) 만나지 않는다.

(2) 한 점에서 만난다.(접한다.)

다른 풀이

(1) 직선의 방정식 $y=x+1$ 을 원의 방정식

$$x^2+y^2-3x=0 \text{에 대입하면}$$

$$x^2+(x+1)^2-3x=0$$

$$\therefore 2x^2-x+1=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D=(-1)^2-4 \times 2 \times 1=-7<0$$

따라서 주어진 원과 직선은 만나지 않는다.

(2) 직선의 방정식 $x+y=4$, 즉 $x=4-y$ 를 원의 방정식

$$x^2+y^2-4y+2=0 \text{에 대입하면}$$

$$(4-y)^2+y^2-4y+2=0$$

$$2y^2-12y+18=0$$

$$\therefore y^2-6y+9=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(-3)^2-1 \times 9=0$$

따라서 주어진 원과 직선은 한 점에서 만난다.(접한다.)

188

[1단계] 원의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 $y=-3x+k$, 즉

$$3x+y-k=0 \text{ 사이의 거리는}$$

$$\frac{|-k|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{10}}$$

[2단계] 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$ 이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{|k|}{\sqrt{10}}<\sqrt{5}, |k|<5\sqrt{2}$$

$$\therefore -5\sqrt{2}<k<5\sqrt{2}$$

$$\text{답 } -5\sqrt{2}<k<5\sqrt{2}$$

190

원의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 $x-y+6=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|0-0+6|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=3\sqrt{2}$$

이때 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$ 이므로 원 위의 점과 주어진 직선 사이의 거리의 최댓값과 최솟값을 구하면

$$(\text{최댓값})=3\sqrt{2}+\sqrt{2}=4\sqrt{2}$$

$$(\text{최솟값})=3\sqrt{2}-\sqrt{2}=2\sqrt{2}$$

$$\text{답 } \text{최댓값: } 4\sqrt{2}, \text{ 최솟값: } 2\sqrt{2}$$

192

[1단계] 원 $(x-2)^2+(y+4)^2=9$ 의 중심 $(2, -4)$ 를 지

나는 직선은 원의 넓이를 이등분한다.

[2단계] 구하는 직선은 점 $(3, 4)$ 를 지나므로 점 $(3, 4)$

와 원의 중심 $(2, -4)$ 를 동시에 지나는 직선의

방정식을 구하면

$$y-4=\frac{4-(-4)}{3-2}(x-3)$$

$$\therefore y=8x-20$$

$$\text{답 } y=8x-20$$

다른 풀이

원의 넓이를 이등분하는 직선은 반드시 원의 중심을 지

나므로 직선의 방정식을 $y=ax+b$ (a, b 는 상수)로 놓

으면 이 직선은 두 점 $(2, -4), (3, 4)$ 를 모두 지난다.

각 점의 좌표를 직선의 방정식에 대입하면

$$-4=2a+b$$

$$4=3a+b$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=8, b=-20$

$$\therefore y=8x-20$$

194

점 $(4, 2)$ 와 원의 중심 $(0, 0)$ 사이의 거리는

$$\sqrt{(4-0)^2+(2-0)^2}=2\sqrt{5}$$

이때 원의 반지름의 길이는 3이므로 점 $(4, 2)$ 는 원 밖

의 점이고, 이 점에서 원에 이르는 거리의 최댓값과 최

솟값을 구하면

$$(\text{최댓값})=2\sqrt{5}+3$$

$$(\text{최솟값})=2\sqrt{5}-3$$

$$\text{답 } \text{최댓값: } 2\sqrt{5}+3, \text{ 최솟값: } 2\sqrt{5}-3$$

필수 확인 문제

78쪽

195

원의 중심 $(-1, 2)$ 와 직선 $x-3y+k=0$ 사이의

거리는

$$\frac{|-1-6+k|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{|k-7|}{\sqrt{10}}$$

원의 넓이가 10π 이므로 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$ 이

다.

원과 직선이 접하므로 원의 중심과 직선 사이의 거리는

원의 반지름의 길이와 같다.

$$\text{즉, } \frac{|k-7|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10} \text{에서 } |k-7|=10$$

$$k-7=\pm 10 \quad \therefore k=17 \text{ 또는 } k=-3$$

$$\text{답 } -3, 17$$

196

x 축에 접하는 원의 반지름의 길이는 중심의 y 좌표의 절댓값과 같으므로 중심의 좌표가 $(2, -1)$ 이고 x 축에 접하는 원의 방정식은

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 1$$

이 원과 직선 $3x+4y+k=0$ 이 접하므로 원의 중심 $(2, -1)$ 과 직선 사이의 거리는 원의 반지름의 길이와 같다.

$$\text{즉, } \frac{|6-4+k|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 1 \text{에서}$$

$$\frac{|k+2|}{5} = 1, |k+2| = 5$$

$$k+2 = \pm 5 \quad \therefore k=3 \text{ 또는 } k=-7$$

따라서 모든 상수 k 의 값의 합은

$$3 + (-7) = -4$$

답 -4

197

원 $(x-a)^2 + y^2 = 18$ 의 중심 $(a, 0)$ 과

직선 $y=x-1$, 즉 $x-y-1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|a-0-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{|a-1|}{\sqrt{2}}$$

원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{2}$ 이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$$\frac{|a-1|}{\sqrt{2}} > 3\sqrt{2}, |a-1| > 6$$

$$a-1 < -6 \text{ 또는 } a-1 > 6$$

$$\therefore a < -5 \text{ 또는 } a > 7$$

따라서 음이 아닌 정수 a 의 최솟값은 8이다.

답 8

198

원 $x^2 + y^2 = 16$ 의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 $x + \sqrt{3}y + k = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|0+0+k|}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}} = \frac{|k|}{2}$$

원의 반지름의 길이가 4이므로 원과 직선이 만나려면

$$\frac{|k|}{2} \leq 4$$

$$\text{즉, } |k| \leq 8 \text{에서 } -8 \leq k \leq 8$$

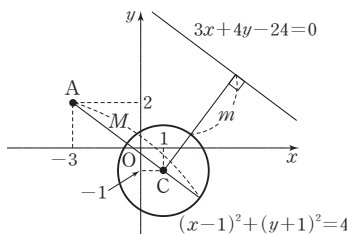
따라서 정수 k 는 $-8, -7, -6, \dots, 8$ 이므로 그 개수는 17이다.

답 17

199

원 $C: (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$ 의 중심을 점 C 라 하면 $C(1, -1)$ 이고 반지름의 길이는 2이다.

이때 원 C 와 점 $A(-3, 2)$ 및 직선 $3x+4y-24=0$ 은 다음 그림과 같다.



즉, M 의 값은 $\overline{AC} + (\text{원의 반지름의 길이})$ 와 같으므로

$$M = \sqrt{(-3-1)^2 + \{2-(-1)\}^2} + 2$$

$$= 5 + 2 = 7$$

또, 원의 중심 C 에서 직선에 이르는 거리를 d 라 하면 m 의 값은 $d - (\text{원의 반지름의 길이})$ 와 같으므로

$$m = \frac{|3 \times 1 + 4 \times (-1) - 24|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} - 2$$

$$= 5 - 2 = 3$$

$$\therefore M + m = 7 + 3 = 10$$

답 10

200

원 C_1 의 중심은 원점, 반지름의 길이는 1이고

원 C_2 의 중심은 점 $(2, 3)$, 반지름의 길이는 1이다.

직선 l 과 두 원 C_1, C_2 사이의 거리를 각각 d_1, d_2 라 하면

$$d_1 = \frac{|0+0+k|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{|k|}{5}$$

$$d_2 = \frac{|4 \times 2 + 3 \times 3 + k|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{|k+17|}{5}$$

한편, 원과 직선의 교점의 개수는 0 또는 1 또는 2이므로 $m+n=1$ 을 만족시키는 경우는

$$m=1, n=0 \text{ 또는 } m=0, n=1$$

(i) $m=1, n=0$ 일 때

$m=1$ 이면 직선 l 과 원 C_1 이 접하므로

$$d_1=1 \text{에서 } \frac{|k|}{5} = 1$$

$$\text{즉, } |k|=5 \text{에서 } k = \pm 5 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$n=0$ 이면 직선 l 과 원 C_2 가 만나지 않으므로

$$d_2 > 1 \text{에서 } \frac{|k+17|}{5} > 1$$

$$\text{즉, } |k+17| > 5 \text{에서}$$

$$k+17 > 5 \text{ 또는 } k+17 < -5$$

$$\therefore k > -12 \text{ 또는 } k < -22 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{에서 } k = \pm 5$$

(ii) $m=0$, $n=1$ 일 때

$m=0$ 이면 직선 l 과 원 C_1 이 만나지 않으므로

$$d_1 > 1 \text{에서 } \frac{|k|}{5} > 1$$

즉, $|k| > 5$ 에서 $k < -5$ 또는 $k > 5$ ㉔

$n=1$ 이면 직선 l 과 원 C_2 가 접하므로

$$d_2 = 1 \text{에서 } \frac{|k+17|}{5} = 1$$

즉, $|k+17| = 5$ 에서 $k+17 = \pm 5$

$\therefore k = -12$ 또는 $k = -22$ ㉕

㉔, ㉕에서 $k = -12$ 또는 $k = -22$

(i), (ii)에서 구하는 상수 k 의 값은

$-22, -12, -5, 5$ **답** $-22, -12, -5, 5$

3 원의 접선의 방정식

79~86쪽

202

오른쪽 그림에서 원의 중심

$C(1, 1)$ 과 점 $P(3, 2)$ 를 이은

직선 CP 의 기울기는

$$\frac{2-1}{3-1} = \frac{1}{2} \text{이므로 선분 } CP \text{에 수}$$

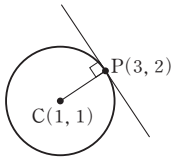
직인 접선의 기울기는 -2 이다.

따라서 기울기가 -2 이고 점 $(3, 2)$ 를 지나는

접선의 방정식은

$$y-2 = -2(x-3) \quad \therefore y = -2x+8$$

답 $y = -2x+8$



204

기울기가 2인 접선의 방정식

을 $y=2x+k$ (k 는 상수)라

하면 원의 중심 $C(2, 3)$ 과 접

선 $2x-y+k=0$ 사이의 거리

는 원의 반지름의 길이인 3과

같으므로

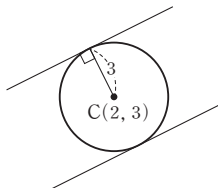
$$\frac{|4-3+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = 3, |k+1| = 3\sqrt{5}$$

$$k+1 = \pm 3\sqrt{5} \quad \therefore k = -1 \pm 3\sqrt{5}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y=2x-1+3\sqrt{5} \text{ 또는 } y=2x-1-3\sqrt{5}$$

답 $y=2x-1+3\sqrt{5}$ 또는 $y=2x-1-3\sqrt{5}$



206

원 $x^2+y^2=10$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식

은 $x_1x+y_1y=10$

$x_1=1, y_1=-3$ 을 대입하면

$$x-3y=10$$

$$\therefore x-3y-10=0$$

답 $x-3y-10=0$

208

$y=mx \pm r\sqrt{m^2+1}$ 에서 $m=5, r=2$ 이므로

$$y=5x \pm 2\sqrt{5^2+1}$$

$$\therefore y=5x \pm 2\sqrt{26}$$

답 $y=5x \pm 2\sqrt{26}$

210

접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라

하면 접선의 방정식은

$$x_1x+y_1y=1 \quad \dots\dots ㉑$$

(i) ㉑이 점 $(0, 2)$ 를 지나므로

$$2y_1=1$$

$$\therefore y_1 = \frac{1}{2} \quad \dots\dots ㉒$$

(ii) 점 (x_1, y_1) 은 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로

$$x_1^2+y_1^2=1 \quad \dots\dots ㉓$$

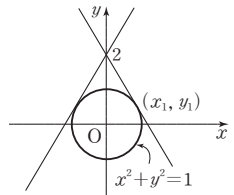
㉒, ㉓에서

$$x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, y_1 = \frac{1}{2} \text{ 또는 } x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, y_1 = \frac{1}{2}$$

이것을 ㉑에 각각 대입하여 정리하면 구하는 접선의 방정식은

$$\sqrt{3}x-y=-2, \sqrt{3}x+y=2$$

답 $\sqrt{3}x-y=-2, \sqrt{3}x+y=2$



다른 풀이 1

점 $(0, 2)$ 를 지나는 접선의 기울기를 m 이라 하면 접선의 방정식은

$$y-2=m(x-0) \quad \therefore mx-y+2=0 \quad \dots\dots ㉑$$

원 $x^2+y^2=1$ 은 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원이다.

원의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 ㉑ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 1과 같으므로

$$\frac{|2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = 1, |2| = \sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$m^2=3 \quad \therefore m = \pm\sqrt{3}$$

이것을 ㉑에 각각 대입하여 정리하면 구하는 접선의 방정식은

$$\sqrt{3}x-y+2=0, \sqrt{3}x+y-2=0$$

점 (0, 2)를 지나는 접선의 기울기를 m 이라 하면 접선의 방정식은

$$y-2=m(x-0) \quad \therefore y=mx+2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①을 원의 방정식 $x^2+y^2=1$ 에 대입하여 정리하면

$$(m^2+1)x^2+4mx+3=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D=0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=(2m)^2-(m^2+1)\times 3=0$$

$$m^2=3 \quad \therefore m=\pm\sqrt{3}$$

이것을 ①에 각각 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$$y=\sqrt{3}x+2, y=-\sqrt{3}x+2$$

212

접선의 기울기를 m 이라 하면 이 접선이 점 (1, 1)을 지나므로 접선의 방정식은 $y-1=m(x-1)$

$$\therefore mx-y-m+1=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

원의 중심 (1, -1)에서 접선 ①까지의 거리가 원의 반지름의 길이인 1과 같으므로

$$\frac{|m+1-m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1, \quad |2|=\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하면

$$m^2+1=4 \quad \therefore m=\pm\sqrt{3}$$

이것을 ①에 각각 대입하여 정리하면 구하는 접선의 방정식은

$$\sqrt{3}x-y-\sqrt{3}+1=0, \sqrt{3}x+y-\sqrt{3}-1=0$$

$$\text{답 } \sqrt{3}x-y-\sqrt{3}+1=0, \sqrt{3}x+y-\sqrt{3}-1=0$$

다른 풀이

점 (1, 1)을 지나는 접선의 기울기를 m 이라 하면 접선의 방정식은

$$y-1=m(x-1) \quad \therefore y=mx-m+1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①을 $(x-1)^2+(y+1)^2=1$ 에 대입하면

$$(x-1)^2+(mx-m+1+1)^2=1$$

$$\therefore (m^2+1)x^2-2(m^2-2m+1)x+(m^2-4m+4)=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D=0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=(m^2-2m+1)^2-(m^2+1)(m^2-4m+4)=0$$

$$m^2=3 \quad \therefore m=\pm\sqrt{3}$$

이것을 ①에 각각 대입하여 정리하면 구하는 접선의 방정식은

$$y=\sqrt{3}x-\sqrt{3}+1, y=-\sqrt{3}x+\sqrt{3}+1$$

필수 확인 문제

213

원 $x^2+y^2=17$ 위의 점 (1, 4)에서의 접선의 방정식은

$$x+4y=17 \quad \therefore y=-\frac{1}{4}x+\frac{17}{4} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

직선 $mx-3y+6=0$ 에서

$$y=\frac{m}{3}x+2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

두 직선이 서로 수직이므로 ①, ②에서

$$-\frac{1}{4}\times\frac{m}{3}=-1 \quad \therefore m=12 \quad \text{답 } 12$$

214

구하는 접선이 점 P(1, 1)을 지나므로 기울기를 m 이라 하면 접선의 방정식은

$$y-1=m(x-1) \quad \therefore y=mx-m+1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

원 $x^2+y^2+2x-4y=0$ 에서

$$(x+1)^2+(y-2)^2=5$$

이 원은 중심이 점 C(-1, 2), 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$ 인 원이다.

오른쪽 그림에서 직선 CP는 점 P

에서의 접선과 수직이므로 직선

$$CP \text{의 기울기는 } \frac{1-2}{1-(-1)}=-\frac{1}{2}$$

즉, 직선 CP에 수직인 접선의 기울

기는

$$m=2$$

이것을 ①에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$$y=2x-1$$

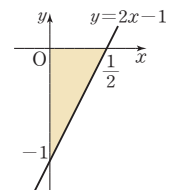
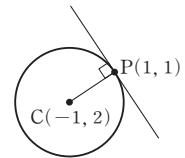
직선 $y=2x-1$ 의 x 절편과 y 절편

은 각각 $\frac{1}{2}, -1$ 이므로 오른쪽 그

림에서 구하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times|-1|=\frac{1}{4}$$

$$\text{답 } \frac{1}{4}$$



215

접선이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 45° 이므로 접선의 기울기는

$$\tan 45^\circ=1$$

$y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1}$ 에서 $m=1$, $r=1$ 이므로 접선의 방정식은

$$y = x \pm \sqrt{1^2 + 1}$$

$$\therefore y = x \pm \sqrt{2} \quad \text{답 } y = x \pm \sqrt{2}$$

216

직선 $x+2y=4$, 즉 $y = -\frac{1}{2}x+2$ 의 기울기는 $-\frac{1}{2}$ 이므로 이 직선에 수직인 기울기는 2이다.

즉, 구하는 직선은 원 $x^2+y^2=8$ 에 접하고 기울기가 2인 접선이므로 접선의 방정식은

$$y = 2x \pm 2\sqrt{2} \times \sqrt{2^2 + 1}$$

$$\therefore y = 2x \pm 2\sqrt{10}$$

따라서 구하는 두 직선의 y 절편은 각각 $2\sqrt{10}$, $-2\sqrt{10}$ 이므로 선분 PQ의 길이는

$$\overline{PQ} = 2\sqrt{10} - (-2\sqrt{10}) = 4\sqrt{10} \quad \text{답 } 4\sqrt{10}$$

217

점 (5, 5)를 지나는 접선의 기울기를 m 이라 하면 접선의 방정식은

$$y-5 = m(x-5)$$

$$\therefore mx - y - 5m + 5 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

원 $x^2+y^2=1$ 은 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원이다.

원의 중심 (0, 0)과 직선 ① 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 1과 같으므로

$$\frac{|-5m+5|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = 1, \quad |-5m+5| = \sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$12m^2 - 25m + 12 = 0, \quad (4m-3)(3m-4) = 0$$

$$\therefore m = \frac{3}{4} \text{ 또는 } m = \frac{4}{3}$$

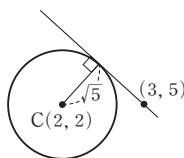
따라서 $m_1 = \frac{3}{4}$, $m_2 = \frac{4}{3}$ 또는 $m_1 = \frac{4}{3}$, $m_2 = \frac{3}{4}$ 이므로

$$m_1 m_2 = \frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = 1 \quad \text{답 } 1$$

218

접선의 기울기를 m 이라 하면 접선이 점 (3, 5)를 지나므로 접선의 방정식은

$$y-5 = m(x-3)$$



$$\therefore mx - y - 3m + 5 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

원 $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 5$ 는 중심이 점 (2, 2), 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$ 인 원이다.

원의 중심 (2, 2)와 직선 ① 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 $\sqrt{5}$ 와 같으므로

$$\frac{|2m-2-3m+5|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = \frac{|-m+3|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{5}$$

$$|-m+3| = \sqrt{5m^2+5}$$

$$\text{양변을 제곱하면 } m^2 - 6m + 9 = 5m^2 + 5$$

$$2m^2 + 3m - 2 = 0, \quad (m+2)(2m-1) = 0$$

$$\therefore m = -2 \text{ 또는 } m = \frac{1}{2}$$

이것을 ①에 각각 대입하여 정리하면 구하는 접선의 방정식은

$$y = -2x + 11 \text{ 또는 } y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

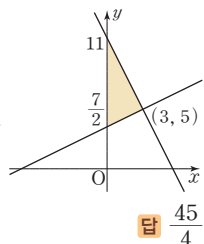
두 직선 $y = -2x + 11$,

$y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$ 의 y 절편은 각각 11,

$\frac{7}{2}$ 이므로 오른쪽 그림에서 구하는

삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \left(11 - \frac{7}{2}\right) \times 3 = \frac{45}{4}$$



219

삼각형 PAB의 넓이가 최대가 되는 것은 오른쪽 그림과 같이 점 P에서의 접선이 직선 AB와 평행하고 y 절편이 음수일 때이다.

직선 AB의 기울기는

$$\frac{0-3}{5-(-4)} = -\frac{1}{3}$$

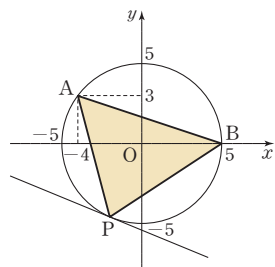
즉, 기울기가 $-\frac{1}{3}$ 이고 원 $x^2+y^2=25$ 에 접하는 접선의 방정식은

$$y = -\frac{1}{3}x \pm 5\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 1}$$

$$\therefore y = -\frac{1}{3}x \pm \frac{5\sqrt{10}}{3}$$

이 중 y 절편이 음수인 접선의 방정식은

$$y = -\frac{1}{3}x - \frac{5\sqrt{10}}{3} \quad \therefore x + 3y + 5\sqrt{10} = 0$$



점 B(5, 0)과 이 접선 사이의 거리는

$$\frac{|5+0+5\sqrt{10}|}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{5+5\sqrt{10}}{\sqrt{10}}$$

또, $\overline{AB} = \sqrt{\{5-(-4)\}^2 + \{0-3\}^2} = 3\sqrt{10}$ 이므로

삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \times 3\sqrt{10} \times \frac{5+5\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{15+15\sqrt{10}}{2}$$

답 $\frac{15+15\sqrt{10}}{2}$

참고

기울기가 주어질 때, 원의 접선은 2개 존재한다. 즉, 직선 AB와 평행한 접선 역시 2개인데, 이 중 삼각형 PAB의 넓이가 최대가 되게 하는 접선은 선분 AB로부터 더 멀리 떨어진 직선이다.

이를 직선의 방정식만으로 판단하기는 어려우므로 다른 도형 문제와 마찬가지로 그림을 그려 파악해야 한다.

4 두 원의 교점을 지나는 원과 직선 88~93쪽

221

두 원의 중심이 각각 (1, a), (a, 3)이므로 중심거리는

$$\sqrt{(a-1)^2 + (3-a)^2} = \sqrt{2a^2 - 8a + 10}$$

또, 두 원의 반지름의 길이는 모두 1이다.

따라서 두 원이 외접하려면

$$\sqrt{2a^2 - 8a + 10} = 1 + 1, \sqrt{2a^2 - 8a + 10} = 2$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$a^2 - 4a + 3 = 0, (a-1)(a-3) = 0$$

$$\therefore a=1 \text{ 또는 } a=3$$

답 1, 3

223

두 원의 중심은 각각 점 (2, a), 점 (a, 3)

두 원의 중심거리를 d, 두 원의 반지름의 길이를 각각 r, r' (r > r')이라 하면

$$d = \sqrt{(2-a)^2 + (a-3)^2} = \sqrt{2a^2 - 10a + 13}$$

$$r=3, r'=2$$

(1) 만난다. $\Rightarrow$ 한 점 또는 두 점에서 만난다.

$$\Rightarrow r-r' \leq d \leq r+r'$$

$$3-2 \leq \sqrt{2a^2 - 10a + 13} \leq 2+3 \text{에서}$$

$$1 \leq \sqrt{2a^2 - 10a + 13} \leq 5$$

각 변을 제곱하면 $1 \leq 2a^2 - 10a + 13 \leq 25$

(i) $1 \leq 2a^2 - 10a + 13$ 에서

$$a^2 - 5a + 6 \geq 0, (a-2)(a-3) \geq 0$$

$$\therefore a \leq 2 \text{ 또는 } a \geq 3$$

..... ㉠

(ii) $2a^2 - 10a + 13 \leq 25$ 에서

$$a^2 - 5a - 6 \leq 0, (a+1)(a-6) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq a \leq 6$$

..... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$$-1 \leq a \leq 2 \text{ 또는 } 3 \leq a \leq 6$$

(2) 한 원이 다른 원의 내부에 있다. $\Rightarrow d < r-r'$

$$\sqrt{2a^2 - 10a + 13} < 3-2 \text{에서}$$

$$2a^2 - 10a + 13 < 1$$

$$a^2 - 5a + 6 < 0, (a-2)(a-3) < 0$$

$$\therefore 2 < a < 3$$

답 (1) $-1 \leq a \leq 2$ 또는 $3 \leq a \leq 6$

$$(2) 2 < a < 3$$

225

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$(x^2 + y^2 - 1) - (x^2 + y^2 - 2x - 2y - 1) = 0$$

$$2x + 2y = 0 \quad \therefore x + y = 0$$

답 $x + y = 0$

227

[1단계] 오른쪽 그림과 같이 원과

직선의 두 교점을 A, B라

하고 원 $x^2 + y^2 = 25$ 의 중심

O(0, 0)에서 직선

$y = x + k$ 에 내린 수선의 발

을 H라 하면 원의 중심

O(0, 0)과 직선 $y = x + k$, 즉 $x - y + k = 0$ 사이의 거리는

$$\overline{OH} = \frac{|k|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{2}}$$

이때 원의 반지름의 길이가 5이므로 $\overline{OA} = 5$ 이고, 현의 길이가 $2\sqrt{7}$ 이므로 $\overline{AH} = \sqrt{7}$ 이다.

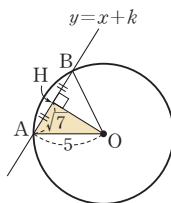
[2단계] 직각삼각형 AOH에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{OH} &= \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AH}^2} \\ &= \sqrt{5^2 - (\sqrt{7})^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{|k|}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$ 이므로

$$|k| = 6 \quad \therefore k = \pm 6$$

답 ± 6



229

[1단계] 두 원의 교점을 A, B라 하면 두 원의 공통인 현

AB를 포함하는 직선의 방정식은

$$(x^2 + y^2 - 4) - (x^2 + y^2 - 4x + 4y + 4) = 0$$

$$\therefore x - y - 2 = 0$$

[2단계] 원 $x^2 + y^2 = 4$ 의 중심

O(0, 0)에서 공통현

AB에 내린 수선의 발

을 H라 하면 점

O(0, 0)과 직선

$x - y - 2 = 0$ 사이의

거리는

$$\overline{OH} = \frac{|-2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2}$$

이때 원 $x^2 + y^2 = 4$ 의 반지름의 길이는

$$\overline{OA} = 2$$

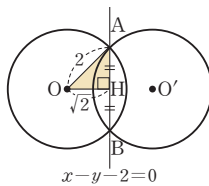
[3단계] 직각삼각형 AOH에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{AH} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OH}^2}$$

$$= \sqrt{2^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}$$

따라서 구하는 공통인 현의 길이는

$$\overline{AB} = 2\overline{AH} = 2\sqrt{2} \quad \text{답 } 2\sqrt{2}$$



231

오른쪽 그림에서 점 P(1, 1)과 원의

중심 C(2, 3) 사이의 거리는

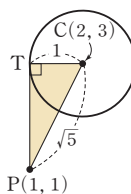
$$\overline{CP} = \sqrt{(2-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{5}$$

직각삼각형 CTP에서 피타고라스

정리에 의하여

$$\overline{PT} = \sqrt{\overline{CP}^2 - \overline{CT}^2}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{5})^2 - 1^2} = 2$$



233

오른쪽 그림과 같이 공통의

접선을 이동하면 색칠한 삼각형은 직각삼각형이다.

두 원의 중심은 각각

점 O(0, 0),

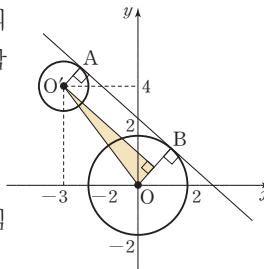
점 O'(-3, 4)이므로 중심

거리는

$$\overline{OO'} = \sqrt{(-3-0)^2 + (4-0)^2}$$

$$= 5$$

두 원의 반지름의 길이는 각각 $r_1 = 2, r_2 = 1$



색칠한 직각삼각형에서 피타고라스 정리에 의하여 구하는 공통외접선의 길이는

$$\begin{aligned} \sqrt{\overline{OO'}^2 - (r_1 - r_2)^2} &= \sqrt{5^2 - (2-1)^2} \\ &= \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \end{aligned}$$

답 $2\sqrt{6}$

필수 확인 문제

94쪽

234

두 원의 중심이 각각 (1, -3), (-2, 1)이므로

중심거리는

$$\sqrt{(-2-1)^2 + (1+3)^2} = 5$$

이때 두 원의 반지름의 길이는 각각 r, 2이므로 두 원이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$r - 2 < 5 < r + 2$$

$$\therefore 3 < r < 7$$

답 $3 < r < 7$

235

두 원의 중심이 각각 (a, -1), (3, 2)이므로 중심거리는

$$\sqrt{(3-a)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{a^2 - 6a + 18}$$

또, 두 원의 반지름의 길이는 각각 7, 2이다.

이때 두 원의 교점이 하나뿐이라면 한 원이 다른 원에 내접하거나 두 원이 서로 외접해야 한다.

(i) 한 원이 다른 원에 내접할 때,

$$\sqrt{a^2 - 6a + 18} = 7 - 2, \sqrt{a^2 - 6a + 18} = 5$$

양변을 제곱하면

$$a^2 - 6a + 18 = 25$$

$$a^2 - 6a - 7 = 0, (a+1)(a-7) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 7$$

(ii) 두 원이 서로 외접할 때,

$$\sqrt{a^2 - 6a + 18} = 7 + 2, \sqrt{a^2 - 6a + 18} = 9$$

양변을 제곱하면 $a^2 - 6a + 18 = 81$

$$a^2 - 6a - 63 = 0 \quad \therefore a = 3 \pm 6\sqrt{2}$$

(i), (ii)에서 모든 실수 a의 값의 합은

$$-1 + 7 + (3 + 6\sqrt{2}) + (3 - 6\sqrt{2}) = 12$$

답 12

참고

두 원이 서로 외접할 때의 a의 값에 대한 이차방정식

$a^2 - 6a - 63 = 0$ 의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4} = (-3)^2 - 1 \times (-63) = 72 > 0$$

즉, 이차방정식 $a^2 - 6a - 63 = 0$ 의 근은 서로 다른 두 실근이므로 이들의 합은 근과 계수의 관계를 이용하여

$$-\frac{-6}{1} = 6 \text{으로 구할 수도 있다.}$$

236

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은
 $(x^2+y^2-5)-(x^2+y^2+ax+3y-4)=0$

$$-ax-3y-1=0 \quad \therefore y=-\frac{a}{3}x-\frac{1}{3}$$

이 직선이 직선 $y=3x+2$ 와 수직이므로

$$-\frac{a}{3} \times 3 = -1 \quad \therefore a=1$$

답 1

237

원 $x^2+y^2=4$ 의 중심은 $O(0, 0)$ 이고 반지름의 길이가 2이므로

$$\overline{OA}=\overline{OB}=2, \overline{OP}=\sqrt{3^2+4^2}=5$$

또, 직각삼각형 PAO에서

$$\begin{aligned} \overline{AP} &= \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{OA}^2} \\ &= \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21} \end{aligned}$$

한편, 오른쪽 그림과 같이 두 선분 OP, AB의 교점을 H라 하면 직각삼각형 PAO의 넓이는

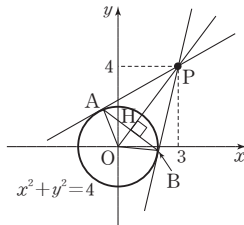
$$\frac{1}{2} \times \overline{OP} \times \overline{AH} = \frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{AP}$$

$$\text{즉, } \frac{1}{2} \times 5 \times \overline{AH} = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{21} \text{ 이므로 } \overline{AH} = \frac{2\sqrt{21}}{5}$$

따라서 선분 AB의 길이는

$$\overline{AB} = 2\overline{AH} = \frac{4\sqrt{21}}{5}$$

답 $\frac{4\sqrt{21}}{5}$



238

오른쪽 그림과 같이 공통 내접선을 이동하면 색칠한 삼각형은 직각삼각형이다.

두 원의 중심은 각각

$C(1, 1)$, $C'(5, 0)$ 이므로 중심거리는

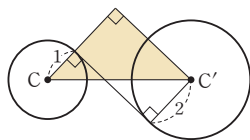
$$\overline{CC'} = \sqrt{(5-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{17}$$

두 원의 반지름의 길이는 각각 $r_1=1$, $r_2=2$

색칠한 직각삼각형에서 피타고라스 정리에 의하여 구하는 공통내접선의 길이는

$$\begin{aligned} \sqrt{\overline{CC'}^2 - (r_1 + r_2)^2} &= \sqrt{(\sqrt{17})^2 - (1+2)^2} \\ &= \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

답 $2\sqrt{2}$



239

두 원 C_1 , C_2 의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$(x^2+y^2+12x-6y+15)-(x^2+y^2+kx+6y+9)=0$$

$$\therefore (k-12)x+12y-6=0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또, $C_1: x^2+y^2+12x-6y+15=0$ 에서

$$(x+6)^2+(y-3)^2=30$$

이므로 원 C_1 의 중심의 좌표는 $(-6, 3)$ 이다.

이때 두 원 C_1 , C_2 의 교점을 지나는 직선이 원 C_1 의 넓이를 이등분하려면 직선 $\textcircled{7}$ 이 점 $(-6, 3)$ 을 지나야 하므로

$$(k-12) \times (-6) + 12 \times 3 - 6 = 0$$

$$6(k-12)=30, k-12=5 \quad \therefore k=17$$

답 17

● 실전 연습문제

96~98쪽

240

선분 AB가 원의 넓이를 이등분하므로 원 위의 두 점 A, B는 지름의 양 끝 점이다.

