풍산자
반복수학

대수

| 정답과 풀이 |

I 지수함수와 로그함수

I-1 | 지수와 로그 008-031쪽

01 답 (1) 2 또는 $-1\pm\sqrt{3}i$

(2) -2 또는 $1\pm\sqrt{3}i$

(3) ±2 또는 $\pm2i$

(4) ±3 또는 $\pm3i$

풀이 (1) 8의 세제곱근은 방정식 $x^3=8$의 근이므로

$x^3-8=0$, $(x-2)(x^2+2x+4)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=\underline{-1\pm\sqrt{3}i}$

(2) -8의 세제곱근은 방정식 $x^3=-8$의 근이므로

$x^3+8=0$, $(x+2)(x^2-2x+4)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}i$

(3) 16의 네제곱근은 방정식 $x^4=16$의 근이므로

$x^4-16=0$, $(x^2-4)(x^2+4)=0$

$(x-2)(x+2)(x^2+4)=0$

$\therefore x=\pm2$ 또는 $x=\pm2i$

(4) 81의 네제곱근은 방정식 $x^4=81$의 근이므로

$x^4-81=0$, $(x^2-9)(x^2+9)=0$

$(x-3)(x+3)(x^2+9)=0$

$\therefore x=\pm3$ 또는 $x=\pm3i$

02 답 (1) 거듭제곱근: -1 또는 $\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$, 실수: -1

(2) 거듭제곱근: -3 또는 $\dfrac{3\pm3\sqrt{3}i}{2}$, 실수: -3

(3) 거듭제곱근: ±1 또는 $\pm i$, 실수: -1, 1

(4) 거듭제곱근: ±5 또는 $\pm5i$, 실수: -5, 5

풀이 (1) -1의 세제곱근은 방정식 $x^3=-1$의 근이므로

$x^3+1=0$, $(x+1)(x^2-x+1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

이 중에서 실수인 것은 $\underline{-1}$이다.

(2) -27의 세제곱근은 방정식 $x^3=-27$의 근이므로

$x^3+27=0$, $(x+3)(x^2-3x+9)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=\dfrac{3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

이 중에서 실수인 것은 -3이다.

(3) 1의 네제곱근은 방정식 $x^4=1$의 근이므로

$x^4-1=0$, $(x^2-1)(x^2+1)=0$

$(x-1)(x+1)(x^2+1)=0$

$\therefore x=\pm1$ 또는 $x=\pm i$

이 중에서 실수인 것은 -1, 1이다.

(4) 625의 네제곱근은 방정식 $x^4=625$의 근이므로

$x^4-625=0$, $(x^2-25)(x^2+25)=0$

$(x-5)(x+5)(x^2+25)=0$

$\therefore x=\pm5$ 또는 $x=\pm5i$

이 중에서 실수인 것은 -5, 5이다.

03 답 (1) 2 (2) 3 (3) 4 (4) 3 (5) $\dfrac{1}{4}$

풀이 (1) $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2\times4}=\sqrt[3]{2^3}=\underline{2}$

(2) $\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{3\times9}=\sqrt[3]{3^3}=3$

(3) $\sqrt[3]{16}\times\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{16\times4}=\sqrt[3]{4^3}=4$

(4) $\sqrt[4]{3}\times\sqrt[4]{27}=\sqrt[4]{3\times27}=\sqrt[4]{3^4}=3$

(5) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{64}}\times\sqrt[4]{\dfrac{1}{4}}=\sqrt[4]{\dfrac{1}{64}\times\dfrac{1}{4}}=\sqrt[4]{\left(\dfrac{1}{4}\right)^4}=\dfrac{1}{4}$

04 답 (1) 3 (2) $\dfrac{1}{2}$ (3) 5 (4) 3 (5) $\dfrac{1}{2}$

풀이 (1) $\dfrac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}=\sqrt[3]{\dfrac{81}{3}}=\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=\underline{3}$

(2) $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{16}}=\sqrt[3]{\dfrac{2}{16}}=\sqrt[3]{\dfrac{1}{8}}=\sqrt[3]{\left(\dfrac{1}{2}\right)^3}=\dfrac{1}{2}$

(3) $\dfrac{\sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{5}}=\sqrt[3]{\dfrac{625}{5}}=\sqrt[3]{125}=\sqrt[3]{5^3}=5$

(4) $\dfrac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{3}}=\sqrt[4]{\dfrac{243}{3}}=\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{3^4}=3$

(5) $\dfrac{\sqrt[4]{4}}{\sqrt[4]{64}}=\sqrt[4]{\dfrac{4}{64}}=\sqrt[4]{\dfrac{1}{16}}=\sqrt[4]{\left(\dfrac{1}{2}\right)^4}=\dfrac{1}{2}$

05 답 (1) 2 (2) 3 (3) 2 (4) $\dfrac{1}{9}$

풀이 (1) $(\sqrt[4]{4})^2=\sqrt[4]{4^2}=\sqrt[4]{2^4}=\underline{2}$

(2) $(\sqrt[6]{27})^2=\sqrt[6]{27^2}=\sqrt[6]{3^6}=3$

(3) $(\sqrt[8]{16})^2=\sqrt[8]{16^2}=\sqrt[8]{2^8}=2$

(4) $\left(\sqrt[8]{\dfrac{1}{81}}\right)^4=\sqrt[8]{\left(\dfrac{1}{81}\right)^4}=\sqrt[8]{\left(\dfrac{1}{9}\right)^8}=\dfrac{1}{9}$

06 답 (1) $\sqrt[3]{2}$ (2) $\sqrt[4]{3}$ (3) $\sqrt[3]{4}$ (4) $\sqrt[3]{9}$

풀이 (1) $\sqrt{\sqrt[3]{4}}=\sqrt[3]{\sqrt{4}}=\sqrt[3]{\sqrt{2^2}}=\underline{\sqrt[3]{2}}$

(2) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{27}}=\sqrt[4]{\sqrt[3]{27}}=\sqrt[4]{\sqrt[3]{3^3}}=\underline{\sqrt[4]{3}}$

(3) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{256}}=\sqrt[3]{\sqrt[4]{256}}=\sqrt[3]{\sqrt[4]{4^4}}=\sqrt[3]{4}$

(4) $\sqrt{\sqrt[3]{81}}=\sqrt[3]{\sqrt{81}}=\sqrt[3]{\sqrt{9^2}}=\sqrt[3]{9}$

07 답 (1) 2 (2) 3 (3) $\dfrac{1}{8}$

(4) 2 (5) 4 (6) $\sqrt{2}$

풀이 (1) $\sqrt[12]{8^4}=\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=\underline{2}$

(2) $\sqrt[6]{27^2}=\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$

(3) $\sqrt[6]{\left(\dfrac{1}{4}\right)^9}=\sqrt{\left(\dfrac{1}{4}\right)^3}=\sqrt{\left(\dfrac{1}{8}\right)^2}=\dfrac{1}{8}$

(4) $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[6]{16}=\sqrt[3]{2}\times\sqrt[6]{2^4}=\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{2^2}=\sqrt[3]{2^3}=2$

(5) $\sqrt[8]{16}\times\sqrt[4]{64}=\sqrt[8]{2^4}\times\sqrt[4]{8^2}=\sqrt{2}\times\sqrt{8}=\sqrt{4^2}=4$

(6) $\sqrt[18]{8^2}\times\sqrt[6]{2}=\sqrt[18]{8^2}\times\sqrt[18]{2^3}=\sqrt[18]{2^6}\times\sqrt[18]{2^3}=\sqrt[18]{2^9}=\sqrt{2}$

08 답 (1) $\sqrt[12]{a}$ (2) 1 (3) 1

풀이 (1) $\sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{a}}}\times\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}}}=\dfrac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[8]{a}}\times\dfrac{\sqrt[8]{a}}{\sqrt[12]{a}}=\dfrac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[12]{a}}=\dfrac{\sqrt[12]{a^2}}{\sqrt[12]{a}}=\underline{\sqrt[12]{a}}$

(2) $\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}}\times\sqrt{\dfrac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[6]{a}}}=\dfrac{\sqrt[12]{a}}{\sqrt[8]{a}}\times\dfrac{\sqrt[8]{a}}{\sqrt[12]{a}}=1$

(3) $\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}}}\times\sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{a}}}\times\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}}}=\dfrac{\sqrt[12]{a}}{\sqrt[6]{a}}\times\dfrac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[8]{a}}\times\dfrac{\sqrt[8]{a}}{\sqrt[12]{a}}=1$

09

답 (1) 3　(2) 2　(3) 9

풀이 (1) $\sqrt[3]{\dfrac{9^8+3^{11}}{9^4+3^{13}}}=\sqrt[3]{\dfrac{(3^2)^8+3^{11}}{(3^2)^4+3^{13}}}=\sqrt[3]{\dfrac{3^{16}+3^{11}}{3^8+3^{13}}}$

$=\sqrt[3]{\dfrac{3^{11}(3^5+1)}{3^8(1+3^5)}}=\sqrt[3]{\dfrac{3^{11}}{3^8}}=\sqrt[3]{3^3}=\underline{3}$

(2) $\sqrt[6]{\dfrac{8^4+4^8}{8^2+4^5}}=\sqrt[6]{\dfrac{(2^3)^4+(2^2)^8}{(2^3)^2+(2^2)^5}}=\sqrt[6]{\dfrac{2^{12}+2^{16}}{2^6+2^{10}}}$

$=\sqrt[6]{\dfrac{2^{12}(1+2^4)}{2^6(1+2^4)}}=\sqrt[6]{\dfrac{2^{12}}{2^6}}=\sqrt[6]{2^6}=2$

(3) $\sqrt[4]{\dfrac{9^{10}+27^8}{9^8+27^4}}=\sqrt[4]{\dfrac{(3^2)^{10}+(3^3)^8}{(3^2)^8+(3^3)^4}}=\sqrt[4]{\dfrac{3^{20}+3^{24}}{3^{16}+3^{12}}}$

$=\sqrt[4]{\dfrac{3^{20}(1+3^4)}{3^{12}(3^4+1)}}=\sqrt[4]{\dfrac{3^{20}}{3^{12}}}=\sqrt[4]{3^8}$

$=\sqrt[4]{9^4}=9$

10

답 (1) $\sqrt{2}<\sqrt[6]{10}<\sqrt[3]{4}$　(2) $\sqrt[3]{5}<\sqrt[6]{26}<\sqrt{3}$
(3) $\sqrt[6]{2}<\sqrt[4]{3}<\sqrt[3]{3}$　(4) $\sqrt[5]{3}<\sqrt{2}<\sqrt[4]{5}$

풀이 (1) 2, 3, 6의 최소공배수인 6으로 근호 앞 수를 통일하면

$\sqrt{2}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt[6]{8}$, $\sqrt[3]{4}=\sqrt[6]{4^2}=\sqrt[6]{16}$

이때 $\sqrt[6]{8}<\sqrt[6]{10}<\sqrt[6]{16}$이므로 $\sqrt{2}<\sqrt[6]{10}<\sqrt[3]{4}$

(2) 2, 3, 6의 최소공배수인 6으로 근호 앞 수를 통일하면

$\sqrt{3}=\sqrt[6]{3^3}=\sqrt[6]{27}$, $\sqrt[3]{5}=\sqrt[6]{5^2}=\sqrt[6]{25}$

이때 $\sqrt[6]{25}<\sqrt[6]{26}<\sqrt[6]{27}$이므로 $\sqrt[3]{5}<\sqrt[6]{26}<\sqrt{3}$

(3) 3, 4, 6의 최소공배수인 12로 근호 앞 수를 통일하면

$\sqrt[3]{3}=\sqrt[12]{3^4}=\sqrt[12]{81}$, $\sqrt[4]{3}=\sqrt[12]{3^3}=\sqrt[12]{27}$, $\sqrt[6]{2}=\sqrt[12]{2^2}=\sqrt[12]{4}$

이때 $\sqrt[12]{4}<\sqrt[12]{27}<\sqrt[12]{81}$이므로 $\sqrt[6]{2}<\sqrt[4]{3}<\sqrt[3]{3}$

(4) 2, 5, 4의 최소공배수인 20으로 근호 앞 수를 통일하면

$\sqrt{2}=\sqrt[20]{2^{10}}=\sqrt[20]{1024}$, $\sqrt[5]{3}=\sqrt[20]{3^4}=\sqrt[20]{81}$,

$\sqrt[4]{5}=\sqrt[20]{5^5}=\sqrt[20]{3125}$

이때 $\sqrt[20]{81}<\sqrt[20]{1024}<\sqrt[20]{3125}$이므로

$\sqrt[5]{3}<\sqrt{2}<\sqrt[4]{5}$

11

답 (1) a^8　(2) a^6　(3) a^{-10}　(4) a^{10}

풀이 (1) $a^4\times a^2\div a^{-2}=a^{4+2-(-2)}=\underline{a^8}$

(2) $(a^5\div a^8)^{-2}=(a^{5-8})^{-2}=(a^{-3})^{-2}=a^{(-3)\times(-2)}=a^6$

(3) $a^{-2}\times(a^{-4})^2=a^{-2}\times a^{-8}=a^{-2+(-8)}=a^{-10}$

(4) $(a^{-3})^2\times(a^4)^3\div a^{-4}=a^{-6}\times a^{12}\div a^{-4}=a^{-6+12-(-4)}=a^{10}$

12

답 (1) $\dfrac{2}{3}$　(2) $\dfrac{625}{81}$　(3) 49

풀이 (1) $\left\{\left(\dfrac{27}{8}\right)^{-\frac{5}{6}}\right\}^{\frac{2}{5}}=\left(\dfrac{27}{8}\right)^{-\frac{5}{6}\times\frac{2}{5}}=\left(\dfrac{27}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$

$=\left\{\left(\dfrac{3}{2}\right)^3\right\}^{-\frac{1}{3}}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-1}=\underline{\dfrac{2}{3}}$

(2) $\left\{\left(\dfrac{9}{25}\right)^{-\frac{7}{3}}\right\}^{\frac{6}{7}}=\left(\dfrac{9}{25}\right)^{-\frac{7}{3}\times\frac{6}{7}}=\left(\dfrac{9}{25}\right)^{-2}$

$=\left\{\left(\dfrac{3}{5}\right)^2\right\}^{-2}=\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-4}=\left(\dfrac{5}{3}\right)^4=\dfrac{625}{81}$

(3) $7^{\frac{7}{4}}\times 7^{-\frac{5}{2}}\div 7^{-\frac{11}{4}}=7^{\frac{7}{4}+\left(-\frac{5}{2}\right)-\left(-\frac{11}{4}\right)}=7^2=49$

13

답 (1) $a^{\frac{7}{40}}$　(2) $a^{\frac{7}{12}}$　(3) $a^{\frac{11}{8}}$　(4) $a^{\frac{11}{6}}$　(5) $a^{\frac{7}{8}}$

풀이 (1) $\sqrt[4]{\sqrt{a}\times\sqrt[5]{a}}=\left(a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{1}{4}}=\left(a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}\right)^{\frac{1}{4}}$

$=\left(a^{\frac{7}{10}}\right)^{\frac{1}{4}}=\underline{a^{\frac{7}{40}}}$

(2) $\sqrt[3]{\dfrac{a^2}{\sqrt{a}}\times\sqrt[4]{a}}=\left(a^2\div a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(a^{2-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}$

$=\left(a^{\frac{7}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{7}{12}}$

(3) $\sqrt{a\sqrt{a^2\sqrt{a^3}}}=\left\{a\times\left(a^2\times a^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{2}}$

$=\left\{a\times\left(a^{\frac{7}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{2}}=\left(a^{1+\frac{7}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}$

$=\left(a^{\frac{11}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{11}{8}}$

(4) $\sqrt{a^2\sqrt{a^2\sqrt[3]{a^2}}}=\left(a^2\times a\times a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(a^{2+1+\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$

$=\left(a^{\frac{11}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{11}{6}}$

(5) $\sqrt{a\sqrt[3]{a^2\sqrt[4]{a}}}=\left\{a\times\left(a^2\times a^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{1}{2}}$

$=\left\{a\times\left(a^{\frac{9}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{1}{2}}$

$=\left(a^{1+\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}$

$=\left(a^{\frac{7}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{7}{8}}$

14

답 (1) $a-b$　(2) $\sqrt{a}-\sqrt{b}$　(3) -4　(4) 1　(5) 8

풀이 (1) $\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)=\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2-\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2=\underline{a-b}$

(2) $\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}\right)=\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^2-\left(b^{\frac{1}{4}}\right)^2=a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}$

$=\sqrt{a}-\sqrt{b}$

(3) $\left(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}\right)^2-\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}\right)^2$

$=\left(a-2\times a^{\frac{1}{2}}\times a^{-\frac{1}{2}}+a^{-1}\right)$

$-\left(a+2\times a^{\frac{1}{2}}\times a^{-\frac{1}{2}}+a^{-1}\right)$

$=(a-2+a^{-1})-(a+2+a^{-1})=-4$

(4) $\left(2^{\frac{1}{2}}+1\right)\left(2^{\frac{1}{2}}-1\right)=\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2-1^2=2-1=1$

(5) $\left(3^{\frac{1}{3}}-3^{-\frac{2}{3}}\right)^3+\left(3^{\frac{1}{3}}+3^{-\frac{2}{3}}\right)^3$

$=\left\{\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3-3\times\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^2\times 3^{-\frac{2}{3}}+3\times 3^{\frac{1}{3}}\times\left(3^{-\frac{2}{3}}\right)^2-\left(3^{-\frac{2}{3}}\right)^3\right\}$

$+\left\{\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3+3\times\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^2\times 3^{-\frac{2}{3}}+3\times 3^{\frac{1}{3}}\times\left(3^{-\frac{2}{3}}\right)^2+\left(3^{-\frac{2}{3}}\right)^3\right\}$

$=\left(3-3\times 3^{\frac{2}{3}}\times 3^{-\frac{2}{3}}+3\times 3^{\frac{1}{3}}\times 3^{-\frac{4}{3}}-3^{-2}\right)$

$+\left(3+3\times 3^{\frac{2}{3}}\times 3^{-\frac{2}{3}}+3\times 3^{\frac{1}{3}}\times 3^{-\frac{4}{3}}+3^{-2}\right)$

$=3+3\times 3^{\frac{1}{3}}\times 3^{-\frac{4}{3}}+3+3\times 3^{\frac{1}{3}}\times 3^{-\frac{4}{3}}$

$=6+2\times 3\times 3^{\frac{1}{3}}\times 3^{-\frac{4}{3}}=6+2\times\left(3^{1+\frac{1}{3}-\frac{4}{3}}\right)$

$=6+2\times 3^0=8$

15 답 (1) 14　(2) 194　(3) 52　(4) $\pm 2\sqrt{3}$　(5) $\pm 8\sqrt{3}$

풀이 (1) $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=4$의 양변을 제곱하면

$a+2+a^{-1}=\underline{16}$

$\therefore a+a^{-1}=\underline{14}$

(2) (1)의 $a+a^{-1}=14$의 양변을 제곱하면

$a^2+2+a^{-2}=196$

$\therefore a^2+a^{-2}=194$

(3) $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=4$의 양변을 세제곱하면

$a^{\frac{3}{2}}+3\times a\times a^{-\frac{1}{2}}+3\times a^{\frac{1}{2}}\times a^{-1}+a^{-\frac{3}{2}}=64$

$a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}+3\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}\right)=64$

$a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}+3\times 4=64$

$\therefore a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}=52$

(4) $\left(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}\right)^2=a-2+a^{-1}$

이때 (1)에서 $a+a^{-1}=14$이므로

$\left(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}\right)^2=12$　$\therefore a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=\pm 2\sqrt{3}$

(5) $(a-a^{-1})^2=a^2-2+a^{-2}$

이때 (2)에서 $a^2+a^{-2}=194$이므로

$(a-a^{-1})^2=192$　$\therefore a-a^{-1}=\pm 8\sqrt{3}$

16 답 (1) 5　(2) 82　(3) 15　(4) 24

풀이 (1) $x^3=\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3+\left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^3+3\times 2^{\frac{1}{3}}\times 2^{-\frac{1}{3}}\left(2^{\frac{1}{3}}+2^{-\frac{1}{3}}\right)$