선분 AB의 중점이 원의 중심이므로 원의 중심의 좌표는

$$\left(\frac{-4+0}{2}, \frac{-6+4}{2} \right), \text{ 즉 } (-2, -1)$$

또, 선분 AB가 원의 지름이므로 원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2}\sqrt{(-4-0)^2 + (-6-4)^2} = \sqrt{29}$$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 원의 방정식은

$$(x+2)^2+(y+1)^2=29 \text{ 이므로}$$

$$a=-2, b=-1, r^2=29$$

$$\therefore a+b+r^2=26$$

답 26

241

$$x^2+y^2+2kx-4ky+k+1=0 \text{ 에서}$$

$$(x+k)^2+(y-2k)^2=5k^2-k-1$$

따라서 원의 중심은 $(-k, 2k)$ 이고, 반지름의 길이는 $\sqrt{5k^2-k-1}$ 이다.

이 원이 y 축에 접하므로 $|-k|=\sqrt{5k^2-k-1}$

$$\text{양변을 제곱하여 정리하면 } 4k^2-k-1=0$$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든

실수 k 의 값의 합은 $\frac{1}{4}$ 이다.

답 $\frac{1}{4}$

참고

이차방정식 $4k^2-k-1=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D=(-1)^2-4 \times 4 \times (-1)=17>0 \text{ 이므로 서로 다른}$$

두 실근을 갖는다.

242

$$x^2 + y^2 - 2x - ay - b = 0 \text{에서}$$

$$(x-1)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + b + 1$$

이때 원 C의 중심은 점 $C\left(1, \frac{a}{2}\right)$ 이고 반지름의 길이는

$$\sqrt{\frac{a^2}{4} + b + 1} \text{이다.}$$

이때 점 C가 직선 $y=2x-1$ 위에 있으므로

$$\frac{a}{2} = 2 \times 1 - 1 \quad \therefore a = 2$$

즉, $C(1, 1)$ 이고 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{b+2}$ 이다.

삼각형 ABP의 넓이가 최대가 되는

것은 오른쪽 그림과 같이 선분 PC

가 원 C의 반지름일 때이다.

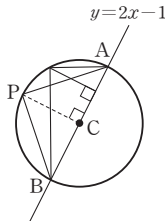
삼각형 ABP의 넓이의 최댓값이 4

이므로

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{b+2} \times \sqrt{b+2} = 4$$

$$b+2=4 \quad \therefore b=2$$

$$\therefore a+b=2+2=4$$



답 4

243

원 $x^2 + y^2 = 9$ 의 중심 $(0, 0)$ 과

직선 $3x - 4y + n = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|n|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|n|}{5}$$

원의 반지름의 길이가 3이므로 원과 직선이 만나려면

$$\frac{|n|}{5} \leq 3, |n| \leq 15 \quad \therefore -15 \leq n \leq 15$$

따라서 구하는 정수 n 의 개수는

$$15 - (-15) + 1 = 31$$

답 ④

참고 정수의 개수

서로 다른 두 정수 m, n 에 대하여 정수 x 의 개수는

$$\textcircled{1} m \leq x \leq n \text{일 때, } n - m + 1$$

$$\textcircled{2} m < x \leq n \text{ 또는 } m \leq x < n \text{일 때, } n - m$$

$$\textcircled{3} m < x < n \text{일 때, } n - m - 1$$

244

$$x^2 + y^2 + 16x - 12y + 91 = 0 \text{에서}$$

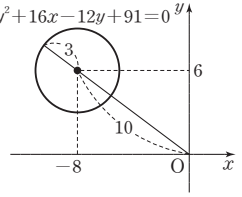
$$(x+8)^2 + (y-6)^2 = 9$$

이 원의 중심의 좌표는 $(-8, 6)$, 반지름의 길이는 3이

고, 원점과 원의 중심 $(-8, 6)$ 사이의 거리는

$$\sqrt{(-8)^2 + 6^2} = 10$$

이때 $10 > 3$ 이므로 오른 쪽 그림과 같이 원점 O는 주어진 원 밖에 있는 점이다.



$$\text{따라서 } M = 10 + 3 = 13,$$

$$m = 10 - 3 = 7 \text{이므로}$$

$$2M - m = 2 \times 13 - 7 = 19$$

답 19

245

$$x + y = 2 \text{에서 } y = -x + 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①을 $x^2 + y^2 = 4$ 에 대입하면

$$x^2 + (-x + 2)^2 = 4, 2x^2 - 4x = 0$$

$$2x(x - 2) = 0 \quad \therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

이 값을 각각 ①에 대입하면

$$x = 0, y = 2 \text{ 또는 } x = 2, y = 0$$

따라서 주어진 원과 직선의 두 교점의 좌표는 $(0, 2)$, $(2, 0)$ 이다.

원 $x^2 + y^2 = 4$ 에 대하여

점 $(0, 2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$0 \times x + 2y = 4 \quad \therefore y = 2$$

점 $(2, 0)$ 에서의 접선의 방정식은

$$2x - 0 \times y = 4 \quad \therefore x = 2$$

즉, 두 직선 l_1, l_2 의 교점의 좌표는 $(2, 2)$ 이다.

따라서 $a = 2, b = 2$ 이므로

$$a + b = 4$$

답 4

246

직선 $2x + 4y - 15 = 0$, 즉 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{15}{4}$ 의 기울기는

$-\frac{1}{2}$ 이므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기는 2이다.

기울기가 2이고 원 $x^2 + y^2 = 4$ 에 접하는 직선의 방정식은

$$y = 2x \pm 2\sqrt{2^2 + 1}$$

$$\therefore y = 2x \pm 2\sqrt{5}$$

직선 $y = 2x + 2\sqrt{5}$ 의 x 절편은 $-\sqrt{5}$, y 절편은 $2\sqrt{5}$ 이고

직선 $y = 2x - 2\sqrt{5}$ 의 x 절편은 $\sqrt{5}$, y 절편은 $-2\sqrt{5}$ 이므로

네 점 A, B, C, D를 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \{\sqrt{5} - (-\sqrt{5})\} \times \{2\sqrt{5} - (-2\sqrt{5})\}$$

$$= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times 4\sqrt{5} = 20$$

답 20

247

$$(x-1)^2+y^2=3 \text{에서 } x^2+y^2-2x-2=0$$

$$(x-2)^2+y^2=4 \text{에서 } x^2+y^2-4x=0$$

즉, 두 원의 교점을 지나는 직선 PQ의 방정식은

$$(x^2+y^2-2x-2)-(x^2+y^2-4x)=0$$

$$\therefore x=1$$

오른쪽 그림과 같이 두 원의

중심을 지나는 직선은 x 축이

므로 두 원의 공통현 PQ와

x 축의 교점을 H라 하면 점

H는 원 $(x-1)^2+y^2=3$ 의

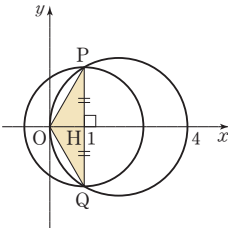
중심이므로

$$\overline{PQ}=2\sqrt{3}, \overline{OH}=1$$

따라서 삼각형 OPQ의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 1 = \sqrt{3}$$

답 $\sqrt{3}$



248

주어진 원과 직선의 교점을 A, B

라 하면 두 점 A, B를 지나는 원

중에서 그 넓이가 최소인 것은 선

분 AB를 지름으로 하는 원이다.

원 $x^2+y^2=17$ 과 직선 $y=x-3$

의 교점의 x 좌표는

$$x^2+(x-3)^2=17, x^2-3x-4=0$$

$$(x-4)(x+1)=0$$

$$\therefore x=4 \text{ 또는 } x=-1$$

따라서 $x^2+y^2=17$ 과 $y=x-3$ 의 교점 A, B의 좌표는

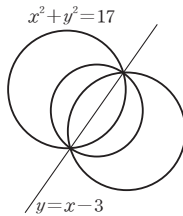
$$(4, 1), (-1, -4)$$

구하는 원의 넓이는 선분 AB를 지름으로 하는 원의 넓

이이므로

$$\left[\frac{1}{2} \sqrt{\{4-(-1)\}^2 + \{1-(-4)\}^2} \right]^2 \pi = \frac{25}{2} \pi$$

답 ④



249

[1단계] 두 점 A, B로부터의 거리의 비가 1:3인 점 P의

좌표를 (x, y) 라 하면

$$\overline{AP} : \overline{BP} = 1 : 3, \text{ 즉 } 3\overline{AP} = \overline{BP} \text{이므로}$$

$$3\sqrt{(x+5)^2+y^2} = \sqrt{(x-3)^2+y^2}$$

양변을 제곱하면

$$9\{(x+5)^2+y^2\} = (x-3)^2+y^2$$

$$x^2+y^2+12x+27=0$$

$$\therefore (x+6)^2+y^2=9$$

따라서 점 P는 중심의 좌표가 $(-6, 0)$ 이고, 반

지름의 길이가 3인 원 위의 점이다.

[2단계] 오른쪽 그림과 같

이 점 P에서 x 축

에 내린 수선의 발

을 H라 하면

$$\triangle PAB = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{PH}$$

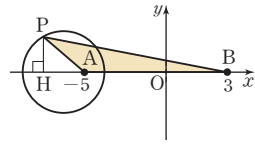
이때 $\overline{AB} = |3 - (-5)| = 8$ 이고, 선분 PH의 길

이의 최댓값은 반지름의 길이인 3이므로 삼각형

PAB의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \times 8 \times 3 = 12$$

답 12



250

원 $x^2+y^2=r^2$ 의 중심 O(0, 0)과 선분 AB 사이의 거

리는 점 O에서 선분 AB에 내린 수선의 길이이다.

A(3, -1), B(0, 3)을 지나는 직선의 방정식은

$$y+1 = \frac{3-(-1)}{0-3}(x-3) \quad \therefore 4x+3y-9=0$$

원점과 이 직선 사이의 거리는

$$\frac{|4 \times 0 + 3 \times 0 - 9|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{9}{5}$$

한편, $\overline{OA} = \sqrt{10}, \overline{OB} = 3$

이므로 원 $x^2+y^2=r^2$ 의 반

지름의 길이 r가 $\frac{9}{5}$ 를 초과

할 때부터 3이 될 때까지 원과 선분 AB가 두 점에서 만

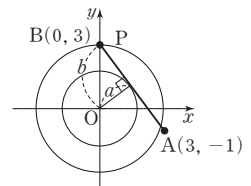
난다.

$$\therefore \frac{9}{5} < r \leq 3$$

따라서 $a = \frac{9}{5}, b = 3$ 이므로

$$a+b = \frac{24}{5}$$

답 $\frac{24}{5}$



251

점 $(0, a)$ 에서 원에 그은 접선의 기울기를 m 이라 하면

접선의 방정식은

$$y-a = m(x-0) \quad \therefore mx-y+a=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

원 $(x+4)^2+(y-1)^2=10$ 의 중심의 좌표는 $(-4, 1)$

이고 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$ 이므로 점 $(-4, 1)$ 과 접선

$\textcircled{1}$ 사이의 거리도 $\sqrt{10}$ 이다.

$$\text{즉, } \frac{|-4m-1+a|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = \sqrt{10} \text{에서}$$

$$|-4m-1+a| = \sqrt{10(m^2+1)}$$

양변을 제곱하면

$$16m^2+1+a^2+8m-2a-8am=10m^2+10$$

$$\therefore 6m^2-8(a-1)m+a^2-2a-9=0 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

이때 두 접선이 서로 수직이므로 두 직선의 기울기의 곱이 -1 이다.

즉, 이차방정식 $\textcircled{A}$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{a^2-2a-9}{6} = -1$$

$$a^2-2a-3=0, (a+1)(a-3)=0$$

$$\therefore a=3 \quad (\because a>0)$$

답 3

다른 풀이

$$\text{원 } (x+4)^2+(y-1)^2=10$$

의 중심의 좌표가 $(-4, 1)$

이고 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$ 이

므로 점 $(0, a)$ 에서 원에 그

은 두 접선이 서로 수직이면

오른쪽 그림과 같이 두 점 $(-4, 1), (0, a)$ 를 잇는 선분은 한 변의 길이가 $\sqrt{10}$ 인 정사각형의 대각선과 같다.

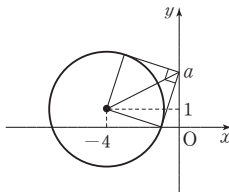
즉, 두 점 $(-4, 1), (0, a)$ 를 잇는 선분의 길이는

$$\sqrt{2} \times \sqrt{10} = 2\sqrt{5} \text{이므로}$$

$$\sqrt{\{0-(-4)\}^2+\{a-1\}^2} = 2\sqrt{5}$$

$$16+(a-1)^2=20, (a-1)^2=4$$

$$a-1=\pm 2 \quad \therefore a=3 \quad (\because a>0)$$



252

ㄱ은 옳지 않다.

원 밖의 한 점에서 원에 그

은 접선의 접점까지의 거리

는 서로 같으므로

$$\overline{AP}=s=a-1,$$

$$\overline{BP}=t=b-1$$

$$\therefore \overline{AP} : \overline{BP} = s : t = (a-1) : (b-1)$$

ㄴ은 옳다.

$$\overline{AB} = \overline{AP} + \overline{BP} = s + t$$

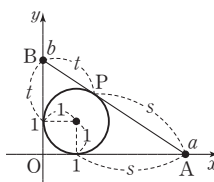
$$= (a-1) + (b-1)$$

$$= a + b - 2$$

이때 삼각형 OAB에서 피타고라스 정리에 의하여

$$a^2+b^2=(a+b-2)^2, 4a+4b=2ab+4$$

$$\therefore a+b=\frac{1}{2}ab+1 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$



$$\textcircled{A} \text{에서 } ab=14 \text{이면 } a+b=8$$

ㄷ도 옳다.

삼각형 OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{OB} = \frac{1}{2} ab$$

이고

$$st=(a-1)(b-1)=ab-a-b+1$$

$$=ab-\frac{1}{2}ab \quad (\because \textcircled{A})$$

$$=\frac{1}{2}ab$$

이므로 삼각형 OAB의 넓이는 st 이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

253

원 C_1 의 중심의 좌표는 $(-1, 3)$, 반지름의 길이는 2이

고 원 C_2 의 중심의 좌표는 $(3, 6)$, 반지름의 길이는 4이

다.

두 원 C_1, C_2 의 중심을 각각 C_1, C_2 라 하면 두 원의 중심거리는

$$\overline{C_1C_2} = \sqrt{\{3-(-1)\}^2+\{6-3\}^2} = 5$$

이므로 두 원은 서로 다른 두 점에서 만난다.

즉, 두 원은 오른쪽 그림과 같

고 원 C_1 위의 점 P, 원 C_2 위

의 점 Q에 대하여 선분 PQ의

길이가 최대가 되는 때는 선

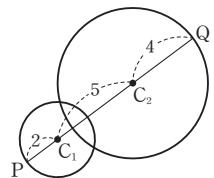
분 C_1C_2 의 연장선이 각 원과

만나는 경우이다.

따라서 구하는 최댓값은

$$\overline{PC_1} + \overline{C_1C_2} + \overline{C_2Q} = 2 + 5 + 4 = 11$$

답 11



254

세 점 A, B, P를 지나는 원은

반지름의 길이가 4이고

점 P(2, 0)에서 x축에 접하므로

중심의 좌표가 $(2, 4)$ 이다.

즉, 이 원의 방정식은

$$(x-2)^2+(y-4)^2=16$$

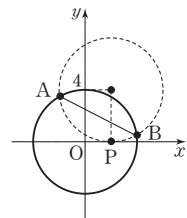
$$\therefore x^2+y^2-4x-8y+4=0$$

직선 AB는 원 $x^2+y^2=16$ 과

원 $x^2+y^2-4x-8y+4=0$ 의 교점을 지나는 직선이므로

직선 AB의 방정식은

$$x^2+y^2-4x-8y+4-(x^2+y^2-16)=0$$



$$x+2y-5=0$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

이 직선의 기울기가 m 이므로

$$m = -\frac{1}{2}$$

답 $-\frac{1}{2}$

255

점 P의 좌표를 (x_1, y_1) ($x_1 > 0, y_1 > 0$)이라 하면

점 P에서의 접선의 방정식은

$$x_1x + y_1y = 4 \quad \therefore B\left(\frac{4}{x_1}, 0\right)$$

두 점 P, H의 x 좌표가 서로 같으므로

$$H(x_1, 0)$$

x 축 위의 세 점 A(-2, 0), H, B에 대하여

$$2\overline{AH} = \overline{HB} \text{이므로}$$

$$2(x_1 + 2) = \frac{4}{x_1} - x_1$$

$$3x_1^2 + 4x_1 - 4 = 0, (x_1 + 2)(3x_1 - 2) = 0$$

$$\therefore x_1 = \frac{2}{3} \quad (\because x_1 > 0)$$

즉, B(6, 0)이므로

$$\overline{AB} = 6 - (-2) = 8$$

한편, 점 P(x_1, y_1)은 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의 점이므로

$$x_1^2 + y_1^2 = 4$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 + y_1^2 = 4, y_1^2 = \frac{32}{9}$$

$$\therefore y_1 = \frac{4\sqrt{2}}{3} \quad (\because y_1 > 0)$$

$$\therefore \overline{PH} = y_1 = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

따라서 삼각형 PAB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{PH} = \frac{1}{2} \times 8 \times \frac{4\sqrt{2}}{3} = \frac{16\sqrt{2}}{3}$$

답 ④

4도형의 이동

1 평행이동

100~102쪽

257

주어진 평행이동은 x 축의 방향으로 $4-2=2$ 만큼, y 축

의 방향으로 $1-3=-2$ 만큼 평행이동한 것이다.

이 평행이동에 의하여 점 (8, 7)로 옮겨지는 점의

좌표를 (a, b)로 놓으면

$$(a, b) \rightarrow (a+2, b-2)$$

$$\text{에서 } a+2=8, b-2=7$$

$$\therefore a=6, b=9$$

따라서 구하는 점의 좌표는 (6, 9)이다.

답 (6, 9)

259

[1단계] $2x+y-3=0$ 에 x 대신 $x-2$, y 대신 $y+4$ 를 대

입하면 평행이동한 직선의 방정식은

$$2(x-2) + (y+4) - 3 = 0$$

$$\therefore 2x+y-3=0$$

[2단계] 이 직선이 점 (4, k)를 지나므로

$$2 \times 4 + k - 3 = 0$$

$$\therefore k = -5$$

답 -5

261

$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$ 에 x 대신 $x-a$, y 대신 $y-b$

를 대입하면

$$(x-a-1)^2 + (y-b+2)^2 = 16 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x^2 + y^2 = 16$ 이 ①과 일치해야 하므로

$$a = -1, b = 2$$

$$\therefore a+b=1$$

답 1

다른 풀이

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16 \rightarrow x^2 + y^2 = 16 \text{에서}$$

두 원의 중심만 가지고 생각해도 된다.

$$\text{즉, } (1, -2) \rightarrow (0, 0) \text{이므로}$$

$$a = 0 - 1 = -1, b = 0 - (-2) = 2$$

$$\therefore a+b=1$$

+ 풍산자 방법

원을 평행이동하여도 원의 반지름의 길이가 변하지 않으므로 원의 평행이동은 원의 중심의 평행이동으로 생각할 수 있다.

262

점 A(a, 1)을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점을 A'(4, 2)라 하면

$$a+m=4, 1+n=2 \quad \therefore n=1$$

점 B(-2, b)를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 점이 B'(0, 3)이므로

$$-2+m=0, b+1=3$$

$$\therefore m=2, b=2$$

이때 $a+m=4$ 에서 $a+2=4$ 이므로

$$a=2$$

즉, x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동하여 점 (2, 2)로 옮겨지는 점의 좌표를 (p, q)라 하면

$$p+2=2, q+1=2 \quad \therefore p=0, q=1$$

따라서 구하는 점의 좌표는 (0, 1)이다.

답 (0, 1)

263

직선 $ax+y+2=0$ 을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$a(x-3)+(y-b)+2=0$$

$$\therefore ax+y-3a-b+2=0$$

이 직선이 처음 직선 $ax+y+2=0$ 과 일치하므로

$$-3a-b+2=2 \quad \therefore 3a+b=0 \quad \text{답 } 0$$

264

직선 $y=ax+b$ 를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$y-1=a(x+2)+b$$

$$\therefore y=ax+2a+b+1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$x+2y+6=0 \text{에서 } y=-\frac{1}{2}x-3 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

직선 ⑦이 직선 ⑧과 수직이므로

$$a \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \quad \therefore a=2$$

또, 직선 ⑧은 y축과 점 (0, -3)에서 만나고 직선 ⑦,

⑩이 y축 위의 한 점에서 만나므로 직선 ⑦도 점

(0, -3)을 지난다.

즉, $x=0, y=-3, a=2$ 를 ⑦에 대입하면

$$-3=2 \times 2 + b + 1 \quad \therefore b=-8$$

$$\therefore a+b=2+(-8)=-6 \quad \text{답 } -6$$

265

이차함수 $y=x^2-2x+3$ 의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 m+2만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$$y-(m+2)=(x-m)^2-2(x-m)+3$$

$$\therefore y=(x-m-1)^2+m+4$$

즉, 포물선의 꼭짓점의 좌표는

$$(m+1, m+4)$$

이때 포물선이 x축에 접하므로

$$m+4=0 \quad \therefore m=-4$$

따라서 포물선의 꼭짓점의 좌표는 (-3, 0)이므로 구하는 x좌표는 -3이다. **답** -3

다른 풀이

$$y=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$$

이므로 이차함수 $y=x^2-2x+3$ 의 그래프의 꼭짓점을 A라 하면 A(1, 2)

점 A를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 m+2만큼 평행이동한 점을 A'이라 하면

$$A'(1+m, 2+m+2), \text{ 즉 } A'(m+1, m+4)$$

점 A'이 x축 위의 점이어야 하므로 y좌표가 0이다.

$$\text{즉, } m+4=0 \text{에서 } m=-4$$

$$\therefore A'(-3, 0)$$

따라서 평행이동한 포물선의 꼭짓점의 x좌표는 -3이다.

+ 풍산자 비법

포물선을 평행이동하여도 그 모양이 변하지 않으므로 포물선의 평행이동은 포물선의 꼭짓점의 평행이동으로 생각할 수 있다.

266

$$x^2+y^2+6x-2y+5=0 \text{에서}$$

$$(x+3)^2+(y-1)^2=5$$

이므로 이 원은 중심이 점 (-3, 1)이고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$ 인 원이다.

원을 평행이동하면 원의 중심은 옮겨지지만 반지름의 길이는 변하지 않는다. 즉, 평행이동하여 주어진 원과 겹쳐지기 위해서는 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$ 인 원이어야 한다.

ㄱ. 원 $x^2+y^2=25$ 는 중심이 원점이고 반지름의 길이가 5인 원이다.

ㄴ. 원 $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 5$ 는 중심이 점 $(4, -1)$ 이고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$ 인 원이다.

ㄷ. $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 15 = 0$ 에서

$$(x-2)^2 + (y+4)^2 = 5$$

이 원은 중심이 점 $(2, -4)$ 이고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$ 인 원이다.

따라서 평행이동하여 주어진 원과 겹쳐질 수 있는 것은

ㄴ, ㄷ이다. **답** ㄴ, ㄷ

참고

ㄴ의 원을 x 축의 방향으로 -7 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동하면 주어진 원과 겹쳐진다.

ㄷ의 원을 x 축의 방향으로 -5 만큼, y 축의 방향으로 5 만큼 평행이동하면 주어진 원과 겹쳐진다.

267

세 점 $A(1, 4)$, $B(-5, -3)$, $C(7, 2)$ 를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 점이 각각 A' , B' , C' 이므로

$$A'(1+m, 6), B'(-5+m, -1),$$

$$C'(7+m, 4)$$

삼각형 $A'B'C'$ 의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{(1+m) + (-5+m) + (7+m)}{3}, \frac{6 + (-1) + 4}{3} \right)$$

$$\therefore (m+1, 3)$$

이 점이 점 $(4, n)$ 과 일치하므로

$$m+1=4, 3=n$$

$$\therefore m=3, n=3$$

$$\therefore m+n=3+3=6$$

답 6

다른 풀이

세 점 A, B, C 를 동일한 평행이동에 의하여 옮긴 점이 각각 A', B', C' 이므로 삼각형 ABC 의 무게중심을 같은 평행이동에 의하여 옮기면 삼각형 $A'B'C'$ 의 무게중심과 일치한다.

삼각형 ABC 의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{1+(-5)+7}{3}, \frac{4+(-3)+2}{3} \right), \text{ 즉 } (1, 1)$$

점 $(1, 1)$ 을 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 점이 점 $(4, n)$ 과 일치하므로

$$1+m=4, 1+2=n$$

$$\therefore m=3, n=3$$

$$\therefore m+n=3+3=6$$

2 대칭이동

104~110쪽

269

답 (1) $(2, -3)$ (2) $(-2, 3)$ (3) $(-2, -3)$
(4) $(3, 2)$ (5) $(-3, -2)$

271

오른쪽 그림과 같이 점 $P(2, 3)$

을 점 $(4, 5)$ 에 대하여 대칭이동한

점 Q 의 좌표를 (a, b) 라 하면 선분

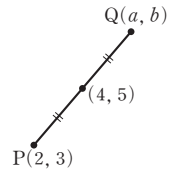
PQ 의 중점이 점 $(4, 5)$ 이므로

$$\frac{2+a}{2}=4, \frac{3+b}{2}=5$$

$$\therefore a=6, b=7$$

$$\therefore Q(6, 7)$$

답 $Q(6, 7)$



273

오른쪽 그림과 같이 대칭이동한 점

Q 의 좌표를 (a, b) 라 하면

(i) 선분 PQ 의 중점

$$M\left(\frac{-2+a}{2}, \frac{5+b}{2}\right) \text{가 직선}$$

$y=-x+1$ 위에 있으므로

$$\frac{5+b}{2} = -\frac{-2+a}{2} + 1$$

$$\therefore a+b+1=0$$

.....㉠

(ii) 선분 PQ 와 직선 $y=-x+1$ 은 수직이므로

$$\frac{b-5}{a+2} \times (-1) = -1$$

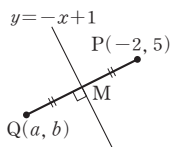
$$\therefore a-b+7=0$$

.....㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-4, b=3$

$$\therefore Q(-4, 3)$$

답 $Q(-4, 3)$



275

오른쪽 그림과 같이 점

$B(6, 3)$ 을 직선 $y=x$ 에 대하

여 대칭이동한 점을 B' 이라

하면 $B'(3, 6)$ 이고

$\overline{BP} = \overline{B'P}$ 이므로

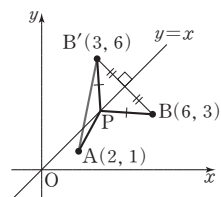
$$\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{AP} + \overline{B'P}$$

$$\geq \overline{AB'}$$

$$= \sqrt{(3-2)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{26}$$

따라서 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은 $\sqrt{26}$ 이다.

답 $\sqrt{26}$



$$(1) -y=2x+3 \text{에서 } y=-2x-3$$

$$(2) y=2 \times (-x)+3 \text{에서 } y=-2x+3$$

$$(3) -y=-2x+3 \text{에서 } y=2x-3$$

$$(4) x=2y+3 \text{에서 } y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$$

$$(5) -x=-2y+3 \text{에서 } y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$$

$$\text{답 (1) } y=-2x-3 \quad (2) y=-2x+3$$

$$(3) y=2x-3 \quad (4) y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$$

$$(5) y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$$

오른쪽 그림과 같이 원의 중심 $P(2, 2)$ 를 점 $(4, 4)$ 에 대하여 대칭이동한 점을 $Q(a, b)$ 라 하면 선분 PQ 의 중점이 점 $(4, 4)$ 이므로

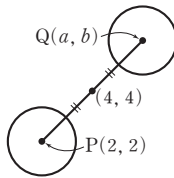
$$\frac{2+a}{2}=4, \quad \frac{2+b}{2}=4$$

$$\therefore a=6, b=6 \quad \therefore Q(6, 6)$$

원을 대칭이동하여도 반지름의 길이는 변하지 않으므로 대칭이동한 원은 중심이 $(6, 6)$ 이고 반지름의 길이는 1인 원이다.

$$\therefore (x-6)^2+(y-6)^2=1$$

$$\text{답 } (x-6)^2+(y-6)^2=1$$



오른쪽 그림과 같이 두 원의 중심 $P(4, 0)$, $Q(0, 2)$ 에 대하여 직선 l 은 선분 PQ 의 수직이등분선이다.

직선 PQ 의 기울기는

$$\frac{2-0}{0-4}=-\frac{1}{2}$$

즉, 선분 PQ 에 수직인 직선 l 의 기울기는 2이다.

선분 PQ 의 중점 M 의 좌표는

$$\left(\frac{4+0}{2}, \frac{0+2}{2}\right)$$

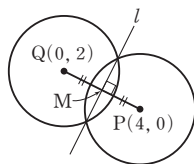
$$\therefore M(2, 1)$$

따라서 기울기가 2이고, 점 $M(2, 1)$ 을 지나는 직선 l 의 방정식은

$$y-1=2(x-2)$$

$$\therefore y=2x-3$$

$$\text{답 } y=2x-3$$



점 $P(-3, 1)$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 점이 Q 이므로

$$Q(3, 1)$$

점 $Q(3, 1)$ 을 직선 $y=-x$ 에 대하여 대칭이동한 점이 R 이므로

$$R(-1, -3)$$

따라서 선분 PR 의 길이는

$$PR=\sqrt{(-1+3)^2+(-3-1)^2}=2\sqrt{5}$$

$$\text{답 } 2\sqrt{5}$$

오른쪽 그림과 같이 선분 PQ 의 중점을 M 이라 하자.

선분 PQ 의 중점

$$M\left(\frac{1+a}{2}, \frac{4+b}{2}\right) \text{가 직선}$$

$x-2y+2=0$ 위에 있으므로

$$\frac{1+a}{2}-2 \times \frac{4+b}{2}+2=0$$

$$\therefore a-2b=3$$

$$\dots\dots \textcircled{7}$$

선분 PQ 와 직선 $x-2y+2=0$, 즉 $y=\frac{1}{2}x+1$ 은 수직

이므로

$$\frac{b-4}{a-1} \times \frac{1}{2}=-1$$

$$\therefore 2a+b=6$$

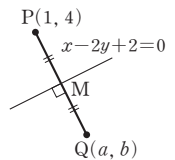
$$\dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 을 연립하여 풀면

$$a=3, b=0$$

$$\therefore a^2+b^2=9$$

$$\text{답 } 9$$



직선 $2ax+(1-b)y+1=0$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$2ay+(1-b)x+1=0$$

이 직선이 직선 $(a+2)x-by+1=0$ 과 일치하므로

$$1-b=a+2, 2a=-b$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=1, b=-2$$

따라서 점 $(1, -2)$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-1, 2)$ 이다.

$$\text{답 } (-1, 2)$$

포물선 $y=x^2-2ax-2$ 를 y 축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$$y=(-x)^2-2a \times (-x)-2$$

$$\therefore y=x^2+2ax-2=(x+a)^2-a^2-2$$

즉, 대칭이동한 포물선의 꼭짓점의 좌표는

$(-a, -a^2-2)$ 이고, 이 점이 직선 $2x-y-1=0$ 위에 있으므로

$$2 \times (-a) - (-a^2-2) - 1 = 0$$

$$a^2-2a+1=0, (a-1)^2=0$$

$$\therefore a=1$$

답 1

오른쪽 그림과 같이 두 원의 중심 $P(8, 0)$, $Q(0, 4)$ 에 대하여 직선 l 은 선분 PQ 의 수직이등분선이다.

직선 PQ 의 기울기는

$$\frac{0-4}{8-0} = -\frac{1}{2} \text{ 이므로 구하는}$$

직선의 기울기는 2이다.

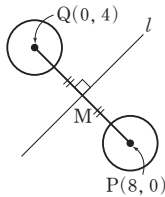
선분 PQ 의 중점 M 의 좌표는

$$\left(\frac{8+0}{2}, \frac{0+4}{2}\right) \therefore M(4, 2)$$

따라서 기울기가 2이고, 점 $M(4, 2)$ 를 지나는 직선 l 의 방정식은

$$y-2=2(x-4)$$

$$\therefore y=2x-6$$



답 $y=2x-6$

오른쪽 그림과 같이 점

$A(2, 3)$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 점을 A' 이라

하면 $A'(-2, 3)$

점 $B(6, 5)$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 B' 이라

하면 $B'(6, -5)$

이때 $\overline{AP}=\overline{A'P}$, $\overline{BQ}=\overline{B'Q}$ 이므로

$$\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{B'Q}$$

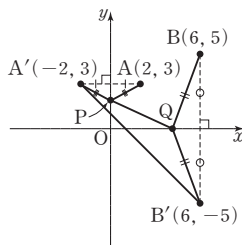
$$\geq \overline{A'B'}$$

$$=\sqrt{(6+2)^2+(-5-3)^2}$$

$$=8\sqrt{2}$$

따라서 $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$ 의 최솟값은 $8\sqrt{2}$ 이다.

답 $8\sqrt{2}$



점 $(2, -3)$ 이 평행이동 $(x, y) \rightarrow (x+a, y+b)$ 에 의하여 옮겨진 점이 $(1, 1)$ 이므로

$$2+a=1, -3+b=1 \therefore a=-1, b=4$$

즉, 직선 $2x-3y+5=0$ 을 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$2(x+1)-3(y-4)+5=0$$

$$\therefore 2x-3y+19=0$$

이 직선이 점 $(c, 5)$ 를 지나므로

$$2c-3 \times 5+19=0, 2c=-4 \therefore c=-2$$

$$\therefore a+b-c=-1+4-(-2)=5$$

답 5

직선 $3x+4y+17=0$ 을 x 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$3(x-n)+4y+17=0$$

$$\therefore 3x+4y-3n+17=0$$

이 직선이 원 $x^2+y^2=1$ 에 접하므로 원의 중심 $(0, 0)$

과 이 직선 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 1과 같다.

$$\text{즉, } \frac{|-3n+17|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1 \text{ 이므로 } |-3n+17|=5$$

$$-3n+17=\pm 5 \therefore n=4 \text{ 또는 } n=\frac{22}{3}$$

따라서 구하는 자연수 n 의 값은 4이다.