$=2+2^{-1}+3x$

$=\frac{5}{2}+3x$

따라서 $x^3-3x=\frac{5}{2}$이므로

$2x^3-6x=2(x^3-3x)=\underline{5}$

(2) $x^3=\left(3^{\frac{2}{3}}\right)^3+\left(3^{-\frac{2}{3}}\right)^3+3\times 3^{\frac{2}{3}}\times 3^{-\frac{2}{3}}\left(3^{\frac{2}{3}}+3^{-\frac{2}{3}}\right)$

$=3^2+3^{-2}+3x$

$=\frac{82}{9}+3x$

따라서 $x^3-3x=\frac{82}{9}$이므로

$9x^3-27x=9(x^3-3x)=82$

(3) $x^3=\left(2^{\frac{2}{3}}\right)^3-\left(2^{-\frac{2}{3}}\right)^3-3\times 2^{\frac{2}{3}}\times 2^{-\frac{2}{3}}\left(2^{\frac{2}{3}}-2^{-\frac{2}{3}}\right)$

$=2^2-2^{-2}-3x$

$=\frac{15}{4}-3x$

따라서 $x^3+3x=\frac{15}{4}$이므로

$4x^3+12x=4(x^3+3x)=15$

(4) $x^3=\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3-\left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^3-3\times 3^{\frac{1}{3}}\times 3^{-\frac{1}{3}}\left(3^{\frac{1}{3}}-3^{-\frac{1}{3}}\right)$

$=3-3^{-1}-3x$

$=\frac{8}{3}-3x$

따라서 $x^3+3x=\frac{8}{3}$이므로

$9x^3+27x=9(x^3+3x)=24$

17 답 (1) 256　(2) $\frac{1}{27}$　(3) 64　(4) 243　(5) 125

풀이 (1) $\left(\frac{1}{81}\right)^{-4x}=(3^{-4})^{-4x}=3^{16x}=(3^{2x})^8$

$=(9^x)^8=2^8=\underline{256}$

(2) $\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)^{2x}=\left(2^{-\frac{3}{2}}\right)^{2x}=2^{-3x}=(2^x)^{-3}$

$=3^{-3}=\underline{\frac{1}{27}}$

(3) $\left(\frac{1}{125}\right)^{-2x}=(5^{-3})^{-2x}=5^{6x}=(5^{2x})^3$

$=(25^x)^3=4^3=64$

(4) $32^{4x}=(2^5)^{4x}=2^{20x}=(2^{4x})^5$

$=(16^x)^5=3^5=243$

(5) $\left(\frac{1}{27}\right)^{2x}=(3^{-3})^{2x}=3^{-6x}=(3^{-2x})^3$

$=\left\{\left(\frac{1}{9}\right)^x\right\}^3=5^3=125$

18 답 (1) $-\frac{5}{3}$　(2) $-\frac{7}{9}$　(3) $\frac{3}{5}$　(4) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

풀이 (1) $\frac{a+a^{-1}}{a-a^{-1}}$의 분모, 분자에 각각 $a+a^{-1}$을 곱하면

$\frac{(a+a^{-1})^2}{a^2-a^{-2}}=\frac{a^2+2+a^{-2}}{a^2-a^{-2}}$

이때 $a^{-2}=4$, $a^2=\frac{1}{4}$을 위의 식에 대입하면

$\frac{a^2+2+a^{-2}}{a^2-a^{-2}}=\frac{\frac{1}{4}+2+4}{\frac{1}{4}-4}=\underline{-\frac{5}{3}}$

(2) $\frac{a^3-a^{-3}}{a^3+a^{-3}}$의 분모, 분자에 각각 a^3-a^{-3}을 곱하면

$\frac{(a^3-a^{-3})^2}{a^6-a^{-6}}=\frac{a^6-2+a^{-6}}{a^6-a^{-6}}$

이때 $a^{-2}=2$이므로 $a^{-6}=(a^{-2})^3=2^3=8$, $a^6=\frac{1}{8}$을

위의 식에 대입하면

$\frac{a^6-2+a^{-6}}{a^6-a^{-6}}=\frac{\frac{1}{8}-2+8}{\frac{1}{8}-8}=-\frac{7}{9}$

(3) $\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}$의 분모, 분자에 각각 a^x을 곱하면

$\frac{a^{2x}-1}{a^{2x}+1}$

이때 $a^{2x}=4$를 위의 식에 대입하면

$\frac{a^{2x}-1}{a^{2x}+1}=\frac{4-1}{4+1}=\underline{\frac{3}{5}}$

(4) $\frac{a^{3x}-a^{-x}}{a^x+a^{-3x}}$의 분모, 분자에 각각 a^x을 곱하면

$\frac{a^{4x}-1}{a^{2x}+a^{-2x}}$

이때 $a^{2x}=\sqrt{2}+1$, $a^{-2x}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$을 위의 식에 대입하면

$\frac{a^{4x}-1}{a^{2x}+a^{-2x}}=\frac{(\sqrt{2}+1)^2-1}{\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1}=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

19 답 (1) -3 (2) -2 (3) -1 (4) 2

풀이 (1) $3^x=32$에서 $3=32^{\frac{1}{x}}=(2^5)^{\frac{1}{x}}=2^{\frac{5}{x}}$ …… ㉠

$24^y=256$에서 $24=256^{\frac{1}{y}}=(2^8)^{\frac{1}{y}}=2^{\frac{8}{y}}$ …… ㉡

㉠÷㉡을 하면 $\frac{3}{24}=2^{\frac{5}{x}}\div 2^{\frac{8}{y}}$

$\frac{1}{8}=2^{\frac{5}{x}-\frac{8}{y}}$, $2^{-3}=2^{\frac{5}{x}-\frac{8}{y}}$

$\therefore \frac{5}{x}-\frac{8}{y}=\underline{-3}$

(2) $4^x=27$에서 $4=27^{\frac{1}{x}}=(3^3)^{\frac{1}{x}}=3^{\frac{3}{x}}$ …… ㉠

$36^y=81$에서 $36=81^{\frac{1}{y}}=(3^4)^{\frac{1}{y}}=3^{\frac{4}{y}}$ …… ㉡

㉠÷㉡을 하면 $\frac{4}{36}=3^{\frac{3}{x}}\div 3^{\frac{4}{y}}$

$\frac{1}{9}=3^{\frac{3}{x}-\frac{4}{y}}$, $3^{-2}=3^{\frac{3}{x}-\frac{4}{y}}$

$\therefore \frac{3}{x}-\frac{4}{y}=-2$

(3) $6^x=25$에서 $6=25^{\frac{1}{x}}=(5^2)^{\frac{1}{x}}=5^{\frac{2}{x}}$ …… ㉠

$30^y=125$에서 $30=125^{\frac{1}{y}}=(5^3)^{\frac{1}{y}}=5^{\frac{3}{y}}$ …… ㉡

㉠÷㉡을 하면 $\frac{6}{30}=5^{\frac{2}{x}}\div 5^{\frac{3}{y}}$

$\frac{1}{5}=5^{\frac{2}{x}-\frac{3}{y}}$, $5^{-1}=5^{\frac{2}{x}-\frac{3}{y}}$

$\therefore \frac{2}{x}-\frac{3}{y}=-1$

(4) $20^x=64$에서 $20=64^{\frac{1}{x}}=(2^6)^{\frac{1}{x}}=2^{\frac{6}{x}}$ …… ㉠

$5^y=128$에서 $5=128^{\frac{1}{y}}=(2^7)^{\frac{1}{y}}=2^{\frac{7}{y}}$ …… ㉡

㉠÷㉡을 하면 $\frac{20}{5}=2^{\frac{6}{x}}\div 2^{\frac{7}{y}}$

$4=2^{\frac{6}{x}-\frac{7}{y}}$, $2^2=2^{\frac{6}{x}-\frac{7}{y}}$

$\therefore \frac{6}{x}-\frac{7}{y}=2$

20 답 (1) 0 (2) 0 (3) 0 (4) 0

풀이 (1) $2^x=4^y=8^z=k$로 놓으면 $k>0$이고, $xyz\neq 0$에서 $k\neq 1$이다.

$2^x=k$에서 $2=k^{\frac{1}{x}}$ …… ㉠

$4^y=k$에서 $4=k^{\frac{1}{y}}$ …… ㉡

$8^z=k$에서 $8=k^{\frac{1}{z}}$ …… ㉢

㉠×㉡÷㉢을 하면

$\frac{2\times 4}{8}=k^{\frac{1}{x}}\times k^{\frac{1}{y}}\div k^{\frac{1}{z}}$, $1=k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}}$

$k>0$이고, $k\neq 1$이므로

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=\underline{0}$

(2) $3^x=5^y=15^z=k$로 놓으면 $k>0$이고, $xyz\neq 0$에서 $k\neq 1$이다.

$3^x=k$에서 $3=k^{\frac{1}{x}}$ …… ㉠

$5^y=k$에서 $5=k^{\frac{1}{y}}$ …… ㉡

$15^z=k$에서 $15=k^{\frac{1}{z}}$ …… ㉢

㉠×㉡÷㉢을 하면

$\frac{3\times 5}{15}=k^{\frac{1}{x}}\times k^{\frac{1}{y}}\div k^{\frac{1}{z}}$, $1=k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}}$

$k>0$이고, $k\neq 1$이므로

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=0$

(3) $2^x=5^y=10^z=k$로 놓으면 $k>0$이고, $xyz\neq 0$에서 $k\neq 1$이다.

$2^x=k$에서 $2=k^{\frac{1}{x}}$ …… ㉠

$5^y=k$에서 $5=k^{\frac{1}{y}}$ …… ㉡

$10^z=k$에서 $10=k^{\frac{1}{z}}$ …… ㉢

㉠×㉡÷㉢을 하면

$\frac{2\times 5}{10}=k^{\frac{1}{x}}\times k^{\frac{1}{y}}\div k^{\frac{1}{z}}$, $1=k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}}$

$k>0$이고, $k\neq 1$이므로

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=0$

(4) $4^x=5^y=20^z=k$로 놓으면 $k>0$이고, $xyz\neq 0$에서 $k\neq 1$이다.

$4^x=k$에서 $4=k^{\frac{1}{x}}$ …… ㉠

$5^y=k$에서 $5=k^{\frac{1}{y}}$ …… ㉡

$20^z=k$에서 $20=k^{\frac{1}{z}}$ …… ㉢

㉠×㉡÷㉢을 하면

$\frac{4\times 5}{20}=k^{\frac{1}{x}}\times k^{\frac{1}{y}}\div k^{\frac{1}{z}}$, $1=k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}}$

$k>0$이고, $k\neq 1$이므로

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=0$

21 답 (1) $\sqrt{2}$ (2) 81 (3) $25\sqrt{5}$ (4) 27 (5) $\sqrt{2}$

풀이 (1) $\log_2 x=\frac{1}{2}$에서 $x=2^{\frac{1}{2}}=\underline{\sqrt{2}}$

(2) $\log_3 x=4$에서 $x=3^4=81$

(3) $\log_5 x=\frac{5}{2}$에서 $x=5^{\frac{5}{2}}=\sqrt{5^5}=25\sqrt{5}$

(4) $\log_9 x=\frac{3}{2}$에서 $x=9^{\frac{3}{2}}=\sqrt{9^3}=\sqrt{3^6}=27$

(5) $\log_2(\log_4 x)=-2$에서 $\log_4 x=2^{-2}=\frac{1}{4}$

$\therefore x=4^{\frac{1}{4}}=(2^2)^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$

22 답 (1) $\frac{1}{4}$ (2) 4 (3) 2 (4) 5

풀이 (1) $\log_x 64=-3$에서 $x^{-3}=64$

양변을 $-\frac{1}{3}$제곱하면 $(x^{-3})^{-\frac{1}{3}}=64^{-\frac{1}{3}}$

$\therefore x=(2^6)^{-\frac{1}{3}}=2^{-2}=\underline{\frac{1}{4}}$

(2) $\log_x 16=2$에서 $x^2=16$

양변을 $\frac{1}{2}$제곱하면 $(x^2)^{\frac{1}{2}}=16^{\frac{1}{2}}$

$\therefore x=(2^4)^{\frac{1}{2}}=2^2=4$

(3) $\log_x \frac{1}{32}=-5$에서 $x^{-5}=\frac{1}{32}$

양변을 $-\frac{1}{5}$제곱하면 $(x^{-5})^{-\frac{1}{5}}=\left(\frac{1}{32}\right)^{-\frac{1}{5}}$

$\therefore x=(2^{-5})^{-\frac{1}{5}}=2$

(4) $\log_x 25=2$에서 $x^2=25$

양변을 $\frac{1}{2}$제곱하면 $(x^2)^{\frac{1}{2}}=25^{\frac{1}{2}}$

$\therefore x=(5^2)^{\frac{1}{2}}=5$

23 답 (1) $2<x<3$ 또는 $3<x<5$
(2) $3<x<5$ 또는 $5<x<6$
(3) $x<-4$ 또는 $x>6$
(4) $-1<x<0$ 또는 $0<x<2$
(5) $1<x<2$ 또는 $2<x<5$
(6) $2<x<3$ 또는 $3<x<7$
(7) $3<x<4$ 또는 $x>4$
(8) $3<x<4$ 또는 $4<x<8$

풀이 (1) 밑 조건에서 $x-2>0$, $x-2\neq1$

$\therefore x>2$, $x\neq3$ …… ㉠

진수 조건에서 $5-x>0$

$\therefore x<5$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$\underline{2<x<3}$ 또는 $\underline{3<x<5}$

(2) 밑 조건에서 $6-x>0$, $6-x\neq1$

$\therefore x<6$, $x\neq5$ …… ㉠

진수 조건에서 $x-3>0$

$\therefore x>3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$3<x<5$ 또는 $5<x<6$

(3) 진수 조건에서 $x^2-2x-24>0$

$(x+4)(x-6)>0$

$\therefore x<-4$ 또는 $x>6$

(4) 밑 조건에서 $x+1>0$, $x+1\neq1$

$\therefore x>-1$, $x\neq0$ …… ㉠

진수 조건에서 $-x^2-x+6>0$

$x^2+x-6<0$, $(x+3)(x-2)<0$

$\therefore -3<x<2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-1<x<0$ 또는 $0<x<2$

(5) 밑 조건에서 $x-1>0$, $x-1\neq1$

$\therefore x>1$, $x\neq2$ …… ㉠

진수 조건에서 $-x^2+6x-5>0$

$x^2-6x+5<0$, $(x-1)(x-5)<0$

$\therefore 1<x<5$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$1<x<2$ 또는 $2<x<5$

(6) 밑 조건에서 $x-2>0$, $x-2\neq1$

$\therefore x>2$, $x\neq3$ …… ㉠

진수 조건에서 $-x^2+5x+14>0$

$x^2-5x-14<0$, $(x+2)(x-7)<0$

$\therefore -2<x<7$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$2<x<3$ 또는 $3<x<7$

(7) 밑 조건에서 $x-3>0$, $x-3\neq1$

$\therefore x>3$, $x\neq4$ …… ㉠

진수 조건에서 $x^2-3x+2>0$

$(x-1)(x-2)>0$

$\therefore x<1$ 또는 $x>2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$3<x<4$ 또는 $x>4$

(8) 밑 조건에서 $x-3>0$, $x-3\neq1$

$\therefore x>3$, $x\neq4$ …… ㉠

진수 조건에서 $-x^2+11x-24>0$

$x^2-11x+24<0$, $(x-3)(x-8)<0$

$\therefore 3<x<8$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$3<x<4$ 또는 $4<x<8$

24 답 (1) -2 (2) 0 (3) 5 (4) 1 (5) $\frac{1}{2}$
(6) $-\frac{3}{2}$ (7) $\frac{3}{5}$ (8) $\frac{2}{3}$ (9) 6 (10) $\frac{3}{2}$

풀이 (1) $\log_2 \frac{1}{4}=\log_2 2^{-2}=-2\log_2 2=\underline{-2}$

다른 풀이 $\log_2 \frac{1}{4}=\log_2 1-\log_2 4$

$=\log_2 1-\log_2 2^2$

$=0-2\log_2 2=-2$

(3) $\log_3 243=\log_3 3^5=5\log_3 3=5$

(5) $\log_2 \sqrt{2}=\log_2 2^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log_2 2=\frac{1}{2}$

(6) $\log_2 \frac{1}{2\sqrt{2}}=\log_2 \frac{1}{2\times2^{\frac{1}{2}}}=\log_2 \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}$

$=\log_2 2^{-\frac{3}{2}}=-\frac{3}{2}\log_2 2=-\frac{3}{2}$

(7) $\log_3 \sqrt[5]{27}=\log_3 27^{\frac{1}{5}}=\log_3 (3^3)^{\frac{1}{5}}$

$=\log_3 3^{\frac{3}{5}}=\frac{3}{5}\log_3 3=\frac{3}{5}$

(8) $\log_5 \sqrt[3]{25}=\log_5 25^{\frac{1}{3}}=\log_5 (5^2)^{\frac{1}{3}}$

$=\log_5 5^{\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}\log_5 5=\frac{2}{3}$

(9) $\log_{\sqrt{2}} 8=\log_{\sqrt{2}} 2^3=\log_{\sqrt{2}} \{(\sqrt{2})^2\}^3$

$=\log_{\sqrt{2}} (\sqrt{2})^6=6\log_{\sqrt{2}} \sqrt{2}=6$

(10) $\log_{10} \sqrt{1000}=\log_{10} 1000^{\frac{1}{2}}=\log_{10} (10^3)^{\frac{1}{2}}$

$=\log_{10} 10^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}\log_{10} 10=\frac{3}{2}$

25 답 (1) 4 (2) 1 (3) 2 (4) 3
(5) 1 (6) 6 (7) $\frac{1}{2}$ (8) $-\frac{3}{2}$
(9) $\frac{3}{2}$ (10) $\frac{1}{2}$ (11) $\frac{1}{2}$

풀이 (1) $\log_2 \frac{4}{3}+2\log_2 \sqrt{12}=\log_2 \frac{4}{3}+\log_2 (\sqrt{12})^2$
$=\log_2 \frac{4}{3}+\log_2 12$
$=\log_2 \left(\frac{4}{3}\times 12\right)=\log_2 16$
$=\log_2 2^4=\underline{4}$

(2) $\log_{15} 3+\log_{15} 5=\log_{15} (3\times 5)=\log_{15} 15=1$

(3) $\log_2 5+\log_2 \frac{4}{5}=\log_2 \left(5\times\frac{4}{5}\right)=\log_2 4=\log_2 2^2=2$

(4) $\log_3 \frac{9}{2}+\log_3 6=\log_3 \left(\frac{9}{2}\times 6\right)=\log_3 27=\log_3 3^3=3$

(5) $\log_3 75+2\log_3 \frac{1}{5}=\log_3 75+\log_3 \left(\frac{1}{5}\right)^2$
$=\log_3 75+\log_3 \frac{1}{25}=\log_3 \left(75\times\frac{1}{25}\right)$
$=\log_3 3=1$

(6) $\log_2 100-2\log_2 \frac{5}{4}=\log_2 100-\log_2 \left(\frac{5}{4}\right)^2$
$=\log_2 100-\log_2 \frac{25}{16}$
$=\log_2 \left(100\times\frac{16}{25}\right)=\log_2 64$
$=\log_2 2^6=6$

(7) $\log_5 \sqrt{10}+\frac{1}{2}\log_5 3-\frac{3}{2}\log_5 \sqrt[3]{6}$
$=\log_5 \sqrt{10}+\log_5 3^{\frac{1}{2}}-\log_5 (6^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{2}}$
$=\log_5 \sqrt{10}+\log_5 \sqrt{3}-\log_5 \sqrt{6}$
$=\log_5 \left(\frac{\sqrt{10}\times\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\right)=\log_5 \sqrt{5}$
$=\log_5 5^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$

(8) $\log_5 3-2\log_5 \sqrt[4]{15}-\log_5 \sqrt{75}$
$=\log_5 3-\log_5 \left(15^{\frac{1}{4}}\right)^2-\log_5 5\sqrt{3}$
$=\log_5 3-\log_5 \sqrt{15}-\log_5 5\sqrt{3}$
$=\log_5 \left(\frac{3}{\sqrt{15}}\times\frac{1}{5\sqrt{3}}\right)=\log_5 \frac{1}{5\sqrt{5}}$
$=\log_5 5^{-\frac{3}{2}}=-\frac{3}{2}$

(9) $\log_2 \sqrt{3}-2\log_2 \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\log_2 6$
$=\log_2 \sqrt{3}-\log_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2-\log_2 6^{\frac{1}{2}}$
$=\log_2 \sqrt{3}-\log_2 \frac{1}{4}-\log_2 \sqrt{6}$
$=\log_2 \left(\sqrt{3}\times 4\times\frac{1}{\sqrt{6}}\right)=\log_2 2\sqrt{2}$
$=\log_2 2^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}$

(10) $\log_3 2+\log_3 \sqrt{6}-\frac{1}{2}\log_3 8$
$=\log_3 2+\log_3 \sqrt{6}-\log_3 8^{\frac{1}{2}}$
$=\log_3 2+\log_3 \sqrt{6}-\log_3 \sqrt{8}$
$=\log_3 \left(\frac{2\times\sqrt{6}}{\sqrt{8}}\right)=\log_3 \sqrt{3}$
$=\log_3 3^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$

(11) $\log_5 3+\log_5 \sqrt{15}-\frac{1}{2}\log_5 27$
$=\log_5 3+\log_5 \sqrt{15}-\log_5 27^{\frac{1}{2}}$
$=\log_5 3+\log_5 \sqrt{15}-\log_5 \sqrt{27}$
$=\log_5 \left(\frac{3\times\sqrt{15}}{\sqrt{27}}\right)=\log_5 \sqrt{5}$
$=\log_5 5^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$

26 답 (1) 3 (2) 2 (3) $\frac{2}{3}$ (4) 0

풀이 (1) $\log_2 3\times\log_3 5\times\log_5 8$
$=\frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2}\times\frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 3}\times\frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 5}$
$=\frac{\log_{10} 2^3}{\log_{10} 2}$
$=\frac{3\log_{10} 2}{\log_{10} 2}=\underline{3}$

(2) $\frac{1}{\log_{16} 8}+\frac{1}{\log_4 8}=\log_8 16+\log_8 4$
$=\log_8 (16\times 4)$
$=\log_8 64$
$=\log_8 8^2=2$

다른 풀이 $\frac{1}{\log_{16} 8}+\frac{1}{\log_4 8}$
$=\log_8 16+\log_8 4$
$=\log_{2^3} 2^4+\log_{2^3} 2^2$
$=\frac{4}{3}\log_2 2+\frac{2}{3}\log_2 2$
$=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}=2$

(3) $\log_{27} 9=\log_{3^3} 3^2=\frac{2}{3}\log_3 3=\frac{2}{3}$

(4) $\log_4 3-\log_2 \sqrt{3}=\log_{2^2} 3-\log_2 \sqrt{3}$
$=\frac{1}{2}\log_2 3-\log_2 \sqrt{3}$
$=\log_2 3^{\frac{1}{2}}-\log_2 \sqrt{3}$
$=\log_2 \sqrt{3}-\log_2 \sqrt{3}=0$

27 답 (1) 5 (2) 27 (3) 64 (4) 16

풀이 (1) $4^{\log_4 5}=5^{\log_4 4}=\underline{5}$

(2) $8^{\log_2 3}=3^{\log_2 8}=3^{\log_2 2^3}$
$=3^{3\log_2 2}=3^3=27$

(3) $9^{\log_3 4+\log_3 2}=9^{\log_3 (4\times 2)}=9^{\log_3 8}$
$=8^{\log_3 9}=8^{\log_3 3^2}$
$=8^{2\log_3 3}=8^2=64$

(4) 주어진 식의 지수 부분을 정리하면
$2\log_2 5-2\log_{\frac{1}{2}} 4-2\log_2 10$
$=\log_2 5^2-\log_{2^{-1}} 2^4-\log_2 10^2$
$=\log_2 25+\log_2 2^4-\log_2 100$
$=\log_2 \left(\frac{25\times 16}{100}\right)=\log_2 4$
$=\log_2 2^2=2$
$\therefore 4^{2\log_2 5-2\log_{\frac{1}{2}} 4-2\log_2 10}=4^2=16$

28 답 (1) $1-a$ (2) $\dfrac{a+1}{b}$ (3) $2a+2b-3$

(4) $\dfrac{2a+b}{a+2b}$ (5) $\dfrac{2b-a}{1-a}$ (6) $\dfrac{2a+b}{2a+2b}$

풀이 (1) $\log_{10} 5=\log_{10} \dfrac{10}{2}=\log_{10} 10-\log_{10} 2$

$=\underline{1-a}$

(2) $\log_3 20=\dfrac{\log_{10} 20}{\log_{10} 3}=\dfrac{\log_{10}(2\times 10)}{\log_{10} 3}$

$=\dfrac{\log_{10} 2+\log_{10} 10}{\log_{10} 3}=\underline{\dfrac{a+1}{b}}$

(3) $\log_{10} 0.036=\log_{10} \dfrac{36}{1000}$

$=\log_{10} 36-\log_{10} 1000$

$=\log_{10} 6^2-\log_{10} 10^3$

$=2\log_{10}(2\times 3)-3\log_{10} 10$

$=2(\log_{10} 2+\log_{10} 3)-3$

$=2(a+b)-3=\underline{2a+2b-3}$

(4) $\log_{18} 12=\dfrac{\log_{10} 12}{\log_{10} 18}=\dfrac{\log_{10}(2^2\times 3)}{\log_{10}(2\times 3^2)}$

$=\dfrac{2\log_{10} 2+\log_{10} 3}{\log_{10} 2+2\log_{10} 3}=\underline{\dfrac{2a+b}{a+2b}}$

(5) $\log_5 \dfrac{9}{2}=\log_5 3^2-\log_5 2=\dfrac{2\log_{10} 3}{\log_{10} 5}-\dfrac{\log_{10} 2}{\log_{10} 5}$

$=\dfrac{2\log_{10} 3-\log_{10} 2}{\log_{10} 5}=\dfrac{2\log_{10} 3-\log_{10} 2}{\log_{10} \dfrac{10}{2}}$

$=\dfrac{2\log_{10} 3-\log_{10} 2}{\log_{10} 10-\log_{10} 2}=\underline{\dfrac{2b-a}{1-a}}$

(6) $\log_6 \sqrt{12}=\dfrac{\log_{10} 2\sqrt{3}}{\log_{10} 6}=\dfrac{\log_{10} 2+\log_{10} 3^{\frac{1}{2}}}{\log_{10}(2\times 3)}$

$=\dfrac{\log_{10} 2+\dfrac{1}{2}\log_{10} 3}{\log_{10} 2+\log_{10} 3}=\dfrac{a+\dfrac{1}{2}b}{a+b}$

$=\underline{\dfrac{2a+b}{2a+2b}}$

29 답 (1) $\dfrac{ab+b+2}{ab+2b+1}$ (2) $\dfrac{ab+2b+2}{2ab+b+2}$

(3) $\dfrac{2ab+b+1}{ab+b+1}$ (4) $\dfrac{8ab}{ab+2b+1}$

풀이 (1) 주어진 조건식의 로그의 밑을 3으로 통일하면

$\log_5 3=\dfrac{1}{\log_3 5}=b$ $\quad\therefore \log_3 5=\dfrac{1}{b}$

$\therefore \log_{90} 150=\dfrac{\log_3 150}{\log_3 90}$

$=\dfrac{\log_3(2\times 3\times 5^2)}{\log_3(2\times 3^2\times 5)}$

$=\dfrac{\log_3 2+\log_3 3+2\log_3 5}{\log_3 2+2\log_3 3+\log_3 5}$

$=\dfrac{a+1+\dfrac{2}{b}}{a+2+\dfrac{1}{b}}=\underline{\dfrac{ab+b+2}{ab+2b+1}}$

(2) 주어진 조건식의 로그의 밑을 3으로 통일하면

$\log_5 3=\dfrac{1}{\log_3 5}=b$ $\quad\therefore \log_3 5=\dfrac{1}{b}$

$\therefore \log_{300} 450=\dfrac{\log_3 450}{\log_3 300}=\dfrac{\log_3(2\times 3^2\times 5^2)}{\log_3(2^2\times 3\times 5^2)}$

$=\dfrac{\log_3 2+2\log_3 3+2\log_3 5}{2\log_3 2+\log_3 3+2\log_3 5}$

$=\dfrac{a+2+\dfrac{2}{b}}{2a+1+\dfrac{2}{b}}=\underline{\dfrac{ab+2b+2}{2ab+b+2}}$

(3) 주어진 조건식의 로그의 밑을 3으로 통일하면

$\log_7 3=\dfrac{1}{\log_3 7}=b$ $\quad\therefore \log_3 7=\dfrac{1}{b}$

$\therefore \log_{42} 84=\dfrac{\log_3 84}{\log_3 42}=\dfrac{\log_3(2^2\times 3\times 7)}{\log_3(2\times 3\times 7)}$

$=\dfrac{2\log_3 2+\log_3 3+\log_3 7}{\log_3 2+\log_3 3+\log_3 7}$

$=\dfrac{2a+1+\dfrac{1}{b}}{a+1+\dfrac{1}{b}}=\underline{\dfrac{2ab+b+1}{ab+b+1}}$

(4) 주어진 조건식의 로그의 밑을 3으로 통일하면

$\log_7 3=\dfrac{1}{\log_3 7}=b$ $\quad\therefore \log_3 7=\dfrac{1}{b}$

$\therefore \log_{126} 256=\dfrac{\log_3 256}{\log_3 126}=\dfrac{\log_3 2^8}{\log_3(2\times 3^2\times 7)}$

$=\dfrac{8\log_3 2}{\log_3 2+2\log_3 3+\log_3 7}$

$=\dfrac{8a}{a+2+\dfrac{1}{b}}=\underline{\dfrac{8ab}{ab+2b+1}}$

30 답 (1) $\dfrac{y}{3x}$ (2) $\dfrac{3y}{2x}$ (3) $\dfrac{4y}{x}$

(4) $\dfrac{2y}{3x}$ (5) $-\dfrac{3y}{x}$

풀이 $3^x=a$, $3^y=b$에서 $x=\log_3 a$, $y=\log_3 b$

(1) $\log_{a^3} b=\dfrac{1}{3}\log_a b=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\log_3 b}{\log_3 a}=\underline{\dfrac{y}{3x}}$

(2) $\log_{a^2} b^3=\dfrac{3}{2}\log_a b=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{\log_3 b}{\log_3 a}=\underline{\dfrac{3y}{2x}}$

(3) $\log_{\sqrt{a}} b^2=\log_{a^{\frac{1}{2}}} b^2=4\log_a b=4\times\dfrac{\log_3 b}{\log_3 a}=\underline{\dfrac{4y}{x}}$

(4) $\log_{\sqrt{a}} \sqrt[3]{b}=\log_{a^{\frac{1}{2}}} b^{\frac{1}{3}}=\dfrac{2}{3}\log_a b=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{\log_3 b}{\log_3 a}=\underline{\dfrac{2y}{3x}}$

(5) $\log_{\sqrt[3]{a}} \dfrac{1}{b}=\log_{a^{\frac{1}{3}}} b^{-1}=-3\log_a b=-3\times\dfrac{\log_3 b}{\log_3 a}=\underline{-\dfrac{3y}{x}}$

31 답 (1) $x+2y+3z$ (2) $2x+y-2z$

(3) $-3x+4y+z$ (4) $\dfrac{3z}{x+y}$

(5) $\dfrac{z}{3x+3y}$

풀이 $5^x=a$, $5^y=b$, $5^z=c$에서

$x=\log_5 a$, $y=\log_5 b$, $z=\log_5 c$

(1) $\log_5 ab^2c^3=\log_5 a+\log_5 b^2+\log_5 c^3$

$=\log_5 a+2\log_5 b+3\log_5 c$

$=\underline{x+2y+3z}$

(2) $\log_5 \dfrac{a^2b}{c^2}=\log_5 a^2+\log_5 b-\log_5 c^2$

$=2\log_5 a+\log_5 b-2\log_5 c$

$=2x+y-2z$

(3) $\log_5 \frac{b^4c}{a^3}=\log_5 b^4+\log_5 c-\log_5 a^3$

$=4\log_5 b+\log_5 c-3\log_5 a$

$=-3x+4y+z$

(4) $\log_{ab} c^3=\frac{\log_5 c^3}{\log_5 ab}=\frac{3\log_5 c}{\log_5 a+\log_5 b}=\frac{3z}{x+y}$

(5) $\log_{ab} \sqrt[3]{c}=\frac{\log_5 \sqrt[3]{c}}{\log_5 ab}=\frac{\frac{1}{3}\log_5 c}{\log_5 a+\log_5 b}=\frac{\frac{1}{3}z}{x+y}=\frac{z}{3x+3y}$

32 답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $-\frac{9}{2}$

풀이 $a^3b^2=1$의 양변에 밑이 a인 로그를 취하면

$\log_a a^3b^2=\log_a 1$

$\log_a a^3+\log_a b^2=0$, $3+2\log_a b=0$ $\therefore \log_a b=-\frac{3}{2}$

(1) $\log_a a^2b=\log_a a^2+\log_a b=2+\log_a b$

$=2-\frac{3}{2}=\underline{\frac{1}{2}}$

(2) $\log_a a^3b^5=\log_a a^3+\log_a b^5=3+5\log_a b$

$=3+5\times\left(-\frac{3}{2}\right)=\underline{-\frac{9}{2}}$

33 답 (1) 12 (2) $\frac{15}{4}$

풀이 $a^3=b^4$의 양변에 밑이 a인 로그를 취하면

$\log_a a^3=\log_a b^4$, $3=4\log_a b$ $\therefore \log_a b=\frac{3}{4}$

(1) $16\log_a b=16\times\frac{3}{4}=\underline{12}$

(2) $\log_a a^3b=\log_a a^3+\log_a b=3+\log_a b=3+\frac{3}{4}=\underline{\frac{15}{4}}$

34 답 (1) 2 (2) 2 (3) 4 (4) 3

풀이 (1) $36^x=9$, $4^y=27$에서 $x=\log_{36} 9$, $y=\log_4 27$

$\therefore \frac{2}{x}-\frac{3}{y}=\frac{2}{\log_{36} 9}-\frac{3}{\log_4 27}=\frac{2}{\log_{36} 3^2}-\frac{3}{\log_4 3^3}$

$=\frac{2}{2\log_{36} 3}-\frac{3}{3\log_4 3}=\frac{1}{\log_{36} 3}-\frac{1}{\log_4 3}$

$=\log_3 36-\log_3 4=\log_3 \frac{36}{4}$

$=\log_3 9=\log_3 3^2=\underline{2}$

(2) $80^x=16$, $5^y=64$에서 $x=\log_{80} 16$, $y=\log_5 64$

$\therefore \frac{2}{x}-\frac{3}{y}=\frac{2}{\log_{80} 16}-\frac{3}{\log_5 64}=\frac{2}{\log_{80} 4^2}-\frac{3}{\log_5 4^3}$

$=\frac{2}{2\log_{80} 4}-\frac{3}{3\log_5 4}=\frac{1}{\log_{80} 4}-\frac{1}{\log_5 4}$

$=\log_4 80-\log_4 5=\log_4 \frac{80}{5}$

$=\log_4 16=\log_4 4^2=\underline{2}$

(3) $150^x=25$, $6^y=125$에서 $x=\log_{150} 25$, $y=\log_6 125$

$\therefore \frac{4}{x}-\frac{6}{y}=\frac{4}{\log_{150} 25}-\frac{6}{\log_6 125}$

$=\frac{4}{\log_{150} 5^2}-\frac{6}{\log_6 5^3}$

$=\frac{4}{2\log_{150} 5}-\frac{6}{3\log_6 5}$

$=2\left(\frac{1}{\log_{150} 5}-\frac{1}{\log_6 5}\right)$

$=2(\log_5 150-\log_5 6)$

$=2\log_5 \frac{150}{6}=2\log_5 25=2\log_5 5^2=\underline{4}$

(4) $56^x=8$, $7^y=16$에서 $x=\log_{56} 8$, $y=\log_7 16$

$\therefore \frac{3}{x}-\frac{4}{y}=\frac{3}{\log_{56} 8}-\frac{4}{\log_7 16}=\frac{3}{\log_{56} 2^3}-\frac{4}{\log_7 2^4}$

$=\frac{3}{3\log_{56} 2}-\frac{4}{4\log_7 2}=\frac{1}{\log_{56} 2}-\frac{1}{\log_7 2}$

$=\log_2 56-\log_2 7=\log_2 \frac{56}{7}$

$=\log_2 8=\log_2 2^3=\underline{3}$

35 답 (1) -1 (2) 1

풀이 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=1$

(1) $\log_3 \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}=\log_3 \frac{1}{3}=\log_3 3^{-1}=\underline{-1}$

(2) $\log_3 (\alpha^{-1}+\beta^{-1})=\log_3 \left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)=\log_3 \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$

$=\log_3 3=\underline{1}$

36 답 (1) 1 (2) 1

풀이 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=1$

(1) $\log_2 (\alpha^2+\beta^2)=\log_2 \{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}$

$=\log_2 2=\underline{1}$

(2) $\log_4 (\alpha+\alpha^{-1})+\log_4 (\beta+\beta^{-1})$

$=\log_4 \left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)$

$=\log_4 \left(\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}\right)$

$=\log_4 \left(\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}\right)$

$=\log_4 \left\{\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}\right\}$

$=\log_4 (1+1+2)$

$=\log_4 4=\underline{1}$

37 답 (1) 14 (2) 25

풀이 (1) 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2 a+\log_2 b=8$, $\log_2 a\times\log_2 b=4$

$\therefore \log_a b+\log_b a$

$=\frac{\log_2 b}{\log_2 a}+\frac{\log_2 a}{\log_2 b}$

$=\frac{(\log_2 b)^2+(\log_2 a)^2}{\log_2 a\times\log_2 b}$

$=\frac{(\log_2 a+\log_2 b)^2-2\times\log_2 a\times\log_2 b}{\log_2 a\times\log_2 b}$

$=\frac{8^2-2\times4}{4}=\underline{14}$

(2) 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2 a+\log_2 b=9$, $\log_2 a\times\log_2 b=3$

$\therefore \log_a b+\log_b a$

$=\frac{\log_2 b}{\log_2 a}+\frac{\log_2 a}{\log_2 b}$

$=\frac{(\log_2 b)^2+(\log_2 a)^2}{\log_2 a\times\log_2 b}$

$=\frac{(\log_2 a+\log_2 b)^2-2\times\log_2 a\times\log_2 b}{\log_2 a\times\log_2 b}$

$=\frac{9^2-2\times3}{3}=\underline{25}$

38 답 (1) 23 (2) 6

풀이 (1) 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_3 a+\log_3 b=5,\ \log_3 a\times\log_3 b=1$

$\therefore \log_a b+\log_b a$

$=\dfrac{\log_3 b}{\log_3 a}+\dfrac{\log_3 a}{\log_3 b}$

$=\dfrac{(\log_3 b)^2+(\log_3 a)^2}{\log_3 a\times\log_3 b}$

$=\dfrac{(\log_3 a+\log_3 b)^2-2\times\log_3 a\times\log_3 b}{\log_3 a\times\log_3 b}$

$=\dfrac{5^2-2\times1}{1}=23$

(2) 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_3 a+\log_3 b=-4,\ \log_3 a\times\log_3 b=2$

$\therefore \log_a b+\log_b a$

$=\dfrac{\log_3 b}{\log_3 a}+\dfrac{\log_3 a}{\log_3 b}$

$=\dfrac{(\log_3 b)^2+(\log_3 a)^2}{\log_3 a\times\log_3 b}$

$=\dfrac{(\log_3 a+\log_3 b)^2-2\times\log_3 a\times\log_3 b}{\log_3 a\times\log_3 b}$

$=\dfrac{(-4)^2-2\times2}{2}=6$

39 답 (1) -1 (2) -1 (3) -3 (4) $\dfrac{3}{2}$ (5) -4

풀이 (1) $\log\dfrac{1}{10}=\log_{10}10^{-1}=\underline{-1}$

(2) $\log\dfrac{1}{\sqrt{100}}=\log\dfrac{1}{\sqrt{10^2}}=\log\dfrac{1}{10}=\log_{10}10^{-1}=-1$