답 ④

점 $A(a+3, 2b+1)$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 점 A' 의 좌표는

$$A'(-a-3, -2b-1)$$

이 점이 $(a-5, 2b+7)$ 과 일치하므로

$$-a-3=a-5, -2b-1=2b+7$$

따라서 $a=1, b=-2$ 이므로

$$a+b=-1$$

답 -1

원 $(x-1)^2+(y-a)^2=r^2$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$(-x-1)^2+(y-a)^2=r^2$$

$$\therefore (x+1)^2+(y-a)^2=r^2$$

이 원을 x 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 원의 방정식은

$$(x+3+1)^2 + (y-a)^2 = r^2$$

$$\therefore (x+4)^2 + (y-a)^2 = r^2$$

이 원이 x 축과 y 축에 모두 접하므로 원의 중심의 x 좌표, y 좌표의 절댓값은 모두 원의 반지름의 길이와 같다.

따라서 $|-4| = |a| = |r|$ 이므로

$$a=r=4 \quad (\because a>0, r>0)$$

$$\therefore a+r=8$$

답 8

292

두 점 $A(2, -5)$, $B(-4, 1)$ 이 직선 l 에 대하여 대칭이므로 직선 l 은 선분 AB 의 수직이등분선이다.

직선 AB 의 기울기는 $\frac{1-(-5)}{-4-2} = -1$ 이므로 직선 l 의

기울기는 1이다.

선분 AB 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{2+(-4)}{2}, \frac{-5+1}{2} \right), \text{ 즉 } (-1, -2)$$

기울기가 1이고, 점 $(-1, -2)$ 를 지나는 직선 l 의 방정식은

$$y-(-2)=x-(-1)$$

$$\therefore y=x-1$$

따라서 직선 $y=x-1$ 의 x 절편은 1, y 절편은 -1 이므로 직선 l 과 x 축, y 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 1 \times |-1| = \frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

293

원의 중심 $(-1, 4)$ 를 점 $(1, 2)$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (a, b) 라 하면

$$\frac{-1+a}{2} = 1, \frac{4+b}{2} = 2$$

$$\therefore a=3, b=0$$

원을 대칭이동해도 반지름의 길이는 변하지 않으므로 구하는 원은 중심이 $(3, 0)$ 이고 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 원이다.

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-3)^2 + y^2 = 2$$

답 ④

294

점 P 의 좌표를 (a, b) 라 하자.

점 P 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

(b, a)

점 (b, a) 를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(b+1, a-3)$$

점 $(b+1, a-3)$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$$(b+1, -a+3)$$

점 $(b+1, -a+3)$ 이 원래의 점 $P(a, b)$ 와 일치해야 하므로

$$a=b+1, b=-a+3$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2, b=1$

따라서 점 P 의 좌표는 $(2, 1)$ 이다.

답 $P(2, 1)$

295

선분 AA' 과 선분 BB' 은 평행하므로 삼각형 APA' 과 삼각형 BPB' 은 닮음이고, 두

삼각형의 넓이의 비가

$9:4$ 이므로 삼각형 APA' 과

삼각형 BPB' 의 닮음비는

$$\overline{AA'} : \overline{BB'} = 3 : 2$$

$$\text{즉, } 2\overline{AA'} = 3\overline{BB'} \text{에서 } 4\overline{AA'}^2 = 9\overline{BB'}^2 \text{이고}$$

$$A'(a, 6), B'(3, 4) \text{이므로}$$

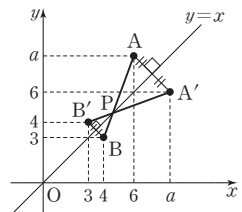
$$4\{(6-a)^2 + (a-6)^2\} = 9\{(4-3)^2 + (3-4)^2\}$$

$$8(a-6)^2 = 18$$

$$(a-6)^2 = \frac{9}{4}, a-6 = \pm \frac{3}{2}$$

$$\therefore a = \frac{15}{2} \quad (\because a > 6)$$

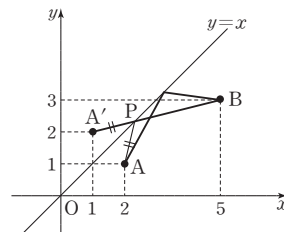
답 $\frac{15}{2}$



296

다음 그림과 같이 점 $A(2, 1)$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 A' 이라 하면 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 가 최소일 때

는 선분 $A'B$ 과 직선 $y=x$ 의 교점이 점 P 일 때이다.



이때 $A'(1, 2)$ 이므로 직선 $A'B$ 의 방정식은

$$y-2 = \frac{3-2}{5-1}(x-1)$$

$$\therefore y = \frac{1}{4}x + \frac{7}{4}$$

이 직선과 직선 $y=x$ 의 교점이 점 P이므로 점 P의 좌표는 $\left(\frac{7}{3}, \frac{7}{3}\right)$

$\overline{AB} = \sqrt{(5-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{13}$ 이고 직선 AB의 방정식은

$$y-1 = \frac{3-1}{5-2}(x-2) \quad \therefore 2x-3y-1=0$$

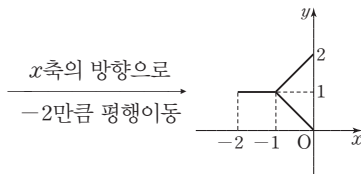
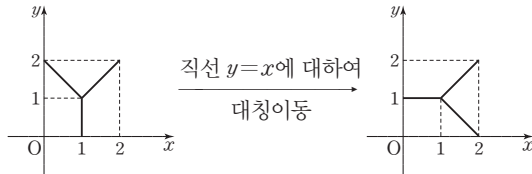
따라서 직선 $2x-3y-1=0$ 과 점 $P\left(\frac{7}{3}, \frac{7}{3}\right)$ 사이의 거리는

$$\frac{\left|2 \times \frac{7}{3} - 3 \times \frac{7}{3} - 1\right|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{\frac{10}{3}}{\sqrt{13}} = \frac{10}{3\sqrt{13}}$$

따라서 삼각형 APB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{13} \times \frac{10}{3\sqrt{13}} = \frac{5}{3} \quad \text{답 } \frac{5}{3}$$

297



답 ②

298

x 축에 대한 대칭이동 f 와 직선 $y=x$ 에 대한 대칭이동 g 를 번갈아가며 점 $(2, 1)$ 을 이동시키면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} (2, 1) &\xrightarrow{f} (2, -1) && \xrightarrow{g} (-1, 2) \\ &\xrightarrow{f} (-1, -2) && \xrightarrow{g} (-2, -1) \\ &\xrightarrow{f} (-2, 1) && \xrightarrow{g} (1, -2) \\ &\xrightarrow{f} (1, 2) && \xrightarrow{g} (2, 1) \\ &\xrightarrow{f} \dots \end{aligned}$$

따라서 점 $(2, 1)$ 을

$$f \longrightarrow g \longrightarrow f \longrightarrow g \longrightarrow f \longrightarrow g \longrightarrow f \longrightarrow g$$

로 8번 이동하면 처음의 점 $(2, 1)$ 이 된다.

이때 $1111 = 8 \times 138 + 7$ 이므로 점 $(2, 1)$ 을

1111번 이동한 점의 좌표는 $(1, 2)$ 이다.

답 $(1, 2)$

299

원 $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$(-x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$$

$$\therefore (x+2)^2 + (y-2)^2 = 1$$

점 A를 y 축에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라 하면 점

A'은 원 $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 1$ 위의 점이고

$\overline{AP} = \overline{A'P}$ 이다.

두 원 $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$,

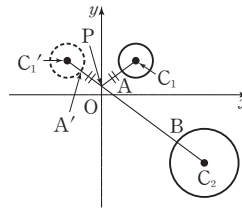
$(x-6)^2 + (y+4)^2 = 4$ 의 중심을 각각 C_1, C_2 ,

원 $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 1$ 의 중심을 C_1' 이라 하면

$C_1(2, 2), C_2(6, -4), C_1'(-2, 2)$

이때 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 값은 세 점 A', P, B가 선분 $C_1'C_2$

위에 다음 그림과 같이 있을 때 최소이다.



따라서 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은

$$\overline{C_1'C_2} - \overline{C_1'A'} - \overline{C_2B}$$

$$= \sqrt{\{6 - (-2)\}^2 + \{(-4) - 2\}^2} - 1 - 2$$

$$= 10 - 3 = 7$$

답 7

집합과 명제

1 집합

1 집합과 부분집합

118~129쪽

002

ㄱ은 집합이 아니다. '잘하는'의 기준이 확실하지 않다.
ㄴ은 집합이다.

$1 < x < 2$ 를 만족시키는 자연수는 없으므로 공집합이다.

ㄷ은 집합이다.

$x^2 = -1$ 을 만족시키는 실수는 없으므로 공집합이다.

ㄹ은 집합이 아니다. '맛있는'의 기준이 확실하지 않다.
따라서 집합이 아닌 것은 ㄱ, ㄹ이다. **답** ㄱ, ㄹ

004

① 0은 자연수가 아니다.

② $0.\dot{9} = \frac{9}{9} = 1$ 이므로 1은 정수이다.

③ $\sqrt{4} = 2$ 이므로 2는 유리수이다.

④ $\sqrt{2}$ 는 무리수이다.

⑤ π 는 무리수이므로 실수이다.

따라서 옳지 않은 것은 ③이다. **답** ③

006

(1) $A = \{0, 1, 2\}$ 이므로 다음 표에서

$x \backslash y$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	3
2	2	3	4

$B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

(2) $A = \{0, 1, 2\}$ 이므로 다음 표에서

$x^2 \backslash y^2$	0	1	2
0	0	1	4
1	1	2	5
2	4	5	8

$A \oplus A = \{0, 1, 2, 4, 5, 8\}$

답 (1) $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ (2) $\{0, 1, 2, 4, 5, 8\}$

+ 풍산자 비법

조건제시법으로 정의된 집합은 원소의 모양을 알려 주는 구분선 |의 앞부분(원소를 대표하는 문자 또는 식)에 주어진 문자의 값 하나하나를 대입한다. 이것을 원소나열법으로 나타낼 때 중복된 원소는 한 번만 쓴다.

008

조건 (나)에 의하여 집합 A 는 원소

1, 9 또는 2, 8 또는 3, 7 또는 4, 6 또는 5

로 만들어지는 집합이다. 그런데 조건 (가)에 의하여

$1 \in A$ 이므로 조건을 만족시키는 원소의 개수가 가장 작은 집합 A 는 $\{1, 9\}$ 이다. **답** $\{1, 9\}$

010

ㄱ. $\{-2, 2\}$ 이므로 유한집합이다.

ㄴ. $\{6, 12, 18, 24, \dots\}$ 이므로 무한집합이다.

ㄷ. $\{-1, 0, 1\}$ 이므로 유한집합이다.

ㄹ. 2를 제외한 소수는 모두 홀수이다. 홀수인 소수는 무수히 많으므로 무한집합이다.

따라서 유한집합인 것은 ㄱ, ㄷ이다. **답** ㄱ, ㄷ

012

① $n(\{\emptyset\}) = 1, n(\{1\}) = 1$ 이므로

$$n(\{\emptyset\}) + n(\{1\}) = 2$$

② $\emptyset$ 도 집합 $\{\emptyset, 4\}$ 의 원소이므로 $n(\{\emptyset, 4\}) = 2$

③ $n(\{1, 2\}) = 2, n(\{3, 4\}) = 2$ 이므로

$$n(\{1, 2\}) = n(\{3, 4\})$$

④ $x^2 - x - 6 = 0, (x+2)(x-3) = 0$ 에서

$$x = -2 \text{ 또는 } x = 3 \text{ 이므로}$$

$$n(\{x | x \text{는 } x^2 - x - 6 = 0 \text{인 정수}\}) = 2$$

⑤ $A = \{1, 2, 4\}, B = \{1, 5\}$ 에서

$$n(A) = 3, n(B) = 2 \text{ 이므로 } n(A) > n(B)$$

따라서 옳은 것은 ④이다. **답** ④

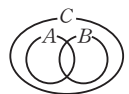
014

ㄱ은 옳지 않다.

오른쪽 그림과 같이 $A \neq B$ 일 때도 있다.

ㄴ은 옳지 않다.

오른쪽 그림과 같이 $B \neq C$ 일 때도 있다.



ㄷ은 옳다.

$x^2=1$ 에서 $x=\pm 1$ 이므로 $A=B$ 이다.

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

답 ㄷ

016

(i) 원소 기호 $\in$ 를 처리한다.

1과 $\{1, 4\}$ 는 집합 A 의 원소이므로 ②, ③은 옳다.

(ii) 부분집합 기호 $\subset$ 를 처리한다.

$\emptyset$ 은 모든 집합의 부분집합이므로 ①은 옳다.

1, 3은 집합 A 의 원소이므로 $\{1, 3\}$ 은 A 의 부분집합이다. 따라서 ④는 옳다.

또, $\{1, 4\}$ 는 집합 A 의 부분집합이 아니므로 ⑤는 옳지 않다.

(i), (ii)에서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

+ 풍산자 비법

두 기호 $\in$, $\subset$ 의 의미 파악이 핵심이다.

a 가 집합 A 의 원소이면 $\Rightarrow a \in A, \{a\} \subset A$

018

$A \subset B$ 이므로 $2 \in A$ 에서 $2 \in B$

$2 \in B$ 에서 $a+2=2$ 또는 $a^2+3=2$

이때 $a^2+3=2$, 즉 $a^2=-1$ 을 만족시키는 실수 a 는 존재하지 않으므로

$a+2=2$ 에서 $a=0$

$a=0$ 일 때 $A=\{2, 4\}$, $B=\{2, 3, 4\}$ 이므로 $A \subset B$

따라서 구하는 실수 a 의 값은 0이다.

답 0

020

$A=B$ 이므로 $5 \in B$ 에서 $5 \in A$

$5 \in A$ 에서 $a^2+5=5$, $a^2=0 \quad \therefore a=0$

$a=0$ 일 때, $A=\{1, 4, 5\}$, $B=\{1, 5, b-1\}$ 이므로

$b-1=4 \quad \therefore b=5$

답 $a=0, b=5$

022

(1) 원소의 개수가 6이므로 부분집합의 개수는

$$2^6=64$$

(2) 진부분집합은 자기 자신을 제외한 부분집합이므로 그 개수는

$$2^6-1=63$$

(3) 구하는 부분집합은 1, 2, 3을 빼고 생각한

$\{4, 5, 6\}$ 의 부분집합과 같으므로 그 개수는

$$2^{6-3}=2^3=8$$

(4) 구하는 부분집합은 4, 5를 빼고 생각한

$\{1, 2, 3, 6\}$ 의 부분집합에 4, 5를 끼운 것과 같으므로 그 개수는

$$2^{6-2}=2^4=16$$

(5) 구하는 부분집합은 1, 2, 5를 빼고 생각한

$\{3, 4, 6\}$ 의 부분집합에 1, 2를 끼운 것과 같으므로 그 개수는

$$2^{6-2-1}=2^3=8$$

답 (1) 64 (2) 63 (3) 8 (4) 16 (5) 8

024

원소 a_1, a_2, a_n 을 포함하는 부분집합의 개수가 32이므로

$$2^{n-3}=32, 2^{n-3}=2^5$$

$$n-3=5 \quad \therefore n=8$$

답 8

026

구하는 부분집합의 개수는

(전체 부분집합의 개수)

—(홀수 1, 3을 포함하지 않는 부분집합의 개수)

와 같다.

(i) 전체 부분집합의 개수는

$$2^4=16$$

(ii) 홀수 1, 3을 포함하지 않는 부분집합의 개수는

$$2^{4-2}=2^2=4$$

(i), (ii)에서 구하는 부분집합의 개수는

$$16-4=12$$

답 12

028

집합 B 를 원소나열법으로 나타내면

$$B=\{1, 2, 3, \dots, 10\}$$

B 의 부분집합 중 A 의 원소를 반드시 포함하는 집합은

집합 B 에서 A 의 원소 2, 3, 7을 빼고 생각한

$\{1, 4, 5, 6, 8, 9, 10\}$ 의 부분집합에 2, 3, 7을 끼운 것과 같다.

따라서 구하는 집합 X 의 개수는

$$2^{10-3}=2^7=128$$

답 128

029

- ① $\{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$ 인 무한집합이다.
 ② 2보다 작은 소수는 없으므로 $\emptyset$ 이다.
 ③ '작은'의 기준이 명확하지 않으므로 집합이 아니다.
 ④ '가장 큰'은 기준이 명확하므로 집합이다.
 ⑤ $\{31, 33, 35, \dots\}$ 인 무한집합이다.
 따라서 집합이 아닌 것은 ③이다.

답 ③

030

$X = \{1, 2\}$, $Y = \{0, 1, 2\}$ 이므로 [표1]에서

$X \backslash Y$	0	1	2
1	0	1	2
2	0	2	4

[표 1]

$$X \otimes Y = \{0, 1, 2, 4\}$$

$X = \{1, 2\}$, $X \otimes Y = \{0, 1, 2, 4\}$ 이므로 [표2]에서

$X \backslash X \otimes Y$	0	1	2	4
1	0	1	2	4
2	0	2	4	8

[표 2]

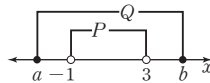
$$X \otimes (X \otimes Y) = \{0, 1, 2, 4, 8\}$$

따라서 집합 $X \otimes (X \otimes Y)$ 의 원소의 개수는 5이다.

답 5

031

두 집합 P, Q 를 $P \subset Q$ 가 되도록 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$P \subset Q$ 이므로 $a \leq -1$, $b \geq 3$ 이어야 한다.

따라서 a 의 최댓값은 -1 , b 의 최솟값은 3 이므로

$$-1 + 3 = 2$$

답 2

+ 풍산자 비법

조건이 범위로 주어지면 각 집합을 수직선을 이용하여 나타내고, 포함 관계가 성립하는 조건을 찾는다. 이때 경계에서의 포함 여부에 주의한다.

032

$A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 에서 $A = B$

따라서 $6 \in A$ 이므로 $6 \in B$

$6 \in B$ 에서 $a^2 - a = 6$ 이므로

$$a^2 - a - 6 = 0, (a+2)(a-3) = 0$$

$$\therefore a = -2 \text{ 또는 } a = 3$$

(i) $a = -2$ 일 때, $A = \{6, -11, 4\}$, $B = \{4, 9, 6\}$ 이므로

$$A \neq B$$

(ii) $a = 3$ 일 때, $A = \{6, 4, 9\}$, $B = \{4, 9, 6\}$ 이므로

$$A = B$$

(i), (ii)에서 $a = 3$

답 3

033

$$A = \{1, 2, 3, \dots, k\}$$

집합 A 의 부분집합 중에서 1, 2, 3을 반드시 원소로 갖고 4, 5를 원소로 갖지 않는 부분집합은 1, 2, 3, 4, 5를 빼고 생각한 $\{6, 7, 8, \dots, k\}$ 의 부분집합에 1, 2, 3을 끼운 것과 같으므로 그 개수는

$$2^{k-3-2} = 64 = 2^6, k-5=6$$

$$\therefore k = 11$$

답 11

034

조건 (나)에서 x 와 $\frac{12}{x}$ 가 모두 자연수이므로 x 는 12의 양의 약수이다.

즉, 집합 X 의 원소가 될 수 있는 수는 1, 2, 3, 4, 6, 12이고 1과 12, 2와 6, 3과 4는 어느 하나가 집합 X 의 원소이면 나머지 하나도 반드시 집합 X 의 원소이다.

따라서 집합 X 의 개수는 집합 $\{1, 2, 3\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합의 개수와 같으므로

$$2^3 - 1 = 7$$

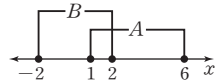
답 7

2 집합의 연산

131~143쪽

036

두 집합 A, B 를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$$(1) A \cup B = \{x | -2 \leq x \leq 6\}$$

$$(2) A \cap B = \{x | 1 \leq x \leq 2\}$$

$$(3) B - A = \{x | -2 \leq x < 1\}$$

$$(4) B^C = \{x | x < -2 \text{ 또는 } x > 2\}$$

$$\text{답 } (1) \{x | -2 \leq x \leq 6\} \quad (2) \{x | 1 \leq x \leq 2\}$$

$$(3) \{x | -2 \leq x < 1\} \quad (4) \{x | x < -2 \text{ 또는 } x > 2\}$$

038

$A \cap B = \{1, 5\}$ 에서 $5 \in A$ 이므로

$$a^2 + 1 = 5, a^2 = 4$$

$$\therefore a = 2 \text{ 또는 } a = -2$$

(i) $a = 2$ 일 때, $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{0, 5, 1\}$

$$\therefore A \cap B = \{1, 5\}$$

(ii) $a = -2$ 일 때, $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{0, 1, -7\}$

$$\therefore A \cap B = \{1\}$$

(i), (ii)에서 구하는 실수 a 의 값은 2이다.

답 2

040

오른쪽 벤 다이어그램에서

$$\textcircled{1} A \cup B = A$$

$$\textcircled{2} A \cap B = B$$

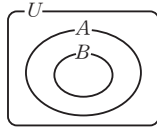
$$\textcircled{3} A^c \subset B^c$$

$$\textcircled{4} B - A = \emptyset$$

$$\textcircled{5} A \cap B^c \neq \emptyset$$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

답 ⑤



042

[1단계] $A \cup X = A$ 에서 $X \subset A$

$$(A \cap B) \cup X = X \text{에서 } (A \cap B) \subset X$$

$$\therefore (A \cap B) \subset X \subset A$$

$$\therefore \{5, 6\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

[2단계] 집합 X 는 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 의 부분집합 중 5, 6을 반드시 포함하는 것이므로 집합 X 의 개수는

$$2^{6-2} = 2^4 = 16$$

답 16

044

$$(1) (A \cap B^c) \cup B = (A \cup B) \cap (B^c \cup B) \leftarrow \text{분배법칙}$$

$$= (A \cup B) \cap U$$

$$= A \cup B$$

$$(2) (A \cup B) \cap (A \cup B^c) = A \cup (B \cap B^c) \leftarrow \text{분배법칙}$$

$$= A \cup \emptyset$$

$$= A$$

답 풀이 참조

046

$$(1) (A^c - B)^c = (A^c \cap B^c)^c$$

$\leftarrow$ 차집합과 여집합의 성질

$$= (A^c)^c \cup (B^c)^c \leftarrow \text{드모르간의 법칙}$$

$$= A \cup B$$

$$(2) (A - B)^c \cap B$$

$$= (A \cap B^c)^c \cap B \leftarrow \text{차집합과 여집합의 성질}$$

$$= \{A^c \cup (B^c)^c\} \cap B \leftarrow \text{드모르간의 법칙}$$

$$= (A^c \cup B) \cap B$$

$$= B$$

답 풀이 참조

048

$$\{(A \cap B) \cup (A \cap B^c)\} \cup \{(A^c \cap B) \cup (A^c \cap B^c)\}$$

$$= \{A \cap (B \cup B^c)\} \cup \{A^c \cap (B \cup B^c)\} \leftarrow \text{분배법칙}$$

$$= (A \cap U) \cup (A^c \cap U)$$

$$= A \cup A^c$$

$$= U$$

답 U

050

$$[1\text{단계}] \{(A \cap B) \cup (A - B)\} \cap B$$

$$= \{(A \cap B) \cup (A \cap B^c)\} \cap B$$

$\leftarrow$ 차집합과 여집합의 성질

$$= \{A \cap (B \cup B^c)\} \cap B \leftarrow \text{분배법칙}$$

$$= (A \cap U) \cap B$$

$$= A \cap B$$

[2단계] (좌변) = (우변)에서 $A \cap B = B$ 이므로

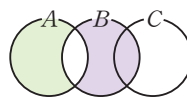
$$B \subset A$$

따라서 옳은 것은 ②이다.

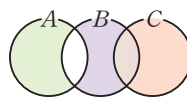
답 ②

052

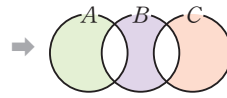
① $A \triangle B$ 를 칠한다



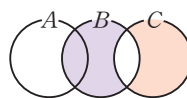
C 를 칠한다



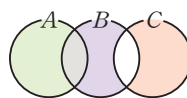
공통인 부분을 뺀다.



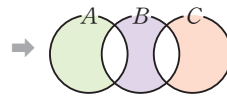
② $B \triangle C$ 를 칠한다

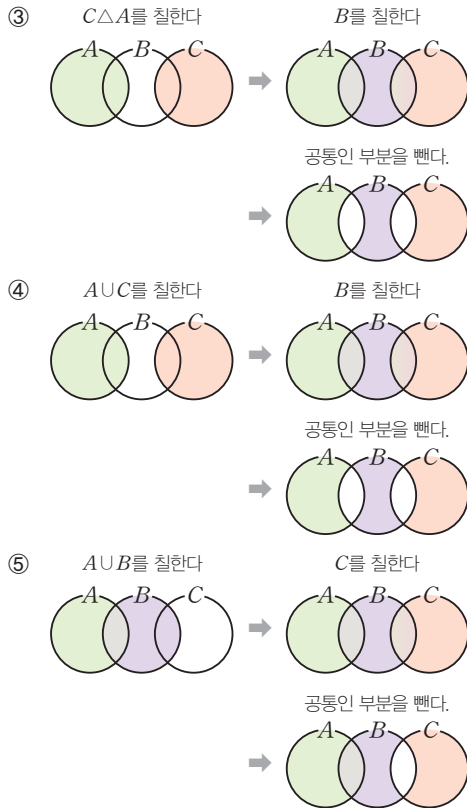


A 를 칠한다



공통인 부분을 뺀다.





따라서 주어진 벤 다이어그램의 색칠한 부분이 나타내는 집합과 다른 것은 ⑤이다. **답 ⑤**

054

[1단계] 드모르간의 법칙에 의하여 $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \text{에서}$$

$$n(A \cup B) = 35 + 27 - 14 = 48$$

[2단계] $n(A^c \cap B^c) = n((A \cup B)^c)$

$$= n(U) - n(A \cup B)$$

$$= 60 - 48$$

$$= 12$$

답 12

056

[1단계] A 와 C 가 서로소이므로 $A \cap C = \emptyset$

$$\therefore A \cap B \cap C = \emptyset$$

[2단계] $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ 에서

$$5 = 2 + 4 - n(A \cap B)$$

$$\therefore n(A \cap B) = 1$$

$$n(B \cup C) = n(B) + n(C) - n(B \cap C) \text{에서}$$

$$7 = 4 + 4 - n(B \cap C)$$

$$\therefore n(B \cap C) = 1$$

[3단계] $n(A \cup B \cup C)$

$$= n(A) + n(B) + n(C)$$

$$- n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A)$$

$$+ n(A \cap B \cap C)$$

$$= 2 + 4 + 4 - 1 - 1 - 0 + 0 = 8$$

답 8

058

1부터 100까지의 자연수의 집합을 U , 4의 배수의 집합을 A , 6의 배수의 집합을 B , 7의 배수의 집합을 C 라 하면

$$n(U) = 100, n(A) = 25, n(B) = 16, n(C) = 14$$

$$A \cap B \text{는 12의 배수의 집합} \Rightarrow n(A \cap B) = 8$$

$$B \cap C \text{는 42의 배수의 집합} \Rightarrow n(B \cap C) = 2$$

$$C \cap A \text{는 28의 배수의 집합} \Rightarrow n(C \cap A) = 3$$

$$A \cap B \cap C \text{는 84의 배수의 집합}$$

$$\Rightarrow n(A \cap B \cap C) = 1$$

(1) 4의 배수 또는 6의 배수의 개수는

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$= 25 + 16 - 8 = 33$$

(2) 4의 배수 또는 6의 배수 또는 7의 배수의 개수는

$$n(A \cup B \cup C)$$

$$= n(A) + n(B) + n(C)$$

$$- n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A)$$

$$+ n(A \cap B \cap C)$$

$$= 25 + 16 + 14 - 8 - 2 - 3 + 1 = 43$$

(3) 4의 배수도 아니고 6의 배수도 아닌 수의 개수는

$$n(A^c \cap B^c) = n((A \cup B)^c)$$

$$= n(U) - n(A \cup B)$$

$$= 100 - 33 = 67$$

(4) 6의 배수이지만 4의 배수가 아닌 수의 개수는

$$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B)$$

$$= 16 - 8 = 8$$

답 (1) 33 (2) 43 (3) 67 (4) 8

+ 풍산자 비법

조건이 문장으로 주어진 집합 문제에서는 다음과 같이 문장 표현을 집합 기호로 바꾸어 나타내는 것이 중요하다. 다음을 기억해 두자.

$$A \text{ 또는 } B, A \text{이거나 } B \Rightarrow A \cup B$$

$$A \text{ 그리고 } B, A \text{이고 } B \Rightarrow A \cap B$$

$$A \text{이지만 } B \text{는 아닌, } A \text{만 해 본} \Rightarrow A - B$$

$$A \text{가 아닌, } A \text{에 속하지 않는} \Rightarrow A^c$$

$$A, B \text{ 둘 다 아닌, } A, B \text{에 둘 다 속하지 않는} \Rightarrow (A \cup B)^c$$

060

전체 학생의 집합을 U , 축구를 좋아하는 학생의 집합을 A , 야구를 좋아하는 학생의 집합을 B 라 하면

$$n(U)=100, n(A)=70, n(B)=60$$

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

에서 $n(A) + n(B)$ 의 값이 130으로 일정하므로 두 종목을 모두 좋아하는 학생 수 $n(A \cap B)$ 의 최댓값과 최솟값은 $n(A \cup B)$ 의 값에 따라 결정된다.

(i) $n(A \cap B)$ 가 최댓값을 가질 때

$\textcircled{1}$ 에서 $n(A \cup B)$ 는 최솟값을 가져야 하므로 $B \subset A$ 이어야 한다.

따라서 $n(A \cap B)$ 의 최댓값은

$$n(B)=60$$

(ii) $n(A \cap B)$ 가 최솟값을 가질 때

$\textcircled{1}$ 에서 $n(A \cup B)$ 는 최댓값을 가져야 하므로 $A \cup B = U$ 이어야 한다.

따라서 $n(A \cap B)$ 의 최솟값은

$$n(A) + n(B) - n(U) = 70 + 60 - 100 = 30$$

(i), (ii)에서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은

$$60 + 30 = 90$$

답 90

062

$A_6 \cap A_8$ 은 6과 8의 최소공배수인 24의 배수의 집합이므로 $(A_6 \cap A_8) \cup A_{12} = A_{24} \cup A_{12}$

이때 24는 12의 배수이므로 $A_{24} \cup A_{12}$ 는 12의 배수의 집합이다.

따라서 $(A_6 \cap A_8) \cup A_{12} = A_{12}$ 이고, $A_k \subset A_{12}$ 를 만족시키는 k 는 12의 배수이므로 k 의 최솟값은 12이다.

답 12

필수 확인 문제

144쪽

063

$A \cup B = \{1, 4, 5, 8\}$ 에서 $8 \in A$ 또는 $8 \in B$ 이므로

$$a-1=8 \text{ 또는 } 3a+2=8$$

$$\therefore a=9 \text{ 또는 } a=2$$

(i) $a=9$ 일 때

$$A = \{4, 5, 8\}, B = \{1, 29\} \text{이므로}$$

$$A \cup B = \{1, 4, 5, 8, 29\}$$

따라서 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=2$ 일 때

$$A = \{1, 4, 5\}, B = \{1, 8\} \text{이므로}$$

$$A \cup B = \{1, 4, 5, 8\}$$

(i), (ii)에서 $a=2$ 이므로

$$B = \{1, 8\}$$

따라서 집합 B 의 모든 원소의 합은

$$1 + 8 = 9$$

답 9

064

$(A \cup B) \cap X = X$ 에서

$$X \subset (A \cup B)$$

$(A - B) \cup X = X$ 에서

$$(A - B) \subset X$$

$$\therefore (A - B) \subset X \subset (A \cup B)$$

$$\therefore \{1, 2\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

집합 X 는 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 의 부분집합 중 1, 2를 반드시 포함하는 것이므로 집합 X 의 개수는

$$2^{6-2} = 2^4 = 16$$

답 16

065

$$(A - B)^c - B = (A \cap B^c)^c \cap B^c$$

← 차집합과 여집합의 성질

$$= (A^c \cup B) \cap B^c \quad \leftarrow \text{드모르간의 법칙}$$

$$= (A^c \cap B^c) \cup (B \cap B^c) \quad \leftarrow \text{분배법칙}$$

$$= (A^c \cap B^c) \cup \emptyset$$

$$= (A \cup B)^c \quad \leftarrow \text{드모르간의 법칙}$$

(좌변) = (우변)에서 $(A \cup B)^c = \emptyset$ 이므로

$$A \cup B = U$$

답 ⑤

066

전체 회원의 집합을 U , 설악산을 등반해 본 회원의 집합을 A , 지리산을 등반해 본 회원의 집합을 B 라 하면

$$n(U)=60, n(A)=35, n(B)=42$$

지리산만 등반해 본 회원의 집합은 $B - A$ 이고,

$$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B)$$

$$= 42 - n(A \cap B) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이므로 $n(B - A)$ 가 최대가 되려면 $n(A \cap B)$ 가 최솟이어야 한다.