(3) $\log 0.001=\log\dfrac{1}{1000}=\log\dfrac{1}{10^3}=\log_{10}10^{-3}=-3$

(4) $\log\sqrt{1000}=\log(10^3)^{\frac{1}{2}}=\log_{10}10^{\frac{3}{2}}=\dfrac{3}{2}$

(5) $\log\dfrac{1}{10000}=\log\dfrac{1}{10^4}=\log_{10}10^{-4}=-4$

40 답 (1) 1.5276 (2) 3.5276 (3) -0.4724

풀이 (1) $\log 33.7=\log(3.37\times10)=\log 3.37+\log 10$

$=0.5276+1=\underline{1.5276}$

(2) $\log 3370=\log(3.37\times1000)=\log 3.37+\log 10^3$

$=0.5276+3=3.5276$

(3) $\log 0.337=\log\left(3.37\times\dfrac{1}{10}\right)=\log 3.37+\log 10^{-1}$

$=0.5276+(-1)=-0.4724$

41 답 (1) 4.2122 (2) -1.7878 (3) -3.7878

풀이 (1) $\log 16300=\log(1.63\times10000)$

$=\log 1.63+\log 10^4$

$=0.2122+4=4.2122$

(2) $\log 0.0163=\log\left(1.63\times\dfrac{1}{100}\right)=\log 1.63+\log 10^{-2}$

$=0.2122+(-2)=-1.7878$

(3) $\log 0.000163=\log\left(1.63\times\dfrac{1}{10000}\right)$

$=\log 1.63+\log 10^{-4}$

$=0.2122+(-4)=-3.7878$

42 답 (1) 1.2040 (2) 1.4313 (3) 1.5050 (4) 1.2552 (5) 1.3801 (6) 1.8572 (7) 1.1761 (8) 1.3010 (9) 1.3980 (10) 1.4771

풀이 (1) $\log 16=\log 2^4=4\log 2$

$=4\times0.3010=\underline{1.2040}$

(2) $\log 27=\log 3^3=3\log 3$

$=3\times0.4771=1.4313$

(3) $\log 32=\log 2^5=5\log 2=5\times0.3010$

$=1.5050$

(4) $\log 18=\log(2\times3^2)=\log 2+2\log 3$

$=0.3010+2\times0.4771=1.2552$

(5) $\log 24=\log(2^3\times3)=3\log 2+\log 3$

$=3\times0.3010+0.4771=1.3801$

(6) $\log 72=\log(2^3\times3^2)=3\log 2+2\log 3$

$=3\times0.3010+2\times0.4771=1.8572$

(7) $\log 15=\log(3\times5)=\log 3+\log 5$

이때

$\log 5=\log\dfrac{10}{2}=\log 10-\log 2$

$=1-0.3010=0.6990$

이므로

$\log 15=\log 3+\log 5$

$=0.4771+0.6990=1.1761$

(8) $\log 20=\log(2^2\times5)=\log 2^2+\log 5=2\log 2+\log 5$

이때 (7)에서 $\log 5=0.6990$이므로

$\log 20=2\log 2+\log 5$

$=2\times0.3010+0.6990=1.3010$

다른 풀이 $\log 20=\log(2\times10)=\log 2+\log 10$

$=0.3010+1=1.3010$

(9) $\log 25=\log 5^2=2\log 5$

이때 (7)에서 $\log 5=0.6990$이므로

$\log 25=2\log 5=2\times0.6990=1.3980$

(10) $\log 30=\log(2\times3\times5)=\log 2+\log 3+\log 5$

이때 (7)에서 $\log 5=0.6990$이므로

$\log 30=\log 2+\log 3+\log 5$

$=0.3010+0.4771+0.6990=1.4771$

다른 풀이 $\log 30=\log(3\times10)=\log 3+\log 10$

$=0.4771+1=1.4771$

43 답 (1) 2.3304 (2) 1.3655 (3) -0.6536 (4) 3.3075 (5) -1.6144

풀이 (1) 주어진 상용로그표에서

$\log 2.14=\underline{0.3304}$이므로

$\log 214=\log(2.14\times100)=\log 2.14+\log 10^2$

$=\underline{0.3304}+2=\underline{2.3304}$

(2) 주어진 상용로그표에서 $\log 2.32=0.3655$이므로

$\log 23.2=\log(2.32\times10)=\log 2.32+\log 10$

$=0.3655+1=1.3655$

(3) 주어진 상용로그표에서 $\log 2.22=0.3464$이므로

$$\log 0.222=\log\left(2.22\times\frac{1}{10}\right)=\log 2.22+\log 10^{-1}$$
$$=0.3464+(-1)=-0.6536$$

(4) 주어진 상용로그표에서 $\log 2.03=0.3075$이므로

$$\log 2030=\log(2.03\times1000)=\log 2.03+\log 10^{3}$$
$$=0.3075+3=3.3075$$

(5) 주어진 상용로그표에서 $\log 2.43=0.3856$이므로

$$\log 0.0243=\log\left(2.43\times\frac{1}{100}\right)=\log 2.43+\log 10^{-2}$$
$$=0.3856+(-2)=-1.6144$$

44 답 6년 후

풀이 올해 생산량을 a라고 하면 n년 후의 생산량은

$a(1+0.14)^n$

$a(1+0.14)^n\geq 2a$에서 $1.14^n\geq 2$ ...... ㉠

㉠의 양변에 상용로그를 취하면

$\log 1.14^n\geq\log 2$

$n\log 1.14\geq\log 2$, $n\times0.0569\geq0.3010$

$\therefore n\geq5.28\cdots$

따라서 처음으로 현재 생산량의 2배 이상이 되는 것은 6년 후부터이다.

45 답 11번

풀이 폐수 처리 기계를 1번 통과한 후의 중금속의 농도는

$30\times\frac{9}{10}$ ppm,

폐수 처리 기계를 2번 통과한 후의 중금속의 농도는

$30\times\left(\frac{9}{10}\right)^2$ ppm

이므로 폐수 처리 기계를 n번 통과한 후의 중금속의 농도는

$30\times\left(\frac{9}{10}\right)^n$ ppm

$30\times\left(\frac{9}{10}\right)^n\leq10$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log\left\{30\times\left(\frac{9}{10}\right)^n\right\}\leq\log 10$

$\log 30+n\log\frac{9}{10}\leq1$

$\log 3+1+n(2\log 3-1)\leq1$

$$\therefore n\geq\frac{-\log 3}{2\log 3-1}=\frac{-0.4771}{2\times0.4771-1}=\frac{-0.4771}{-0.0458}$$
$$=10.41\cdots$$

따라서 중금속의 농도를 10 ppm 이하로 만들려면 폐수 처리 기계에 최소한 11번 통과시켜야 한다.

46 답 20

풀이 $P_A=20\log 255-10\log E_A$

$P_B=20\log 255-10\log E_B$

이때 $E_B=100E_A$이므로

P_A-P_B

$=(20\log 255-10\log E_A)-(20\log 255-10\log E_B)$

$=10(\log E_B-\log E_A)$

$=10\log\frac{E_B}{E_A}$

$=10\log\frac{100E_A}{E_A}$

$=10\log 100=20$

47 답 60 °C

풀이 실내 온도가 20 °C인 실험실에 온도가 60 °C인 물체를 놓고 1시간이 지났을 때, 물체의 온도가 40 °C가 되었으므로

$\log(40-20)=-k\times1+\log(60-20)$

$\log 20=-k+\log 40$

$\therefore k=\log 40-\log 20=\log\frac{40}{20}=\log 2$

한편, $\log(T-20)=-\log 2\times1+\log(100-20)$에서

$\log(T-20)=-\log 2+\log 80=\log\frac{80}{2}=\log 40$

$\therefore T=60$

따라서 이 실험실에 온도가 100 °C인 물체를 놓고 1시간이 지났을 때, 물체의 온도는 60 °C이다.

48 답 (1) 10자리 (2) 소수점 아래 8째 자리 (3) 소수점 아래 31째 자리 (4) 16자리 (5) 12자리 (6) 21자리

풀이 (1) $\log 2^{30}=30\log 2=30\times0.3010=9.030$

이때 정수 부분이 9이므로 10자리 정수이다.

(2) $\log 3^{-15}=-15\times0.4771=-7.1565=-8+0.8435$

이때 정수 부분이 -8이므로 소수점 아래 8째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

(3) $\log\frac{1}{2^{100}}=\log 2^{-100}=-100\times0.3010$

$=-30.10=-31+0.90$

이때 정수 부분이 -31이므로 소수점 아래 31째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

(4) $\log 6^{20}=20\log(2\times3)$

$=20(\log 2+\log 3)$

$=20\times(0.3010+0.4771)$

$=20\times0.7781=15.562$

이때 정수 부분이 15이므로 16자리 정수이다.

(5) $\log(2^{16}\times3^{13})=\log 2^{16}+\log 3^{13}$

$=16\times0.3010+13\times0.4771$

$=4.8160+6.2023$

$=11.0183$

이때 정수 부분이 11이므로 12자리 정수이다.

(6) $\log(3^{25}\times5^{12})=\log 3^{25}+\log 5^{12}$

$=25\log 3+12\log 5$

$=25\log 3+12\log\frac{10}{2}$

$=25\log 3+12(\log 10-\log 2)$

$=25\times0.4771+12\times(1-0.3010)$

$=11.9275+8.3880=20.3155$

이때 정수 부분이 20이므로 21자리 정수이다.

49 답 (1) 1　(2) 2　(3) 3　(4) 1　(5) 3　(6) 3

풀이 (1) $\log 4^{40}=\log(2^2)^{40}=80\log 2$

$=80\times0.3010=24.080$

이때 소수 부분은 0.080이고, $\log 1.2=0.0792$,

$\log 1.3=0.1139$이므로

$\log 1.2<$(소수 부분)$<\log 1.3$

따라서 4^{40}의 최고 자리의 숫자는 1이다.

참고 $\log 1.2<0.080<\log 1.3$에서

$\log 1.2+24<24.080<\log 1.3+24$

$\log(1.2\times10^{24})<\log 4^{40}<\log(1.3\times10^{24})$

$\therefore 1.2\times10^{24}<4^{40}<1.3\times10^{24}$

이때 4^{40}은 25자리 정수이고, 최고 자리의 숫자는 1임을 알 수 있다.

(2) $\log 3^{24}=24\log 3=24\times0.4771=11.4504$

이때 소수 부분은 0.4504이고, $\log 2.8=0.4472$,

$\log 2.9=0.4624$이므로

$\log 2.8<$(소수 부분)$<\log 2.9$

따라서 3^{24}의 최고 자리의 숫자는 2이다.

(3) $\log 6^{20}=20\log(2\times3)=20(\log 2+\log 3)$

$=20\times(0.3010+0.4771)=20\times0.7781$

$=15.562$

이때 소수 부분은 0.562이고, $\log 3.6=0.5563$,

$\log 3.7=0.5682$이므로

$\log 3.6<$(소수 부분)$<\log 3.7$

따라서 6^{20}의 최고 자리의 숫자는 3이다.

(4) $\log 18^{20}=20\log(2\times3^2)=20(\log 2+2\log 3)$

$=20\times(0.3010+2\times0.4771)=20\times1.2552$

$=25.104$

이때 소수 부분은 0.104이고, $\log 1.2=0.0792$,

$\log 1.3=0.1139$이므로

$\log 1.2<$(소수 부분)$<\log 1.3$

따라서 18^{20}의 최고 자리의 숫자는 1이다.

(5) $\log\left(\frac{9}{2}\right)^{10}=10\log\frac{9}{2}=10(\log 3^2-\log 2)$

$=10\times(2\times0.4771-0.3010)=10\times0.6532$

$=6.532$

이때 소수 부분은 0.532이고, $\log 3.4=0.5315$,

$\log 3.5=0.5441$이므로

$\log 3.4<$(소수 부분)$<\log 3.5$

따라서 $\left(\frac{9}{2}\right)^{10}$의 최고 자리의 숫자는 3이다.

(6) $\log\left(\frac{8}{3}\right)^{20}=20\log\frac{8}{3}=20(\log 2^3-\log 3)$

$=20\times(3\times0.3010-0.4771)=20\times0.4259$

$=8.518$

이때 소수 부분은 0.518이고, $\log 3.2=0.5051$,

$\log 3.3=0.5185$이므로

$\log 3.2<$(소수 부분)$<\log 3.3$

따라서 $\left(\frac{8}{3}\right)^{20}$의 최고 자리의 숫자는 3이다.

50 답 (1) 10 또는 $10\sqrt{10}$　(2) 1 또는 $\sqrt{10}$

(3) 100 또는 $100\sqrt{10}$　(4) $\frac{1}{10}$ 또는 $\frac{\sqrt{10}}{10}$

풀이 (1) $\log x^2$과 $\log x^4$의 소수 부분이 같으므로

$\log x^4-\log x^2=$(정수)

$\therefore 2\log x=$(정수)

$10\le x<100$의 각 변에 상용로그를 취하면

$1\le\log x<2$　$\therefore 2\le 2\log x<4$

이때 $2\log x$는 정수이므로

$2\log x=2$ 또는 $2\log x=3$

$2\log x=2$일 때, $\log x=1$에서 $x=10$

$2\log x=3$일 때, $\log x=\frac{3}{2}$에서 $x=10^{\frac{3}{2}}=10\sqrt{10}$

$\therefore x=10$ 또는 $x=10\sqrt{10}$

(2) $\log x$와 $\log x^3$의 소수 부분이 같으므로

$\log x^3-\log x=$(정수)

$\therefore 2\log x=$(정수)

$1\le x<10$의 각 변에 상용로그를 취하면

$0\le\log x<1$　$\therefore 0\le 2\log x<2$

이때 $2\log x$는 정수이므로

$2\log x=0$ 또는 $2\log x=1$

$2\log x=0$일 때, $\log x=0$에서 $x=1$

$2\log x=1$일 때, $\log x=\frac{1}{2}$에서 $x=10^{\frac{1}{2}}=\sqrt{10}$

$\therefore x=1$ 또는 $x=\sqrt{10}$

(3) $\log\frac{1}{x}$과 $\log\frac{1}{x^3}$의 소수 부분이 같으므로

$\log x^{-1}-\log x^{-3}=$(정수)

$\therefore 2\log x=$(정수)

$100\le x<1000$의 각 변에 상용로그를 취하면

$2\le\log x<3$　$\therefore 4\le 2\log x<6$

이때 $2\log x$는 정수이므로

$2\log x=4$ 또는 $2\log x=5$

$2\log x=4$일 때, $\log x=2$에서 $x=10^2=100$

$2\log x=5$일 때, $\log x=\frac{5}{2}$에서 $x=10^{\frac{5}{2}}=100\sqrt{10}$

$\therefore x=100$ 또는 $x=100\sqrt{10}$

(4) $\log x^{-2}$과 $\log x^{-4}$의 소수 부분이 같으므로

$\log x^{-2}-\log x^{-4}=$(정수)

$\therefore 2\log x=$(정수)

$\frac{1}{10}\le x<1$의 각 변에 상용로그를 취하면

$-1 \le \log x < 0 \quad \therefore -2 \le 2\log x < 0$

이때 $2\log x$는 정수이므로

$2\log x = -2$ 또는 $2\log x = -1$

$2\log x = -2$일 때, $\log x = -1$에서

$x = 10^{-1} = \frac{1}{10}$

$2\log x = -1$일 때, $\log x = -\frac{1}{2}$에서

$x = 10^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$

$\therefore x = \frac{1}{10}$ 또는 $x = \frac{\sqrt{10}}{10}$

중단원 점검문제 | Ⅰ-1 지수와 로그 032-033쪽

01 답 1

풀이 $\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt{3}}} \times \sqrt{\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[6]{5}}} = \frac{\sqrt[12]{5}}{\sqrt[8]{3}} \times \frac{\sqrt[8]{3}}{\sqrt[12]{5}} = 1$

02 답 23

풀이 $\sqrt[4]{a} \times \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[12]{a^3} \times \sqrt[12]{a^8} = \sqrt[12]{a^3 \times a^8} = \sqrt[12]{a^{11}}$

따라서 $\sqrt[12]{a^{11}} = \sqrt[m]{a^n}$이므로 $m=12$, $n=11$

$\therefore m+n=23$

03 답 $\pm\sqrt{14}$

풀이 $(a-a^{-1})^2 = a^2 - 2 \times a \times a^{-1} + a^{-2}$

$= a^2 + a^{-2} - 2$

이때 $a^2 + a^{-2} = 16$이므로

$(a-a^{-1})^2 = 16 - 2 = 14$

$\therefore a - a^{-1} = \pm\sqrt{14}$

04 답 $\frac{651}{25}$

풀이 $a^{2x} = 5$에서 $a^{-2x} = \frac{1}{5}$

$\therefore \frac{a^{6x} - a^{-6x}}{a^{2x} - a^{-2x}}$

$= \frac{(a^{2x} - a^{-2x})^3 + 3 \times a^{2x} \times a^{-2x}(a^{2x} - a^{-2x})}{a^{2x} - a^{-2x}}$

$= (a^{2x} - a^{-2x})^2 + 3$

$= \left(5 - \frac{1}{5}\right)^2 + 3 = \left(\frac{24}{5}\right)^2 + 3 = \frac{651}{25}$

05 답 15

풀이 밑 조건에서 $x-2>0$, $x-2 \ne 1$

$\therefore x>2$, $x \ne 3$ …… ㉠

진수 조건에서 $-x^2+8x-7>0$

$x^2-8x+7<0$, $(x-1)(x-7)<0$

$\therefore 1<x<7$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $2<x<3$ 또는 $3<x<7$이므로 정수 x의 값은 4, 5, 6이다.

따라서 모든 정수 x의 값의 합은 $4+5+6=15$

06 답 3

풀이 $\log_2 3 - \log_2 \frac{9}{2} + \log_2 12 = \log_2\left(3 \div \frac{9}{2} \times 12\right)$

$= \log_2\left(3 \times \frac{2}{9} \times 12\right)$

$= \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$

07 답 $3A-B-2C$

풀이 $\log_a \frac{x^3}{yz^2} = \log_a x^3 - \log_a yz^2$

$= 3\log_a x - (\log_a y + 2\log_a z)$

$= 3\log_a x - \log_a y - 2\log_a z$

$= 3A - B - 2C$

08 답 $\frac{5a+2b}{3}$

풀이 $\log_3 10 = a$에서 $\log_3 (2 \times 5) = a$

$\therefore \log_3 2 + \log_3 5 = a$ …… ㉠

$\log_3 \frac{4}{5} = b$에서 $\log_3 4 - \log_3 5 = b$

$\therefore 2\log_3 2 - \log_3 5 = b$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면 $3\log_3 2 = a+b$

$\therefore \log_3 2 = \frac{a+b}{3}$

㉠×2−㉡을 하면 $3\log_3 5 = 2a-b$

$\therefore \log_3 5 = \frac{2a-b}{3}$

$\therefore \log_3 40 = \log_3 (2^3 \times 5) = 3\log_3 2 + \log_3 5$

$= 3 \times \frac{(a+b)}{3} + \frac{2a-b}{3} = \frac{5a+2b}{3}$

09 답 12

풀이 $5^0 = 1$이므로 $\log_3 6 + \log_3 2 - \log_3 a = 0$

$\therefore \log_3 a = \log_3 6 + \log_3 2$

$= \log_3 (6 \times 2) = \log_3 12$

$\therefore a = 12$

10 답 3

풀이 $\log_3 4 \times \log_4 5 \times \log_5 6 \times \cdots \times \log_{26} 27$

$= \frac{\log 4}{\log 3} \times \frac{\log 5}{\log 4} \times \frac{\log 6}{\log 5} \times \cdots \times \frac{\log 26}{\log 25} \times \frac{\log 27}{\log 26}$

$= \frac{\log 27}{\log 3} = \frac{\log 3^3}{\log 3}$

$= \frac{3\log 3}{\log 3} = 3$

11 답 9

풀이 $\frac{\log_3 4}{a} = \frac{\log_3 8}{b} = \frac{\log_3 16}{c} = \log_3 2$에서

$a = \frac{\log_3 4}{\log_3 2} = \log_2 4 = 2\log_2 2 = 2$

$b = \frac{\log_3 8}{\log_3 2} = \log_2 8 = 3\log_2 2 = 3$

$c = \frac{\log_3 16}{\log_3 2} = \log_2 16 = 4\log_2 2 = 4$

$\therefore a+b+c = 2+3+4 = 9$

12 답 -1

풀이 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2 3+1=-a$, $\log_2 3\times 1=b$

따라서 $a=-\log_2 3-1$, $b=\log_2 3$이므로

$a+b=-\log_2 3-1+\log_2 3=-1$

13 답 3850

풀이 $3.5855=3+0.5855=\log 10^3+\log 3.85$

$=\log(1000\times 3.85)=\log 3850$

따라서 $\log x=\log 3850$이므로 $x=3850$

14 답 24자리

풀이 3^{100}은 48자리 정수이므로 $47\le\log 3^{100}<48$

$47\le 100\log 3<48$ $\therefore 0.47\le\log 3<0.48$

5^{100}은 70자리 정수이므로 $69\le\log 5^{100}<70$

$69\le 100\log 5<70$ $\therefore 0.69\le\log 5<0.70$

$\log 15^{20}=20\log 15=20(\log 3+\log 5)$이고

$1.16\le\log 3+\log 5<1.18$이므로

$23.2\le 20(\log 3+\log 5)<23.6$

$\therefore 23.2\le\log 15^{20}\le 23.6$

따라서 $\log 15^{20}$의 정수 부분이 23이므로 15^{20}은 24자리 정수이다.

15 답 1

풀이 $\log 3^{40}=40\log 3=40\times 0.4771=19.084$

이때 소수 부분은 0.084이고, $\log 1=0$, $\log 2=0.3010$ 이므로

$\log 1<(\text{소수 부분})<\log 2$

따라서 3^{40}의 최고 자리의 숫자는 1이다.

16 답 -8

풀이 $\log a$의 정수 부분을 n, 소수 부분을 α라고 하면

n은 정수이고 $0\le\alpha<1$이다.

n, α가 이차방정식 $3x^2+10x+k=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$n+\alpha=-\dfrac{10}{3}$, $n\alpha=\dfrac{k}{3}$

$-\dfrac{10}{3}=-4+\dfrac{2}{3}$이므로

$n=-4$, $\alpha=\dfrac{2}{3}$

$\therefore k=3n\alpha=3\times(-4)\times\dfrac{2}{3}=-8$

Ⅰ-2 | 지수함수와 로그함수 034-062쪽

01 답 (1) 8 (2) $\sqrt{2}$ (3) $\dfrac{1}{2}$

풀이 (1) $f(3)=2^3=8$

(2) $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$

(3) $f(-1)=2^{-1}=\dfrac{1}{2}$

02 답 (1) 1 (2) $\dfrac{1}{27}$ (3) 9

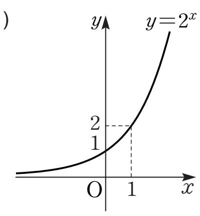
풀이 (1) $f(0)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^0=1$

(2) $f(3)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=\dfrac{1}{27}$

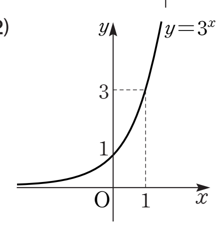
(3) $f(-2)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}=3^2=9$

03 답 풀이 참조

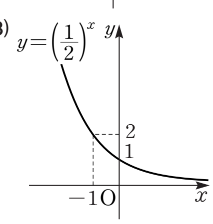
풀이 (1)



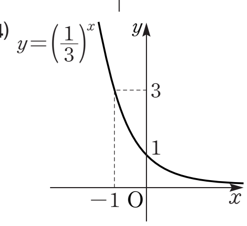
(2)



(3)



(4)

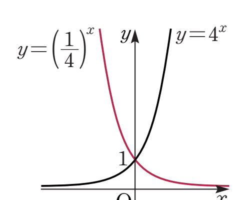


04 답 풀이 참조

풀이 (1) $y=\left(\dfrac{1}{4}\right)^x=4^{-x}$이므로

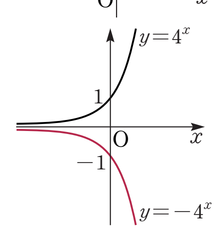
함수 $y=\left(\dfrac{1}{4}\right)^x$의 그래프는

함수 $y=4^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이다.

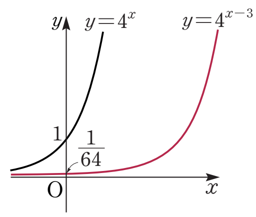


(2) $y=-4^x$에서 $-y=4^x$이므로

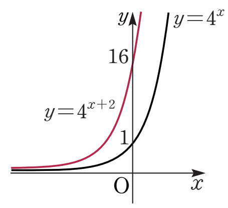
함수 $y=-4^x$의 그래프는 함수 $y=4^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.



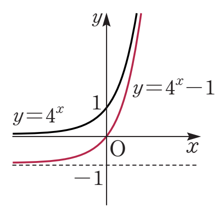
(3) 함수 $y=4^{x-3}$의 그래프는 함수 $y=4^x$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.



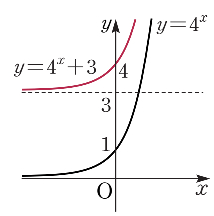
(4) 함수 $y=4^{x+2}$의 그래프는 함수 $y=4^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.



(5) $y=4^x-1$에서 $y+1=4^x$이므로 함수 $y=4^x-1$의 그래프는 함수 $y=4^x$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

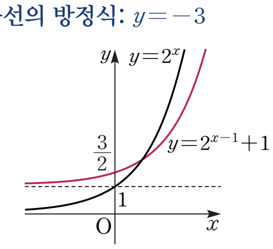


(6) $y=4^x+3$에서 $y-3=4^x$이므로 함수 $y=4^x+3$의 그래프는 함수 $y=4^x$의 그래프를 y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.



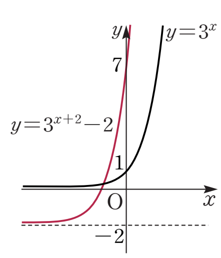
05 답 (1) 그래프는 풀이 참조,
치역: $\{y|y>1\}$, 점근선의 방정식: $y=1$
(2) 그래프는 풀이 참조,
치역: $\{y|y>-2\}$, 점근선의 방정식: $y=-2$
(3) 그래프는 풀이 참조,
치역: $\{y|y>2\}$, 점근선의 방정식: $y=2$
(4) 그래프는 풀이 참조,
치역: $\{y|y>-1\}$, 점근선의 방정식: $y=-1$
(5) 그래프는 풀이 참조,
치역: $\{y|y>-3\}$, 점근선의 방정식: $y=-3$

풀이 (1) 함수 $y=2^{x-1}+1$의 그래프는 함수 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



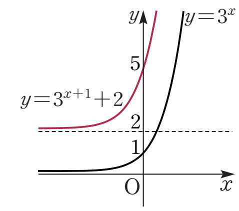
따라서 치역은 $\{y|y>1\}$이고, 점근선의 방정식은 $y=1$이다.

(2) 함수 $y=3^{x+2}-2$의 그래프는 함수 $y=3^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



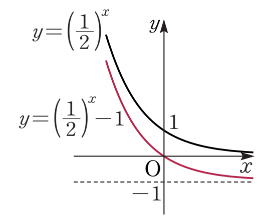
따라서 치역은 $\{y|y>-2\}$이고, 점근선의 방정식은 $y=-2$이다.

(3) 함수 $y=3^{x+1}+2$의 그래프는 함수 $y=3^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



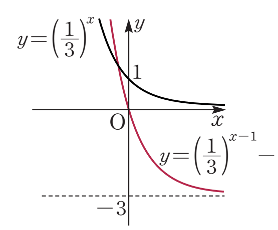
따라서 치역은 $\{y|y>2\}$이고, 점근선의 방정식은 $y=2$이다.

(4) 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x-1$의 그래프는 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 치역은 $\{y|y>-1\}$이고, 점근선의 방정식은 $y=-1$이다.

(5) 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}-3$의 그래프는 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 치역은 $\{y|y>-3\}$이고, 점근선의 방정식은 $y=-3$이다.

06 답 $y=-2^{x+2}-1$

풀이 함수 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-1=2^{x+2}$ $\therefore y=2^{x+2}+1$

함수 $y=2^{x+2}+1$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $-y=2^{x+2}+1$

$\therefore y=-2^{x+2}-1$

07 답 $y=-3^{x-1}-1$

풀이 함수 $y=3^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-1=3^{x-1}$ $\therefore y=3^{x-1}+1$

함수 $y=3^{x-1}+1$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $-y=3^{x-1}+1$

$\therefore y=-3^{x-1}-1$

08 답 $y=4^{x+1}-2$

풀이 어떤 함수의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식이 $y=4^x$이므로 함수 $y=4^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면 원래 함수의 그래프와 일치한다.

따라서 원래 함수의 식은 $y+2=4^{x+1}$

$\therefore y=4^{x+1}-2$

09 답 ㄱ, ㄷ

풀이 ㄱ. a의 값에 관계없이 항상 점 $(1,\ a)$를 지난다. (거짓)

ㄴ. 점근선의 방정식은 $y=0$, 즉 x축이다. (참)

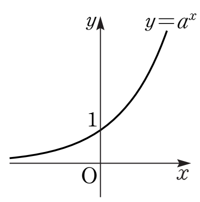
ㄷ. 치역이 양의 실수 전체의 집합이므로 제3사분면과 제4사분면을 지나지 않는다. (거짓)

따라서 옳지 않은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

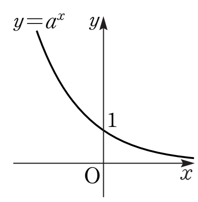
10 답 ㄴ, ㄷ

풀이 $y=a^x$의 그래프를 그려 보면

(i) $a>1$일 때



(ii) $0<a<1$일 때



ㄱ. $0<a<1$인 경우에는 $x>0$일 때 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다. (거짓)

ㄴ. 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 양의 실수 전체의 집합이다. (참)

ㄷ. 제1사분면과 제2사분면을 지난다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

11 답 (1) $\frac{1}{8}<\sqrt[4]{32}<4^{\frac{3}{2}}$ (2) $\sqrt[3]{4}<8^7<4^{11}$

(3) $4^{0.5}<\sqrt[3]{16}<\sqrt{8}$ (4) $\sqrt[3]{0.01}<\sqrt[5]{0.001}<\sqrt{0.1}$

(5) $\sqrt{\frac{1}{8}}<\sqrt[3]{\frac{1}{16}}<\sqrt[6]{\frac{1}{32}}$ (6) $\sqrt[3]{\frac{1}{9}}<\sqrt[4]{27}<\sqrt[5]{81}$

풀이 (1) $\frac{1}{8}$, $4^{\frac{3}{2}}$, $\sqrt[4]{32}$를 밑이 2인 거듭제곱 꼴로 나타내면

$\frac{1}{8}=2^{-3}$, $4^{\frac{3}{2}}=(2^2)^{\frac{3}{2}}=2^3$, $\sqrt[4]{32}=\sqrt[4]{2^5}=2^{\frac{5}{4}}$

$-3<\frac{5}{4}<3$이고, 함수 $y=2^x$은 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하므로

$2^{-3}<2^{\frac{5}{4}}<2^3$ $\quad\therefore\ \frac{1}{8}<\sqrt[4]{32}<4^{\frac{3}{2}}$

(2) 4^{11}, 8^7, $\sqrt[3]{4}$를 밑이 2인 거듭제곱 꼴로 나타내면

$4^{11}=(2^2)^{11}=2^{22}$, $8^7=(2^3)^7=2^{21}$, $\sqrt[3]{4}=(2^2)^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{2}{3}}$

$\frac{2}{3}<21<22$이고, 함수 $y=2^x$은 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하므로

$2^{\frac{2}{3}}<2^{21}<2^{22}$ $\quad\therefore\ \sqrt[3]{4}<8^7<4^{11}$

(3) $\sqrt{8}$, $\sqrt[3]{16}$, $4^{0.5}$을 밑이 2인 거듭제곱 꼴로 나타내면

$\sqrt{8}=(2^3)^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{3}{2}}$, $\sqrt[3]{16}=(2^4)^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{4}{3}}$, $4^{0.5}=(2^2)^{\frac{1}{2}}=2$

$1<\frac{4}{3}<\frac{3}{2}$이고, 함수 $y=2^x$은 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하므로

$2<2^{\frac{4}{3}}<2^{\frac{3}{2}}$ $\quad\therefore\ 4^{0.5}<\sqrt[3]{16}<\sqrt{8}$

(4) $\sqrt{0.1}$, $\sqrt[3]{0.01}$, $\sqrt[5]{0.001}$을 밑이 $\frac{1}{10}$인 거듭제곱 꼴로 나타내면

$\sqrt{0.1}=\left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{1}{2}}$,

$\sqrt[3]{0.01}=\left(\frac{1}{100}\right)^{\frac{1}{3}}=\left\{\left(\frac{1}{10}\right)^2\right\}^{\frac{1}{3}}=\left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{2}{3}}$,

$\sqrt[5]{0.001}=\left(\frac{1}{1000}\right)^{\frac{1}{5}}=\left\{\left(\frac{1}{10}\right)^3\right\}^{\frac{1}{5}}=\left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{3}{5}}$

$\frac{1}{2}<\frac{3}{5}<\frac{2}{3}$이고, 함수 $y=\left(\frac{1}{10}\right)^x$은 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소하므로

$\left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{2}{3}}<\left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{3}{5}}<\left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{1}{2}}$

$\therefore\ \sqrt[3]{0.01}<\sqrt[5]{0.001}<\sqrt{0.1}$

(5) $\sqrt{\frac{1}{8}}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{16}}$, $\sqrt[6]{\frac{1}{32}}$을 밑이 $\frac{1}{2}$인 거듭제곱 꼴로 나타내면

$\sqrt{\frac{1}{8}}=\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{2}}=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^3\right\}^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$,

$\sqrt[3]{\frac{1}{16}}=\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{3}}=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^4\right\}^{\frac{1}{3}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{3}}$,

$\sqrt[6]{\frac{1}{32}}=\left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{6}}=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^5\right\}^{\frac{1}{6}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{6}}$

$\frac{5}{6}<\frac{4}{3}<\frac{3}{2}$이고, 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$은 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소하므로

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{3}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{6}}$

$\therefore\ \sqrt{\frac{1}{8}}<\sqrt[3]{\frac{1}{16}}<\sqrt[6]{\frac{1}{32}}$

(6) $\sqrt[4]{27}$, $\sqrt[5]{81}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$을 밑이 3인 거듭제곱 꼴로 나타내면

$\sqrt[4]{27}=(27)^{\frac{1}{4}}=(3^3)^{\frac{1}{4}}=3^{\frac{3}{4}}$,

$\sqrt[5]{81}=(81)^{\frac{1}{5}}=(3^4)^{\frac{1}{5}}=3^{\frac{4}{5}}$,

$\sqrt[3]{\frac{1}{9}}=\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{3}}=(3^{-2})^{\frac{1}{3}}=3^{-\frac{2}{3}}$

$-\frac{2}{3}<\frac{3}{4}<\frac{4}{5}$이고, 함수 $y=3^x$은 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하므로

$3^{-\frac{2}{3}}<3^{\frac{3}{4}}<3^{\frac{4}{5}}$

$\therefore\ \sqrt[3]{\frac{1}{9}}<\sqrt[4]{27}<\sqrt[5]{81}$

12 답 (1) 최댓값: 5, 최솟값: -2

(2) 최댓값: 6, 최솟값: $\frac{5}{2}$

(3) 최댓값: 79, 최솟값: $-\frac{5}{3}$

풀이 (1) $y=2^{x+1}-3$에서 밑이 2이고 $2>1$이므로

$-1\le x\le 2$에서 함수 $y=2^{x+1}-3$은

$x=2$일 때 최대이고, 최댓값은 $2^{2+1}-3=5$

$x=-1$일 때 최소이고, 최솟값은 $2^{-1+1}-3=-2$

(2) $y=2^{x-2}+2$에서 밑이 2이고 $2>1$이므로

$1\le x\le 4$에서 함수 $y=2^{x-2}+2$는

$x=4$일 때 최대이고, 최댓값은 $2^{4-2}+2=6$

$x=1$일 때 최소이고, 최솟값은 $2^{1-2}+2=\frac{5}{2}$

(3) $y=3^{x+1}-2$에서 밑이 3이고 $3>1$이므로
$-2\le x\le 3$에서 함수 $y=3^{x+1}-2$는
$x=3$일 때 최대이고, 최댓값은 $3^{3+1}-2=79$
$x=-2$일 때 최소이고, 최솟값은 $3^{-2+1}-2=-\frac{5}{3}$

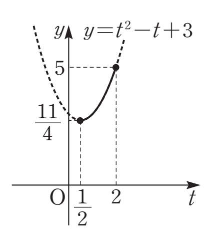
13 답 (1) 최댓값: $-\frac{1}{2}$, 최솟값: $-\frac{31}{32}$
(2) 최댓값: -3, 최솟값: $-\frac{96}{25}$

풀이 (1) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}-1$에서 밑이 $\frac{1}{2}$이고 $0<\frac{1}{2}<1$이므로
$-1\le x\le 3$에서 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}-1$은
$x=-1$일 때 최대이고, 최댓값은 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1+2}-1=-\frac{1}{2}$
$x=3$일 때 최소이고, 최솟값은 $\left(\frac{1}{2}\right)^{3+2}-1=-\frac{31}{32}$

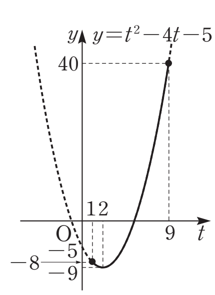
(2) $y=5^{-x}\times 2^{x}-4$에서 $y=\left(\frac{2}{5}\right)^{x}-4$
이때 밑이 $\frac{2}{5}$이고 $0<\frac{2}{5}<1$이므로
$0\le x\le 2$에서 함수 $y=5^{-x}\times 2^{x}-4$는
$x=0$일 때 최대이고, 최댓값은 $\left(\frac{2}{5}\right)^{0}-4=-3$
$x=2$일 때 최소이고, 최솟값은 $\left(\frac{2}{5}\right)^{2}-4=-\frac{96}{25}$

14 답 (1) 최댓값: 5, 최솟값: $\frac{11}{4}$
(2) 최댓값: 40, 최솟값: -9
(3) 최댓값: -5, 최솟값: -21
(4) 최댓값: 13, 최솟값: 2

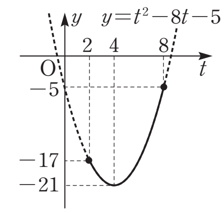
풀이 (1) $y=4^{x}-2^{x}+3=(2^{x})^{2}-2^{x}+3$이므로
$2^{x}=t\ (t>0)$로 놓으면
$y=t^{2}-t+3=\left(t-\frac{1}{2}\right)^{2}+\frac{11}{4}$
이때 $-1\le x\le 1$에서 $2^{-1}\le 2^{x}\le 2$ $\quad\therefore \frac{1}{2}\le t\le 2$
따라서 $\frac{1}{2}\le t\le 2$에서 함수 $y=\left(t-\frac{1}{2}\right)^{2}+\frac{11}{4}$은
$t=2$일 때 최대이고, 최댓값은
$\left(2-\frac{1}{2}\right)^{2}+\frac{11}{4}=5$
$t=\frac{1}{2}$일 때 최소이고, 최솟값은
$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^{2}+\frac{11}{4}=\frac{11}{4}$



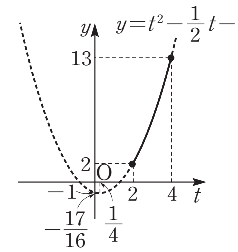
(2) $y=9^{x}-4\times 3^{x}-5$
$=(3^{x})^{2}-4\times 3^{x}-5$
이므로 $3^{x}=t\ (t>0)$로 놓으면
$y=t^{2}-4t-5$
$=(t-2)^{2}-9$
이때 $0\le x\le 2$에서
$3^{0}\le 3^{x}\le 3^{2}$ $\quad\therefore 1\le t\le 9$
따라서 $1\le t\le 9$에서 함수 $y=(t-2)^{2}-9$는
$t=9$일 때 최대이고, 최댓값은 $(9-2)^{2}-9=40$
$t=2$일 때 최소이고, 최솟값은 $(2-2)^{2}-9=-9$



(3) $y=4^{x}-2^{x+3}-5$
$=(2^{x})^{2}-8\times 2^{x}-5$
이므로 $2^{x}=t\ (t>0)$로 놓으면
$y=t^{2}-8t-5$
$=(t-4)^{2}-21$
이때 $1\le x\le 3$에서
$2\le 2^{x}\le 2^{3}$ $\quad\therefore 2\le t\le 8$
따라서 $2\le t\le 8$에서 함수 $y=(t-4)^{2}-21$은
$t=8$일 때 최대이고, 최댓값은 $(8-4)^{2}-21=-5$
$t=4$일 때 최소이고, 최솟값은 $(4-4)^{2}-21=-21$



(4) $y=4^{-x}-\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}-1$
$=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\right\}^{2}-\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{x}-1$
이므로 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=t\ (t>0)$로 놓으면
$y=t^{2}-\frac{1}{2}t-1$
$=\left(t-\frac{1}{4}\right)^{2}-\frac{17}{16}$
이때 $-2\le x\le -1$에서
$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ $\quad\therefore 2\le t\le 4$
따라서 $2\le t\le 4$에서 함수 $y=\left(t-\frac{1}{4}\right)^{2}-\frac{17}{16}$은
$t=4$일 때 최대이고, 최댓값은 $\left(4-\frac{1}{4}\right)^{2}-\frac{17}{16}=13$
$t=2$일 때 최소이고, 최솟값은 $\left(2-\frac{1}{4}\right)^{2}-\frac{17}{16}=2$



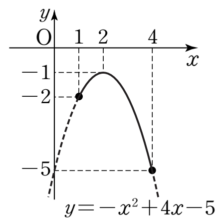
15 답 (1) 최댓값: 없다., 최솟값: $\frac{1}{9}$
(2) 최댓값: 4, 최솟값: 없다.
(3) 최댓값: 32, 최솟값: 2

풀이 (1) 함수 $y=3^{x^{2}-2x-1}$에서 밑이 3이고 $3>1$이므로
$x^{2}-2x-1$이 최대일 때 y도 최대, $x^{2}-2x-1$이 최소일 때 y도 최소가 된다.
$x^{2}-2x-1=(x-1)^{2}-2$이므로 $x^{2}-2x-1$의 최댓값은 없고, $x=1$일 때 최솟값은 -2이다.
따라서 함수 $y=3^{x^{2}-2x-1}$의 최댓값은 없고, 최솟값은 $3^{-2}=\frac{1}{9}$이다.