$n(A) + n(B) = 35 + 42 = 77$ 이고 $n(U) = 60$ 이므로
 $n(A \cap B)$ 의 최솟값은
 $n(A) + n(B) - n(U) = 77 - 60 = 17$
 따라서 ㉠에서 구하는 최댓값은
 $42 - 17 = 25$

답 25

067

$A_3 \cup A_6$ 은 3의 배수의 집합이므로
 $A_2 \cap (A_3 \cup A_6) = A_2 \cap A_3$
 $A_2 \cap A_3$ 은 2와 3의 최소공배수인 6의 배수의 집합이므로
 $A_2 \cap (A_3 \cup A_6) = A_2 \cap A_3 = A_6$
 따라서 $A_2 \cap (A_3 \cup A_6)$ 이 나타내는 집합은 A_6 이다.

답 ②

참고

$A_3 = \{3, 6, 9, 12, \dots\}$,
 $A_6 = \{6, 12, 18, 24, \dots\}$
 $\therefore A_3 \cup A_6 = \{3, 6, 9, 12, \dots\} = A_3$
 $A_2 = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ 이므로
 $A_2 \cap A_3 = \{6, 12, 18, \dots\} = A_6$
 따라서 $A_2 \cap (A_3 \cup A_6)$ 이 나타내는 집합은 A_6 이다.

068

전체 학생의 집합을 U , 천체 관측, 프로그래밍 실습, 댄스 동아리에 가입한 학생의 집합을 각각 A, B, C 라 하면

$n(U) = n(A \cup B \cup C) = 45$
 $n(A) = 21, n(B) = 19, n(C) = 27,$
 $n(A \cap B \cap C) = 4$
 세 동아리 중 두 동아리에만 가입한 학생 수는
 $n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) - 3 \times n(A \cap B \cap C)$
 $\dots\dots ㉠$

이때
 $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$

이므로
 $45 = 21 + 19 + 27 - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + 4$

$\therefore n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) = 26$

따라서 ㉠에서 구하는 학생 수는

$26 - 3 \times 4 = 14$

답 14

실전 연습문제

146~148쪽

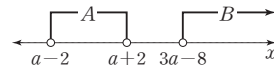
069

$|x - a| < 2$ 에서 $-2 < x - a < 2$ 이므로

$a - 2 < x < a + 2$

$\therefore A = \{x | a - 2 < x < a + 2\}$

이때 두 집합 A 와 B 가 서로소, 즉 $A \cap B = \emptyset$ 이 되도록 두 집합 A, B 를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$a + 2 \leq 3a - 8, 2a \geq 10$

$\therefore a \geq 5$

따라서 상수 a 의 최솟값은 5이다.

답 5

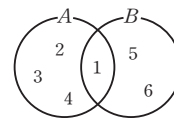
070

$B - A = \{5, 6\}$ 에서 집합 $B - A$ 의 모든 원소의 합은
 $5 + 6 = 11$

이고, 집합 B 의 모든 원소의 합이 12이므로

$A \cap B = \{1\}$

이때 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 이므로 두 집합 A, B 를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



$\therefore A - B = \{2, 3, 4\}$

따라서 집합 $A - B$ 의 모든 원소의 합은

$2 + 3 + 4 = 9$

답 ⑤

071

$A = \{x | 0 \leq x \leq 10, x \text{는 정수}\}$

$= \{0, 1, 2, \dots, 10\}$

$B = \{x | x \text{는 16의 양의 약수}\}$

$= \{1, 2, 4, 8, 16\}$

$C = \{x | x \text{는 10 이하의 소수}\}$

$= \{2, 3, 5, 7\}$

$\therefore A \cap B = \{1, 2, 4, 8\}, A \cap C = \{2, 3, 5, 7\}$

따라서 $(A \cap B) \cup X = (A \cap C) \cup X$ 가 성립하기 위해
 서는 집합 X 가 $\{1, 3, 4, 5, 7, 8\}$ 을 반드시 원소로 가
 져야 하므로 집합 A 의 부분집합 X 의 개수는

$2^{11-6} = 2^5 = 32$

답 32

072

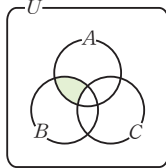
$$\begin{aligned}(A^c \cup B) \cap A &= (A^c \cap A) \cup (B \cap A) \\ &= \emptyset \cup (A \cap B) = A \cap B \\ &= \{2, 4, 6\} \cap \{1, 2, 3\} = \{2\}\end{aligned}$$

따라서 집합 $(A^c \cup B) \cap A$ 의 원소의 개수는 1이다.

답 ②

073

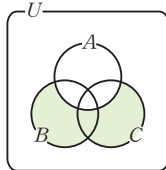
ㄱ. 집합 $(A \cap B) - C$ 를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



ㄴ, ㄷ. 색칠한 부분은 집합 $B \cap C$ 를 나타낸 부분에서 집합 A 를 나타낸 부분을 뺀 것이므로

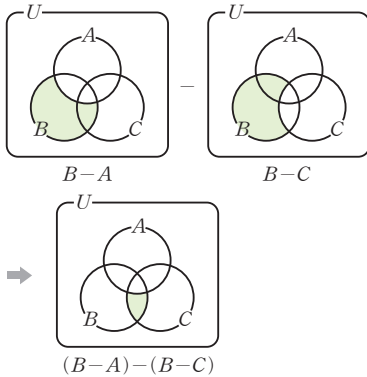
$$(B \cap C) - A = (B \cap C) \cap A^c = (A^c \cap B) \cap C$$

ㄴ. 집합 $(B \cup C) - A$ 를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



ㄹ. 다음 그림과 같이 색칠한 부분은 집합 $B - A$ 를 나타낸 부분에서 집합 $B - C$ 를 나타낸 부분을 뺀 것이므로

$$(B - A) - (B - C)$$



따라서 색칠한 부분을 나타내는 집합인 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ④

074

$$\begin{aligned}\textcircled{1} A \cap (A \cap B)^c &= A \cap (A^c \cup B^c) \quad \leftarrow \text{드모르간의 법칙} \\ &= (A \cap A^c) \cup (A \cap B^c) \quad \leftarrow \text{분배법칙} \\ &= \emptyset \cup (A - B) \quad \leftarrow \text{차집합과 여집합의 성질} \\ &= A - B\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\textcircled{2} (A \cup B) \cap (A^c \cap B^c) &= (A \cup B) \cap (A \cup B)^c \quad \leftarrow \text{드모르간의 법칙} \\ &= (A \cup B) - (A \cup B) \quad \leftarrow \text{차집합과 여집합의 성질} \\ &= \emptyset\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\textcircled{3} (A - B)^c \cap B &= (A \cap B^c)^c \cap B \quad \leftarrow \text{차집합과 여집합의 성질} \\ &= (A^c \cup B) \cap B \quad \leftarrow \text{드모르간의 법칙} \\ &= B\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\textcircled{4} A - (B \cap C^c) &= A \cap (B \cap C^c)^c \quad \leftarrow \text{차집합과 여집합의 성질} \\ &= A \cap (B^c \cup C) \quad \leftarrow \text{드모르간의 법칙} \\ &= (A \cap B^c) \cup (A \cap C) \quad \leftarrow \text{분배법칙} \\ &= (A - B) \cup (A \cap C) \quad \leftarrow \text{차집합과 여집합의 성질}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\textcircled{5} (A \cap B) - (A \cap C) &= (A \cap B) \cap (A \cap C)^c \quad \leftarrow \text{차집합과 여집합의 성질} \\ &= (A \cap B) \cap (A^c \cup C^c) \quad \leftarrow \text{드모르간의 법칙} \\ &= \{(A \cap B) \cap A^c\} \cup \{(A \cap B) \cap C^c\}\end{aligned}$$

← 분배법칙

$$= \emptyset \cup \{(A \cap B) \cap C^c\}$$

$$= (A \cap B) - C$$

← 차집합과 여집합의 성질

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

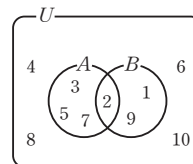
075

$$\begin{aligned}A \odot B &= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \\ &= (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}A^c \odot B^c &= (A^c \cup B^c) \cap \{(A^c)^c \cup (B^c)^c\} \\ &= (A^c \cup B^c) \cap (A \cup B) \\ &= (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) \\ &= A \odot B \\ &= \{1, 3, 5, 7, 9\}\end{aligned}$$

$A = \{x | x \text{는 소수}\} = \{2, 3, 5, 7\}$ 이므로 두 집합 A, B 사이의 포함 관계를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



$$\therefore B = \{1, 2, 9\}$$

따라서 집합 B 의 모든 원소의 합은

$$1 + 2 + 9 = 12$$

답 12

참고

$$A \odot B = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \\ = (A \cup B) - (A \cap B)$$

이므로

$$A^c \odot B^c = (A^c \cup B^c) - (A^c \cap B^c) \\ = (A \cap B)^c - (A \cup B)^c \\ = (A \cap B)^c \cap (A \cup B) \\ = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \\ = A \odot B \\ = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

076

$$(A - B) \cup B \\ = (A \cap B^c) \cup B \quad \leftarrow \text{차집합과 여집합의 성질} \\ = (A \cup B) \cap (B^c \cup B) \quad \leftarrow \text{분배법칙} \\ = (A \cup B) \cap U \\ = A \cup B \\ (\text{좌변}) = (\text{우변}) \text{에서 } A \cup B = A \\ \therefore B \subset A \\ \text{따라서 옳은 것은 ②이다.}$$

답 ②

077

$\neg$ 은 옳다.

$$A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B) \\ = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \\ = (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) \\ = \{(A \cup B) \cap A^c\} \cup \{(A \cup B) \cap B^c\} \\ = \{(A \cap A^c) \cup (B \cap A^c)\} \\ \cup \{(A \cap B^c) \cup (B \cap B^c)\} \\ = (B \cap A^c) \cup (A \cap B^c) \\ = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \\ = (A - B) \cup (B - A)$$

$\sqsubset$ 도 옳다.

$$A \triangle \emptyset = (A - \emptyset) \cup (\emptyset - A) (\because \neg) \\ = A \cup \emptyset \\ = A$$

$\sqsupset$ 도 옳다.

$$A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B) = \emptyset \text{이므로 } \neg \text{에서} \\ (A - B) \cup (B - A) = \emptyset \\ \therefore A - B = \emptyset, B - A = \emptyset \\ \text{즉, } A \subset B, B \subset A \text{이므로 } A = B \text{이다.}$$

따라서 옳은 것은 $\neg, \sqsubset, \sqsupset$ 이다.

답 ⑤

078

$$U = \{1, 2, 3, \dots, 50\}, \\ A = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}, \\ B = \{3, 6, 9, \dots, 48\} \text{이고,} \\ A^c \cup B = (A \cap B^c)^c = (A - B)^c \\ = U - (A - B) \\ = U - \{A - (A \cap B)\}$$

이때 $n(U) = 50, n(A) = 8,$

$$n(A \cap B) = n(\{3, 6, 15, 30\}) = 4$$

이므로

$$n(A^c \cup B) = n(U) - \{n(A) - n(A \cap B)\} \\ = 50 - (8 - 4) = 46$$

답 ④

079

고객 전체의 집합을 U , 메뉴 A를 선호하는 고객의 집합을 A , 메뉴 B를 선호하는 고객의 집합을 B 라 하면

$$n(U) = 40, n(A) = 31, n(A - B) = 24,$$

$$n((A \cup B)^c) = 6$$

$$\therefore n(A \cup B) = n(U) - n((A \cup B)^c) = 40 - 6 = 34$$

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) \text{이므로}$$

$$24 = 31 - n(A \cap B)$$

$$\therefore n(A \cap B) = 7$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \text{이므로}$$

$$34 = 31 + n(B) - 7$$

$$\therefore n(B) = 10$$

따라서 메뉴 B를 선호한 고객 수는 10이다.

답 10

080

$M(X) \geq 3$ 을 만족시키기 위하여 A 의 부분집합 X 는 3 이상의 원소를 적어도 하나 가져야 한다.

즉, 조건을 만족시키는 집합 X 는 A 의 부분집합 전체에서 3 이상의 원소를 갖지 않는 부분집합을 제외한 것이다.

따라서 집합 X 의 개수는

$$2^5 - 2^2 = 32 - 4 = 28$$

답 28

081

$$U = \{x | x \text{는 } 10 \text{ 이하의 짝수인 자연수}\} \\ = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

이므로 $S(A) = x$ 라 하면

$$S(B) = (2 + 4 + 6 + 8 + 10) - x = 30 - x$$

$$S(A) \times S(B) = x(30 - x) = 200$$

$$x^2 - 30x + 200 = 0, (x-10)(x-20) = 0$$

$$\therefore x=20 (\because S(A) > S(B))$$

이때 $S(A)=20, S(B)=10$ 인 경우는

$$A=\{2, 4, 6, 8\} \text{ 일 때, } B=\{10\}$$

$$A=\{2, 8, 10\} \text{ 일 때, } B=\{4, 6\}$$

$$A=\{4, 6, 10\} \text{ 일 때, } B=\{2, 8\}$$

따라서 순서쌍 (A, B) 의 개수는 3이다.

답 3

082

$$A \cap X = X \text{ 에서 } X \subset A$$

$$(A \cap B) \cup X = X \text{ 에서 } (A \cap B) \subset X$$

$$\therefore (A \cap B) \subset X \subset A$$

즉, 집합 X 는 집합 A 의 부분집합 중 집합 $A \cap B$ 의 원소를 모두 원소로 갖는 집합이다.

이때 조건을 만족시키는 집합 X 의 개수가 8이므로

$$n(A \cap B) = k \text{ 라 하면}$$

$$2^{5-k} = 8 = 2^3, 5-k=3$$

$$\therefore k=2$$

이때 a 는 자연수이므로 집합 B 의 원소는 1보다 크고 연속하는 네 자연수이고, $n(A \cap B) = 2$ 이므로

$$A \cap B = \{4, 5\} \text{ 이어야 한다.}$$

따라서 $B = \{4, 5, 6, 7\}$ 이므로

$$a+1=4$$

$$\therefore a=3$$

답 3

083

$B \subset U$ 이므로 $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ 가 모두 자연수이다.

즉, a, b, c 는 모두 자연수의 제곱인 수이다.

조건 (나)에서 $a < b < c, a+c=68$ 이므로

$$a=4, c=64$$

$$\therefore A = \{4, b, 64\}, B = \{2, \sqrt{b}, 8\}$$

$n(A)=3, n(B)=3$ 이고, 조건 (가)에서 $n(A \cup B)=5$ 이므로

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B) \text{ 에서}$$

$$n(A \cap B) = 3 + 3 - 5 = 1$$

이때 $4 < b < 64, 2 < \sqrt{b} < 8$ 이고, $\sqrt{b}$ 가 자연수이므로

$$b=16$$

따라서 $B = \{2, 4, 8\}$ 이므로 집합 B 의 모든 원소의 합은

$$2+4+8=14$$

답 14

084

전체 학생의 집합을 U , 역사 체험 학습을 신청한 학생의 집합을 A , 과학 체험 학습을 신청한 학생의 집합을 B 라 하면

$$n(U)=65, n(A)=42, n(B)=17, n(A \cap B) \geq 9$$

두 체험 학습을 모두 신청하지 않은 학생의 집합은

$$A^c \cap B^c \text{ 이므로}$$

$$n(A^c \cap B^c) = n((A \cup B)^c)$$

$$= n(U) - n(A \cup B)$$

$$= n(U) - \{n(A) + n(B) - n(A \cap B)\}$$

$$= 65 - \{42 + 17 - n(A \cap B)\}$$

$$= n(A \cap B) + 6$$

(i) 두 체험 학습을 모두 신청하지 않은 학생 수

$n(A^c \cap B^c)$ 가 최대가 되려면 $n(A \cap B)$ 가 최대일 때이어야 한다.

즉, $B \subset A$ 이어야 하므로

$$M = n(B) + 6 = 17 + 6 = 23$$

(ii) 두 체험 학습을 모두 신청하지 않은 학생 수

$n(A^c \cap B^c)$ 가 최소가 되려면 $n(A \cap B)$ 가 최소일 때이어야 한다.

$$\therefore m = 9 + 6 = 15$$

(i), (ii)에서 $M+m=23+15=38$

답 ③

2 명제

1 명제

150~164쪽

086

(1) $x^2 - 4 = 0$ 에서 $x^2 = 4$ $\therefore x = \pm 2$

따라서 조건 p 의 진리집합은 $\{-2, 2\}$ 이다.

(2) 10보다 작은 소수는 2, 3, 5, 7이므로 조건 p 의 진리 집합은 $\{2, 3, 5, 7\}$ 이다.

답 (1) $\{-2, 2\}$ (2) $\{2, 3, 5, 7\}$

088

소수이면서 홀수가 아닌 수는 2뿐이므로

$P = \{2\}$

10 이하의 자연수 중에서 15의 약수는 1, 3, 5이므로

$Q = \{1, 3, 5\}$

$\therefore P \cup Q = \{1, 2, 3, 5\}$

따라서 집합 $P \cup Q$ 의 원소의 개수는 4이다.

답 4

090

(1) 주어진 조건의 부정은 '두 실수 x, y 는 모두 무리수 이거나 유리수이다.'이다.

(2) 주어진 조건의 부정은 ' x 는 짝수이거나 4의 배수이다.'이다.

전체집합 U 의 원소 중에서 짝수는 2, 4, 6이고 4의 배수는 4이다. 따라서 짝수이거나 4의 배수인 것은 2, 4, 6이므로 구하는 진리집합은 $\{2, 4, 6\}$ 이다.

답 풀이 참조

092

주어진 명제의 부정은 '0은 양수도 아니고 음수도 아니다.'이고, 이것은 참인 명제이다.

답 풀이 참조

094

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$P = \{x | x < 4\}, Q = \{x | 3 \leq x < 8\}$

(1) $P^C = \{x | x \geq 4\}$

(2) $Q^C = \{x | x < 3 \text{ 또는 } x \geq 8\}$

답 (1) $\{x | x \geq 4\}$ (2) $\{x | x < 3 \text{ 또는 } x \geq 8\}$

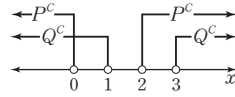
096

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

조건 ' $\sim p$ 이고 $\sim q$ '의 진리집합은 $P^C \cap Q^C$ 이다.

$P^C = \{x | x < 0 \text{ 또는 } x > 2\},$

$Q^C = \{x | x < 1 \text{ 또는 } x > 3\}$



$\therefore P^C \cap Q^C = \{x | x < 0 \text{ 또는 } x > 3\}$

답 $\{x | x < 0 \text{ 또는 } x > 3\}$

098

$\neg$ 은 참이다.

$p: 3x+1=-2, q: x^2-2x-3=0$ 이라 하고, p, q

의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$3x+1=-2$ 에서 $3x=-3$ $\therefore x=-1$

$x^2-2x-3=0$ 에서 $(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

$\therefore P=\{-1\}, Q=\{-1, 3\}$

$P \subset Q$ 이므로 $p \rightarrow q$ 는 참이다.

$\perp$ 도 참이다.

x 가 정수라는 조건에 유의해야 한다.

$p: 0 < x \leq 3, q: 1 \leq x < 4$ 라 하고, p, q 의 진리집합

을 각각 P, Q 라 하면 x 는 정수이므로

$P=\{1, 2, 3\}, Q=\{1, 2, 3\}$

$P \subset Q$ 이므로 $p \rightarrow q$ 는 참이다.

($P=Q$ 일 때도 $P \subset Q$ 는 성립한다.)

$\supset$ 은 거짓이다.

$ax=ay$ 이면 반드시 $x=y$ 일까? 아니다.

(반례) $a=0, x=2, y=3$ 일 때,

$ax=ay$ 이지만 $x \neq y$ 이다.

$\supseteq$ 은 참이다.

a, b 가 실수일 때, $a^2+b^2=0$ 을 만족시키는 a, b 의

값은 $a=0, b=0$ 뿐이므로 $ab=0$ 이다.

따라서 참인 명제는 $\neg, \perp, \supseteq$ 이다.

답 $\neg, \perp, \supseteq$

100

명제 $p \rightarrow q$ 가 참이므로 $P \subset Q$

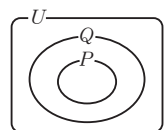
즉, P 는 Q 의 부분집합이어야 하므로

벤 다이어그램으로 나타내면

오른쪽과 같다.

$\therefore P \cap Q^C = \emptyset$

따라서 옳은 것은 ③이다.



답 ③

102

주어진 명제가 거짓임을 보여 주는 반례는 2의 양의 배수이지만 6의 양의 배수가 아닌 것이다.

2의 양의 배수는 2, 4, 6, 8, 10, ...이고,

6의 양의 배수는 6, 12, 18, 24, 30, ...이다.

따라서 2의 양의 배수 중 6의 양의 배수가 아닌 수는 2, 4, 8, 10, ...이므로 주어진 수 중 반례로 적당한 것은 ②이다. 답 ②

104

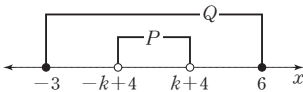
$p: |x-4| < k$ 에서 $-k < x-4 < k$

$\therefore -k+4 < x < k+4$

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$P = \{x | -k+4 < x < k+4\}, Q = \{x | -3 \leq x \leq 6\}$

명제 $p \rightarrow q$ 가 참이 되려면 $P \subset Q$ 이어야 하므로 두 집합 P, Q 를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$-3 \leq -k+4$ 에서 $k \leq 7$

$k+4 \leq 6$ 에서 $k \leq 2$

①, ②의 공통부분을 구하면

$k \leq 2$

따라서 양수 k 의 최댓값은 2이다. 답 2

106

$p: |x-k| > 2$ 에서 $\sim p: |x-k| \leq 2$ 이고,

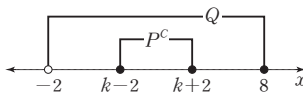
$|x-k| \leq 2$ 에서 $-2 \leq x-k \leq 2$

$\therefore k-2 \leq x \leq k+2$

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$P^c = \{x | k-2 \leq x \leq k+2\}, Q = \{x | -2 \leq x \leq 8\}$

명제 $\sim p \rightarrow q$ 가 참이 되려면 $P^c \subset Q$ 이어야 하므로 두 집합 P^c, Q 를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$-2 \leq k-2$ 에서 $k \geq 0$

$k+2 \leq 8$ 에서 $k \leq 6$

①, ②의 공통부분을 구하면

$0 \leq k \leq 6$

따라서 정수 k 의 개수는 6이다. 답 6

108

(1) 주어진 명제의 부정

$\Rightarrow$ '어떤 실수 x 에 대하여 $2x+3 \leq 5$ 이다.'

이것은 $x=0$ 일 때, $2x+3 \leq 5$ 가 성립하므로 참이다.

(2) 주어진 명제의 부정

$\Rightarrow$ '모든 자연수 x 에 대하여 $x^2 \neq 3x$ 이다.'

이것은 $x=3$ 일 때, $x^2=3x$ 이므로 거짓이다. 답 풀이 참조

110

(1) 명제: $x=1$ 또는 $x=-1$ 이면 $x^2=1$ 이다. (참)

역: $x^2=1$ 이면 $x=1$ 또는 $x=-1$ 이다. (참)

대우: $x^2 \neq 1$ 이면 $x \neq 1$ 이고 $x \neq -1$ 이다. (참)

(2) 명제: $x > 1$ 이고 $y > 1$ 이면 $x+y > 2$ 이다. (참)

역: $x+y > 2$ 이면 $x > 1$ 이고 $y > 1$ 이다. (거짓)

(반례) $x=9, y=-1$

대우: $x+y \leq 2$ 이면 $x \leq 1$ 또는 $y \leq 1$ 이다. (참)

답 풀이 참조

112

$\sim p \rightarrow q$ 의 역은 $q \rightarrow \sim p$ 이고 이것이 참이므로 역의 대우 $p \rightarrow \sim q$ 도 참이다.

따라서 반드시 참인 명제는 ①이다. 답 ①

114

주어진 명제의 역은 ' $x-1=0$ 이면 $x^2-ax+6=0$ 이다.'이다.

역이 참이어야 하므로 $x=1$ 을 $x^2-ax+6=0$ 에 대입하면

$1-a+6=0 \quad \therefore a=7$

답 7

116

주어진 명제가 참이므로 그 대우

' $x=-2$ 이면 $x^2+5x+a=0$ 이다.'도 참이다.

$x=-2$ 를 $x^2+5x+a=0$ 에 대입하면

$4-10+a=0 \quad \therefore a=6$

따라서 구하는 상수 a 의 값은 6이다. 답 6

118

(i) 주어진 두 명제가 참이므로 그 대우

$q \rightarrow \sim p$ 와 $\sim q \rightarrow r$ 도 참이다.

(ii) $\sim r \rightarrow q$ 와 $q \rightarrow \sim p$ 가 참이므로 삼단논법을 적용하면 $\sim r \rightarrow \sim p$ 도 참이다.

(iii) $p \longrightarrow \sim q$ 와 $\sim q \longrightarrow r$ 가 참이므로 삼단논법을 적용하면 $p \longrightarrow r$ 도 참이다.

따라서 반드시 참이라고 할 수 없는 것은 ⑤이다.

답 ⑤

필수 확인 문제

165쪽

119

① '아름답다.'의 기준이 명확하지 않으므로 명제가 아니다.

② 참인 명제이다.

③ 24와 32의 최대공약수는 8이므로 거짓인 명제이다.

④ 참인 명제이다.

⑤ 참인 명제이다.

따라서 거짓인 명제는 ③이다.

답 ③

120

$$U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$$

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$$P = \{1, 2, 4, 8\}$$

$$q : x^2 - 9x + 14 \leq 0 \text{에서 } (x-2)(x-7) \leq 0$$

$$\therefore 2 \leq x \leq 7 \quad \therefore Q = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

(1) ' p 또는 $\sim q$ '의 진리집합은 $P \cup Q^c$ 이므로

$$P \cup Q^c = \{1, 2, 4, 8\} \cup \{1, 8, 9, 10\}$$

$$= \{1, 2, 4, 8, 9, 10\}$$

(2) ' $\sim p$ 이고 q '의 진리집합은 $P^c \cap Q$ 이므로

$$P^c \cap Q = \{3, 5, 6, 7, 9, 10\} \cap \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$= \{3, 5, 6, 7\}$$

답 (1) $\{1, 2, 4, 8, 9, 10\}$ (2) $\{3, 5, 6, 7\}$

121

' $x+y \leq 0$ 인 어떤 실수 x, y 에 대하여 $x \leq 0$ 또는 $y \leq 0$ 이다.'의 부정은 ' $x+y \leq 0$ 인 모든 실수 x, y 에 대하여 $x > 0$ 이고 $y > 0$ 이다.'이고, 부정은 거짓이다.

(반례) $x = -3, y = 2$ 이면 $x+y \leq 0$ 이지만 $x < 0$ 이고

$y > 0$ 이다.

답 풀이 참조

122

ㄱ. 역: $a=1$ 이면 $a^3=1$ 이다. (참)

대우: $a \neq 1$ 이면 $a^3 \neq 1$ 이다. (참)

ㄴ. 역: $ac=bc$ 이면 $a=b$ 이다. (거짓)

(반례) $a=1, b=-1, c=0$ 이면

$$ac=bc=0 \text{이지만 } a \neq b \text{이다.}$$

대우: $ac \neq bc$ 이면 $a \neq b$ 이다. (참)

ㄷ. 역: $a^2+b^2 > 0$ 이면 $ab < 0$ 이다. (거짓)

(반례) $a=1, b=2$ 이면

$$a^2+b^2 > 0 \text{이지만 } ab > 0 \text{이다.}$$

대우: $a^2+b^2 \leq 0$ 이면 $ab \geq 0$ 이다. (참)

ㄹ. 역: $a=0$ 이고 $b=0$ 이면 $|a|+|b|=0$ 이다. (참)

대우: $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$ 이면 $|a|+|b| \neq 0$ 이다. (참)

따라서 역과 대우가 모두 참인 명제는 ㄱ, ㄹ이다.

답 ②

123

① $R \subset P$ 이므로 명제 $r \longrightarrow p$ 는 참이다.

② $R \subset Q$ 이므로 명제 $r \longrightarrow q$ 는 참이다.

③ 명제 $r \longrightarrow p$ 가 참이므로 그 대우 $\sim p \longrightarrow \sim r$ 도 참이다.

④ $P^c \not\subset Q$ 이므로 명제 $\sim p \longrightarrow q$ 는 거짓이다.

⑤ 명제 $r \longrightarrow q$ 가 참이므로 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim r$ 도 참이다.

따라서 거짓인 명제는 ④이다.

답 ④

124

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하자.

$p : |x-a| > 7$ 에서 $x-a < -7$ 또는 $x-a > 7$ 이므로 $x < a-7$ 또는 $x > a+7$

$$\therefore P = \{x | x < a-7 \text{ 또는 } x > a+7\}$$

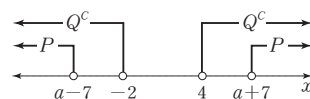
$q : |x-1| \leq 3$ 에서 $-3 \leq x-1 \leq 3$ 이므로

$$-2 \leq x \leq 4$$

$$\therefore Q = \{x | -2 \leq x \leq 4\}$$

$$\therefore Q^c = \{x | x < -2 \text{ 또는 } x > 4\}$$

명제 $p \longrightarrow \sim q$ 가 참이 되려면 $P \subset Q^c$ 이어야 하므로 두 집합 P, Q^c 을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$$a-7 \leq -2, a+7 \geq 4$$

$$\therefore -3 \leq a \leq 5$$

따라서 상수 a 의 최댓값은 5, 최솟값은 -3 이므로 그 합은

$$5 + (-3) = 2$$

답 2

2 충분조건과 필요조건

166~169쪽

126

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

(1) $P = \{x | 0 < x < 2\},$

$Q = \{x | x < 3\}$

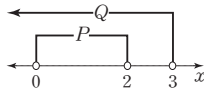
$\therefore P \subset Q$

따라서 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

(2) $P = \{0\}, Q = \{0\} \quad \therefore P = Q$

따라서 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

답 (1) 충분조건 (2) 필요충분조건



+ 풍산자 방법

충분조건과 필요조건을 판정할 때는 두 조건 p, q 의 진리 집합 P, Q 의 포함 관계를 확인한다.

① $P \subset Q$ 이면 $\Rightarrow p$ 는 q 이기 위한 충분조건이다.

② $Q \subset P$ 이면 $\Rightarrow p$ 는 q 이기 위한 필요조건이다.

③ $P = Q$ 이면 $\Rightarrow p$ 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

128

(1) $p \rightarrow q$: 두 삼각형이 닮음이면 두 삼각형은 합동이다. (거짓)

$q \rightarrow p$: 두 삼각형이 합동이면 두 삼각형은 닮음이다. (참)

참인 명제 $q \rightarrow p$ 를 이용하여 판정하면 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

(2) $p \rightarrow q$: $a+c > b+c$ 이면 $a > b$ 이다. (참)

$q \rightarrow p$: $a > b$ 이면 $a+c > b+c$ 이다. (참)

두 명제 $p \rightarrow q$ 와 $q \rightarrow p$ 가 모두 참이므로 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

답 (1) 필요조건 (2) 필요충분조건

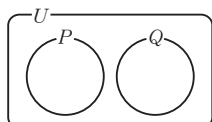
130

q 가 $\sim p$ 이기 위한 충분조건

이므로 $Q \subset P^c$

오른쪽 벤 다이어그램에서

$P \cap Q = \emptyset$ 이므로 옳은 것은 ⑤이다.



답 ⑤

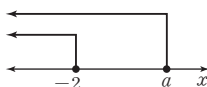
132

(i) $x \leq -2$ 는 $x \leq a$ 이기

위한 충분조건이므로

$\{x | x \leq -2\} \subset \{x | x \leq a\}$

$\therefore a \geq -2$



(ii) $x \geq 2$ 는 $x \geq b$ 이기 위한 필요

조건이므로

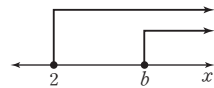
$\{x | x \geq b\} \subset \{x | x \geq 2\}$

$\therefore b \geq 2$

(i), (ii)에서 a 의 최솟값은 -2 , b 의 최솟값은 2 이므로 구하는 합은

$-2+2=0$

답 0



134

$x-1=0$ 이 $x^2-ax+3=0$ 이기 위한 충분조건이므로

$\{x | x-1=0\} \subset \{x | x^2-ax+3=0\}$

따라서 $x=1$ 이 $x^2-ax+3=0$ 을 만족시키므로

$1-a+3=0 \quad \therefore a=4$

답 4

136

주어진 조건을 기호로 나타내면

$r \Rightarrow p \Rightarrow q$
 $r \Rightarrow p, p \Rightarrow q, q \Rightarrow s,$
 $s \Rightarrow p$

이것을 정리하면 그림과 같다.

(i) $r \Rightarrow p, p \Rightarrow q, q \Rightarrow s$ 에서 $r \Rightarrow s$ 이므로

s 는 r 이기 위한 **필요**조건이다.

(ii) $p \Rightarrow q, q \Rightarrow s$ 에서 $p \Rightarrow s$ 이고, $s \Rightarrow p$ 이

므로 p 는 s 이기 위한 **필요충분**조건이다.

답 (가) 필요 (나) 필요충분

참고

삼단논법을 조건의 진리집합 사이의 포함 관계를 이용하여 다음과 같이 증명할 수 있다.

네 조건 p, q, r, s 의 진리집합을 P, Q, R, S 라 할 때,

$r \Rightarrow p, p \Rightarrow q, q \Rightarrow s$ 이면 $R \subset P, P \subset Q,$

$Q \subset S$ 이므로 $R \subset S$ 이다. 즉, $r \Rightarrow s$ 이다.

$p \Rightarrow q, q \Rightarrow s, s \Rightarrow p$ 이면 $P \subset Q, Q \subset S,$

$S \subset P$ 이므로 $P=Q=S$ 이다. 즉, $p \Leftrightarrow s$ 이다.