(2) 함수 $y=2^{-x^{2}+2x+1}$에서 밑이 2이고 $2>1$이므로
$-x^{2}+2x+1$이 최대일 때 y도 최대, $-x^{2}+2x+1$이 최소일 때 y도 최소가 된다.
$-x^{2}+2x+1=-(x-1)^{2}+2$이므로 $-x^{2}+2x+1$의 최솟값은 없고, $x=1$일 때 최댓값은 2이다.
따라서 함수 $y=2^{-x^{2}+2x+1}$의 최댓값은 $2^{2}=4$이고, 최솟값은 없다.

(3) 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^{2}+4x-5}$에서 밑이 $\frac{1}{2}$이고 $0<\frac{1}{2}<1$이므로
$-x^{2}+4x-5$가 최대일 때 y는 최소, $-x^{2}+4x-5$가 최소일 때 y는 최대가 된다.

$-x^2+4x-5=-(x-2)^2-1$
이므로 $1 \le x \le 4$에서
$x=2$일 때 최댓값은
$-(2-2)^2-1=-1$,
$x=4$일 때 최솟값은
$-(4-2)^2-1=-5$이다.



따라서 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+4x-5}$의 최댓값은 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}=32$,
최솟값은 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2$이다.

16 답 (1) 4 (2) 32 (3) 16 (4) 18 (5) 54

풀이 (1) $2^x>0$, $2^y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$2^x+2^y \ge 2\sqrt{2^x \times 2^y}=2\sqrt{2^{x+y}}=2\sqrt{2^2}=4$
(단, 등호는 $2^x=2^y$, 즉 $x=y$일 때 성립한다.)
따라서 2^x+2^y의 최솟값은 4이다.

(2) $2^x>0$, $4^y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$2^x+4^y \ge 2\sqrt{2^x \times 4^y}=2\sqrt{2^x \times 2^{2y}}=2\sqrt{2^{x+2y}}$
$=2\sqrt{2^8}=32$
(단, 등호는 $2^x=4^y$, 즉 $x=2y$일 때 성립한다.)
따라서 2^x+4^y의 최솟값은 32이다.

(3) $8^x>0$, $2^y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$8^x+2^y \ge 2\sqrt{8^x \times 2^y}=2\sqrt{2^{3x} \times 2^y}=2\sqrt{2^{3x+y}}$
$=2\sqrt{2^6}=16$
(단, 등호는 $8^x=2^y$, 즉 $3x=y$일 때 성립한다.)
따라서 8^x+2^y의 최솟값은 16이다.

(4) $3^x>0$, $81^y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$3^x+81^y \ge 2\sqrt{3^x \times 81^y}=2\sqrt{3^x \times 3^{4y}}=2\sqrt{3^{x+4y}}$
$=2\sqrt{3^4}=18$
(단, 등호는 $3^x=81^y$, 즉 $x=4y$일 때 성립한다.)
따라서 3^x+81^y의 최솟값은 18이다.

(5) $9^x>0$, $3^y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$9^x+3^y \ge 2\sqrt{9^x \times 3^y}=2\sqrt{3^{2x} \times 3^y}=2\sqrt{3^{2x+y}}$
$=2\sqrt{3^6}=54$
(단, 등호는 $9^x=3^y$, 즉 $2x=y$일 때 성립한다.)
따라서 9^x+3^y의 최솟값은 54이다.

17 답 (1) 8 (2) 6 (3) 250

풀이 (1) $2^{2+x}>0$, $2^{2-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$2^{2+x}+2^{2-x} \ge 2\sqrt{2^{2+x} \times 2^{2-x}}=2\sqrt{2^4}=8$
(단, 등호는 $2^{2+x}=2^{2-x}$, 즉 $x=0$일 때 성립한다.)
따라서 함수 $y=2^{2+x}+2^{2-x}$의 최솟값은 8이다.

(2) $3^{1+x}>0$, $3^{1-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$3^{1+x}+3^{1-x} \ge 2\sqrt{3^{1+x} \times 3^{1-x}}=2\sqrt{3^2}=6$
(단, 등호는 $3^{1+x}=3^{1-x}$, 즉 $x=0$일 때 성립한다.)
따라서 함수 $y=3^{1+x}+3^{1-x}$의 최솟값은 6이다.

(3) $5^{3+x}>0$, $5^{3-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$5^{3+x}+5^{3-x} \ge 2\sqrt{5^{3+x} \times 5^{3-x}}=2\sqrt{5^6}=250$
(단, 등호는 $5^{3+x}=5^{3-x}$, 즉 $x=0$일 때 성립한다.)
따라서 함수 $y=5^{3+x}+5^{3-x}$의 최솟값은 250이다.

18 답 (1) 3 (2) 4

풀이 (1) $3^{a+x}>0$, $3^{a-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$3^{a+x}+3^{a-x} \ge 2\sqrt{3^{a+x} \times 3^{a-x}}=2\sqrt{3^{2a}}$
(단, 등호는 $3^{a+x}=3^{a-x}$, 즉 $x=0$일 때 성립한다.)
따라서 $2\sqrt{3^{2a}}=54$이므로 $\sqrt{3^{2a}}=27$, $3^{2a}=27^2$
$3^{2a}=3^6$, $2a=6$ $\quad \therefore a=3$

(2) $2^{a+x}>0$, $2^{a-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$2^{a+x}+2^{a-x} \ge 2\sqrt{2^{a+x} \times 2^{a-x}}=2\sqrt{2^{2a}}$
(단, 등호는 $2^{a+x}=2^{a-x}$, 즉 $x=0$일 때 성립한다.)
따라서 $2\sqrt{2^{2a}}=32$이므로 $\sqrt{2^{2a}}=16$, $2^{2a}=16^2$
$2^{2a}=2^8$, $2a=8$ $\quad \therefore a=4$

19 답 (1) $x=-5$ (2) $x=3$ (3) $x=4$
(4) $x=-2$ (5) $x=-\frac{5}{4}$ (6) $x=0$ 또는 $x=5$

풀이 (1) $2^{x+1}=\frac{1}{16}$에서 밑을 2로 통일하면
$2^{x+1}=2^{-4}$이므로
$x+1=-4$ $\quad \therefore x=-5$

(2) $2^{5-x}=4^{x-2}$에서 밑을 2로 통일하면
$2^{5-x}=2^{2(x-2)}$이므로
$5-x=2x-4$, $-3x=-9$ $\quad \therefore x=3$

(3) $\frac{4^x}{2}=2^{x+3}$에서 밑을 2로 통일하면
$2^{2x} \times 2^{-1}=2^{x+3}$, 즉 $2^{2x-1}=2^{x+3}$이므로
$2x-1=x+3$ $\quad \therefore x=4$

(4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x+2}=3^{2x}$에서 밑을 3으로 통일하면
$(3^{-1})^{-x+2}=3^{2x}$, 즉 $3^{x-2}=3^{2x}$이므로
$x-2=2x$ $\quad \therefore x=-2$

(5) $2^{2x}=\frac{1}{4\sqrt{2}}$에서 밑을 2로 통일하면
$2^{2x}=\frac{1}{2^{\frac{5}{2}}}$, 즉 $2^{2x}=2^{-\frac{5}{2}}$이므로
$2x=-\frac{5}{2}$ $\quad \therefore x=-\frac{5}{4}$

(6) $25^x=5^{x^2-3x}$에서 밑을 5로 통일하면
$5^{2x}=5^{x^2-3x}$이므로
$2x=x^2-3x$, $x^2-5x=0$
$x(x-5)=0$ $\quad \therefore x=0$ 또는 $x=5$

20 답 (1) $x=1$ 또는 $x=10$ (2) $x=1$ 또는 $x=2$
(3) $x=1$ 또는 $x=5$ (4) $x=1$ 또는 $x=2$
(5) $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$ (6) $x=2$ 또는 $x=3$
(7) $x=0$ 또는 $x=4$ (8) $x=0$ 또는 $x=6$
(9) $x=3$ 또는 $x=5$ (10) $x=5$ 또는 $x=30$

풀이 (1) $x^{x-5}=x^{15-x}$에서 $x-5=15-x$, $2x=20$
$\therefore x=\underline{10}$
또, $x=1$이면 주어진 방정식은 $1^{-4}=1^{14}=1$로 등식이 성립한다.
$\therefore x=1$ 또는 $x=\underline{10}$

(2) $x^{2x+3}=x^{9-x}$에서 $2x+3=9-x$
$3x=6 \quad \therefore x=2$
또, $x=1$이면 주어진 방정식은
$1^5=1^8=1$로 등식이 성립한다.
$\therefore x=1$ 또는 $x=2$

(3) $x^{3x-2}=x^{23-2x}$에서 $3x-2=23-2x$
$5x=25 \quad \therefore x=5$
또, $x=1$이면 주어진 방정식은
$1^1=1^{21}=1$로 등식이 성립한다.
$\therefore x=1$ 또는 $x=5$

(4) $(x^x)^x=x^{2x}$에서 $x^{x^2}=x^{2x}$
$x^2=2x$에서 $x^2-2x=0$, $x(x-2)=0$
$\therefore x=0$ 또는 $x=2$
그런데 $x>0$이므로 $x=2$
또, $x=1$이면 주어진 방정식은
$(1^1)^1=1^2=1$로 등식이 성립한다.
$\therefore x=1$ 또는 $x=2$

(5) $x^{x^2}=x^{5x-6}$에서 $x^2=5x-6$
$x^2-5x+6=0$, $(x-2)(x-3)=0$
$\therefore x=2$ 또는 $x=3$
또, $x=1$이면 주어진 방정식은
$1^1=1^{-1}=1$로 등식이 성립한다.
$\therefore x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

(6) $(x-1)^{2x+3}=(x-1)^{x^2}$에서 $2x+3=x^2$
$x^2-2x-3=0$, $(x+1)(x-3)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$
그런데 $x>1$이므로 $x=3$
또, $x-1=1$, 즉 $x=2$이면 주어진 방정식은
$1^7=1^4=1$로 등식이 성립한다.
$\therefore x=2$ 또는 $x=3$

(7) $(x+4)^x=8^x$에서 $x+4=8 \quad \therefore x=\underline{4}$
또, $x=0$이면 주어진 방정식은 $4^0=8^0=1$로 등식이 성립한다.
$\therefore x=0$ 또는 $x=\underline{4}$

(8) $(x+1)^x=7^x$에서 $x+1=7 \quad \therefore x=6$
또, $x=0$이면 주어진 방정식은 $1^0=7^0=1$로 등식이 성립한다.
$\therefore x=0$ 또는 $x=6$

(9) $(x-2)^{x-3}=3^{x-3}$에서 $x-2=3 \quad \therefore x=5$
또, $x-3=0$, 즉 $x=3$이면 주어진 방정식은
$1^0=3^0=1$로 등식이 성립한다.
$\therefore x=3$ 또는 $x=5$

(10) $(x-3)^{x-5}=27^{x-5}$에서 $x-3=27 \quad \therefore x=30$
또, $x-5=0$, 즉 $x=5$이면 주어진 방정식은
$2^0=27^0=1$로 등식이 성립한다.
$\therefore x=5$ 또는 $x=30$

21 답 (1) $x=0$ 또는 $x=1$ (2) $x=1$ 또는 $x=2$
(3) $x=2$ (4) $x=3$ (5) $x=2$
(6) $x=2$ (7) $x=1$ (8) $x=-3$ 또는 $x=-1$
(9) $x=2$ 또는 $x=3$ (10) $x=0$

풀이 (1) $4^x-3\times2^x+2=0$에서 $(2^x)^2-3\times2^x+2=0$
$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2-3t+2=0$
$(t-1)(t-2)=0 \quad \therefore t=1$ 또는 $t=2$
따라서 $2^x=1$에서 $x=0$, $2^x=\underline{2}$에서 $x=\underline{1}$

(2) $4^x-6\times2^x+8=0$에서 $(2^x)^2-6\times2^x+8=0$
$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2-6t+8=0$
$(t-2)(t-4)=0 \quad \therefore t=2$ 또는 $t=4$
따라서 $2^x=2$에서 $x=1$, $2^x=4$에서 $x=2$

(3) $9^x-3^{x+1}=54$에서 $(3^x)^2-3\times3^x-54=0$
$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2-3t-54=0$
$(t+6)(t-9)=0 \quad \therefore t=-6$ 또는 $t=9$
그런데 $t>0$이므로 $t=9$
따라서 $3^x=9$에서 $x=2$

(4) $4^x-3\times2^{x+1}-16=0$에서 $(2^x)^2-6\times2^x-16=0$
$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2-6t-16=0$
$(t+2)(t-8)=0 \quad \therefore t=-2$ 또는 $t=8$
그런데 $t>0$이므로 $t=8$
따라서 $2^x=8$에서 $x=3$

(5) $4^x-2^{x+3}+16=0$에서 $(2^x)^2-8\times2^x+16=0$
$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2-8t+16=0$
$(t-4)^2=0 \quad \therefore t=4$
따라서 $2^x=4$에서 $x=2$

(6) $3^{2x}-2\times3^{x+1}-27=0$에서 $(3^x)^2-6\times3^x-27=0$
$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2-6t-27=0$
$(t+3)(t-9)=0 \quad \therefore t=-3$ 또는 $t=9$
그런데 $t>0$이므로 $t=9$
따라서 $3^x=9$에서 $x=2$

(7) $25^x-3\times5^x-10=0$에서 $(5^x)^2-3\times5^x-10=0$
$5^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2-3t-10=0$
$(t+2)(t-5)=0 \quad \therefore t=-2$ 또는 $t=5$
그런데 $t>0$이므로 $t=5$
따라서 $5^x=5$에서 $x=1$

(8) $4^{-x}-5\times2^{-x+1}+16=0$에서
$$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2-10\times\left(\frac{1}{2}\right)^x+16=0$$
$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2-10t+16=0$

$(t-2)(t-8)=0 \qquad \therefore t=2$ 또는 $t=8$

따라서 $\left(\frac{1}{2}\right)^x=2$에서 $x=-1$, $\left(\frac{1}{2}\right)^x=8$에서 $x=-3$

(9) $2^x+32\times2^{-x}=12$에서

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $2^{-x}=\frac{1}{t}$

따라서 주어진 방정식은 $t+32\times\frac{1}{t}-12=0$

$t^2-12t+32=0$, $(t-4)(t-8)=0$

$\therefore t=4$ 또는 $t=8$

따라서 $2^x=4$에서 $x=2$, $2^x=8$에서 $x=3$

(10) $2^{3x+2}+5\times4^x-2^{x+2}-5=0$에서

$4\times(2^x)^3+5\times(2^x)^2-4\times2^x-5=0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$4t^3+5t^2-4t-5=0$

$(t-1)(4t^2+9t+5)=0$

$(t-1)(t+1)(4t+5)=0$

$\therefore t=-\frac{5}{4}$ 또는 $t=-1$ 또는 $t=1$

그런데 $t>0$이므로 $t=1$

따라서 $2^x=1$에서 $x=0$

22 답 (1) 1 (2) 1 (3) 9 (4) 25

풀이 (1) $9^x-2\times3^x+3=0$에서 $(3^x)^2-2\times3^x+3=0$

$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2-2t+3=0$ ······ ㉠

방정식 $9^x-2\times3^x+3=0$의 두 근이 α, β이므로

㉠의 두 근은 3^α, 3^β이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$3^\alpha\times3^\beta=3^{\alpha+\beta}=\underline{3} \qquad \therefore \alpha+\beta=\underline{1}$

(2) $16^x-5\times4^x+4=0$에서 $(4^x)^2-5\times4^x+4=0$

$4^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2-5t+4=0$ ······ ㉠

방정식 $16^x-5\times4^x+4=0$의 두 근이 α, β이므로

㉠의 두 근은 4^α, 4^β이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$4^\alpha\times4^\beta=4^{\alpha+\beta}=4 \qquad \therefore \alpha+\beta=1$

(3) $4^x-2^{x+2}+4=0$에서 $(2^x)^2-4\times2^x+4=0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2-4t+4=0$ ······ ㉠

방정식 $4^x-2^{x+2}+4=0$의 두 근이 α, β이므로

㉠의 두 근은 2^α, 2^β이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2^\alpha\times2^\beta=2^{\alpha+\beta}=4=2^2 \qquad \therefore \alpha+\beta=2$

$\therefore 3^{\alpha+\beta}=3^2=9$

(4) $4^x-7\times2^x+12=0$에서 $(2^x)^2-7\times2^x+12=0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2-7t+12=0$ ······ ㉠

방정식 $4^x-7\times2^x+12=0$의 두 근이 α, β이므로

㉠의 두 근은 2^α, 2^β이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2^\alpha+2^\beta=7$, $2^\alpha\times2^\beta=12$

$$\therefore 2^{2\alpha}+2^{2\beta}=(2^\alpha)^2+(2^\beta)^2=(2^\alpha+2^\beta)^2-2\times2^\alpha\times2^\beta$$
$$=7^2-2\times12=49-24=25$$

23 답 11시간 후

풀이 100마리의 박테리아가 6시간 후 6400마리가 되므로

$100a^6=6400$, $a^6=64$

$\therefore a=2$

따라서 1마리의 박테리아가 x시간 후 2^x마리가 되므로

100마리였던 박테리아가 204800마리가 되려면

$100\times2^x=204800$, $2^x=2048$

$\therefore x=\underline{11}$

즉, $\underline{11}$시간 후에 204800마리가 된다.

24 답 $\frac{25}{2}$ m

풀이 물속 어느 지점의 깊이를 d m라고 하면

표면의 밝기는 I, 물속 d m 지점의 밝기는 $\frac{1}{32}I$이므로

$\frac{1}{32}I=I\times4^{-0.2d}$, $\frac{1}{2^5}=(2^2)^{-0.2d}$

$2^{-5}=2^{-0.4d}$, $-5=-0.4d$

$\therefore d=\frac{25}{2}$

따라서 이 지점의 깊이는 $\frac{25}{2}$ m이다.

25 답 (1) $x>\frac{1}{2}$ (2) $x>-4$ (3) $x\le4$ (4) $x>\frac{5}{4}$ (5) $-3<x<4$ (6) $-5<x<4$

풀이 (1) $8^x>2^{x+1}$에서 $2^{3x}>2^{x+1}$

밑이 2이고 $2>1$이므로 $3x>x+1$

$\therefore x>\frac{1}{2}$

(2) $9^x>\left(\frac{1}{3}\right)^{4-x}$에서 $3^{2x}>3^{x-4}$

밑이 3이고 $3>1$이므로 $2x>x-4$

$\therefore x>-4$

(3) $\left(\frac{1}{2}\right)^x\le\left(\frac{1}{16}\right)^{x-3}$에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^x\le\left(\frac{1}{2}\right)^{4x-12}$

밑이 $\frac{1}{2}$이고 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 $x\ge4x-12$

$-3x\ge-12 \qquad \therefore x\le4$

(4) $0.2^{x+1}<0.008^{-x+2}$에서 $0.2^{x+1}<0.2^{-3x+6}$

밑이 0.2이고 $0<0.2<1$이므로 $x+1>-3x+6$

$4x>5 \qquad \therefore x>\frac{5}{4}$

(5) $\frac{1}{27}<3^x<81$에서 $3^{-3}<3^x<3^4$

밑이 3이고 $3>1$이므로 $-3<x<4$

(6) $\frac{1}{16}<\left(\frac{1}{2}\right)^x<32$에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^4<\left(\frac{1}{2}\right)^x<\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$

밑이 $\frac{1}{2}$이고 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 $-5<x<4$

다른 풀이 $\frac{1}{16}<\left(\frac{1}{2}\right)^x<32$에서 밑을 2로 통일하면

$2^{-4}<2^{-x}<2^5$

밑이 2이고 $2>1$이므로 $-4<-x<5$

각 변에 -1을 곱하면 $-5<x<4$

26 답 (1) $0<x\le1$ 또는 $x\ge3$ (2) $1<x<3$
(3) $1\le x\le2$ (4) $1<x<4$
(5) $0<x\le1$ 또는 $x\ge3$ (6) $0<x<1$ 또는 $x>3$
(7) $1\le x\le5$ (8) $x>1$
(9) $0\le x\le1$ (10) $1<x\le4$

풀이 (1) (i) $x>1$일 때, 부등호의 방향이 그대로이므로
$x-3\ge6-2x$, $3x\ge9$ $\therefore x\ge3$
그런데 $x>1$이므로 $x\ge3$
(ii) $0<x<1$일 때, 부등호의 방향이 바뀌므로
$x-3\le6-2x$, $3x\le9$ $\therefore x\le3$
그런데 $0<x<1$이므로 $0<x<1$
(iii) $x=1$일 때, (좌변)$=1^{-2}=1$, (우변)$=1^4=1$이므로
주어진 부등식은 성립한다.
(i), (ii), (iii)에서 $\underline{0<x\le1}$ 또는 $\underline{x\ge3}$

(2) (i) $x>1$일 때, 부등호의 방향이 그대로이므로
$3x-1<x+5$, $2x<6$ $\therefore x<3$
그런데 $x>1$이므로 $1<x<3$
(ii) $0<x<1$일 때, 부등호의 방향이 바뀌므로
$3x-1>x+5$, $2x>6$ $\therefore x>3$
그런데 $0<x<1$이므로 해가 없다.
(iii) $x=1$일 때, (좌변)$=1^2=1$, (우변)$=1^6=1$이므로
주어진 부등식이 성립하지 않는다.
(i), (ii), (iii)에서 $1<x<3$

(3) (i) $x>1$일 때, 부등호의 방향이 그대로이므로
$2x\le x+2$ $\therefore x\le2$
그런데 $x>1$이므로 $1<x\le2$
(ii) $0<x<1$일 때, 부등호의 방향이 바뀌므로
$2x\ge x+2$ $\therefore x\ge2$
그런데 $0<x<1$이므로 해가 없다.
(iii) $x=1$일 때, (좌변)$=1^2=1$, (우변)$=1^3=1$이므로
주어진 부등식은 성립한다.
(i), (ii), (iii)에서 $1\le x\le2$

(4) (i) $x>1$일 때, 부등호의 방향이 그대로이므로
$2x-1<x+3$ $\therefore x<4$
그런데 $x>1$이므로 $1<x<4$
(ii) $0<x<1$일 때, 부등호의 방향이 바뀌므로
$2x-1>x+3$ $\therefore x>4$
그런데 $0<x<1$이므로 해가 없다.
(iii) $x=1$일 때, (좌변)$=1^1=1$, (우변)$=1^4=1$이므로
주어진 부등식이 성립하지 않는다.
(i), (ii), (iii)에서 $1<x<4$

(5) (i) $x>1$일 때, 부등호의 방향이 그대로이므로
$x-1\ge-x+5$, $2x\ge6$ $\therefore x\ge3$
그런데 $x>1$이므로 $x\ge3$
(ii) $0<x<1$일 때, 부등호의 방향이 바뀌므로
$x-1\le-x+5$, $2x\le6$ $\therefore x\le3$
그런데 $0<x<1$이므로 $0<x<1$
(iii) $x=1$일 때, (좌변)$=1^0=1$, (우변)$=1^4=1$이므로
주어진 부등식은 성립한다.
(i), (ii), (iii)에서 $0<x\le1$ 또는 $x\ge3$

(6) (i) $x>1$일 때, 부등호의 방향이 그대로이므로
$x^2>2x+3$, $x^2-2x-3>0$
$(x+1)(x-3)>0$ $\therefore x<-1$ 또는 $x>3$
그런데 $x>1$이므로 $x>3$
(ii) $0<x<1$일 때, 부등호의 방향이 바뀌므로
$x^2<2x+3$, $x^2-2x-3<0$
$(x+1)(x-3)<0$ $\therefore -1<x<3$
그런데 $0<x<1$이므로 $0<x<1$
(iii) $x=1$일 때, (좌변)$=1^1=1$, (우변)$=1^5=1$이므로
주어진 부등식은 성립하지 않는다.
(i), (ii), (iii)에서 $0<x<1$ 또는 $x>3$

(7) (i) $x>1$일 때, 부등호의 방향이 그대로이므로
$x^2-2\le3x+8$, $x^2-3x-10\le0$
$(x+2)(x-5)\le0$ $\therefore -2\le x\le5$
그런데 $x>1$이므로 $1<x\le5$
(ii) $0<x<1$일 때, 부등호의 방향이 바뀌므로
$x^2-2\ge3x+8$, $x^2-3x-10\ge0$
$(x+2)(x-5)\ge0$ $\therefore x\le-2$ 또는 $x\ge5$
그런데 $0<x<1$이므로 해가 없다.
(iii) $x=1$일 때, (좌변)$=1^{-1}=1$, (우변)$=1^{11}=1$이므로
주어진 부등식은 성립한다.
(i), (ii), (iii)에서 $1\le x\le5$

(8) (i) $x>1$일 때, 부등호의 방향이 그대로이므로
$x(x+4)>-2(x+4)$, $x^2+4x>-2x-8$
$x^2+6x+8>0$, $(x+4)(x+2)>0$
$\therefore x<-4$ 또는 $x>-2$
그런데 $x>1$이므로 $x>1$
(ii) $0<x<1$일 때, 부등호의 방향이 바뀌므로
$x(x+4)<-2(x+4)$, $x^2+4x<-2x-8$
$x^2+6x+8<0$, $(x+4)(x+2)<0$
$\therefore -4<x<-2$
그런데 $0<x<1$이므로 해가 없다.
(iii) $x=1$일 때, (좌변)$=1^5=1$, (우변)$=1^{-10}=1$이므로
주어진 부등식은 성립하지 않는다.
(i), (ii), (iii)에서 $x>1$

(9) (i) $x+1>1$, 즉 $x>0$일 때, 부등호의 방향이 그대로
이므로
$2x+3\le6-x^2$, $x^2+2x-3\le0$
$(x+3)(x-1)\le0$ $\therefore -3\le x\le1$
그런데 $x>0$이므로 $0<x\le1$
(ii) $0<x+1<1$, 즉 $-1<x<0$일 때, 부등호의 방향이
바뀌므로
$2x+3\ge6-x^2$, $x^2+2x-3\ge0$
$(x+3)(x-1)\ge0$ $\therefore x\le-3$ 또는 $x\ge1$
그런데 $-1<x<0$이므로 해가 없다.
(iii) $x+1=1$, 즉 $x=0$일 때, (좌변)$=1^3=1$,

(우변)$=1^6=1$이므로 주어진 부등식은 성립한다.

(i), (ii), (iii)에서 $0\le x\le 1$

(10) (i) $x-1>1$, 즉 $x>2$일 때, 부등호의 방향이 그대로이므로 $x^2+8\le 6x$, $x^2-6x+8\le 0$

$(x-2)(x-4)\le 0$ $\quad\therefore 2\le x\le 4$

그런데 $x>2$이므로 $2<x\le 4$

(ii) $0<x-1<1$, 즉 $1<x<2$일 때, 부등호의 방향이 바뀌므로 $x^2+8\ge 6x$, $x^2-6x+8\ge 0$

$(x-2)(x-4)\ge 0$ $\quad\therefore x\le 2$ 또는 $x\ge 4$

그런데 $1<x<2$이므로 $1<x<2$

(iii) $x-1=1$, 즉 $x=2$일 때, (좌변)$=1^{12}=1$, (우변)$=1^{12}=1$이므로 주어진 부등식은 성립한다.

(i), (ii), (iii)에서 $1<x\le 4$

27 답 (1) $1\le x\le 2$ (2) $x\ge 1$ (3) $x\le 2$ (4) $x>1$ (5) $x\ge -1$ (6) $x\le -3$ (7) $x\le -2$ 또는 $x\ge -1$ (8) $x>1$ (9) $x<2$ (10) $x\le 1$

풀이 (1) $4^x-6\times 2^x+8\le 0$에서 $(2^x)^2-6\times 2^x+8\le 0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-6t+8\le 0$, $(t-2)(t-4)\le 0$

$\therefore 2\le t\le 4$

즉, $2\le 2^x\le 4$이므로 $2^1\le 2^x\le 2^2$

이때 밑이 2이고 $2>1$이므로 $\underline{1}\le x\le \underline{2}$

(2) $25^x-3\times 5^x-10\ge 0$에서 $(5^x)^2-3\times 5^x-10\ge 0$

$5^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-3t-10\ge 0$, $(t+2)(t-5)\ge 0$

$\therefore t\le -2$ 또는 $t\ge 5$

그런데 $t>0$이므로 $t\ge 5$

$\therefore 5^x\ge 5^1$

이때 밑이 5이고 $5>1$이므로 $x\ge 1$

(3) $16^x-15\times 4^x-16\le 0$에서 $(4^x)^2-15\times 4^x-16\le 0$

$4^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-15t-16\le 0$, $(t+1)(t-16)\le 0$

$\therefore -1\le t\le 16$

그런데 $t>0$이므로 $0<t\le 16$

즉, $0<4^x\le 16$이므로 $0<4^x\le 4^2$

이때 밑이 4이고 $4>1$이므로 $x\le 2$

(4) $9^x+3^{x+1}-18>0$에서 $(3^x)^2+3\times 3^x-18>0$

$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2+3t-18>0$, $(t+6)(t-3)>0$

$\therefore t<-6$ 또는 $t>3$

그런데 $t>0$이므로 $t>3$

$\therefore 3^x>3^1$

이때 밑이 3이고 $3>1$이므로 $x>1$

(5) $\left(\frac{1}{9}\right)^x-2\times\left(\frac{1}{3}\right)^x-3\le 0$에서 $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2-2\times\left(\frac{1}{3}\right)^x-3\le 0$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-2t-3\le 0$, $(t+1)(t-3)\le 0$

$\therefore -1\le t\le 3$

그런데 $t>0$이므로 $0<t\le 3$

즉, $0<\left(\frac{1}{3}\right)^x\le 3$이므로 $0<\left(\frac{1}{3}\right)^x\le\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

이때 밑이 $\frac{1}{3}$이고 $0<\frac{1}{3}<1$이므로 $x\ge -1$

(6) $\left(\frac{1}{4}\right)^x-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}-32\ge 0$에서

$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2-4\times\left(\frac{1}{2}\right)^x-32\ge 0$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-4t-32\ge 0$, $(t+4)(t-8)\ge 0$

$\therefore t\le -4$ 또는 $t\ge 8$

그런데 $t>0$이므로 $t\ge 8$

즉, $\left(\frac{1}{2}\right)^x\ge 8$이므로 $\left(\frac{1}{2}\right)^x\ge\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

이때 밑이 $\frac{1}{2}$이고 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 $x\le -3$

(7) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}-12\times\left(\frac{1}{3}\right)^x+27\ge 0$에서

$\left(\frac{1}{3}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-12t+27\ge 0$, $(t-3)(t-9)\ge 0$

$\therefore t\le 3$ 또는 $t\ge 9$

그런데 $t>0$이므로 $0<t\le 3$ 또는 $t\ge 9$

즉, $0<\left(\frac{1}{3}\right)^x\le 3$이므로 $0<\left(\frac{1}{3}\right)^x\le\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

이때 밑이 $\frac{1}{3}$이고 $0<\frac{1}{3}<1$이므로 $x\ge -1$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x\ge 9$이므로 $\left(\frac{1}{3}\right)^x\ge\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

이때 밑이 $\frac{1}{3}$이고 $0<\frac{1}{3}<1$이므로 $x\le -2$

$\therefore x\le -2$ 또는 $x\ge -1$

(8) $0.25^x+0.5^{x+1}-0.5<0$에서

$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^x-\frac{1}{2}<0$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2+\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}<0$, $2t^2+t-1<0$

$(t+1)(2t-1)<0$ $\quad\therefore -1<t<\frac{1}{2}$

그런데 $t>0$이므로 $0<t<\frac{1}{2}$

$\therefore 0<\left(\frac{1}{2}\right)^x<\left(\frac{1}{2}\right)^1$

이때 밑이 $\frac{1}{2}$이고 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 $x>1$

(9) $3^{2x}-1<9\times 3^x-3^{x-2}$에서

$(3^x)^2-1<9\times 3^x-\frac{1}{9}\times 3^x$, $(3^x)^2-\frac{80}{9}\times 3^x-1<0$

$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-\frac{80}{9}t-1<0$, $9t^2-80t-9<0$

$(9t+1)(t-9)<0$ $\quad\therefore -\frac{1}{9}<t<9$

그런데 $t>0$이므로 $0<t<9$

즉, $0<3^x<9$이므로 $0<3^x<3^2$

이때 밑이 3이고 $3>1$이므로 $x<2$

(10) $2^{2x}+2^{x-3}-2^{x+1}-2^{-2}\le 0$에서

$(2^x)^2+\frac{1}{8}\times 2^x-2\times 2^x-\frac{1}{4}\le 0$, $(2^x)^2-\frac{15}{8}\times 2^x-\frac{1}{4}\le 0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-\frac{15}{8}t-\frac{1}{4}\le 0$, $8t^2-15t-2\le 0$

$(8t+1)(t-2)\le 0 \qquad \therefore -\frac{1}{8}\le t\le 2$

그런데 $t>0$이므로 $0<t\le 2$

$\therefore 0<2^x\le 2^1$

이때 밑이 2이고 $2>1$이므로 $x\le 1$

28 답 (1) 0 (2) 4 (3) -1

풀이 (1) $f(1)=\log_2 1=0$

(2) $f(16)=\log_2 16=\log_2 2^4=4$

(3) $f\left(\frac{1}{2}\right)=\log_2 \frac{1}{2}=\log_2 2^{-1}=-1$

29 답 (1) 0 (2) -3 (3) 2

풀이 (1) $f(1)=\log_{\frac{1}{3}} 1=0$

(2) $f(27)=\log_{\frac{1}{3}} 27=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}=-3$

(3) $f\left(\frac{1}{9}\right)=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{9}=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^2=2$

30 답 (1) $y=\log_2(x-5)+3$ (2) $y=\log_4(x+3)-1$

(3) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$ (4) $y=3^{x-2}-3$

풀이 (1) $y=2^{x-3}+5$에서 x와 y를 서로 바꾸면

$x=2^{y-3}+5$, $2^{y-3}=x-5$

$y-3=\log_2(x-5) \qquad \therefore y=\log_2(x-5)+3$

(2) $y=4^{x+1}-3$에서 x와 y를 서로 바꾸면

$x=4^{y+1}-3$, $4^{y+1}=x+3$

$y+1=\log_4(x+3) \qquad \therefore y=\log_4(x+3)-1$

(3) $y=\log_{\frac{1}{3}} x+1$에서 x와 y를 서로 바꾸면

$x=\log_{\frac{1}{3}} y+1$, $\log_{\frac{1}{3}} y=x-1$

$\therefore y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$

(4) $y=\log_3(x+3)+2$에서 x와 y를 서로 바꾸면

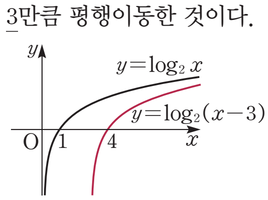
$x=\log_3(y+3)+2$, $\log_3(y+3)=x-2$

$y+3=3^{x-2} \qquad \therefore y=3^{x-2}-3$

31 답 풀이 참조

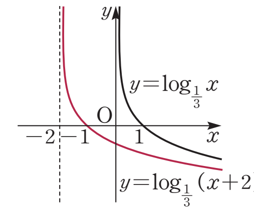
풀이 (1) 함수 $y=\log_2(x-3)$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수 $y=\log_2(x-3)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



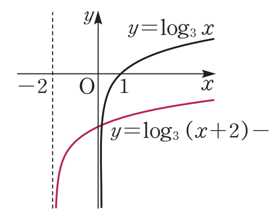
(2) 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+2)$의 그래프는 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+2)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(3) 함수 $y=\log_3(x+2)-3$의 그래프는 함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

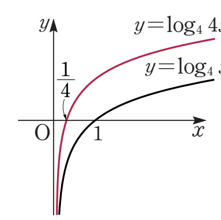
따라서 함수 $y=\log_3(x+2)-3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(4) $y=\log_4 4x=\log_4 4+\log_4 x=\log_4 x+1$

즉, 함수 $y=\log_4 4x$의 그래프는 함수 $y=\log_4 x$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

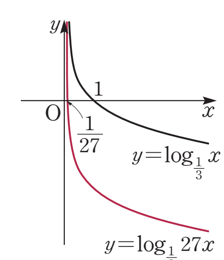
따라서 함수 $y=\log_4 4x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(5) $y=\log_{\frac{1}{3}} 27x=\log_{\frac{1}{3}} 27+\log_{\frac{1}{3}} x=\log_{\frac{1}{3}} x-3$

즉, 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}} 27x$의 그래프는 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$의 그래프를 y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

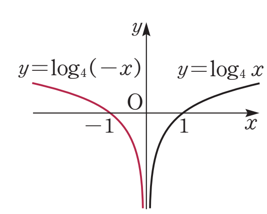
따라서 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}} 27x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



32 답 풀이 참조

풀이 (1) 함수 $y=\log_4(-x)$의 그래프는 함수 $y=\log_4 x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이다.

따라서 $y=\log_4(-x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

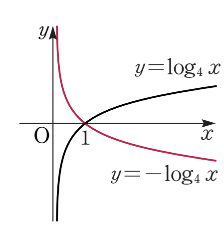


(2) $y=-\log_4 x$에서

$-y=\log_4 x$

즉, 함수 $y=-\log_4 x$의 그래프는 함수 $y=\log_4 x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

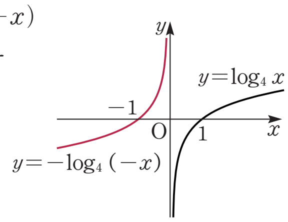
따라서 함수 $y=-\log_4 x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(3) $y=-\log_4(-x)$에서 $-y=\log_4(-x)$

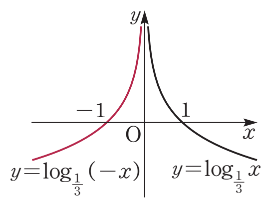
즉, 함수 $y=-\log_4(-x)$의 그래프는 함수 $y=\log_4 x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것이다.