필수 확인 문제

170쪽

137

① $p \rightarrow q: x^2+y^2=0$ 이면 $x=0$ 또는 $y=0$ 이다. (참)

$q \rightarrow p: x=0$ 또는 $y=0$ 이면 $x^2+y^2=0$ 이다. (거짓)

(반례) $x=1, y=0$

참인 명제 $p \rightarrow q$ 를 이용하여 판정하면 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

- ② $p \rightarrow q : x=1$ 이면 $x^2-3x+2=0$ 이다. (참)
 $q \rightarrow p : x^2-3x+2=0$ 이면 $x=1$ 이다. (거짓)
 (반례) $x=2$

참인 명제 $p \rightarrow q$ 를 이용하여 판정하면 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

- ③ $p \rightarrow q : x^2+y^2=1$ 이면 $|x|+|y|=1$ 이다. (거짓)
 (반례) $x=\frac{1}{\sqrt{2}}, y=\frac{1}{\sqrt{2}}$
 $q \rightarrow p : |x|+|y|=1$ 이면 $x^2+y^2=1$ 이다. (거짓)
 (반례) $x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{2}$

두 명제 $p \rightarrow q$ 와 $q \rightarrow p$ 가 모두 거짓이므로 p 는 q 이기 위한 필요조건도 아니고 충분조건도 아니다.

- ④ $p \rightarrow q : x>0, y>0$ 이면 $x+y>0, xy>0$ 이다. (참)
 $q \rightarrow p : x+y>0, xy>0$ 이면 $x>0, y>0$ 이다. (참)

두 명제 $p \rightarrow q$ 와 $q \rightarrow p$ 가 모두 참이므로 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

- ⑤ $p \rightarrow q : x<y$ 이면 $x^2<y^2$ 이다. (거짓)
 (반례) $x=-1, y=0$
 $q \rightarrow p : x^2<y^2$ 이면 $x<y$ 이다. (거짓)
 (반례) $x=0, y=-1$

두 명제 $p \rightarrow q$ 와 $q \rightarrow p$ 가 모두 거짓이므로 p 는 q 이기 위한 필요조건도 아니고 충분조건도 아니다.

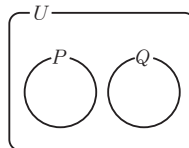
따라서 p 가 q 이기 위한 필요충분조건인 것은 ④이다.

답 ④

138

$\sim p$ 가 q 이기 위한 필요조건이므로 $Q \subset P^c$

두 집합 P^c, Q 사이의 포함 관계를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



- ① $P-Q=P$
 ② $P \cap Q = \emptyset$
 ③ $P \cup Q \neq U$
 ⑤ $P^c \cup Q = P^c$

따라서 옳은 것은 ④이다.

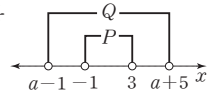
답 ④

139

두 조건 p, q 의 진리집합을 P, Q 라 하면 p 는 q 이기 충분조건이므로

$$P \subset Q$$

두 집합 P, Q 를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$$a-1 \leq -1, a+5 \geq 3$$

$$\therefore -2 \leq a \leq 0$$

따라서 a 의 최댓값은 0, 최솟값은 -2 이므로 구하는 합은

$$0 + (-2) = -2$$

답 -2

140

$$x+2=3x-4 \text{에서 } -2x=-6 \quad \therefore x=3$$

이때 $x+2=3x-4$ 가 $x^2-ax+b=0$ 이기 위한 필요충분조건이므로 이차방정식 $x^2-ax+b=0$ 의 해가 3뿐이어야 한다.

이차항의 계수가 1이고 중근 $x=3$ 을 갖는 이차방정식은

$$(x-3)^2=0 \quad \therefore x^2-6x+9=0$$

$$\text{따라서 } x^2-ax+b=x^2-6x+9 \text{이므로}$$

$$a=6, b=9$$

$$\therefore a+b=15$$

답 15

141

p 는 q 이기 위한 충분조건이므로

$$p \Rightarrow q$$

..... ㉠

이 명제의 대우도 참이므로

$$\sim q \Rightarrow \sim p$$

또, $\sim q$ 는 r 이기 위한 필요조건이므로

$$r \Rightarrow \sim q$$

이 명제의 대우도 참이므로

$$q \Rightarrow \sim r$$

..... ㉡

㉠, ㉡에서 삼단논법을 적용하면

$$p \Rightarrow \sim r$$

이 명제의 대우도 참이므로

$$r \Rightarrow \sim p$$

따라서 반드시 참이라고 할 수 없는 것은 ⑤이다.

답 ⑤

142

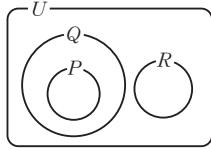
$$(P-Q) \cup (Q-R^c) = \emptyset \text{이므로}$$

$$P-Q=\emptyset, Q-R^c=\emptyset$$

$$P-Q=\emptyset \text{에서 } P \subset Q$$

$$Q-R^c=\emptyset \text{에서 } Q \cap (R^c)^c = Q \cap R = \emptyset$$

세 집합 P, Q, R 사이의 포함 관계를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



ㄱ은 옳다.

$P \subset Q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

ㄴ은 옳지 않다.

$Q \subset R^c$ 이므로 q 는 $\sim r$ 이기 위한 충분조건이다.

ㄷ은 옳다.

$R \subset Q^c$ 이므로 r 는 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이다.

ㄹ은 옳지 않다.

$P \subset R^c$ 이므로 $\sim r$ 는 p 이기 위한 필요조건이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

3 여러 가지 증명과 절대부등식

171~179쪽

144

주어진 명제의 대우 'n이 자연수일 때, n이 짝수이면 n^2 도 짝수이다.'가 참임을 보이면 된다.

n이 짝수이면 $n=2k$ (k 는 자연수)로 나타낼 수 있으므로

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2$$

여기서 $4k^2$ 은 짝수이므로 n^2 은 짝수이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

답 풀이 참조

참고

어떤 명제의 대우를 만들 때, 'n이 자연수일 때', '두 실수 x, y 에 대하여' 등과 같은 표현은 부정을 하지 않고 그대로 쓴다.

146

(1) n 을 2의 배수라고 가정하면 $n=2k$ (k 는 자연수)로 나타낼 수 있으므로

$$n^2 + 2n = (2k)^2 + 2 \times 2k = 4k^2 + 4k = 4(k^2 + k)$$

여기서 $4(k^2 + k)$ 가 4의 배수이므로 $n^2 + 2n$ 은 4의 배수이다.

이것은 $n^2 + 2n$ 이 4의 배수가 아니라는 주어진 명제의 가정에 모순이다.

따라서 n 이 자연수일 때, $n^2 + 2n$ 이 4의 배수가 아니면 n 은 2의 배수가 아니다.

(2) 주어진 명제의 결론을 부정하여 $\sqrt{3}$ 이 유리수라고 가정하면

$$\sqrt{3} = \frac{n}{m} \quad (m, n \text{은 서로소인 자연수})$$

인 m, n 이 존재한다.

$$\sqrt{3} = \frac{n}{m} \text{의 양변을 제곱하면 } 3 = \frac{n^2}{m^2}$$

$$\therefore n^2 = 3m^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

따라서 n^2 이 3의 배수이므로 n 도 3의 배수이다.

$n=3k$ (k 는 자연수)로 놓고 ①에 대입하면

$$(3k)^2 = 3m^2 \quad \therefore m^2 = 3k^2$$

m^2 이 3의 배수이므로 m 도 3의 배수이다.

이것은 m, n 이 서로소라는 가정에 모순이므로 $\sqrt{3}$ 은 유리수가 아니다. 즉, $\sqrt{3}$ 은 무리수이다.

답 풀이 참조

148

$$(1) ab - 2 - (a - 2b) = ab - 2 - a + 2b$$

$$= a(b - 1) + 2(b - 1)$$

$$= (a + 2)(b - 1) \geq 0$$

$$(\because a > -2, b \geq 1)$$

$$\therefore ab - 2 \geq a - 2b$$

$$(2) (|a| + 3)^2 - |a + 3|^2$$

$$= a^2 + 6|a| + 9 - (a^2 + 6a + 9)$$

$$= 6(|a| - a) \geq 0$$

$$\therefore |a| + 3 \geq |a + 3|$$

$$(3) \frac{2^{90}}{10^{30}} = \frac{(2^3)^{30}}{10^{30}} = \left(\frac{8}{10}\right)^{30} < 1$$

$$\therefore 2^{90} < 10^{30}$$

답 (1) $ab - 2 \geq a - 2b$

(2) $|a| + 3 \geq |a + 3|$

(3) $2^{90} < 10^{30}$

150

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - (\sqrt{a+b})^2 = (a + 2\sqrt{ab} + b) - (a + b)$$

$$= 2\sqrt{ab} > 0$$

$$\therefore (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \geq (\sqrt{a+b})^2$$

그런데 $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0, \sqrt{a+b} > 0$ 이므로

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$$

답 (가) $2\sqrt{ab}$ (나) $>$ (다) $>$

152

$$\begin{aligned}
& \{\sqrt{2(a^2+b^2)}\}^2 - \{|a|+|b|\}^2 \\
&= 2(a^2+b^2) - (|a|^2+2|a||b|+|b|^2) \\
&= 2(|a|^2+|b|^2) - (|a|^2+2|a||b|+|b|^2) \\
&\quad \leftarrow |A|^2=A^2 \\
&= |a|^2-2|a||b|+|b|^2 \\
&= (|a|-|b|)^2 \geq 0 \\
&\text{그런데 } \sqrt{2(a^2+b^2)} \geq 0, |a|+|b| \geq 0 \text{이므로} \\
&\sqrt{2(a^2+b^2)} \geq |a|+|b| \\
&(\text{단, 등호는 } |a|=|b| \text{ 일 때, 즉 } a=\pm b \text{ 일 때 성립한다.})
\end{aligned}$$

답 풀이 참조

154

$a > 0, b > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}
\frac{b}{a} + \frac{a}{b} &\geq 2\sqrt{\frac{b}{a} \times \frac{a}{b}} = 2 \times 1 = 2 \\
&(\text{단, 등호는 } \frac{b}{a} = \frac{a}{b}, \text{ 즉 } a=b \text{ 일 때 성립한다.})
\end{aligned}$$

따라서 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b}$ 의 최솟값은 2이다. 답 2

156

$a > 0, b > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}
(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{4}{b}\right) &= 1 + \frac{4a}{b} + \frac{b}{a} + 4 \\
&= \frac{4a}{b} + \frac{b}{a} + 5 \\
&\geq 2\sqrt{\frac{4a}{b} \times \frac{b}{a}} + 5 \\
&= 2 \times 2 + 5 = 9 \\
&(\text{단, 등호는 } \frac{4a}{b} = \frac{b}{a}, \text{ 즉 } b=2a \text{ 일 때 성립한다.})
\end{aligned}$$

따라서 $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{4}{b}\right)$ 의 최솟값은 9이다. 답 9

158

$a > 0, b > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}
2a+4b &\geq 2\sqrt{2a \times 4b} = 2\sqrt{8ab} \\
&(\text{단, 등호는 } a=2b \text{ 일 때 성립한다.})
\end{aligned}$$

그런데 $ab=4$ 이므로

$$2a+4b \geq 2\sqrt{8 \times 4} = 8\sqrt{2}$$

따라서 $2a+4b$ 의 최솟값은 $8\sqrt{2}$ 이다. 답 $8\sqrt{2}$

160

$a=3, b=4$ 로 놓고 코시-슈바르츠의 부등식을 적용하면

$$\begin{aligned}
(3^2+4^2)(x^2+y^2) &\geq (3x+4y)^2 \\
&(\text{단, 등호는 } \frac{x}{3} = \frac{y}{4} \text{ 일 때 성립한다.})
\end{aligned}$$

그런데 $x^2+y^2=1$ 이므로

$$5^2 \geq (3x+4y)^2$$

$$\therefore -5 \leq 3x+4y \leq 5$$

따라서 $3x+4y$ 의 최댓값은 5, 최솟값은 -5이다.

답 최댓값: 5, 최솟값: -5

필수 확인 문제

180쪽

161

$$\begin{aligned}
& |a-b|^2 - (|a|-|b|)^2 \\
&= (a^2-2ab+b^2) - (a^2-2|a||b|+b^2) \\
&= 2(|a||b|-ab) \geq 0 \\
&\therefore |a-b|^2 \geq (|a|-|b|)^2 \quad \dots\dots ㉠
\end{aligned}$$

(i) $|a| \geq |b|$ 일 때

$$|a-b| \geq 0 \text{이고 } |a|-|b| \geq 0 \text{이므로}$$

$$\text{㉠에 의하여 } |a-b| \geq |a|-|b|$$

(ii) $|a| < |b|$ 일 때

$$|a-b| > 0 \text{이고 } |a|-|b| < 0 \text{이므로}$$

$$|a-b| > |a|-|b|$$

(i), (ii)에서 $|a-b| \geq |a|-|b|$

(단, 등호는 $|ab| \geq 0$ 이고 $|a| \geq |b|$ 일 때 성립한다.)

답 ㉠

162

$$\textcircled{1} \quad a^2-ab+b^2 = \left(a-\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0$$

$$\therefore a^2-ab+b^2 \geq 0$$

(단, 등호는 $a=b=0$ 일 때 성립한다.)

$$\textcircled{2} \quad (a^3+b^3+c^3)-3abc$$

$$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

$$= \frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} \geq 0$$

$$\therefore a^3+b^3+c^3 \geq 3abc$$

(단, 등호는 $a=b=c$ 일 때 성립한다.)

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad & \left(\frac{b}{a} + \frac{d}{c}\right)\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) = 1 + \frac{bc}{ad} + \frac{ad}{bc} + 1 \\ & \geq 2 + 2\sqrt{\frac{bc}{ad} \times \frac{ad}{bc}} = 4 \\ \therefore & \left(\frac{b}{a} + \frac{d}{c}\right)\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) \geq 4 \\ & \text{(단, 등호는 } ad=bc \text{ 일 때 성립한다.)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \quad & (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - \{\sqrt{2(a+b)}\}^2 \\ & = a + b + 2\sqrt{ab} - 2a - 2b \\ & = -a - b + 2\sqrt{ab} \\ & = -(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \leq 0 \\ \text{그런데 } & \sqrt{a} + \sqrt{b} > 0, \sqrt{2(a+b)} > 0 \text{ 이므로} \\ & \sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2(a+b)} \\ & \text{(단, 등호는 } a=b \text{ 일 때 성립한다.)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{5} \quad & (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2 \\ & = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 - a^2c^2 - 2abcd - b^2d^2 \\ & = a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd \\ & = (ad - bc)^2 \geq 0 \\ \therefore & (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2 \\ & \text{(단, 등호는 } ad=bc \text{ 일 때 성립한다.)} \end{aligned}$$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다. 답 ④

163

$$\begin{aligned} x + \frac{4}{x+1} &= (x+1) + \frac{4}{x+1} - 1 \\ x > -1 \text{ 에서 } x+1 > 0 \text{ 이므로 산술평균과 기하평균의} \\ & \text{관계에 의하여} \\ (x+1) + \frac{4}{x+1} - 1 &\geq 2\sqrt{(x+1) \times \frac{4}{x+1}} - 1 \\ &= 2 \times 2 - 1 = 3 \\ & \text{(단, 등호는 } x+1 = \frac{4}{x+1}, \text{ 즉 } x=1 \text{ 일 때 성립한다.)} \\ \text{따라서 최솟값은 } & 3 \text{ 이다.} \end{aligned}$$

164

$$\begin{aligned} x > 0, y > 0 \text{ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하} \\ & \text{여} \\ \left(x + \frac{4}{y}\right)\left(y + \frac{9}{x}\right) &= xy + 9 + 4 + \frac{36}{xy} \\ &\geq 2\sqrt{xy \times \frac{36}{xy}} + 13 \\ &= 2 \times 6 + 13 = 25 \\ \text{등호는 } xy &= \frac{36}{xy} \text{ 일 때 성립하므로 } (xy)^2 = 36 \\ \therefore xy &= 6 \quad (\because xy > 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{따라서 } \left(x + \frac{4}{y}\right)\left(y + \frac{9}{x}\right) \text{ 은 } xy=6 \text{ 일 때 최솟값 } 25 \text{ 를} \\ \text{가지므로} \\ a=6, b=25 \\ \therefore a+b &= 31 \end{aligned}$$

답 31

165

$$\begin{aligned} a=5, b=12 \text{ 로 놓고, 코시-슈바르츠의 부등식을 적용} \\ \text{하면} \\ (5^2 + 12^2)(x^2 + y^2) &\geq (5x + 12y)^2 \\ & \text{(단, 등호는 } \frac{x}{5} = \frac{y}{12} \text{ 일 때 성립한다.)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{그런데 } 5x + 12y &= 13 \text{ 이므로} \\ 169(x^2 + y^2) &\geq 169 \quad \therefore x^2 + y^2 \geq 1 \\ \text{따라서 } x^2 + y^2 \text{ 의 최솟값은 } & 1 \text{ 이다.} \end{aligned}$$

답 1

166

$$\begin{aligned} 3a > 0, 2b > 0 \text{ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의} \\ & \text{하여} \\ 3a + 2b &\geq 2\sqrt{3a \times 2b} = 2\sqrt{6ab} \\ & \text{(단, 등호는 } 3a=2b \text{ 일 때 성립한다.)} \\ \therefore 2\sqrt{6ab} &\leq 16 \quad \dots\dots \textcircled{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{이때} \\ (\sqrt{3a} + \sqrt{2b})^2 &= 3a + 2b + 2\sqrt{6ab} \\ &= 16 + 2\sqrt{6ab} \\ &\leq 16 + 16 = 32 \quad (\because \textcircled{7}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{이므로} \\ (\sqrt{3a} + \sqrt{2b})^2 &\leq 32 \\ \therefore 0 < \sqrt{3a} + \sqrt{2b} &\leq 4\sqrt{2} \\ \text{따라서 } \sqrt{3a} + \sqrt{2b} \text{ 의 최댓값은 } & 4\sqrt{2} \text{ 이다.} \end{aligned}$$

답 $4\sqrt{2}$

● 실전 연습문제

182~184쪽

167

$$\begin{aligned} U &= \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} \\ \text{두 조건 } p, q \text{ 의 진리집합을 각각 } P, Q \text{ 라 하면} \\ p : x(x^2 - 9) &= 0 \text{ 에서 } x(x+3)(x-3) = 0 \text{ 이므로} \\ x &= -3 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=3 \\ \therefore P &= \{-3, 0, 3\} \\ q : x^2 - 2x - 3 &\leq 0 \text{ 에서 } (x+1)(x-3) \leq 0 \text{ 이므로} \\ -1 &\leq x \leq 3 \\ \therefore Q &= \{-1, 0, 1, 2, 3\} \end{aligned}$$

이때 조건 ' $\sim p$ 또는 q '의 진리집합은 $P^c \cup Q$ 이고
 $P^c = \{-2, -1, 1, 2\}$ 이므로
 $P^c \cup Q = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
 따라서 구하는 원소의 합은
 $-2 + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 = 3$

답 3

168

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$$P = \{x \mid -1 < x < a+1\},$$

$$q: |x-10| \geq 1 \text{에서}$$

$$x-10 \leq -1 \text{ 또는}$$

$$x-10 \geq 1$$

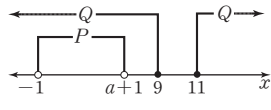
$$\therefore x \leq 9 \text{ 또는 } x \geq 11$$

$$\therefore Q = \{x \mid x \leq 9 \text{ 또는 } x \geq 11\}$$

$P \subset Q$ 이어야 하므로

$$a+1 \leq 9 \quad \therefore a \leq 8$$

따라서 a 의 최댓값은 8이다.



답 8

169

① $P \not\subset Q$ 이므로 $p \rightarrow q$ 는 거짓이다.

② $Q \not\subset R$ 이므로 $q \rightarrow r$ 는 거짓이다.

③ $R \not\subset Q^c$ 이므로 $r \rightarrow \sim q$ 는 거짓이다.

④ ②에서 $q \rightarrow r$ 가 거짓이므로 $\sim r \rightarrow \sim q$ 는 거짓이다.

⑤ $R \subset P$ 에서 $P^c \subset R^c$ 이므로 $\sim p \rightarrow \sim r$ 는 참이다.

따라서 참인 명제는 ⑤이다.

답 ⑤

170

명제 $p \rightarrow q, q \rightarrow \sim r$ 가 모두 참이므로 명제

$p \rightarrow \sim r$ 가 참이다. 참인 명제의 대우도 항상 참이므로

$r \rightarrow \sim p$ 도 항상 참이다.

답 ③

171

p 는 q 또는 r 이기 위한 필요조건이므로

$$(Q \cup R) \subset P$$

$$\therefore Q \subset P, R \subset P$$

$$\textcircled{1} Q \subset P \text{이므로 } P \cap Q = Q$$

$$\textcircled{2} R \subset P \text{이므로 } P \cup R = P$$

$$\textcircled{3} P \cup Q^c = U$$

④ $Q \cap R^c = Q - R$ 이므로 항상 공집합이라 할 수 없다.

$$\textcircled{5} R \subset P \text{이므로 } P^c \cap R = R - P = \emptyset$$

따라서 항상 옳은 것은 ③이다.

답 ③

172

$\neg. p: xy > 0$ 에서 $x < 0, y < 0$ 또는 $x > 0, y > 0$

$$q: x > 0 \text{이고 } y > 0$$

따라서 p 는 q 이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 아니다.

$\neg. p: x < 0$

$$q: x + |x| = 0 \text{에서 } x \geq 0 \text{이면 } x + x = 2x \text{이고,}$$

$$x < 0 \text{이면 } x - x = 0 \text{이다.}$$

따라서 p 는 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아니다.

$\neg. p: x^2 - y^2 = 0$ 에서 $(x+y)(x-y) = 0$ 이므로

$$x = -y \text{ 또는 } x = y$$

$$q: x^3 - y^3 = 0 \text{에서 } (x-y)(x^2 + xy + y^2) = 0 \text{이므로}$$

로

$$x = y \text{ 또는 } x^2 + xy + y^2 = 0$$

$$\text{이때 } x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0 \text{이므로}$$

$$x^2 + xy + y^2 = 0 \text{에서}$$

$$x = y = 0$$

$$\text{즉, } x = y \text{ 또는 } x = y = 0 \text{이므로 } x = y$$

따라서 p 는 q 이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 아니다.

따라서 p 가 q 이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 아닌 것은 $\neg, \supset$ 이다.

답 ③

173

조건 $p: |x| \leq n$ 에서

$$-n \leq x \leq n$$

조건 $q: x^2 + 2x - 8 \leq 0$ 에서

$$(x+4)(x-2) \leq 0$$

$$\therefore -4 \leq x \leq 2$$

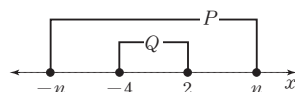
두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$$P = \{x \mid -n \leq x \leq n\}, Q = \{x \mid -4 \leq x \leq 2\}$$

p 가 q 이기 위한 필요조건이 되려면

$$Q \subset P$$

두 집합 P, Q 를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$$-n \leq -4, n \geq 2 \text{이므로 } n \geq 4$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 4이다.

답 ④

174

$9x > 0, \frac{a}{x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$9x + \frac{a}{x} \geq 2\sqrt{9x \times \frac{a}{x}} = 6\sqrt{a}$$

(단, 등호는 $9x = \frac{a}{x}$ 일 때 성립한다.)

이때 최솟값이 4이므로

$$6\sqrt{a} = 4, \sqrt{a} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore a = \frac{4}{9}$$

답 ④

175

$a=1, b=-2, c=3$ 으로 놓고, 코시-슈바르츠의 부등식을 적용하면

$$\{1^2 + (-2)^2 + 3^2\}(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x - 2y + 3z)^2$$

(단, 등호는 $x = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}$ 일 때 성립한다.)

그런데 $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ 이므로

$$14^2 \geq (x - 2y + 3z)^2$$

$$\therefore -14 \leq x - 2y + 3z \leq 14$$

따라서 $x - 2y + 3z$ 의 최댓값은 14, 최솟값은 -14이므로

$$M = 14, m = -14$$

$$\therefore M - m = 28$$

답 28

176

주어진 명제의 부정은

‘모든 실수 x 에 대하여 $x^2 - 2kx + 3k + 10 \geq 0$ 이다.’이다.

위의 명제가 참이므로 이차방정식

$x^2 - 2kx + 3k + 10 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-k)^2 - (3k + 10) \leq 0$$

$$k^2 - 3k - 10 \leq 0, (k+2)(k-5) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq k \leq 5$$

따라서 정수 k 는 -2, -1, 0, 1, ..., 5이므로 그 개수는 8이다.

답 8

177

$p \implies q$ 이므로 $P \subset Q$

.....㉠

$\sim p \implies q$ 이므로 $P^c \subset Q$

.....㉡

$\sim r \implies p$ 이므로 $R^c \subset P$

.....㉢

$\neg$ 은 참이다.

㉡에서 $P^c \subset Q$

$\neg$ 은 거짓이다.

㉢에서 $P^c \subset R$ 이므로 반드시 $R - P^c = \emptyset$ 이라 할 수 없다.

$\supset$ 은 참이다.

㉠, ㉡에서 $(P \cup P^c) \subset Q$ 이므로 $U = Q$

즉, $(R^c \cup P^c) \subset Q$

따라서 항상 참인 것은 $\neg, \supset$ 이다.

답 ③

178

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$$P = \{x | a < x < a+5\}, Q = \{x | b+3 < x < ab\}$$

명제 $p \implies q$ 의 역 $q \implies p$ 가 참이므로

$Q \subset P$

.....㉠

또, 명제 $p \implies q$ 의 대우가 참이면 명제 $p \implies q$ 도 참이므로

$P \subset Q$

.....㉡

㉠, ㉡에서 $P = Q$ 이므로

$$a = b+3, a+5 = ab$$

$a = b+3$ 을 $a+5 = ab$ 에 대입하면

$$b+8 = (b+3)b, b^2 + 2b - 8 = 0$$

$$(b+4)(b-2) = 0 \quad \therefore b = 2 (\because b > 0)$$

$b = 2$ 를 $a = b+3$ 에 대입하면 $a = 5$

$$\therefore a + b = 5 + 2 = 7$$

답 7

179

네 조건 p, q, r, s 를 다음과 같이 정하기로 하자.

p : 가격이 오른다.

q : 판매량이 증가한다.

r : 기능이 좋아진다.

s : 선호도가 높아진다.

(㉠, ㉡)에서 명제 $r \implies q, \sim p \implies \sim s$ 가 모두 참이므로 각각의 대우 $\sim q \implies \sim r, s \implies p$ 가 모두 참이다.

명제 ‘운동복 선호도가 높아지면 판매량이 증가한다.’, 즉 $s \implies q$ 가 참이 되는 경우는 다음과 같은 경우이다.

(i) 명제 $s \implies r$ 또는 그 대우 $\sim r \implies \sim s$ 가 참인 경우

(ii) 명제 $p \implies r$ 또는 그 대우 $\sim r \implies \sim p$ 가 참인 경우

(iii) 명제 $p \longrightarrow q$ 또는 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$ 가 참인 경우

- ① $p \longrightarrow s$ ② $\sim p \longrightarrow \sim q$ ③ $\sim s \longrightarrow \sim r$
 ④ $r \longrightarrow \sim s$ ⑤ $\sim r \longrightarrow \sim p$

따라서 참임을 보이기 위해 필요한 명제는 ⑤이다.

답 ⑤

180

ㄱ. $x=0$ 이고 $y=0$ 이면 $|0+0|=|0-0|$ 이므로

$p \longrightarrow q$ 는 참이다.

그러나 $x=3, y=0$ 이면

$|3+0|=|3-0|$ 이지만 $x \neq 0$ 이므로 $q \longrightarrow p$ 는 거짓이다.

따라서 p 는 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아니다.

ㄴ. $x>y>z$ 이면 $x-y>0, y-z>0, z-x<0$

이므로

$$(x-y)(y-z)(z-x)<0$$

즉, $p \longrightarrow q$ 는 참이다.

그러나 $x=2, y=1, z=5$ 이면

$$(x-y)(y-z)(z-x)=-12<0$$
이지만

$z>x>y$ 이므로 $q \longrightarrow p$ 는 거짓이다.

따라서 p 는 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아니다.

ㄷ. $|x|+|y|>|x+y|$ 에서

$$(|x|+|y|)^2>|x+y|^2$$

$$x^2+2|x||y|+y^2>x^2+2xy+y^2$$

$$|xy|>xy$$

$$\therefore xy<0$$

즉, $p \longrightarrow q$ 와 $q \longrightarrow p$ 는 모두 참이므로 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

따라서 조건 p 가 조건 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

181

조건 $\sim p$ 의 진리집합 P^C 과 조건 q 의 진리집합 Q 에 대하여 $\sim p$ 는 q 이기 위한 충분조건이므로

$$P^C \subset Q$$

$$p: x^2-3ax+2a^2>0 \text{에서 } (x-2a)(x-a)>0$$

(i) $a \geq 0$ 일 때

$$P^C = \{x | a \leq x \leq 2a\}$$

두 집합 P^C, Q 를 수직선

위에 나타내면

$$-8 < a, 2a \leq 18$$

$$\therefore 0 \leq a \leq 9$$

따라서 정수 a 의 개수는 10이다.

(ii) $a < 0$ 일 때

$$P^C = \{x | 2a \leq x \leq a\}$$

두 집합 P^C, Q 를 수직선

위에 나타내면

$$-8 < 2a, a \leq 18$$

$$\therefore -4 < a < 0$$

따라서 정수 a 의 개수는 3이다.

(i), (ii)에서 정수 a 의 개수는 13이다.

답 13

182

직선 OP의 기울기는 $\frac{b}{a}$ 이므로 직선 OP에 수직인 기울

기는 $-\frac{a}{b}$ 이고, 점 P(a, b)를 지나고 직선 OP에 수직

인 직선의 방정식은

$$y-b=-\frac{a}{b}(x-a)$$

$$\therefore y=-\frac{a}{b}x+\frac{a^2}{b}+b$$

위의 식에 $x=0$ 을 대입하면 $y=\frac{a^2}{b}+b$ 이므로

$$Q\left(0, \frac{a^2}{b}+b\right)$$

$$\therefore \triangle OQR = \frac{1}{2} \times \overline{OQ} \times \overline{OR}$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{a^2}{b}+b\right) \times \left|-\frac{1}{a}\right|$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right) \quad \dots\dots ㉠$$

이때 $\frac{a}{b}>0, \frac{b}{a}>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \times \frac{b}{a}}=2$$

(단, 등호는 $\frac{a}{b}=\frac{b}{a}$, 즉 $a=b$ 일 때 성립한다.)

㉠에서

$$\triangle OQR \geq \frac{1}{2} \times 2=1$$

따라서 삼각형 OQR의 넓이의 최솟값은 1이다.

답 ②



함수와 그래프

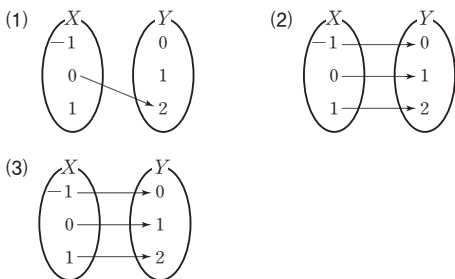
1 함수

1 함수의 정의와 그래프

188~204쪽

002

주어진 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 X 에서 Y 로의 함수가 아닌 것은 (1)이다.

답 (1)

004

(1) 정의역: $\{1, 2, 3, 4\}$, 공역: $\{1, 2, 3, 4\}$,

치역: $\{1, 3, 4\}$

(2) $f(x)=4$ 인 원소 x 는 3, 4

(3) $f(x)=x+1$ 인 원소 x 는 2, 3

답 (1) 정의역: $\{1, 2, 3, 4\}$, 공역: $\{1, 2, 3, 4\}$,

치역: $\{1, 3, 4\}$

(2) 3, 4 (3) 2, 3

006

(i) $3 \geq 2$ 이므로

$$f(3) = 3 \times 3 + 1 = 10$$

(ii) $-1 < 2$ 이므로

$$f(-1) = (-1)^2 - 1 = 0$$

(i), (ii)에서 $f(3) + f(-1) = 10 + 0 = 10$

답 10

008

집합 X 의 각 원소의 함숫값을 구하면

$$f(0) = (0^2 \text{을 } 4 \text{로 나누었을 때의 나머지}) = 0$$

$$f(1) = (1^2 \text{을 } 4 \text{로 나누었을 때의 나머지}) = 1$$

$$f(2) = (2^2 \text{을 } 4 \text{로 나누었을 때의 나머지}) = 0$$

$$f(3) = (3^2 \text{을 } 4 \text{로 나누었을 때의 나머지}) = 1$$

따라서 함수 f 의 치역은 $\{0, 1\}$ 이다. 답 $\{0, 1\}$

010

두 함수 f, g 가 서로 같으므로

$$f(1) = g(1), f(2) = g(2) \text{에서}$$

$$2 = 1 + a + b, 3 = 4 + 2a + b$$

$$\therefore a + b = 1, 2a + b = -1$$

두 식을 연립하여 풀면

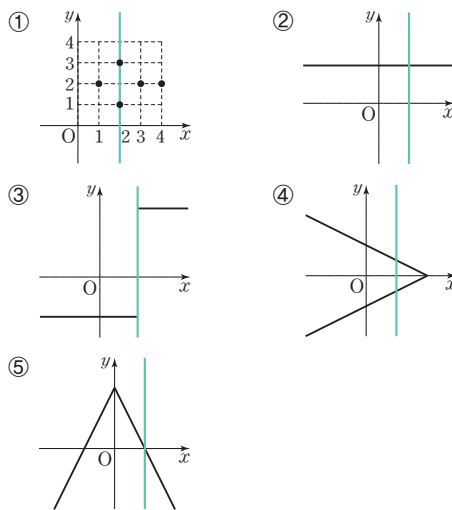
$$a = -2, b = 3$$

$$\therefore ab = -6$$

답 -6

012

y 축에 평행한 직선을 그었을 때, 오직 한 점에서만 만나는 것을 찾으면 된다.



따라서 함수의 그래프인 것은 ②, ⑤이다.

답 ②, ⑤

014

$\neg$ 은 x 축에 평행한 직선을 그었을 때 두 점 또는 세 점에서 만나는 경우가 있으므로 일대일함수가 아니다.

답 일대일함수: $\neg$, $\subset$, 항등함수: $\neg$

+ 풍산자 방법

항등함수는 그래프가 직선 $y=x$ 인 경우를 찾는다.

016

(i) f 가 항등함수이므로

$$f(x) = x$$

$$\therefore f(1) = 1$$

(ii) g 가 상수함수이고 $g(6) = 6$ 이므로

$$g(x) = 6$$

$$\therefore g(1) = 6$$

(i), (ii)에서

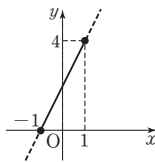
$$f(1) + g(1) = 1 + 6 = 7$$

답 7

018

$a > 0$ 에서 함수 $f(x) = ax + b$ 의 그래프는 증가하는 모양이므로 f 는 일대일함수이다.

f 가 일대일대응이려면 치역과 공역이 일치해야 하므로 오른쪽 그림과 같이 그래프가 두 점 $(-1, 0)$, $(1, 4)$ 를 지나야 한다.



즉, $f(-1) = 0$, $f(1) = 4$ 이므로
 $-a + b = 0$, $a + b = 4$

두 식을 연립하여 풀면 $a = 2$, $b = 2$ 답 $a = 2$, $b = 2$

+ 풍산자 비법

일대일대응이려면 일대일함수이면서 치역과 공역이 서로 일치해야 한다. 이때 $f(x) = ax + b$ ($a > 0$)는 x 의 값이 커질 때 함숫값도 커지므로 이 함수가 일대일대응이면 정의역의 양 끝 값에서의 함숫값은 공역의 최솟값과 최댓값이다.

020

(i) 함수 f 가 일대일대응이므로 x 의 값은 계속 증가하거나 계속 감소해야 한다.

$x \geq 0$ 에서 직선 $y = -x - 1$ 은 기울기가 음수이므로 함수 f 의 그래프는 감소하는 모양이다.

따라서 오른쪽 그림과

같이 $x < 0$ 에서 직선

$y = (a+1)x - 1$ 의 기울

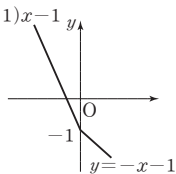
기도 음수여야 하므로

기울기 $a+1$ 의 값의 부

호는

$$a+1 < 0$$

$$\therefore a < -1$$



(ii) 두 직선 $y = -x - 1$, $y = (a+1)x - 1$ 은 모두

점 $(0, -1)$ 을 지나므로 함수 $f(x)$ 에서

(치역) = (공역)이다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$ 가 일대일대응이 되기 위한 a 의 값의 범위는 $a < -1$ 이다. 답 $a < -1$

022

(1) 1의 함숫값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3으로 3개

2의 함숫값이 될 수 있는 것도 1, 2, 3으로 3개

3의 함숫값이 될 수 있는 것도 1, 2, 3으로 3개

따라서 함수의 개수는

$$3 \times 3 \times 3 = 27$$

(2) 1의 함숫값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3으로 3개

2의 함숫값이 될 수 있는 것은 1의 함숫값을 제외한 2개

3의 함숫값이 될 수 있는 것은 1, 2의 함숫값을 제외한 1개

따라서 일대일대응의 개수는

$$3 \times 2 \times 1 = 6$$

(3) 항등함수는 $f(x) = x$ 로 그 개수는 1이다.

(4) 상수함수는 $f(x) = 1$, $f(x) = 2$, $f(x) = 3$ 으로 그 개수는 3이다.

답 (1) 27 (2) 6 (3) 1 (4) 3

024

$f(a) = c$, $f(b) = d$ 이고, 일대일대응인 함수 f 의 개수는 정의역이 $\{c, d, e\}$ 이고 공역이 $\{a, b, e\}$ 일 때의 일대일대응인 함수의 개수와 같다.

따라서 a, b, e 를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $3! = 6$ 답 6

026

절댓값 기호 안을 0으로 하는 $x = 3$ 을 기준으로 구간을 나누어 생각한다.

[1단계] 절댓값 기호를 없앤다.

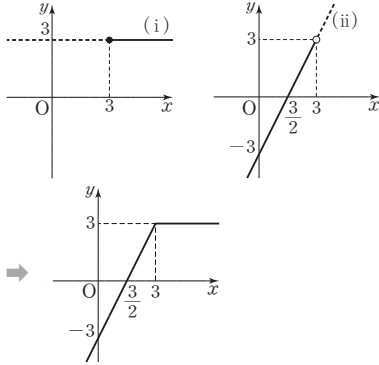
(i) $x \geq 3$ 일 때

$$y = x - (x - 3) = 3$$

(ii) $x < 3$ 일 때

$$y = x + (x - 3) = 2x - 3$$

[2단계] 없앤 식을 보고 그래프를 그린다.



답 풀이 참조

028

절댓값 기호 안을 0으로 하는 $x=-1$ 과 $x=0$ 을 기준으로 구간을 나누어 생각한다.

[1단계] 절댓값 기호를 없앤다.

(i) $x < -1$ 일 때

$$y = -x + (x+1) = 1$$

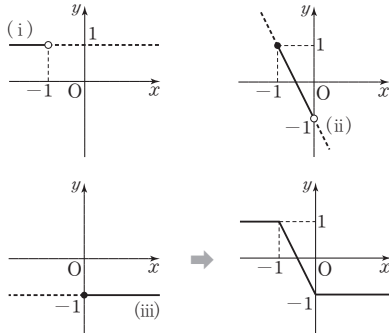
(ii) $-1 \leq x < 0$ 일 때

$$y = -x - (x+1) = -2x - 1$$

(iii) $x \geq 0$ 일 때

$$y = x - (x+1) = -1$$

[2단계] 없앤 식을 보고 그래프를 그린다.

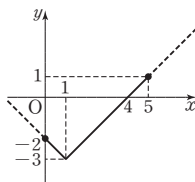


답 풀이 참조

030

함수 $y = |x-1| - 3$ 의 그래프는 점 $(1, -3)$ 에서 꺾이는 V자형의 그래프이므로 $0 \leq x \leq 5$ 일 때 오른쪽 그림과 같다.

$x=5$ 일 때, 최댓값 1을 가지므로 $M=1$



$x=1$ 일 때, 최솟값 -3 을 가지므로

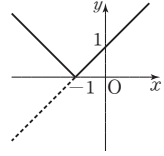
$$m = -3$$

$$\therefore M + m = -2$$

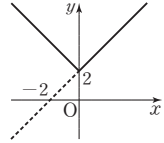
답 -2

032

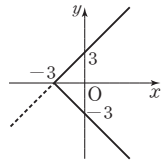
(1) $y=x+1$ 의 그래프의 x 축의 아랫부분을 위쪽으로 접어 올린다.



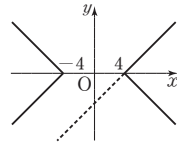
(2) $y=x+2$ 의 그래프의 y 축의 오른쪽 부분을 왼쪽으로 대칭이동한다.



(3) $y=x+3$ 의 그래프의 x 축의 윗부분을 아래쪽으로 대칭이동한다.



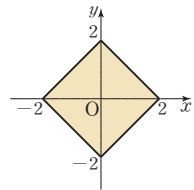
(4) $x-y=4$, 즉 $y=x-4$ 의 그래프의 제1사분면 부분을 x 축, y 축, 원점에 대하여 각각 대칭이동한다.



답 풀이 참조

034

$x+y=2$, 즉 $y=-x+2$ 의 그래프의 제1사분면 부분을 x 축, y 축, 원점에 대하여 각각 대칭이동하면 오른쪽 그림과 같은 마름모가 된다.



$\therefore$ (구하는 도형의 넓이)

$$= 4 \times \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 2 \right) = 8$$

답 8

036

절댓값 기호 안을 0으로 하는 $x=2$ 를 기준으로 구간을 나누어 생각한다.

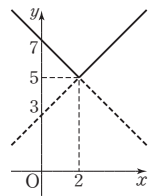
(i) $x \geq 2$ 일 때

$$y = (x-2) + 5 = x+3$$

(ii) $x < 2$ 일 때

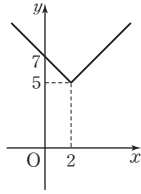
$$y = -(x-2) + 5 = -x+7$$

따라서 구하는 식의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

절댓값 기호 안을 0으로 하는 $x=2$ 에서 꺾인다.
따라서 $x=2$ 일 때 $y=5$ 이므로 점 $(2, 5)$ 에서 꺾이는 V자형의 그래프이다.



038

절댓값 기호 안을 0으로 하는 $x=-1$ 과 $x=5$ 를 기준으로 구간을 나누어 생각한다.

(i) $x < -1$ 일 때

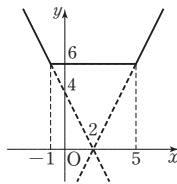
$$y = -(x+1) - (x-5) \\ = -2x + 4$$

(ii) $-1 \leq x < 5$ 일 때

$$y = (x+1) - (x-5) \\ = 6$$

(iii) $x \geq 5$ 일 때

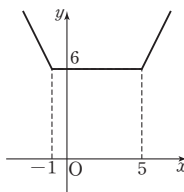
$$y = (x+1) + (x-5) \\ = 2x - 4$$



따라서 구하는 식의 그래프는 위의 그림과 같다.

답 풀이 참조

절댓값 기호 안을 0으로 하는 $x=-1$ 과 $x=5$ 에서 꺾인다.
따라서 $x=-1$ 일 때 $y=6$, $x=5$ 일 때 $y=6$ 이므로 두 점 $(-1, 6)$, $(5, 6)$ 에서 꺾이는 U자형의 그래프이다.



040

함수 $y = |x-1| + |x+2| + |x-3|$ 의 그래프는 $x=1, -2, 3$ 에서 꺾이는 U자형의 그래프이다.

$x=1$ 일 때, $y=5$

➔ 점 $(1, 5)$ 에서 꺾인다.

$x=-2$ 일 때, $y=8$

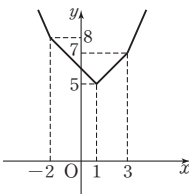
➔ 점 $(-2, 8)$ 에서 꺾인다.

$x=3$ 일 때, $y=7$

➔ 점 $(3, 7)$ 에서 꺾인다.

따라서 주어진 함수의 그래프는 위의 그림과 같으므로 $x=1$ 일 때, 최솟값 5를 갖는다.

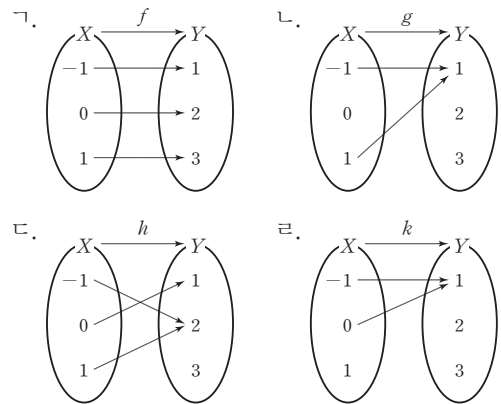
∴ $a=1, b=5$



답 $a=1, b=5$

041

주어진 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 X 에서 Y 로의 함수인 것은 가, 다이다.

답 가, 다

참고

나. $g(-1)=1 \in Y, g(0)=0 \notin Y, g(1)=1 \in Y$

라. $k(-1)=1 \in Y, k(0)=1 \in Y, k(1)=-1 \notin Y$

042

$$f(1)=1^2+k=k+1$$

$$f(2)=2^2+k=k+4$$

$$f(3)=3^2+k=k+9$$

이므로

$$f(1)+f(2)+f(3)=(k+1)+(k+4)+(k+9) \\ = 3k+14=8$$

즉, $3k=-6$ 에서 $k=-2$

답 -2

043

두 함수 f, g 가 서로 같아야 하므로

$$x^2-2x=-x^2+2x+6 \text{에서}$$

$$2x^2-4x-6=0, x^2-2x-3=0$$

$$(x+1)(x-3)=0 \quad \therefore x=-1 \text{ 또는 } x=3$$

따라서 조건을 만족시키는 집합 X 는 집합 $\{-1, 3\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합이므로 그 개수는

$$2^2-1=3$$

답 3

참고

주어진 조건을 만족시키는 집합 X 는 $\{-1\}, \{3\}, \{-1, 3\}$ 이다.

044

함수 f 가 일대일함수이므로 $f(1)+f(2)$ 의 값이 최대인 경우는 $f(1)=9, f(2)=7$ 또는 $f(1)=7, f(2)=9$ 이므로 최댓값은

$$9+7=16$$

또, $f(1)+f(2)$ 의 값이 최소인 경우는

$f(1)=1, f(2)=3$ 또는 $f(1)=3, f(2)=1$ 이므로 최솟값은

$$1+3=4$$

따라서 최댓값과 최솟값의 합은

$$16+4=20$$

답 20

045

$x \geq -1$ 에서 함수 $f(x)=x^2+4x+2$ 는 증가하는 모양이므로 f 는 일대일함수이다.

f 가 일대일대응이라면 치역과 공역이 일치해야 하므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 $(-1, k)$ 를 지나야 한다. 즉, $f(-1)=k$ 이므로

$$k=(-1)^2+4 \times (-1)+2=-1$$

답 -1

046

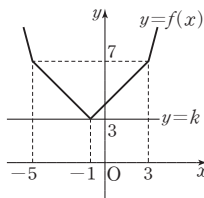
$f(x)=|x+1|+|x-3|+|x+5|-5$ 의 그래프는 절댓값 기호 안을 0으로 하는 $x=-5, -1, 3$ 에서 꺾이는 U자형의 그래프이다.

$$x=-5 \text{ 일 때, } f(-5)=4+8+0-5=7$$

$$x=-1 \text{ 일 때, } f(-1)=0+4+4-5=3$$

$$x=3 \text{ 일 때, } f(3)=4+0+8-5=7$$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



직선 $y=k$ 는 x 축에 평행한 직선이므로 한 점에서 만나기 위해서는 직선 $y=k$ 가 점 $(-1, 3)$ 을 지나야 한다.

$$\therefore k=3$$

답 3

2 합성함수와 역함수

206~221쪽

048

$$(1) (g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(-1) = 0$$

$$(2) (f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(1) = 1$$

$$(3) (f \circ f)(1) = f(f(1)) = f(1) = 1$$

$$(4) (g \circ g)(1) = g(g(1)) = g(2) = 3$$

답 (1) 0 (2) 1 (3) 1 (4) 3

050

$$(1) (g \circ h)(x) = g(h(x)) = h(x) + 2 \text{ 이므로 주어진 식은 } h(x) + 2 = 3x + 1 \quad \therefore h(x) = 3x - 1$$

$$(2) (h \circ g)(x) = h(g(x)) = h(x+2) \text{ 이므로 주어진 식은}$$

$$h(x+2) = 3x + 1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$x+2=t \text{ 로 놓으면}$$

$$x=t-2 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑧을 ⑦에 대입하면

$$h(t) = 3(t-2) + 1 = 3t - 5$$

$$\therefore h(x) = 3x - 5$$

답 (1) $h(x)=3x-1$ (2) $h(x)=3x-5$

052

$$2x+4=-2 \text{ 로 놓으면}$$

$$2x=-6 \quad \therefore x=-3$$

$x=-3$ 을 주어진 식에 대입하면

$$f(-2) = 4 \times (-3) + 2 = -10$$

답 -10

054

$$f^1(x) = x + 1$$

$$f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x))$$

$$= f(x+1) = (x+1) + 1 = x+2$$

$$f^3(x) = (f \circ f^2)(x) = f(f^2(x))$$

$$= f(x+2) = (x+2) + 1 = x+3$$

$$f^4(x) = (f \circ f^3)(x) = f(f^3(x))$$

$$= f(x+3) = (x+3) + 1 = x+4$$

$\vdots$

이제 규칙성이 보인다. 상수항이 함수의 합성 횟수이다.

따라서 $f^n(x) = x + n$ 이므로

$$f^{1000}(1) = 1 + 1000 = 1001$$

답 1001

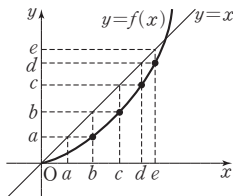
056

$$\begin{aligned}(f \circ g \circ f)(1) &= f(g(f(1))) = f(g(1)) = f(3) = 2 \\ (g \circ f \circ g)(1) &= g(f(g(1))) = g(f(3)) = g(2) = 2 \\ \therefore (f \circ g \circ f)(1) + (g \circ f \circ g)(1) &= 2 + 2 = 4\end{aligned}$$

답 4

058

$$\begin{aligned}(1) (f \circ f \circ f \circ f)(e) &= f(f(f(f(e)))) \\ &= f(f(f(d))) \\ &= f(f(c)) \\ &= f(b) = a\end{aligned}$$



(2) $f(f(x)) = b$ 는 y 좌표가 b 일 때를 의미하므로

$$f(x) = c$$

$f(x) = c$ 는 y 좌표가 c 일 때를 의미하므로

$$x = d$$

답 (1) a (2) d

060

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & (x < 1) \\ 2 & (x \geq 1) \end{cases}$$

(i) $x < 1$ 일 때

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x+1)$$

$$x+1 < 1, \text{ 즉 } x < 0 \text{일 때}$$

$$f(x+1) = (x+1) + 1 = x+2$$

$$x+1 \geq 1, \text{ 즉 } x \geq 0 \text{일 때}$$

$$f(x+1) = 2$$

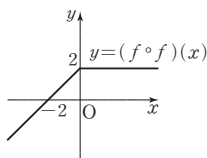
$$\therefore (f \circ f)(x) = \begin{cases} x+2 & (x < 0) \\ 2 & (0 \leq x < 1) \end{cases}$$

(ii) $x \geq 1$ 일 때

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(2) = 2$$

$$(i), (ii) \text{에서 } (f \circ f)(x) = \begin{cases} x+2 & (x < 0) \\ 2 & (x \geq 0) \end{cases}$$

따라서 함수 $y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.

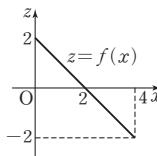


답 풀이 참조

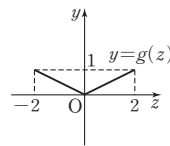
062

$y = g(f(x))$ 에서 $z = f(x)$ 로 놓으면

$$y = g(z)$$



[그림 1]



[그림 2]

[1단계] [그림 2]에서 끝점과 꺾인 점의 z 의 값을 구하면

$$z = -2, 0, 2$$

[2단계] [그림 1]에서 z 의 값에 대응하는 x 의 값을 구한다.

$$z = -2 \text{일 때, } x = 4$$

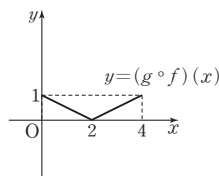
$$z = 0 \text{일 때, } x = 2$$

$$z = 2 \text{일 때, } x = 0$$

[3단계] x 의 값을 경계로 꺾임표를 만든다.

y	1	0	1
z	2	0	-2
x	0	2	4

[4단계] 꺾임표를 보고 그래프를 그린다.

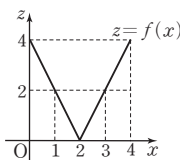


답 풀이 참조

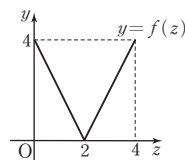
064

$y = f(f(x))$ 에서 $z = f(x)$ 로 놓으면

$$y = f(z)$$



[그림 1]



[그림 2]

[1단계] [그림 2]에서 끝점과 꺾인 점의 z 의 값을 구하면

$$z = 0, 2, 4$$

[2단계] [그림 1]에서 z 의 값에 대응하는 x 의 값을 구한다.

$$z = 0 \text{일 때, } x = 2$$

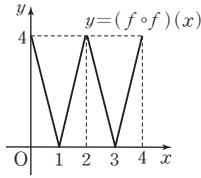
$$z = 2 \text{일 때, } x = 1, 3$$

$$z = 4 \text{일 때, } x = 0, 4$$

[3단계] x 의 값을 경계로 꺾임표를 만든다.

y	4	0	4	0	4
z	4	2	0	2	4
x	0	1	2	3	4

[4단계] 꺾임표를 보고 그래프를 그린다.



답 풀이 참조

066

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x+3) \\ = 3(2x+3) + a = 6x+9+a$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x+a) \\ = 2(3x+a) + 3 = 6x+3+2a$$

이때 $g \circ f = f \circ g$ 이므로 $6x+9+a = 6x+3+2a$

이 등식은 x 에 대한 항등식이므로

$$9+a = 3+2a$$

$$\therefore a = 6$$

답 6

068

$$(1) (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+1)$$

$$= 2(x+1) + 1$$

$$= 2x+3$$

$$\therefore (h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x))$$

$$= h(2x+3)$$

$$= 3(2x+3) + 1$$

$$= 6x+10$$

$$(2) (h \circ g)(x) = h(g(x)) = h(2x+1)$$

$$= 3(2x+1) + 1 = 6x+4$$

$$\therefore ((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x))$$

$$= (h \circ g)(x+1)$$

$$= 6(x+1) + 4$$

$$= 6x+10$$

답 (1) $6x+10$ (2) $6x+10$

070

일대일대응은 일대일함수이면서 치역과 공역이 서로 같아야 한다.

그래프에서는 x 축에 평행한 직선을 그었을 때 교점이 하나여야 한다. 즉, 계속 증가하는 함수이거나 계속 감소하는 함수여야 한다.

따라서 역함수가 존재하는 함수는 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

072

$y = x+3$ 의 x 와 y 를 바꾸면 $x = y+3$

$y = \square$ 의 꼴로 정리하면 $y = x-3$

답 $y = x-3$

074

(1) $f^{-1}(7) = a$ 에서 $f(a) = 7$ 이므로

$$3a-2=7 \quad \therefore a=3$$

(2) $f^{-1}(b) = 2$ 에서 $f(2) = b$ 이므로

$$b = 3 \times 2 - 2 = 4$$

답 (1) 3 (2) 4

다른 풀이

$y = 3x-2$ 의 x 와 y 를 바꾸면 $x = 3y-2$

$y = \square$ 의 꼴로 정리하면 $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

$$(1) f^{-1}(7) = \frac{7}{3} + \frac{2}{3} = 3 = a$$

$$(2) f^{-1}(b) = \frac{b}{3} + \frac{2}{3} = 2 \text{에서}$$

$$b+2=6 \quad \therefore b=4$$

076

[1단계] $f^{-1}(3) = 0$ 에서 $f(0) = 3$ 이므로

$$b = 3$$

..... ㉠

$f^{-1}(2) = 1$ 에서 $f(1) = 2$ 이므로

$$a+b=2$$

..... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $b=3$

$$\therefore f(x) = -x+3$$

[2단계] $f^{-1}(5) = k$ 로 놓으면 $f(k) = 5$ 이므로

$$-k+3=5 \quad \therefore k=-2$$

$$\therefore f^{-1}(5) = -2$$

답 -2

078

[1단계] $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ 이므로

$$(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(2)$$

$$= (f \circ f^{-1} \circ g^{-1} \circ f)(2)$$

$$= (I \circ g^{-1} \circ f)(2) \leftarrow f \circ f^{-1} = I$$

$$= (g^{-1} \circ f)(2) \leftarrow I \circ g^{-1} = g^{-1}$$

$$= g^{-1}(f(2))$$

$$= g^{-1}(3) \leftarrow f(2) = 2 \times 2 - 1 = 3$$

[2단계] $g^{-1}(3) = k$ 로 놓으면 $g(k) = 3$ 이므로

$$3k-6=3, 3k=9 \quad \therefore k=3$$

$$\therefore (f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(2) = g^{-1}(3) = 3$$

답 3

080

직선 $y=x$ 위의 점의 x 좌표와 y 좌표는 서로 같으므로 주어진 그림에 x 좌표를 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

[1단계] $f^{-1}(c)=k$ 로 놓으면

$$f(k)=c \text{에서 } k=d$$

$$\text{이므로 } f^{-1}(c)=d$$

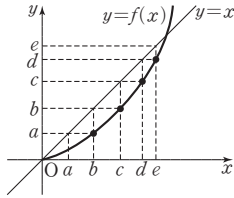
[2단계] $f^{-1}(d)=l$ 로 놓으면 $f(l)=d$ 에서 $l=e$ 이므로

$$f^{-1}(d)=e$$

$$\therefore (f^{-1} \circ f^{-1})(c)=f^{-1}(f^{-1}(c))$$

$$=f^{-1}(d)=e$$

답 e



+ 풍산자 비법

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 (a, b) 를 지나면 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 점 (b, a) 를 지난다.

082

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점은 직선 $y=x$ 위에 있다.

따라서 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점의 좌표를 구하면 된다.

$$f(x)=x \text{에서 } \frac{1}{2}x-\frac{3}{2}=x$$

$$\frac{1}{2}x=-\frac{3}{2} \quad \therefore x=-3$$

따라서 함수 $y=f(x)$ 와 그 역함수의 그래프의 교점의 좌표는 $(-3, -3)$ 이므로

$$a=-3, b=-3$$

$$\therefore a+b=-6$$

답 -6

084

[1단계] 주어진 함수방정식에 $x=1, y=1$ 을 대입하여

$f(2)$ 의 값을 구한다.

$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$ 에 $x=1, y=1$ 을 대입하면

$$f(1+1)=f(1)+f(1)+1$$

$$f(1)=3 \text{이므로 } f(2)=3+3+1=7$$

[2단계] $f(2)$ 의 값과 관계식을 이용하여 $f(4)$ 의 값을 구한다.

$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$ 에 $x=2, y=2$ 를 대입하면

$$f(2+2)=f(2)+f(2)+4$$

$$\therefore f(4)=7+7+4=18$$

답 18

필수 확인 문제

222쪽

085

$$(f \circ g)(0)=f(g(0))=f(1)$$

$$=2 \times 1 + 2 = 4$$

$$(g \circ f)(-2)=g(f(-2))=g(-2)$$

$$=-(-2)+3=5$$

$$\therefore (f \circ g)(0) + (g \circ f)(-2) = 4 + 5 = 9$$

답 9

086

$$(f \circ f)(x)=f(f(x))=f(-3x+6)$$

$$=-3(-3x+6)+6=9x-12$$

$$\therefore (f \circ (f \circ f))(x)=f((f \circ f)(x))=f(9x-12)$$

$$=-3(9x-12)+6=-27x+42$$

이때 $(f \circ (f \circ f))(x)=15$ 이므로

$$-27x+42=15, -27x=-27$$

$$\therefore x=1$$

답 1

087

$$(f \circ f)(x)=f(f(x))$$

$$=f(-x^2+k)$$

$$=-(-x^2+k)^2+k$$

$$=-x^4+2kx^2-k^2+k$$

나머지 정리에 의하여 $(f \circ f)(x)$ 가 $x-1$ 로 나누어떨어지면 $(f \circ f)(1)=0$ 이므로

$$(f \circ f)(1)=-1+2k-k^2+k$$

$$=-k^2+3k-1=0$$

즉, $k^2-3k+1=0$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 k 의 값의 합은 3이다.

답 3

참고 나머지 정리

다항식 $f(x)$ 를 일차식 $x-a$ 로 나눈 나머지는 $f(a)$ 이다.

088

$$\begin{aligned}
 & (f \circ g^{-1})(5) + (f \circ g)^{-1}(5) \\
 &= (f \circ g^{-1})(5) + (g^{-1} \circ f^{-1})(5) \\
 &= f(g^{-1}(5)) + g^{-1}(f^{-1}(5)) \\
 &= f(7) + g^{-1}(7) \quad \leftarrow g^{-1}(5)=7, f^{-1}(5)=7 \\
 &= 5+5=10 \quad \leftarrow f(7)=5, g^{-1}(7)=5
 \end{aligned}$$

답 10

089

$$\begin{aligned}
 & \text{(i)} g(4)=2 \\
 & \text{(ii)} f^{-1}(2)=k \text{로 놓으면 } f(k)=2 \text{이므로 } k=1 \\
 & \quad \text{즉, } f^{-1}(2)=1 \\
 & \text{(iii)} (f^{-1} \circ g)^{-1}(3) = (g^{-1} \circ f)(3) \\
 & \quad = g^{-1}(f(3)) \\
 & \quad = g^{-1}(4) \quad \leftarrow f(3)=4 \\
 & \quad \text{이때 } g^{-1}(4)=m \text{으로 놓으면 } g(m)=4 \text{이므로} \\
 & \quad m=6 \\
 & \quad \text{즉, } (f^{-1} \circ g)^{-1}(3) = g^{-1}(4)=6 \\
 & \text{(i)~(iii)에서} \\
 & g(4) + f^{-1}(2) + (f^{-1} \circ g)^{-1}(3) = 2+1+6=9
 \end{aligned}$$

답 9

090

함수 $f(x)$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 함수 $f(x)$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프의 두 교점은 직선 $y=x$ 위에 있다.

두 교점의 좌표를 각각 (α, α) , (β, β) 라 하면 α, β 는 방정식 $x^2 - 6x + k = x$, 즉 $x^2 - 7x + k = 0$ 의 실근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 7, \alpha\beta = k \quad \dots\dots ㉠$$

이때 두 교점 사이의 거리가 $5\sqrt{2}$ 이므로

$$\sqrt{(\alpha - \beta)^2 + (\alpha - \beta)^2} = 5\sqrt{2}$$

$$(\alpha - \beta)^2 = 25$$

$$(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 25$$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$$7^2 - 4k = 25, 4k = 49 - 25 = 24$$

$$\therefore k = 6$$

답 6

참고 이차방정식의 근과 계수의 관계

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면

$$\textcircled{1} \text{ 두 근의 합: } \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

$$\textcircled{2} \text{ 두 근의 곱: } \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

● 실전 연습문제

224~226쪽

091

주어진 함수의 함숫값을 구하면

$$f(1)=4, f(2)=4, f(3)=6$$

따라서 함수 f 의 치역은 $\{4, 6\}$ 이므로 치역의 모든 원소의 합은

$$4+6=10$$

답 10

092

1의 함숫값이 될 수 있는 것은 a, b, c, d 로 4개이다.2의 함숫값이 될 수 있는 것은 a, b, c, d 로 4개이다.3의 함숫값이 될 수 있는 것은 a, b, c, d 로 4개이다.따라서 함수의 개수는 $4 \times 4 \times 4 = 64$ 이므로

$$m=64$$

상수함수는 $f(x)=a, f(x)=b, f(x)=c, f(x)=d$ 로 4개이므로

$$n=4$$

$$\therefore m-n=64-4=60$$

답 60

093

 g 는 항등함수이므로 $g(1)=1, g(2)=2, g(3)=3$

$$\therefore f(1)=g(1)=h(1)=1$$

이때 h 는 상수함수이고 $h(1)=1$ 이므로

$$h(2)=1, h(3)=1$$

$$f(2)=h(3)+1=1+1=2 \quad \therefore f(2)=2$$

 f 는 일대일대응이므로 $f(3)=3$

$$\therefore f(3) \times h(3) = 3 \times 1 = 3$$

답 3

094

$$\frac{2x-1}{3} = 1 \text{로 놓으면 } 2x-1=3$$

$$2x=4 \quad \therefore x=2$$

 $x=2$ 를 주어진 식의 좌변과 우변의 x 에 대입하면

$$f(1) = -2^2 + 3 = -1$$

답 ②

095

$$\begin{aligned}
 (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\
 &= (x^2 + x - 1) + k \\
 &= x^2 + x + k - 1
 \end{aligned}$$

이므로 $(f \circ g)(-3) = 2$ 에서
 $(-3)^2 + (-3) + k - 1 = 2$
 $\therefore k = -3$
 따라서 $f(x) = x - 3$ 이므로
 $f(4) = 4 - 3 = 1$

답 1

096

$f = f^{-1}$ 이므로
 $(f \circ f^{-1})(x) = (f \circ f)(x) = x$
 이때
 $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = a(ax + 6) + 6 = a^2x + 6a + 6$
 이므로
 $a^2x + 6a + 6 = x$
 이 등식은 x 에 대한 항등식이므로
 $a^2 = 1, 6a + 6 = 0 \quad \therefore a = -1$
 따라서 $f(x) = -x + 6$ 이므로
 $f(2) = -2 + 6 = 4$

답 4

다른 풀이

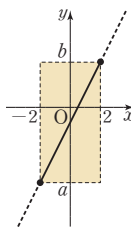
$y = ax + 6$ 의 x 와 y 를 바꾸면 $x = ay + 6$
 $y = \square$ 의 꼴로 정리하면 $y = \frac{1}{a}x - \frac{6}{a}$
 이때 $f = f^{-1}$ 이므로
 $ax + 6 = \frac{1}{a}x - \frac{6}{a} \quad \therefore a = -1$
 따라서 $f(x) = -x + 6$ 이므로
 $f(2) = -2 + 6 = 4$

097

$f(x) = 2x - 1$ 의 역함수가 존재하므로 함수 $f(x)$ 는 일대일 대응이다.

$y = f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같이 증가하는 모양이고 치역과 공역이 일치해야 하므로

$f(-2) = a, f(2) = b$
 $f(-2) = 2 \times (-2) - 1 = -5$ 에서
 $a = -5$
 $f(2) = 2 \times 2 - 1 = 3$ 에서
 $b = 3$
 $\therefore a + b = -5 + 3 = -2$



답 -2

098

$(f \circ f)^{-1}(2) = (f^{-1} \circ f^{-1})(2) = f^{-1}(f^{-1}(2))$ 이므로
 $f^{-1}(2) = k$ 로 놓으면 $f(k) = 2$ 에서 $k = 3$
 $\therefore f^{-1}(2) = 3$

$f^{-1}(3) = l$ 로 놓으면 $f(l) = 3$ 에서 $l = 4$
 $\therefore f^{-1}(3) = 4$
 $\therefore (f \circ f)^{-1}(2) = (f^{-1} \circ f^{-1})(2)$
 $= f^{-1}(f^{-1}(2))$
 $= f^{-1}(3) = 4$

답 ⑤

099

$(f^{-1} \circ f)(x) = x$ 이므로 $f(3x + 2) = x - 1$ 의 양변에 f^{-1} 를 합성하면
 $f^{-1}(f(3x + 2)) = f^{-1}(x - 1)$
 $\therefore f^{-1}(x - 1) = 3x + 2$
 이때 $x - 1 = 3$ 에서 $x = 4$
 따라서 $x = 4$ 를 대입하면 $f^{-1}(3) = 14$

답 ②

다른 풀이

$f(3x + 2) = x - 1$ 에서 $3x + 2 = t$ 라 하면
 $x = \frac{t - 2}{3}$ 이므로
 $f(t) = \frac{t - 2}{3} - 1 = \frac{t}{3} - \frac{5}{3}$
 $\therefore f(x) = \frac{x}{3} - \frac{5}{3}$
 이때 $f^{-1}(3) = k$ 로 놓으면 $f(k) = 3$ 이므로
 $\frac{k}{3} - \frac{5}{3} = 3 \quad \therefore k = 14$

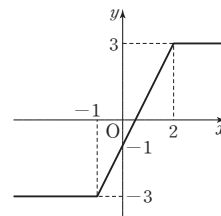
100

절댓값 기호 안을 0으로 하는 $x = -1$ 과 $x = 2$ 를 기준으로 구간을 나누어 그래프를 그린다.

[1단계] 절댓값 기호를 없앤다.

- (i) $x < -1$ 일 때
 $y = -(x + 1) + (x - 2) = -3$
- (ii) $-1 \leq x < 2$ 일 때
 $y = (x + 1) + (x - 2) = 2x - 1$
- (iii) $x \geq 2$ 일 때
 $y = (x + 1) - (x - 2) = 3$

[2단계] 없앤 식을 보고 그래프를 그린다.



따라서 최댓값은 3, 최솟값은 -3 이므로
 $M - m = 3 - (-3) = 6$

답 ③

101

$$f(x) = -f(-x) \text{에서 } f(x) + f(-x) = 0$$

(i) $f(-2)$ 의 값이 될 수 있는 것은 $-2, -1, 0, 1, 2$
이고, 이때 $f(2)$ 의 값은 $f(-2)$ 의 값에 따라 정해지
므로 그 경우의 수는 5

(ii) $f(-1)$ 의 값이 될 수 있는 것은 $-2, -1, 0, 1, 2$
이고, 이때 $f(1)$ 의 값은 $f(-1)$ 의 값에 따라 정해지
므로 그 경우의 수는 5

(iii) $f(0)$ 의 값이 될 수 있는 것은 주어진 조건에 의하여
0뿐이므로 그 경우의 수는 1

(i)~(iii)에서 구하는 함수 f 의 개수는

$$5 \times 5 \times 1 = 25$$

답 25

102

$$f(100) = f(10 \times 10 + 0) = f(10) + 0$$

$$= f(10 \times 1 + 0) = f(1) + 0$$

$$= f(10 \times 0 + 1) = f(0) + 1 = 1$$

$$f(999) = f(10 \times 99 + 9) = f(99) + 9$$

$$= f(10 \times 9 + 9) + 9 = f(9) + 9 + 9$$

$$= f(10 \times 0 + 9) + 9 + 9$$

$$= f(0) + 9 + 9 + 9 = 27$$

$$\therefore f(f(999)) = f(27) = f(10 \times 2 + 7)$$

$$= f(2) + 7 = f(10 \times 0 + 2) + 7$$

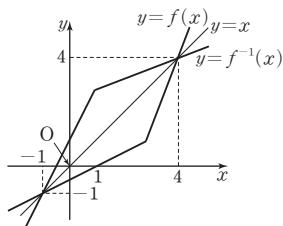
$$= f(0) + 2 + 7 = 9$$

$$\therefore f(100) + (f \circ f)(999) = 1 + 9 = 10$$

답 10

103

직선 $y=x$ 와 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는
다음 그림과 같다.



$$\{f(x)\}^2 = f(x)f^{-1}(x) \text{에서}$$

$$f(x)\{f(x) - f^{-1}(x)\} = 0$$

$$\text{이므로 } f(x) = 0 \text{ 또는 } f(x) = f^{-1}(x)$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 1 \text{ 또는 } x = 4$$

따라서 모든 실수 x 의 값의 합은 4이다.

답 4

104

함수 f 의 역함수가 존재하므로 함수 f 는 일대일대응이
다.

$$f(1) + 2f(3) = 12 \text{를 만족시키는 } f(1), f(3) \text{의 값은}$$

$$f(1) = 2, f(3) = 5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{또, } f^{-1}(1) - f^{-1}(3) = 2 \text{를 만족시키는 } f^{-1}(1), f^{-1}(3) \text{의 값은}$$

$$f^{-1}(1) = 3, f^{-1}(3) = 1 \text{ 또는 } f^{-1}(1) = 4, f^{-1}(3) = 2$$

$$\text{또는 } f^{-1}(1) = 5, f^{-1}(3) = 3$$

이때 $\textcircled{1}$ 에 의하여

$$f^{-1}(2) = 1, f^{-1}(5) = 3 \text{이므로}$$

$$f^{-1}(1) = 4, f^{-1}(3) = 2$$

따라서 $f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 5, f(4) = 1$ 이고, 함
수 f 는 일대일대응이므로

$$f(5) = 4$$

$$\therefore f(4) + f^{-1}(4) = 1 + 5 = 6$$

답 ②

참고

$f(3)$ 의 값이 1, 2, 3인 경우, $f(1) + 2f(3) = 12$ 를 만족
시키는 $f(1)$ 의 값은 존재하지 않는다.

$f(4) = 4$ 인 경우, $f(1) + 2f(3) = 12$ 를 만족시키는

$f(1)$ 의 값은 4이고, 이는 함수 f 가 일대일대응이라는
조건에 모순이다.

105

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (-2x + 4) + 1$$

$$= -2x + 5$$

$y = -2x + 5$ 라 하고, x 와 y 를 서로 바꾸면

$$x = -2y + 5$$

$y = \square$ 의 꼴로 정리하면

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

$$\therefore (f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$$

$$= -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

이때

$$(g^{-1} \circ f^{-1} \circ h^{-1})(x) = ((f \circ g)^{-1} \circ h^{-1})(x)$$

$$= (f \circ g)^{-1}(h^{-1}(x)) = -x$$

이므로

$$-\frac{1}{2}h^{-1}(x) + \frac{5}{2} = -x \quad \therefore h^{-1}(x) = 2x + 5$$

$$h(3) = k \text{라 하면 } h^{-1}(k) = 3 \text{이므로}$$

$$2k + 5 = 3 \quad \therefore k = -1$$

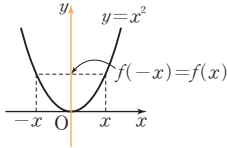
답 -1

보충 특수한 성질을 만족시키는 함수의 그래프

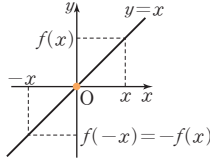
(1) 짝함수와 홀함수

짝함수는 $y=3$, $y=x^2+2$, ...와 같이 짝수 차수의 항만 포함하는 다항함수이다.

홀함수는 $y=x$, $y=x^3-2x$, ...와 같이 홀수 차수의 항만 포함하는 다항함수이다.



[짝함수]



[홀함수]

짝함수의 그래프는 y 축 대칭이므로

$f(-x)=f(x)$ 를 만족시키고,

홀함수의 그래프는 원점 대칭이므로

$f(-x)=-f(x)$ 를 만족시킨다.

따라서 어떤 함수가 짝함수인지 홀함수인지 알고 싶으면 $y=f(x)$ 에 x 대신 $-x$ 를 대입해 보면 된다. 우변이 다시 $f(x)$ 로 정리되면 짝함수이고, $-f(x)$ 로 정리되면 홀함수이다.

[예시]

함수 $f(x)$ 는 짝함수이고, 함수 $g(x)$ 는 홀함수일 때, $f(-x)=f(x)$, $g(-x)=-g(x)$ 이므로

① 함수 $f(x)g(x)$ 에 대하여

$$\begin{aligned} f(-x)g(-x) &= f(x) \times \{-g(x)\} \\ &= -f(x)g(x) \end{aligned}$$

이므로 $f(x)g(x)$ 는 홀함수이다.

② 함수 $f(x)+g(x)$ 에 대하여

$$f(-x)+g(-x)=f(x)-g(x)$$

이므로 $f(x)+g(x)$ 는 짝함수도 아니고 홀함수도 아니다.

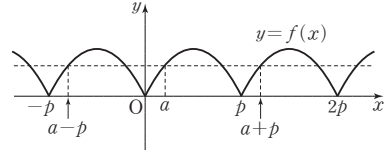
③ 함수 $(f \circ g)(x)$ 에 대하여

$$\begin{aligned} (f \circ g)(-x) &= f(g(-x)) \\ &= f(-g(x)) \\ &= f(g(x)) \\ &= (f \circ g)(x) \end{aligned}$$

이므로 $(f \circ g)(x)$ 는 짝함수이다.

(2) 주기함수

주기함수는 같은 모양의 그래프가 반복되는 함수이다. 주기가 p 인 주기함수는 p 의 배수마다 같은 모양의 그래프가 반복된다.

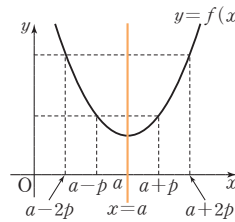


따라서 주기함수에서는 함수 $f(x)$ 의 정의역에 속하는 모든 x 에 대하여 $f(x+p)=f(x)$ 를 만족시키는 0이 아닌 상수 p 가 존재한다. 이 상수 p 중에서 가장 작은 양수를 함수 $f(x)$ 의 주기라 한다. 반복되는 최소 폭이 바로 주기인 것이다.

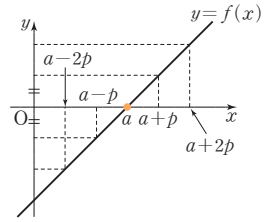
주기함수를 더하거나 빼면 어떻게 될까? $f(x)$ 의 주기가 4이고, $g(x)$ 의 주기가 6이면 $f(x) \pm g(x)$ 의 주기는 4와 6의 최소공배수인 12가 된다.

(3) 대칭함수

대칭함수는 크게 직선에 대하여 대칭인 선대칭함수와 점에 대하여 대칭인 점대칭함수로 나눌 수 있다. 예를 들어 짝함수는 선대칭함수이고, 홀함수는 점대칭함수이다.



[선대칭함수]



[점대칭함수]

직선 $x=a$ 에 대하여 대칭인 선대칭함수는 직선 $x=a$ 의 좌우에서 함수값이 같으므로

$f(a-x)=f(a+x)$ 또는 $f(x)=f(2a-x)$ 를 만족시킨다.

점 $(a, 0)$ 에 대하여 대칭인 점대칭함수는 점 $(a, 0)$ 의 좌우에서 함수값의 절댓값이 같으므로

$f(a-x)=-f(a+x)$ 또는 $f(x)=-f(2a-x)$ 를 만족시킨다.

2 유리식과 유리함수

1 유리식

228~233쪽

107

$$\begin{aligned} (\text{주어진 식}) &= \frac{x(x+1)}{x+2} \times \frac{(x+2)(x-1)}{(x-2)(x+1)} \times \frac{x-2}{x-1} \\ &= x \end{aligned} \quad \text{답 } x$$

109

[1단계] 분모를 $(a-b)(b-c)(c-a)$ 로 통분한다.

$$(\text{주어진 식}) = \frac{-a(b-c)-b(c-a)-c(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

[2단계] 분자를 전개하여 정리한다.

$$(\text{분자}) = -ab + ac - bc + ab - ac + bc = 0$$

$$\therefore (\text{주어진 식}) = \frac{0}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 0$$

답 0

111

분자에서 분모를 묶어 낸 후 (+)와 (-) 둘씩 조를 짜 통분한다.

$$\begin{aligned} (\text{주어진 식}) &= \frac{x+2}{x} - \frac{(x+1)+2}{x+1} - \frac{(x-3)-2}{x-3} + \frac{(x-4)-2}{x-4} \\ &= \left(1 + \frac{2}{x}\right) - \left(1 + \frac{2}{x+1}\right) - \left(1 - \frac{2}{x-3}\right) + \left(1 - \frac{2}{x-4}\right) \\ &= \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x+1}\right) + \left(\frac{2}{x-3} - \frac{2}{x-4}\right) \\ &= \frac{2}{x(x+1)} + \frac{-2}{(x-3)(x-4)} \\ &= \frac{2(x-3)(x-4) - 2x(x+1)}{x(x+1)(x-3)(x-4)} \\ &= \frac{-16x+24}{x(x+1)(x-3)(x-4)} \end{aligned}$$

$$\text{답 } \frac{-16x+24}{x(x+1)(x-3)(x-4)}$$

113

부분분수로 분해하면 연쇄적으로 소거된다.

$$\begin{aligned} (\text{주어진 식}) &= \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) + \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+10}\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{x+10} - \frac{1}{x+100}\right) + \left(\frac{1}{x+100} - \frac{1}{x+1000}\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1000} = \frac{1000}{x(x+1000)}$$

$$\text{답 } \frac{1000}{x(x+1000)}$$

115

$$\begin{aligned} (\text{주어진 식}) &= \frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{x^2-1}{x^2}} = \frac{x^2(x+1)}{x(x^2-1)} \\ &= \frac{x^2(x+1)}{x(x-1)(x+1)} = \frac{x}{x-1} \end{aligned}$$

$$\text{답 } \frac{x}{x-1}$$

다른 풀이

분모, 분자에 x^2 을 각각 곱한다.

$$(\text{주어진 식}) = \frac{x^2+x}{x^2-1} = \frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x}{x-1}$$

117

우변을 통분하면

$$\begin{aligned} \frac{a}{x+1} + \frac{bx+1}{x^2+1} &= \frac{a(x^2+1) + (bx+1)(x+1)}{(x+1)(x^2+1)} \\ &= \frac{(a+b)x^2 + (b+1)x + a+1}{(x+1)(x^2+1)} \end{aligned}$$

$$\frac{2}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{(a+b)x^2 + (b+1)x + a+1}{(x+1)(x^2+1)} \text{ 이 }$$

x 에 대한 항등식이므로 양변의 분자의 동류항의 계수를 비교하면

$$a+b=0, b+1=0, a+1=2$$

$$\therefore a=1, b=-1$$

$$\text{답 } a=1, b=-1$$

119

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = k \ (k \neq 0) \text{로 놓으면}$$

$$x=2k, y=3k, z=4k$$

$$\begin{aligned} (1) (\text{주어진 식}) &= \frac{2k+3k+4k}{2 \times 2k + 3 \times 3k + 4 \times 4k} \\ &= \frac{9k}{29k} = \frac{9}{29} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) (\text{주어진 식}) &= \frac{(2k)^2 - (3k)^2 + (4k)^2}{2k \times 3k + 3k \times 4k - 4k \times 2k} \\ &= \frac{4k^2 - 9k^2 + 16k^2}{6k^2 + 12k^2 - 8k^2} \\ &= \frac{11k^2}{10k^2} = \frac{11}{10} \end{aligned}$$

$$\text{답 } (1) \frac{9}{29} \quad (2) \frac{11}{10}$$

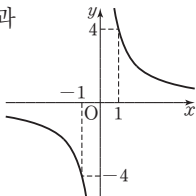
121

(1) $y = \frac{4}{x}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

점근선의 방정식: $x=0, y=0$

정의역: $\{x|x \neq 0 \text{인 실수}\}$

치역: $\{y|y \neq 0 \text{인 실수}\}$



(2) $y = -\frac{1}{x+2} - 1$ 의 그래프는

$y = -\frac{1}{x}$ 의 그래프를 x 축의

방향으로 -2 만큼, y 축의 방

향으로 -1 만큼 평행이동한

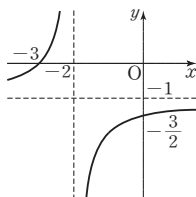
것이다.

따라서 그래프는 위의 그림과 같다.

점근선의 방정식: $x=-2, y=-1$

정의역: $\{x|x \neq -2 \text{인 실수}\}$

치역: $\{y|y \neq -1 \text{인 실수}\}$



답 풀이 참조

123

$$y = \frac{x+1}{x-1} = \frac{(x-1)+2}{x-1} = \frac{2}{x-1} + 1$$

이 함수의 그래프는 $y = \frac{2}{x}$ 의 그

래프를 x 축의 방향으로 1 만큼, y

축의 방향으로 1 만큼 평행이동

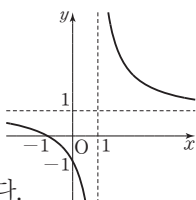
한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

점근선의 방정식: $x=1, y=1$

정의역: $\{x|x \neq 1 \text{인 실수}\}$

치역: $\{y|y \neq 1 \text{인 실수}\}$



답 풀이 참조

125

$$y = \frac{2x}{x-2} = \frac{2(x-2)+4}{x-2} = \frac{4}{x-2} + 2$$

이 함수의 그래프는 $y = \frac{4}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로

2 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이다.

$\therefore a=4, b=2, c=2$

답 $a=4, b=2, c=2$

127

$$\neg. y = \frac{x-4}{x-3} = \frac{(x-3)-1}{x-3} = -\frac{1}{x-3} + 1$$

$$\neg. y = \frac{3x-5}{x-2} = \frac{3(x-2)+1}{x-2} = \frac{1}{x-2} + 3$$

$$\neg. y = \frac{4x-5}{x-1} = \frac{4(x-1)-1}{x-1} = -\frac{1}{x-1} + 4$$

따라서 그래프가 서로 겹칠 수 있는 것은 $\neg, \neg$ 이다.

답 $\neg, \neg$

+ 풍산자 방법

두 유리함수 $y = \frac{k}{x-p} + q, y = \frac{l}{x} + r$ 의 그래프가 평행이동

에 의하여 서로 겹쳐지면 $\Rightarrow k=l$

129

$$y = \frac{4x}{x-1} = \frac{4(x-1)+4}{x-1} = \frac{4}{x-1} + 4$$

따라서 주어진 함수의 그래프는 두 점근선

$x=1, y=4$ 의 교점 $(1, 4)$ 에 대하여 대칭이므로

$a=1, b=4$

$\therefore a+b=5$

답 5

131

$$y = \frac{2x-4}{x-3} = \frac{2(x-3)+2}{x-3} = \frac{2}{x-3} + 2$$

따라서 주어진 함수의 그래프는 점 $(3, 2)$ 를 지나고 기

울기가 ± 1 인 두 직선에 대하여 대칭이므로 $x=3,$

$y=2$ 를 주어진 두 직선의 방정식에 대입하면

$2=3+a, 2=-3+b$

$\therefore a=-1, b=5$

답 $a=-1, b=5$

133

[1단계] 점근선의 방정식이 $x=-1, y=2$ 이므로 주어진 함수를

$$y = \frac{k}{x+1} + 2$$

..... ㉠

로 놓는다.

[2단계] ㉠의 그래프가 점 $(1, 0)$ 을 지나므로

$$0 = \frac{k}{1+1} + 2 \quad \therefore k = -4$$

$k=-4$ 를 ㉠에 대입하면

$$y = -\frac{4}{x+1} + 2 = \frac{2x-2}{x+1}$$

$\therefore a=2, b=-2, c=-1$

답 $a=2, b=-2, c=-1$

다른 풀이

[1단계] 공식을 이용하면 $y = \frac{ax+b}{x-c}$ 의 그래프의 점근선

의 방정식은 $x=c, y=a$

이것이 $x=-1, y=2$ 와 같아야 하므로

$$c=-1, a=2$$

[2단계] $y = \frac{ax+b}{x-c}$ 의 그래프가 점 $(1, 0)$ 을 지나므로

$$0 = \frac{a+b}{1-c}, 0 = \frac{2+b}{1+1}$$

$$\therefore b=-2$$

135

$$y = \frac{x+1}{x-1} = \frac{(x-1)+2}{x-1} = \frac{2}{x-1} + 1$$

의 그래프를 그린 후 $0 \leq x < 1$ 또

는 $1 < x \leq 2$ 인 부분만 살려 놓으

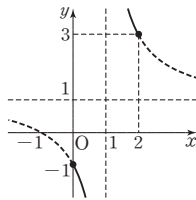
면 오른쪽 그림과 같다.

$x=0$ 일 때 $y=-1$,

$x=2$ 일 때 $y=3$ 이므로

치역은 $\{y|y \leq -1 \text{ 또는 } y \geq 3\}$

$$\text{답 } \{y|y \leq -1 \text{ 또는 } y \geq 3\}$$



137

$$y = \frac{-2x+3}{x-1} = \frac{-2(x-1)+1}{x-1} = \frac{1}{x-1} - 2$$

의 그래프를 그린 후 $2 \leq x \leq 4$

인 부분만 살려 놓으면 오른쪽

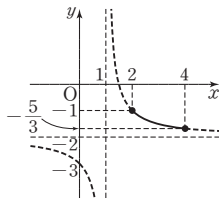
그림과 같다.

따라서 주어진 함수는

$x=2$ 일 때 최댓값 -1 ,

$x=4$ 일 때 최솟값 $-\frac{5}{3}$ 를 갖는다.

$$\text{답 } \text{최댓값: } -1, \text{ 최솟값: } -\frac{5}{3}$$



139

$$[1\text{단계}] y = \frac{x+b}{x-3} = \frac{(x-3)+3+b}{x-3} = \frac{3+b}{x-3} + 1$$

[2단계] $3+b < 0$ 이므로 오른쪽

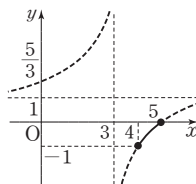
그림과 같이 함수

$$y = \frac{x+b}{x-3} \text{는}$$

$x=a$ 일 때 최솟값 -1 ,

$x=5$ 일 때 최댓값 0 을 갖

는다.



[3단계] $y = \frac{x+b}{x-3}$ 에 $x=5$ 를 대입하면

$$\frac{5+b}{2} = 0$$

$$\therefore b=-5$$

$y = \frac{x-5}{x-3}$ 에 $x=a$ 를 대입하면 $\frac{a-5}{a-3} = -1$ 에서

$$a-5 = -a+3, 2a=8$$

$$\therefore a=4$$

$$\text{답 } a=4, b=-5$$

141

(1) $y = \frac{4x-3}{-x+2}$ 의 x 와 y 를 서로 바꾸면

$$x = \frac{4y-3}{-y+2}$$

$$-xy+2x=4y-3, (-x-4)y=-2x-3$$

$$\therefore y = \frac{2x+3}{x+4}$$

(2) $y = \frac{ax+b}{-x+c}$ 의 x 와 y 를 서로 바꾸면

$$x = \frac{ay+b}{-y+c}$$

$$-xy+cx=ay+b, (-x-a)y=-cx+b$$

$$\therefore y = \frac{cx-b}{x+a}$$

$$\text{답 } (1) y = \frac{2x+3}{x+4} \quad (2) y = \frac{cx-b}{x+a}$$

다른 풀이

공식을 이용하여 부호와 자리를 바꾼다.

(1) $y = \frac{4x-3}{-x+2}$ 에서 4와 2의 부호와 자리를 바꾸면

$$y = \frac{-2x-3}{-x-4} = \frac{2x+3}{x+4}$$

(2) $y = \frac{ax+b}{-x+c}$ 에서 a 와 c 의 부호와 자리를 바꾸면

$$y = \frac{-cx+b}{-x-a} = \frac{cx-b}{x+a}$$

143

함수 $y = \frac{-3x+7}{x-2}$ 의 그래프와 직선 $y = -x+a$ 가 만

나지 않으므로 $\frac{-3x+7}{x-2} = -x+a$ 에서

$$-3x+7=(x-2)(-x+a)$$

$$\therefore x^2-(a+5)x+2a+7=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D=(a+5)^2-4(2a+7)<0$$

$$a^2+2a-3<0$$

$$(a+3)(a-1)<0$$

$$\therefore -3<a<1$$

$$\text{답 } -3<a<1$$

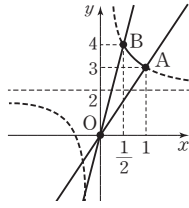
145

$$y = \frac{2x+1}{x} = \frac{1}{x} + 2$$

의 그래프를 그린 후 $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ 인

부분만 살려 놓으면 오른쪽 그림과 같고, 직선 $y=ax$ 는 a 의 값에 관계없이 항상 원점을 지난다.

따라서 함수 $y = \frac{2x+1}{x}$ 의 그래



프와 직선 $y=ax$ 가 만날 때는 직선 $y=ax$ 가 두 점

$A(1, 3)$, $B(\frac{1}{2}, 4)$ 사이를 지날 때이다.

직선 $y=ax$ 가 점 $A(1, 3)$ 을 지날 때, $a=3$

점 $B(\frac{1}{2}, 4)$ 를 지날 때, $4 = \frac{1}{2}a \quad \therefore a=8$

따라서 a 의 값의 범위는 $3 \leq a \leq 8$

답 $3 \leq a \leq 8$

필수 확인 문제

244쪽

146

$$\begin{aligned} \text{(주어진 식)} &= \frac{3(x-1)+2}{x-1} - \frac{3(x+1)-1}{x+1} \\ &= 3 + \frac{2}{x-1} - \left(3 - \frac{1}{x+1}\right) \\ &= \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{2(x+1) + (x-1)}{(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{3x+1}{(x-1)(x+1)} \end{aligned}$$

답 $\frac{3x+1}{(x-1)(x+1)}$

147

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(x)} &= \frac{1}{x^2+x} \\ &= \frac{1}{x(x+1)} \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \end{aligned}$$

이므로

$$\frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(2)} + \frac{1}{f(3)} + \cdots + \frac{1}{f(19)}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots$$

$$+ \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{20}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}$$

답 $\frac{19}{20}$

148

$$y = \frac{7-x}{x-5} = \frac{-(x-5)+2}{x-5} = \frac{2}{x-5} - 1$$

$$y = \frac{17-5x}{x-3} = \frac{-5(x-3)+2}{x-3} = \frac{2}{x-3} - 5$$

따라서 함수 $y = \frac{17-5x}{x-3}$ 의 그래프는

$y = \frac{7-x}{x-5}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 -4 만큼 평행이동한 것이므로

$$a = -2, b = -4 \quad \therefore a+b = -6$$

답 -6

149

$$y = \frac{2x-5}{x-3} = \frac{2(x-3)+1}{x-3} = \frac{1}{x-3} + 2$$

의 그래프를 그린 후 $0 \leq x \leq 2$ 인

부분만 살려 놓으면 오른쪽 그림과 같다.

따라서 주어진 함수는

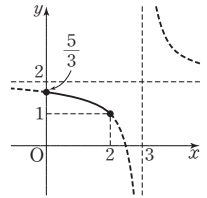
$$x=0 \text{일 때 최댓값 } \frac{5}{3},$$

$x=2$ 일 때 최솟값 1 을 가지므로

$$M = \frac{5}{3}, m = 1$$

$$\therefore M - m = \frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$



150

$f^{-1} \circ f = I$ 이므로

$$(f^{-1} \circ f \circ f^{-1})(5) = (I \circ f^{-1})(5) = f^{-1}(5)$$

$$f^{-1}(5) = k \text{로 놓으면 } f(k) = 5 \text{이므로 } \frac{2k+1}{k-1} = 5$$

$$2k+1 = 5k-5, 3k = 6 \quad \therefore k = 2$$

$$\therefore (f^{-1} \circ f \circ f^{-1})(5) = f^{-1}(5) = 2$$

답 2

151

$$f^2(x) = (f \circ f)(x) = \frac{\frac{x-1}{x} - 1}{\frac{x-1}{x}} = \frac{-1}{\frac{x-1}{x}} = -\frac{1}{x-1}$$

$$f^3(x) = (f \circ f^2)(x) = \frac{-\frac{1}{x-1} - 1}{-\frac{1}{x-1}} = \frac{\frac{x-1}{x-1}}{\frac{x-1}{x-1}} = x$$

$$f^4(x) = (f \circ f^3)(x) = \frac{x-1}{x}$$

⋮

$$\text{따라서 } f^{20}(x) = f^{3 \times 6 + 2}(x) = f^2(x) = -\frac{1}{x-1} \text{ 이므로}$$

$$f^{20}(2) = -1 \quad \text{답 } -1$$

● 실전 연습문제

246~247쪽

152

$$\begin{aligned} (\text{주어진 식}) &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{x+1}{x}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{x}{x+1}} \\ &= 1 + \frac{1}{\frac{2x+1}{x+1}} = 1 + \frac{x+1}{2x+1} = \frac{3x+2}{2x+1} \end{aligned}$$

답 ⑤

153

주어진 식의 좌변을 정리하면

$$\begin{aligned} &\frac{1}{x(x+1)} + \frac{2}{(x+1)(x+3)} + \frac{2}{(x+3)(x+5)} \\ &= \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) + \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3}\right) + \left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+5}\right) \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+5} = \frac{5}{x^2+5x} \end{aligned}$$

$\frac{5}{x^2+5x} = \frac{a}{x^2+bx}$ 가 x 에 대한 항등식이므로 양변을 비교하면

$$a=5, b=5 \quad \therefore a+b=10 \quad \text{답 } 10$$

154

$$\frac{a+b}{6} = \frac{b+c}{7} = \frac{c+a}{9} = k \quad (k \neq 0) \text{로 놓으면}$$

$$a+b=6k, b+c=7k, c+a=9k$$

각 변을 더하면

$$2(a+b+c) = 22k, a+b+c = 11k$$

$$\therefore a=4k, b=2k, c=5k$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} &= \frac{4k \times 2k + 2k \times 5k + 5k \times 4k}{(4k)^2 + (2k)^2 + (5k)^2} \\ &= \frac{38k^2}{-5k^2} = -\frac{38}{5} \quad \text{답 } -\frac{38}{5} \end{aligned}$$

155

점근선의 방정식이 $x=2, y=3$ 이므로 주어진 함수를

$$y = \frac{k}{x-2} + 3 \quad \dots\dots ㉠$$

으로 놓으면 ㉠의 그래프가 점 $(0, 4)$ 를 지나므로

$$4 = \frac{k}{0-2} + 3 \quad \therefore k = -2$$

 $k = -2$ 를 ㉠에 대입하면

$$y = -\frac{2}{x-2} + 3 = \frac{3x-8}{x-2}$$

따라서 $a = -2, b = 3, c = -8$ 이므로

$$a+b+c = -7 \quad \text{답 } ③$$

156

함수 $y = \frac{4}{x+2}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 함수의 그래프의 식은

$$y = \frac{4}{(x-3)+2} + a = \frac{4}{x-1} + a$$

이 그래프가 점 $(2, 1)$ 을 지나므로

$$1 = \frac{4}{2-1} + a \quad \therefore a = -3$$

따라서 $y = \frac{4}{x-1} - 3$ 이고, 이 함수의 그래프가 점 $(b, -1)$ 을 지나므로

$$-1 = \frac{4}{b-1} - 3, \frac{4}{b-1} = 2$$

$$b-1=2 \quad \therefore b=3$$

$$\therefore a+b=0 \quad \text{답 } 0$$

157

함수 $y = -\frac{2}{x} + 2$ 의 그래프와 직선 $y = 2x + k$ 가 서로만나지 않아야 하므로 $-\frac{2}{x} + 2 = 2x + k$ 에서

$$-2 + 2x = 2x^2 + kx$$

$$\therefore 2x^2 + (k-2)x + 2 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

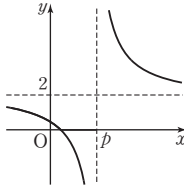
$$D = (k-2)^2 - 16 < 0, k^2 - 4k - 12 < 0$$

$$(k+2)(k-6) < 0 \quad \therefore -2 < k < 6$$

따라서 구하는 정수 k 는 $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ 이므로 그 개수는 7이다. 답 7

158

주어진 함수의 그래프는 함수

 $y = \frac{5}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로로 p , y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프이므로 점근선의 방정식은 $x=p$, $y=2$ 이다.

$p \leq 0$ 이면 곡선 $y = \frac{5}{x-p} + 2$ 는 반드시 제3사분면을 지나므로 $p > 0$ 이다.

(i) $x > p$ 일 때, 함수의 그래프는 제1사분면만을 지난다.

(ii) $x < p$ 일 때, 주어진 함수의 그래프가 제3사분면을 지나지 않기 위해서는 $x=0$ 일 때 y 의 값은 0 이상이어야 한다.

$$\frac{5}{-p} + 2 \geq 0, \quad -\frac{5}{p} \geq -2$$

$$2p \geq 5 \quad \therefore p \geq \frac{5}{2}$$

따라서 조건을 만족시키는 정수 p 의 최솟값은 3이다.

답 3

159

 $y = \frac{2x-1}{x-3}$ 에서 x 와 y 를 서로 바꾸면

$$x = \frac{2y-1}{y-3}$$

$$xy - 3x = 2y - 1, \quad (x-2)y = 3x - 1$$

$$\therefore y = \frac{3x-1}{x-2}$$

$$\text{즉, } g(x) = \frac{3x-1}{x-2}$$

한편,

$$f(x) = \frac{2x-1}{x-3} = \frac{2(x-3)+5}{x-3} = \frac{5}{x-3} + 2,$$

$$g(x) = \frac{3x-1}{x-2} = \frac{3(x-2)+5}{x-2} = \frac{5}{x-2} + 3$$

이므로 $y=g(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면 $y=f(x)$ 의 그래프와 겹쳐진다.

따라서 $a=1$, $b=-1$ 이므로

$$ab = -1$$

답 -1

160

함수 $y=f(x+a)+\frac{a}{2}$ 의 그래프는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-a$ 만큼, y 축의 방향으로 $\frac{a}{2}$ 만큼 평행이동한 것이다.

또,

$$y = \left| f(x+a) + \frac{a}{2} \right|$$

의 그래프는 함수

$$y = f(x+a) + \frac{a}{2} \text{의 그}$$

래프의 x 축의 아랫부분(음수 부분)을 x 축의 위로 접어 올린 것이다.따라서 $y = \left| f(x+a) + \frac{a}{2} \right|$ 의 그래프가 y 축에 대하여대칭이라면 점근선의 방정식이 $x=0$, $y=0$ 이어야 한다.

즉, 함수 $y=f(x+a)+\frac{a}{2}$ 의 그래프의 점근선의 방정식도 $x=0$, $y=0$ 이다.

$$y=f(x+a)+\frac{a}{2} = \frac{a}{x+a-6} + b + \frac{a}{2} \text{에서 점근선의}$$

방정식은 $x=-a+6$, $y=b+\frac{a}{2}$ 이므로

$$-a+6=0 \text{에서 } a=6$$

$$b+\frac{a}{2}=b+\frac{6}{2}=0 \text{에서 } b=-3$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{6}{x-6} - 3 \text{이므로}$$

$$f(b) = f(-3) = \frac{6}{-3-6} - 3$$

$$= -\frac{2}{3} - 3 = -\frac{11}{3}$$

답 ④

161

$$y = \frac{x+4}{x-1} = \frac{(x-1)+5}{x-1} = \frac{5}{x-1} + 1$$

이므로 주어진 함수의 그래

프는 점 (1, 1)을 지나고

기울기가 1인 직선, 즉 직선

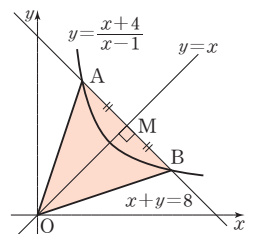
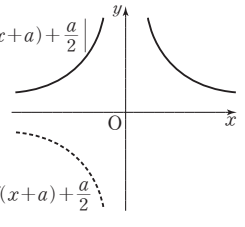
 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.이때 직선 $x+y=8$ 도 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로삼각형 AOB는 $\overline{OA}=\overline{OB}$ 인 이등변삼각형이다.선분 AB의 중점을 M이라 하면 점 M은 직선 $y=x$ 과직선 $x+y=8$ 의 교점이므로

$$x+x=8, \quad 2x=8 \quad \therefore x=4$$

$$\therefore M(4, 4)$$

또, $y = \frac{x+4}{x-1}$ 에 $x+y=8$, 즉 $y=8-x$ 를 대입하면

$$8-x = \frac{x+4}{x-1}, \quad -x^2+9x-8=x+4$$



$$x^2 - 8x + 12 = 0, (x-2)(x-6) = 0$$

$$\therefore x=2 \text{ 또는 } x=6$$

따라서 A(2, 6), B(6, 2)이므로

$$\begin{aligned} \triangle AOB &= \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{OM} \\ &= \frac{1}{2} \times \sqrt{(2-6)^2 + (6-2)^2} \times \sqrt{4^2 + 4^2} \\ &= \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 4\sqrt{2} = 16 \end{aligned} \quad \text{답 ③}$$

162

점 P의 좌표를 (a, b)라 하면 점 P는 주어진 함수의 그래프 위의 점이므로

$$b = \frac{2}{a-1} + 2$$

$$\text{즉, } b-2 = \frac{2}{a-1} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

직사각형 PRSQ의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned} 2(\overline{PR} + \overline{PQ}) \\ &= 2(a-1) + 2(b-2) \\ &\geq 2\sqrt{2(a-1) \times 2(b-2)} \\ &= 2\sqrt{2(a-1) \times \frac{4}{a-1}} = 4\sqrt{2} \quad (\because \text{㉠}) \end{aligned}$$

(단, 등호는 $a-1=b-2$ 일 때, 즉 $a=1+\sqrt{2}$, $b=2+\sqrt{2}$ 일 때 성립한다.)

따라서 직사각형 PRSQ의 둘레의 길이의 최솟값은 $4\sqrt{2}$ 이다. 답 $4\sqrt{2}$

참고 산술평균과 기하평균의 관계

$a > 0, b > 0$ 일 때, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$
(단, 등호는 $a=b$ 일 때 성립한다.)

3 무리식과 무리함수

1 무리식

249~250쪽

164

$$\begin{aligned} (1) & \frac{4}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}} \\ &= \frac{4(\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2})}{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2})(\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2})} \\ &= \frac{4(\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2})}{(x+2) - (x-2)} = \sqrt{x+2} + \sqrt{x-2} \\ (2) & \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1} - \sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x-1} - \sqrt{x}) - \sqrt{x}(\sqrt{x-1} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x-1} + \sqrt{x})(\sqrt{x-1} - \sqrt{x})} \\ &= \frac{-x-x}{x-1-x} = \frac{-2x}{-1} = 2x \end{aligned}$$

답 (1) $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}$ (2) $2x$

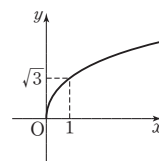
2 무리함수

251~260쪽

166

(1) 근호 밖의 부호: (+)

근호 안의 부호: (+) $\Rightarrow$ 위-오른쪽 방향

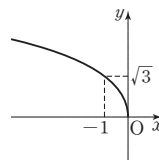


정의역: $\{x | x \geq 0\}$

치역: $\{y | y \geq 0\}$

(2) 근호 밖의 부호: (+)

근호 안의 부호: (-) $\Rightarrow$ 위-왼쪽 방향

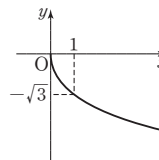


정의역: $\{x | x \leq 0\}$

치역: $\{y | y \geq 0\}$

(3) 근호 밖의 부호: (-)

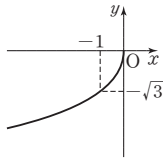
근호 안의 부호: (+) $\Rightarrow$ 아래-오른쪽 방향



정의역: $\{x | x \geq 0\}$

치역: $\{y | y \leq 0\}$

- (4) 근호 밖의 부호: (-) → 아래-왼쪽 방향
 근호 안의 부호: (-)



정의역: $\{x|x \leq 0\}$
 치역: $\{y|y \leq 0\}$

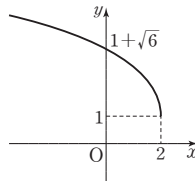
답 풀이 참조

168

- (1) [1단계] $y = \sqrt{6-3x} + 1$ 의 근호 안이 0일 때 $x=2$,
 $y=1$ 이므로 출발점은 점 $(2, 1)$ 이다.

[2단계] 함수 $y = \sqrt{6-3x} + 1$
 의 그래프가 뺀어 가는
 방향은 함수

$y = \sqrt{-3x}$ 의 그래프
 가 뺀어 가는 방향과
 같다.

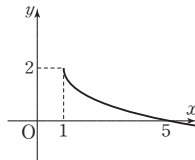


근호 밖의 부호는 (+), 근호 안의 부호는
 (-)이므로 위-왼쪽으로 뺀어 가는 그래프
 이다.

[3단계] 그래프에서 정의역과 치역을 구하면
 정의역: $\{x|x \leq 2\}$, 치역: $\{y|y \geq 1\}$

- (2) [1단계] $y = 2 - \sqrt{x-1}$ 의 근호 안이 0일 때 $x=1$,
 $y=2$ 이므로 출발점은 점 $(1, 2)$ 이다.

[2단계] 함수 $y = 2 - \sqrt{x-1}$ 의
 그래프가 뺀어 가는 방
 향은 함수 $y = -\sqrt{x}$ 의
 그래프가 뺀어 가는 방
 향과 같다.



근호 밖의 부호는 (-), 근호 안의 부호는
 (+)이므로 아래-오른쪽으로 뺀어 가는 그
 래프이다.

[3단계] 그래프에서 정의역과 치역을 구하면
 정의역: $\{x|x \geq 1\}$, 치역: $\{y|y \leq 2\}$

답 풀이 참조

170

$y = \sqrt{5x+20} + 1 = \sqrt{5(x+4)} + 1$ 이므로 이 함수의 그
 래프는 함수 $y = \sqrt{5x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -4
 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $a=-4$, $b=1$ 이므로

$$a+b=-3$$

답 -3

172

$y = \sqrt{-3x+a} + b$ 에서 $y-b = \sqrt{-3x+a}$ 이므로
 $-3x+a \geq 0$, $y-b \geq 0$

$$\therefore x \leq \frac{a}{3}, y \geq b$$

따라서 정의역은 $\{x|x \leq \frac{a}{3}\}$ 이고, 치역은 $\{y|y \geq b\}$ 이
 므로

$$\frac{a}{3} = -1, b = 3 \quad \therefore a = -3, b = 3$$

$$\therefore ab = -9$$

답 -9

174

주어진 함수의 그래프는 함수 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를 x 축
 의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이
 동한 것이므로 함수의 식을

$$y = \sqrt{a(x+1)} - 1$$

..... ㉠

로 놓을 수 있다.

㉠의 그래프가 점 $(0, 1)$ 을 지나므로

$$1 = \sqrt{a} - 1, \sqrt{a} = 2 \quad \therefore a = 4$$

$a=4$ 를 ㉠에 대입하면

$$y = \sqrt{4(x+1)} - 1 = \sqrt{4x+4} - 1$$

따라서 $a=4$, $b=4$, $c=-1$ 이므로

$$a+b+c=7$$

답 7

176

함수 $y = 5 - \sqrt{3-2x}$ 의 그래프
 는 근호 안이 0일 때의 점

$(\frac{3}{2}, 5)$ 를 출발해 함수

$y = -\sqrt{-2x}$ 의 그래프와 같은
 아래-왼쪽 방향으로 뺀어 가
 는 그래프이다.

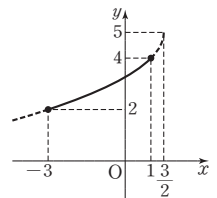
$-3 \leq x \leq 1$ 인 부분만 살려 놓으면 위의 그림과 같다.

따라서 주어진 함수는 $x=1$ 일 때 최댓값 4 , $x=-3$ 일
 때 최솟값 2 를 가지므로

$$M=4, m=2$$

$$\therefore Mm=8$$

답 8



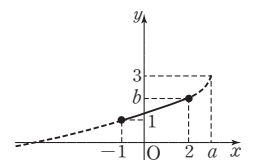
178

함수 $y = 3 - \sqrt{a-x}$ 의 그래
 프는 근호 안이 0일 때의 점

$(a, 3)$ 을 출발해 함수

$y = -\sqrt{-x}$ 의 그래프와 같

은 아래-왼쪽 방향으로 뺀어 가는 그래프이다.



따라서 주어진 함수는 $x=2$ 에서 최댓값, $x=-1$ 에서 최솟값을 가진다.

최댓값이 b , 최솟값이 1이므로

$$b=3-\sqrt{a-2}, 1=3-\sqrt{a+1}$$

$$\therefore a=3, b=2$$

$$\text{답 } a=3, b=2$$

180

(1) [1단계] 정의역과 치역을 구한다.

$y=\sqrt{2-2x}$ 의 근호 안은 0 이상이어야 하므로

$$2-2x \geq 0, \text{ 즉 } x \leq 1$$

$$\text{또 } \sqrt{2-2x} \geq 0 \text{ 이므로 } y \geq 0$$

$$\therefore y=\sqrt{2-2x} \quad (x \leq 1, y \geq 0)$$

[2단계] x 와 y 를 바꾸면 $x=\sqrt{2-2y} \quad (y \leq 1, x \geq 0)$

[3단계] $y=\star$ 의 꼴로 정리하면

$$\sqrt{2-2y}=x \text{에서 } 2-2y=x^2$$

$$\therefore y=-\frac{1}{2}x^2+1 \quad (x \geq 0)$$

(2) [1단계] 정의역과 치역을 구한다.

$y=4-\sqrt{3x-1}$ 의 근호 안은 0 이상이어야 하

$$\text{므로 } 3x-1 \geq 0, \text{ 즉 } x \geq \frac{1}{3}$$

$$\text{또, } \sqrt{3x-1} \geq 0 \text{ 이므로 } y \leq 4$$

$$\therefore y=4-\sqrt{3x-1} \quad \left(x \geq \frac{1}{3}, y \leq 4\right)$$

[2단계] x 와 y 를 바꾸면

$$x=4-\sqrt{3y-1} \quad \left(y \geq \frac{1}{3}, x \leq 4\right)$$

[3단계] $y=\star$ 의 꼴로 정리하면

$$\sqrt{3y-1}=4-x \text{에서 } 3y-1=(4-x)^2$$

$$\therefore y=\frac{(x-4)^2}{3}+\frac{1}{3} \quad (x \leq 4)$$

$$\text{답 (1) } y=-\frac{1}{2}x^2+1 \quad (x \geq 0)$$

$$(2) y=\frac{(x-4)^2}{3}+\frac{1}{3} \quad (x \leq 4)$$

182

[1단계] $y=\sqrt{x+2}-1$ 에서 $y+1=\sqrt{x+2}$ 이므로

$$x+2 \geq 0, y+1 \geq 0 \quad \therefore x \geq -2, y \geq -1$$

$$\therefore y+1=\sqrt{x+2} \quad (x \geq -2, y \geq -1) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

[2단계] ①에서 x 와 y 를 바꾸면

$$x+1=\sqrt{y+2} \quad (y \geq -2, x \geq -1)$$

$$\text{양변을 제곱하면 } (x+1)^2=y+2$$

$$\therefore y=x^2+2x-1 \quad (x \geq -1)$$

$$\therefore a=2, b=-1, c=-1$$

$$\text{답 } a=2, b=-1, c=-1$$

184

역함수의 그래프가 점 $(2, 1)$ 을 지나므로 주어진 함수의 그래프는 점 $(1, 2)$ 를 지난다.

$x=1, y=2$ 를 $y=\sqrt{x+a}$ 에 대입하면

$$2=\sqrt{1+a}, 4=1+a \quad \therefore a=3$$

$$\text{답 } 3$$

186

주어진 두 함수의 그래프의 교

점은 함수 $y=\sqrt{2x+3}$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점과 같다.

$\sqrt{2x+3}=x$ 의 양변을 제곱하

$$\text{면 } 2x+3=x^2, x^2-2x-3=0$$

$$(x+1)(x-3)=0 \quad \therefore x=-1 \text{ 또는 } x=3$$

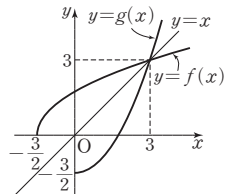
$y=\sqrt{2x+3}$ 에서 $y \geq 0$ 이므로 역함수의 정의역은

$$\{x|x \geq 0\} \quad \therefore x=3$$

따라서 교점의 좌표가 $(3, 3)$ 이므로 $a=3, b=3$

$$\therefore a+b=6$$

$$\text{답 } 6$$



188

[1단계] $(f^{-1} \circ g)^{-1}(3) = (g^{-1} \circ f)(3)$

$$= g^{-1}(f(3))$$

$$= g^{-1}(2) \leftarrow f(3) = \sqrt{3+1} = 2$$

[2단계] $g^{-1}(2) = k$ 로 놓으면 $g(k) = 2$ 이므로

$$\sqrt{2k-1} = 2, 2k-1=4$$

$$2k=5 \quad \therefore k=\frac{5}{2}$$

$$\therefore (f^{-1} \circ g)^{-1}(3) = g^{-1}(2) = \frac{5}{2}$$

$$\text{답 } \frac{5}{2}$$

190

함수 $y=\sqrt{x+1}$ 의 그래프와 직선

$y=x+k$ 의 교점의 개수가 바뀔

때는 오른쪽 그림에서 직선

$y=x+k$ 가 l 또는 m 일 때이다.

(i) l 은 직선 $y=x+k$ 가 점

$(-1, 0)$ 을 지날 때이므로

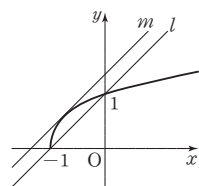
$$0 = -1 + k \quad \therefore k = 1$$

(ii) m 은 $y=\sqrt{x+1}$ 의 그래프와 직선 $y=x+k$ 가 접할

때이므로 $\sqrt{x+1}=x+k$ 의 양변을 제곱하면

$$x+1=x^2+2kx+k^2$$

$$\therefore x^2+(2k-1)x+k^2-1=0$$



이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = (2k-1)^2 - 4(k^2-1) = 0$$

$$-4k+5=0 \quad \therefore k=\frac{5}{4}$$

(1) 서로 다른 두 점에서 만날 때는 l 일 때부터 m 의 아래쪽일 때까지이므로

$$1 \leq k < \frac{5}{4}$$

(2) 한 점에서 만날 때는 l 의 아래쪽 또는 m 일 때이므로

$$k < 1 \text{ 또는 } k = \frac{5}{4}$$

(3) 만나지 않을 때는 m 의 위쪽일 때이므로

$$k > \frac{5}{4}$$

답 (1) $1 \leq k < \frac{5}{4}$ (2) $k < 1$ 또는 $k = \frac{5}{4}$ (3) $k > \frac{5}{4}$

+ 풍산자 비법

무리함수의 그래프와 직선의 위치 관계는 그래프를 직접 그린 후 직선을 평행이동하면서

- ① 직선이 무리함수의 그래프와 접할 때
 - ② 직선이 무리함수의 그래프의 끝 점을 지날 때
- 를 기준으로 위치 관계를 파악한다.

필수 확인 문제

261쪽

191

(근호 안의 식의 값) ≥ 0 이어야 하므로

$$2+3x-2x^2 \geq 0, (2x+1)(x-2) \leq 0$$

$$\therefore -\frac{1}{2} \leq x \leq 2$$

따라서 조건을 만족시키는 정수 x 는 0, 1, 2이므로 그 합은 3이다. **답** 3

192

함수 $y = \sqrt{-2x+4} - 1$ 의 그래프

는 근호 안이 0일 때의 점

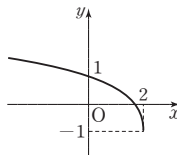
$(2, -1)$ 을 출발해 $y = \sqrt{-2x}$ 의

그래프와 같은 위-왼쪽 방향으로

로 뻗어 가는 그래프이다.

또, 이 함수의 그래프는 점 $(0, 1)$ 을 지난다.

따라서 주어진 함수의 그래프가 지나지 않는 사분면은 제3사분면이다. **답** ④



193

함수 $y = \sqrt{3x+3} = \sqrt{3(x+1)}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -4만큼 평행이동하면

$$y = \sqrt{3(x-1)} - 4$$

이 함수의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동하면

$$-y = \sqrt{3(x-1)} - 4, y = -\sqrt{3(x-1)} + 4$$

$$\therefore y = -\sqrt{3x-3} + 4$$

$$\therefore a=3, b=-3, c=4$$

답 $a=3, b=-3, c=4$

194

$$(g \circ f^{-1})^{-1}(2) = (f \circ g^{-1})(2) = f(g^{-1}(2))$$

$g^{-1}(2) = k$ 로 놓으면 $g(k) = 2$ 이므로

$$\sqrt{2k-3} = 2, 2k-3 = 4$$

$$2k = 7 \quad \therefore k = \frac{7}{2}$$

$$\therefore (g \circ f^{-1})^{-1}(2) = f(g^{-1}(2)) = f\left(\frac{7}{2}\right)$$

$$= \frac{\frac{7}{2}}{\frac{7}{2}-1} = \frac{7}{5}$$

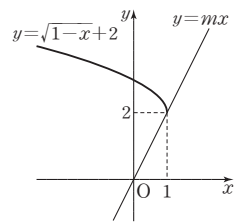
답 $\frac{7}{5}$

195

함수 $y = \sqrt{1-x} + 2$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 직선 $y = mx$ 는 m 의 값에 관계 없이 항상 원점을 지난다.

직선 $y = mx$ 가 점 $(1, 2)$ 를 지나면 $m = 2$

따라서 함수 $y = \sqrt{1-x} + 2$ 의 그래프와 직선 $y = mx$ 가 만나지 않도록 하는 m 의 값의 범위는 $m < 2$ 이므로 자 연수 m 의 최댓값은 1이다. **답** 1



196

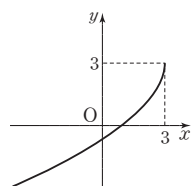
$f(x) = a\sqrt{-x-b} + c$ 가 $x=3$ 에서 최댓값 3을 가지므로

$$f(x) = a\sqrt{-(x-3)} + 3 \quad (a < 0)$$

이때 $y = f(x)$ 의 그래프는 근호 안이 0일 때의 점 $(3, 3)$ 일 때를

출발해 $y = -\sqrt{-x}$ 의 그래프와 같은 아래-왼쪽 방향으로 뻗어

가는 그래프이다.



또, $f(2)=1$ 이므로

$$1=a+3 \quad \therefore a=-2$$

따라서 $f(x)=-2\sqrt{-(x-3)}+3$ 이므로

$$f(-6)=-2\sqrt{9}+3=-6+3=-3 \quad \text{답 } -3$$

● 실전 연습문제

263~264쪽

197

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})} \\ &= \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{x-(x+1)} = \sqrt{x+1}-\sqrt{x} \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(15) \\ &= (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{4}-\sqrt{3}) + \cdots \\ &\quad + (\sqrt{16}-\sqrt{15}) \\ &= \sqrt{16}-1=4-1=3 \quad \text{답 } 3 \end{aligned}$$

198

이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프가 위로 볼록하므로 $a<0$ 이다.

축이 y 축의 오른쪽에 있으므로 a 와 b 의 부호가 다르다.

$$\therefore b>0$$

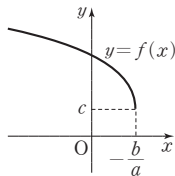
y 절편이 0보다 큰 수이므로 $c>0$

이때

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{ax+b}+c \\ &= \sqrt{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}+c \end{aligned}$$

에서 $a<0$, $-\frac{b}{a}>0$, $c>0$ 이므로

그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 ③

199

함수 $y=\sqrt{x+4}+1$ 의 그래

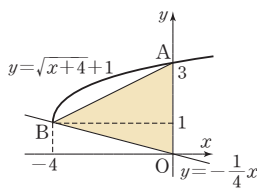
프는 근호 안이 0일 때의

점 $(-4, 1)$ 을 출발해 함수

$y=\sqrt{x}$ 의 그래프와 같은

위-오른쪽으로 뻗어 가는

그래프이다.



함수 $y=\sqrt{x+4}+1$ 의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{4}x$ 의 교

점의 x 좌표는 $\sqrt{x+4}+1=-\frac{1}{4}x$ 에서

$$\sqrt{x+4}=-\frac{1}{4}x-1$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$x^2-8x-48=0, (x+4)(x-12)=0$$

$$\therefore x=-4 \text{ 또는 } x=12$$

이때 함수 $y=\sqrt{x+4}+1$ 의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{4}x$ 는

제2사분면에서 만나므로

$B(-4, 1)$

따라서 $A(0, 3)$, $B(-4, 1)$ 이므로

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} \times 3 \times |-4| = 6 \quad \text{답 } ①$$

200

함수 $y=-\sqrt{x-a}+a+2$ 의 그래프가 점 $(a, -a)$ 를

지나므로 $x=a$, $y=-a$ 를 대입하면

$$-a=-\sqrt{a-a}+a+2, 2a=-2$$

$$\therefore a=-1$$

즉, 주어진 함수는

$y=-\sqrt{x+1}+1$ 이므로 그

그래프는 근호 안이 0일 때의

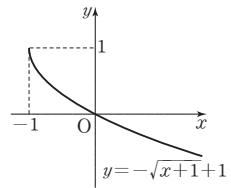
점 $(-1, 1)$ 을 출발해

$y=-\sqrt{x}$ 의 그래프와 같은

아래-오른쪽 방향으로 뻗어 가는 그래프이다.

따라서 구하는 치역은

$$\{y|y \leq 1\} \quad \text{답 } ①$$



201

주어진 두 함수의 그래프의 교점은 함수

$f(x)=\sqrt{6x+7}-2$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점과 같

$$\sqrt{6x+7}-2=x \text{에서 } \sqrt{6x+7}=x+2$$

양변을 제곱하면

$$6x+7=x^2+4x+4, x^2-2x-3=0$$

$$(x+1)(x-3)=0 \quad \therefore x=-1 \text{ 또는 } x=3$$

$y=\sqrt{6x+7}-2$ 에서 $y \geq -2$ 이므로 역함수의 정의역은

$$\{x|x \geq -2\}$$

따라서 두 교점의 좌표는 $(-1, -1)$, $(3, 3)$ 이므로 두

교점 사이의 거리는

$$\sqrt{\{3-(-1)\}^2+\{3-(-1)\}^2}=4\sqrt{2} \quad \text{답 } 4\sqrt{2}$$

202

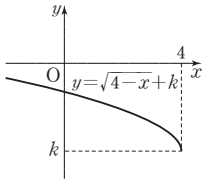
$y = \sqrt{4-x} + k = \sqrt{-(x-4)} + k$
 의 그래프는 근호 안이 0일 때의
 점 $(4, k)$ 를 출발해 $y = \sqrt{-x}$ 의
 그래프와 같은 위-왼쪽 방향으
 로 뻗어 가는 그래프이다.

이 그래프가 제2, 3, 4사분면만을 지나려면 $x=0$ 일 때
 $y < 0$ 이어야 하므로

$$\sqrt{4} + k < 0, \text{ 즉 } k < -2$$

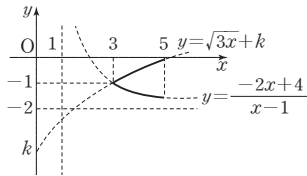
따라서 정수 k 의 최댓값은 -3 이다.

답 -3



203

$3 \leq x \leq 5$ 에서 정의된 함수 $y = \frac{-2x+4}{x-1} = \frac{2}{x-1} - 2$
 의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $y = \sqrt{3x} + k$ 의 그래프가 점 $(3, -1)$ 을 지날 때,
 실수 k 가 최댓값을 가지므로 $M = -4$

$$\therefore M^2 = 16$$

답 16

참고

두 함수의 그래프가 한 점에서 만나려면

$$f(x) = \sqrt{3x} + k \text{라 할 때,}$$

$$f(3) \leq -1, f(5) \geq -\frac{3}{2} \text{이어야 한다.}$$

$$f(3) = \sqrt{3 \times 3} + k = 3 + k \leq -1 \text{에서 } k \leq -4 \quad \cdots \textcircled{1}$$

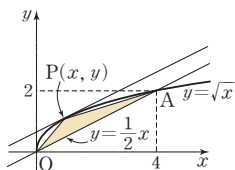
$$f(5) = \sqrt{3 \times 5} + k = \sqrt{15} + k \geq -\frac{3}{2} \text{에서}$$

$$k \geq -\frac{3}{2} - \sqrt{15} \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } k \text{의 값의 범위는 } -\frac{3}{2} - \sqrt{15} \leq k \leq -4$$

204

선분 OA를 밑변으로 하는
 삼각형 OAP의 넓이가 최대
 이려면 점 P가 곡선 $y = \sqrt{x}$
 에 접하고 직선 OA와 평행
 한 직선의 접점이어야 한다.



직선 OA의 방정식은 $y = \frac{1}{2}x$ 이므로 이 직선과 평행한

접선의 방정식을 $y = \frac{1}{2}x + k$ ($k > 0$)로 놓고 $y = \sqrt{x}$ 와

$$\text{연립하면 } \sqrt{x} = \frac{1}{2}x + k$$

$$\text{양변을 제곱하면 } x = \frac{1}{4}x^2 + kx + k^2$$

$$x^2 + 4(k-1)x + 4k^2 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 4(k-1)^2 - 4k^2 = 0$$

$$-8k + 4 = 0 \quad \therefore k = \frac{1}{2}$$

삼각형 OAP의 높이는 두 직선 $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$,

$y = \frac{1}{2}x$ 사이의 거리와 같으므로 직선 $y = \frac{1}{2}x$

위의 점 $(0, 0)$ 과 직선 $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, 즉

$x - 2y + 1 = 0$ 사이의 거리를 구하면

$$\frac{|1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

따라서 삼각형 OAP의 밑변의 길이는

$$\overline{OA} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5} \text{이고 높이는 } \frac{1}{\sqrt{5}} \text{이므로}$$

구하는 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times \frac{1}{\sqrt{5}} = 1$$

답 ①

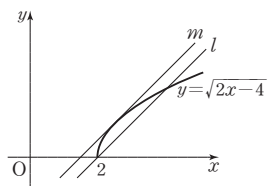
205

주어진 두 함수의 그래프의 교점은 함수

$f(x) = \sqrt{2x-4} - k$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점과
 같다.

이때 $\sqrt{2x-4} - k = x$ 에서 $\sqrt{2x-4} = x + k$ 이므로 구하
 는 교점은 함수 $y = \sqrt{2x-4}$ 의 그래프와 직선 $y = x + k$
 의 교점과 같다.

함수 $y = \sqrt{2x-4}$ 의 그래
 프와 직선 $y = x + k$ 가 서
 로 다른 두 점에서 만날
 때는 오른쪽 그림에서 직
 선 $y = x + k$ 가 직선 l 일
 때부터 직선 m 아래쪽일 때까지이다.



(i) l 은 직선 $y = x + k$ 가 점 $(2, 0)$ 을 지날 때이므로

$$0 = 2 + k \quad \therefore k = -2$$

(ii) m 은 $y=\sqrt{2x-4}$ 의 그래프와 직선 $y=x+k$ 가 접할 때이므로 $\sqrt{2x-4}=x+k$ 의 양변을 제곱하면

$$2x-4=x^2+2kx+k^2$$

$$\therefore x^2+2(k-1)x+k^2+4=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k^2+4)=0$$

$$-2k-3=0 \quad \therefore k=-\frac{3}{2}$$

(i), (ii)에서 구하는 k 의 값의 범위는

$$-2 \leq k < -\frac{3}{2} \quad \text{답 } -2 \leq k < -\frac{3}{2}$$

참고

서로 다른 두 점에서 만나는 조건을 구하기 위하여 두 함수의 그래프의 식을 연립한 후 판별식을 이용하는 경우, 무리함수의 정의역이 고려되지 않으므로 직선이 l 인 경우를 찾을 수 없다.

따라서 이와 같은 문제를 풀 때는 그래프를 그려 교점의 개수가 바뀌는 때를 눈으로 확인해야 한다.

206

함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 근호 안이 0일 때의 점 $(-1, 2)$ 를 출발해 $y=\sqrt{x}$ 의 그래프와 같은 위-오른쪽 방향으로 뻗어 가는 그래프이므로 함수 $y=g(x)$ 의 치역은

$$\{y|y \geq 2\}$$

한편, 함수 $(f \circ g)(x)=f(g(x))$ 에서 $g(x)=t$ 라 하면

$$(f \circ g)(x)=f(t)=\frac{t+4}{t+3}=\frac{1}{t+3}+1$$

이때 $t \geq 2$ 이어야 하므로 함수

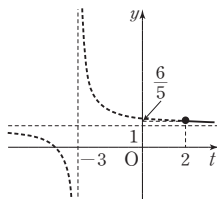
$y=f(t)$ 의 그래프를 그린 후

$t \geq 2$ 인 부분만 살려 놓으면 오

른쪽 그림과 같다.

따라서 주어진 함수는 $t=2$ 일

때 최댓값 $\frac{6}{5}$ 을 갖는다.



답 $\frac{6}{5}$

207

함수 $y=\sqrt{x}$ 의 그래프는 함수 $y=x^2$ ($x \leq 0$)의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 후 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 그래프와 일치하고, 점 A는 같은 방법의 대칭이동으로 점 B로 이동한다.

따라서 오른쪽 그림과 같이 도형 S' 과 도형 S'' 의 넓이는 서로 같다.

따라서 구하는 넓이는 삼각

형 AOB의 넓이와 같다.

삼각형 AOB에서 밑변을 AB라 하면 높이는 원점과 직선 $x+3y-10=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|-10|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\sqrt{10}$$

이고, $\overline{AB}=\sqrt{(4+2)^2+(2-4)^2}=2\sqrt{10}$ 이므로

구하는 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{10} \times \sqrt{10}=10$$

답 10

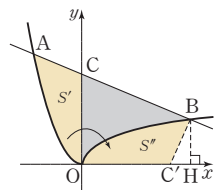
다른 풀이

직선 $x+3y-10=0$ 이 y 축과

만나는 점은 $C(0, \frac{10}{3})$

점 C를 직선 $y=x$ 에 대하여 대

칭이동한 점을 $C'(\frac{10}{3}, 0)$ 이라



하고 점 B에서 x 축에 내린 수선의 발을 H라 하자.

위의 그림과 같이 도형 S' 과 도형 S'' 의 넓이는 서로 같으므로 구하는 넓이는 사다리꼴 COHB의 넓이에서 삼각형 BC'H의 넓이를 뺀 것과 같다.

$$(\text{사다리꼴 COHB의 넓이})=\frac{1}{2} \times \left(2+\frac{10}{3}\right) \times 4=\frac{32}{3}$$

$$(\text{삼각형 BC'H의 넓이})=\frac{1}{2} \times \left(4-\frac{10}{3}\right) \times 2=\frac{2}{3}$$

따라서 구하는 넓이는

$$\frac{32}{3}-\frac{2}{3}=10$$