따라서 함수 $y=-\log_4(-x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(4) 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}(-x)$의 그래프는 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이다.

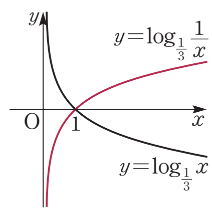
따라서 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}(-x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(5) $y=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{x}=\log_{\frac{1}{3}}x^{-1}=-\log_{\frac{1}{3}}x$에서 $-y=\log_{\frac{1}{3}}x$

즉, 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{x}$의 그래프는 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

따라서 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



33 답 (1) 그래프는 풀이 참조,

정의역: $\{x|x>-1\}$, 점근선의 방정식: $x=-1$

(2) 그래프는 풀이 참조,

정의역: $\{x|x>2\}$, 점근선의 방정식: $x=2$

(3) 그래프는 풀이 참조,

정의역: $\{x|x>-2\}$, 점근선의 방정식: $x=-2$

(4) 그래프는 풀이 참조,

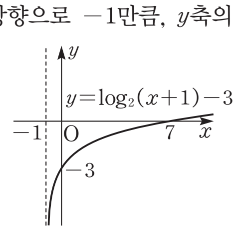
정의역: $\{x|x>-3\}$, 점근선의 방정식: $x=-3$

(5) 그래프는 풀이 참조,

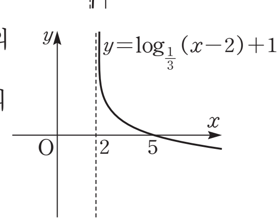
정의역: $\{x|x>4\}$, 점근선의 방정식: $x=4$

풀이 (1) 함수 $y=\log_2(x+1)-3$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 정의역은 $\{x|x>-1\}$이고, 점근선의 방정식은 $x=-1$이다.



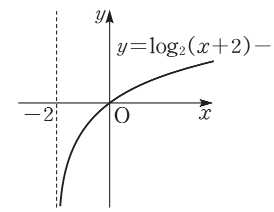
(2) 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x-2)+1$의 그래프는 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 정의역은 $\{x|x>2\}$이고, 점근선의 방정식은 $x=2$이다.

(3) 함수 $y=\log_2(x+2)-1$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 정의역은 $\{x|x>-2\}$이고, 점근선의 방정식은 $x=-2$이다.

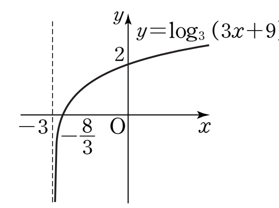


(4) $y=\log_3(3x+9)=\log_3 3(x+3)$

$=\log_3 3+\log_3(x+3)=\log_3(x+3)+1$

즉, 함수 $y=\log_3(3x+9)$의 그래프는 함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 정의역은 $\{x|x>-3\}$이고, 점근선의 방정식은 $x=-3$이다.

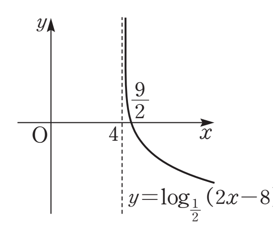


(5) $y=\log_{\frac{1}{2}}(2x-8)=\log_{\frac{1}{2}}2(x-4)$

$=\log_{\frac{1}{2}}2+\log_{\frac{1}{2}}(x-4)=\log_{\frac{1}{2}}(x-4)-1$

즉, 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(2x-8)$의 그래프는 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 정의역은 $\{x|x>4\}$이고, 점근선의 방정식은 $x=4$이다.



34 답 $y=-\log_2(x+1)+2$

풀이 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=\log_2 x \quad \therefore y=-\log_2 x$

함수 $y=-\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-2=-\log_2(x+1) \qquad \therefore y=-\log_2(x+1)+2$

35 답 $y=\log_{\frac{1}{3}}(-x+3)-1$

풀이 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $y=\log_{\frac{1}{3}}(-x)$

함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}(-x)$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y+1=\log_{\frac{1}{3}}\{-(x-3)\} \qquad \therefore y=\log_{\frac{1}{3}}(-x+3)-1$

36 답 $m=-2,\ n=3$

풀이 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-n=\log_2(x-m)$ $\quad\therefore y=\log_2(x-m)+n$ …… ㉠

한편,

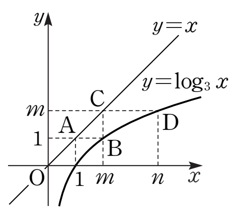
$y=\log_2(8x+16)=\log_2 8(x+2)$

$\quad=\log_2 8+\log_2(x+2)=\log_2(x+2)+3$ …… ㉡

㉠, ㉡이 같은 식이므로 $m=-2,\ n=3$

37 답 30

풀이 오른쪽 그림에서



점 A$(1,\ 1)$이므로 점 B의 좌표는 $(m,\ 1)$

점 B는 함수 $y=\log_3 x$의 그래프 위의 점이므로

$1=\log_3 m$ $\quad\therefore m=\underline{3}$

따라서 점 C$(3,\ 3)$이므로 점 D의 좌표는 $(n,\ 3)$

점 D는 함수 $y=\log_3 x$의 그래프 위의 점이므로

$3=\log_3 n$ $\quad\therefore n=\underline{27}$

$\therefore m+n=\underline{30}$

38 답 16

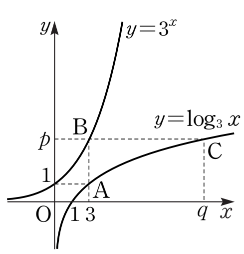
풀이 주어진 그래프에서 A$(0,\ \log_2 a)$, B$(0,\ \log_2 b)$이므로

$\overline{\text{AB}}=4$에서 $\log_2 b-\log_2 a=4$

$\log_2 \dfrac{b}{a}=4$ $\quad\therefore \dfrac{b}{a}=2^4=16$

39 답 24

풀이 오른쪽 그림에서 함수 $y=\log_3 x$의 그래프 위의 점 A의 y좌표가 1이므로



$\log_3 x=1$ $\quad\therefore x=3$

즉, 점 A$(3,\ 1)$이므로 점 B의 좌표는 $(3,\ p)$

점 B는 함수 $y=3^x$의 그래프 위의 점이므로 $p=3^3=27$

따라서 점 C$(q,\ 27)$이고 점 C는 함수 $y=\log_3 x$의 그래프 위의 점이므로

$27=\log_3 q$ $\quad\therefore q=3^{27}$

따라서 $\dfrac{q}{p}=\dfrac{3^{27}}{3^3}=3^{24}$이므로 $a=24$

40 답 (1) $\log_2 3<\log_2 5<3$

(2) $\log_{\frac{1}{3}} 2<\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1}{4}<2$

(3) $2<\log_3 10<4\log_3 2$

(4) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{10}<\log_{\frac{1}{2}} 3<1$

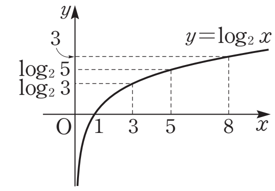
(5) $\log_4 16<2\log_2 3<4$

(6) $\log_3 \sqrt{5}<\log_3 4<2$

(7) $\log_2 \dfrac{1}{3}<\log_2 3<\log_4 10$

(8) $1<\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1}{4}<\log_3 5$

풀이 (1) $3=\log_2 2^3=\log_2 8$

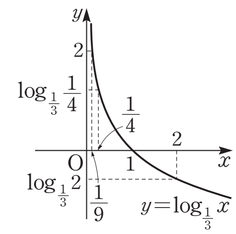


이때 $3<5<8$이고, 함수 $y=\log_2 x$는 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하므로

$\log_2 3<\log_2 5<\log_2 8$

$\therefore \log_2 3<\log_2 5<\underline{3}$

(2) $2=\log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{9}$



이때 $\dfrac{1}{9}<\dfrac{1}{4}<2$이고, 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$는 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소하므로

$\log_{\frac{1}{3}} 2<\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{4}<\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{9}$

$\therefore \log_{\frac{1}{3}} 2<\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{4}<2$

(3) $2=\log_3 3^2=\log_3 9$

$4\log_3 2=\log_3 2^4=\log_3 16$

이때 $9<10<16$이고, 함수 $y=\log_3 x$는 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하므로

$\log_3 9<\log_3 10<\log_3 16$

$\therefore 2<\log_3 10<4\log_3 2$

(4) $1=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{2}$, $\sqrt{10}=3.1\cdots$

이때 $\dfrac{1}{2}<3<\sqrt{10}$이고, 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$는 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소하므로

$\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{10}<\log_{\frac{1}{2}} 3<\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{2}$

$\therefore \log_{\frac{1}{2}}\sqrt{10}<\log_{\frac{1}{2}} 3<1$

(5) $4=\log_2 2^4=\log_2 16$

$2\log_2 3=\log_2 3^2=\log_2 9$

$\log_4 16=2=\log_2 2^2=\log_2 4$

이때 $4<9<16$이고, 함수 $y=\log_2 x$는 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하므로

$\log_2 4<\log_2 9<\log_2 16$

$\therefore \log_4 16<2\log_2 3<4$

(6) $2=\log_3 3^2=\log_3 9$, $\sqrt{5}=2.2\cdots$

이때 $\sqrt{5}<4<9$이고, 함수 $y=\log_3 x$는 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하므로

$\log_3\sqrt{5}<\log_3 4<\log_3 9$

$\therefore \log_3\sqrt{5}<\log_3 4<2$

(7) $\log_4 10=\dfrac{1}{2}\log_2 10=\log_2\sqrt{10}$

$\sqrt{10}=3.1\cdots$

이때 $\dfrac{1}{3}<3<\sqrt{10}$이고, 함수 $y=\log_2 x$는 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하므로

$\log_2\dfrac{1}{3}<\log_2 3<\log_2\sqrt{10}$

$\therefore \log_2\dfrac{1}{3}<\log_2 3<\log_4 10$

(8) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{4} = \log_{3^{-1}} 4^{-1} = \log_3 4$, $1 = \log_3 3$

이때 $3<4<5$이고, 함수 $y=\log_3 x$는 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하므로

$\log_3 3 < \log_3 4 < \log_3 5$

$\therefore 1 < \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{4} < \log_3 5$

41 답 (1) 최댓값: 4, 최솟값: 2

(2) 최댓값: -3, 최솟값: -4

(3) 최댓값: 5, 최솟값: 3

풀이 (1) $y=\log_2 (x+3)+1$에서 밑이 2이고 $2>1$이므로 $-1 \le x \le 5$에서 함수 $y=\log_2 (x+3)+1$은

$x=5$일 때 최대이고, 최댓값은

$\log_2 (5+3)+1 = \log_2 2^3 + 1 = 4$

$x=-1$일 때 최소이고, 최솟값은

$\log_2 (-1+3)+1 = \log_2 2 + 1 = 2$

(2) $y=\log_3 (x+3)-5$에서 밑이 3이고 $3>1$이므로 $0 \le x \le 6$에서 함수 $y=\log_3 (x+3)-5$는

$x=6$일 때 최대이고, 최댓값은

$\log_3 (6+3)-5 = \log_3 3^2 - 5 = -3$

$x=0$일 때 최소이고, 최솟값은

$\log_3 3 - 5 = -4$

(3) $y=\log_2 (x+1)+3$에서 밑이 2이고 $2>1$이므로 $0 \le x \le 3$에서 함수 $y=\log_2 (x+1)+3$은

$x=3$일 때 최대이고, 최댓값은

$\log_2 (3+1)+3 = \log_2 2^2 + 3 = 5$

$x=0$일 때 최소이고, 최솟값은

$\log_2 1 + 3 = 3$

42 답 (1) 최댓값: -2, 최솟값: -5

(2) 최댓값: -3, 최솟값: -4

풀이 (1) $y=\log_{\frac{1}{2}} (x+5)-1$에서 밑이 $\frac{1}{2}$이고 $0<\frac{1}{2}<1$이므로

$-3 \le x \le 11$에서 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} (x+5)-1$은

$x=-3$일 때 최대이고, 최댓값은

$\log_{\frac{1}{2}} (-3+5)-1 = \log_{\frac{1}{2}} 2 - 1 = -2$

$x=11$일 때 최소이고, 최솟값은

$\log_{\frac{1}{2}} (11+5)-1 = \log_{\frac{1}{2}} 2^4 - 1 = -5$

(2) $y=\log_{\frac{1}{3}} (x-1)-2$에서 밑이 $\frac{1}{3}$이고 $0<\frac{1}{3}<1$이므로

$4 \le x \le 10$에서 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}} (x-1)-2$는

$x=4$일 때 최대이고, 최댓값은

$\log_{\frac{1}{3}} (4-1)-2 = \log_{\frac{1}{3}} 3 - 2 = -3$

$x=10$일 때 최소이고, 최솟값은

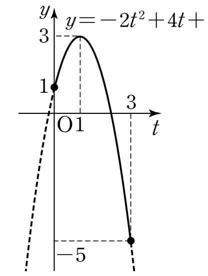
$\log_{\frac{1}{3}} (10-1)-2 = \log_{\frac{1}{3}} 3^2 - 2 = -4$

43 답 (1) 최댓값: 3, 최솟값: -5

(2) 최댓값: 12, 최솟값: -4

(3) 최댓값: 2, 최솟값: -2

풀이 (1) $y=-2(\log_2 x)^2 + 4\log_2 x + 1$



에서 $\log_2 x = t$로 놓으면

$y=-2t^2+4t+1$

$=-2(t-1)^2+3$

이때 $1 \le x \le 8$이고, $2>1$이므로

$\log_2 1 \le \log_2 x \le \log_2 8$

$\therefore 0 \le t \le 3$

따라서 $0 \le t \le 3$에서 함수 $y=-2(t-1)^2+3$은

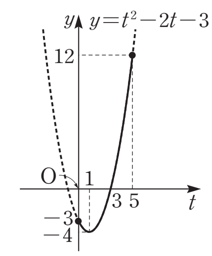
$t=1$일 때 최대이고, 최댓값은

$-2(1-1)^2+3=3$,

$t=3$일 때 최소이고, 최솟값은

$-2(3-1)^2+3=-5$

(2) $y=(\log_2 x)^2 - \log_2 x^2 - 3$에서



$\log_2 x = t$로 놓으면

$y=t^2-2t-3=(t-1)^2-4$

이때 $1 \le x \le 32$이고, $2>1$이므로

$\log_2 1 \le \log_2 x \le \log_2 32$

$\therefore 0 \le t \le 5$

따라서 $0 \le t \le 5$에서 함수

$y=(t-1)^2-4$는

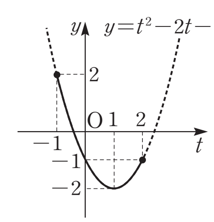
$t=5$일 때 최대이고, 최댓값은

$(5-1)^2-4=12$

$t=1$일 때 최소이고, 최솟값은

$(1-1)^2-4=-4$

(3) $y=(\log_{\frac{1}{2}} x)^2 - \log_{\frac{1}{2}} x^2 - 1$에서



$\log_{\frac{1}{2}} x = t$로 놓으면

$y=t^2-2t-1=(t-1)^2-2$

이때 $\frac{1}{4} \le x \le 2$이고,

$0<\frac{1}{2}<1$이므로

$\log_{\frac{1}{2}} 2 \le \log_{\frac{1}{2}} x \le \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$ $\therefore -1 \le t \le 2$

따라서 $-1 \le t \le 2$에서 함수 $y=(t-1)^2-2$는

$t=-1$일 때 최대이고, 최댓값은

$(-1-1)^2-2=2$

$t=1$일 때 최소이고, 최솟값은

$(1-1)^2-2=-2$

44 답 (1) 최댓값: 2, 최솟값: $\log_3 5$

(2) 최댓값: 3, 최솟값: 2

(3) 최댓값: 0, 최솟값: -1

풀이 (1) 함수 $y=\log_3 (x^2-2x+6)$에서 밑이 3이고 $3>1$이므로 x^2-2x+6이 최대일 때 y도 최대, x^2-2x+6이 최소일 때 y도 최소가 된다.

$x^2-2x+6=(x-1)^2+5$이므로 $-1 \le x \le 1$에서

$x=-1$일 때 최댓값은 9, $x=1$일 때 최솟값은 5이다.

따라서 함수 $y=\log_3(x^2-2x+6)$의 최댓값은

$\log_3 9=\underline{2}$, 최솟값은 $\underline{\log_3 5}$이다.

(2) 함수 $y=\log_2(x^2-2x+5)$에서 밑이 2이고 $2>1$이므로 x^2-2x+5가 최대일 때 y도 최대, x^2-2x+5가 최소일 때 y도 최소가 된다.

$x^2-2x+5=(x-1)^2+4$이므로 $0\le x\le 3$에서

$x=3$일 때 최댓값은 8, $x=1$일 때 최솟값은 4이다.

따라서 함수 $y=\log_2(x^2-2x+5)$의 최댓값은

$\log_2 8=\log_2 2^3=3$, 최솟값은 $\log_2 4=\log_2 2^2=2$이다.

(3) 함수 $y=\log_{0.1}(-x^2+4x+6)$에서 밑이 0.1이고 $0<0.1<1$이므로 $-x^2+4x+6$이 최소일 때 y는 최대, $-x^2+4x+6$이 최대일 때 y는 최소가 된다.

$-x^2+4x+6=-(x-2)^2+10$이므로 $0\le x\le 5$에서

$x=5$일 때 최솟값은 1, $x=2$일 때 최댓값은 10이다.

따라서 함수 $y=\log_{0.1}(-x^2+4x+6)$의 최댓값은

$\log_{0.1} 1=0$, 최솟값은 $\log_{0.1} 10=\log_{\frac{1}{10}} 10=-1$이다.

45 답 10000

풀이 $y=100x^{4-\log x}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log y=\log 100x^{4-\log x}=\log 100+\log x^{4-\log x}$

$=2+(4-\log x)\log x=-(\log x)^2+4\log x+2$

$\log x=t$로 놓으면

$\log y=-t^2+4t+2=-(t-2)^2+6$

따라서 $t=2$일 때, $\log y$의 최댓값은 6이다.

즉, $x=100$일 때, y의 최댓값은 $10^6=1000000$이므로

$a=100,\ b=1000000$

$\therefore \dfrac{b}{a}=\dfrac{1000000}{100}=\underline{10000}$

46 답 1

풀이 $y=\dfrac{1}{10}x^{4-2\log x}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log y=\log\dfrac{1}{10}x^{4-2\log x}=\log\dfrac{1}{10}+\log x^{4-2\log x}$

$=-1+(4-2\log x)\log x$

$=-2(\log x)^2+4\log x-1$

$\log x=t$로 놓으면

$\log y=-2t^2+4t-1=-2(t-1)^2+1$

따라서 $t=1$일 때, $\log y$의 최댓값은 1이다.

즉, $x=10$일 때, y의 최댓값은 10이므로

$a=10,\ b=10$

$\therefore \log_a b=1$

47 답 100

풀이 $y=100x^2\div x^{\log x}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log y=\log(100x^2\div x^{\log x})=\log 100x^2-\log x^{\log x}$

$=\log 100+\log x^2-(\log x)^2$

$=-(\log x)^2+2\log x+2$

$\log x=t$로 놓으면

$\log y=-t^2+2t+2=-(t-1)^2+3$

따라서 $t=1$일 때, $\log y$의 최댓값은 3이다.

즉, $x=10$일 때, y의 최댓값은 $10^3=1000$이므로

$a=10,\ b=1000$

$\therefore \dfrac{b}{a}=\dfrac{1000}{10}=100$

48 답 3

풀이 $\log_2\left(\dfrac{2}{a}+b\right)+\log_2\left(\dfrac{2}{b}+a\right)$

$=\log_2\left(\dfrac{2}{a}+b\right)\left(\dfrac{2}{b}+a\right)$

$a>0,\ b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\left(\dfrac{2}{a}+b\right)\left(\dfrac{2}{b}+a\right)=ab+\dfrac{4}{ab}+4$

$\ge 2\sqrt{ab\times\dfrac{4}{ab}}+4=4+4=8$

$\left(\text{단, 등호는 } ab=\dfrac{4}{ab},\ \text{즉 } ab=2\text{일 때 성립한다.}\right)$

이때 $2>1$이므로

$\log_2\left(\dfrac{2}{a}+b\right)\left(\dfrac{2}{b}+a\right)\ge\log_2 8=\log_2 2^3=\underline{3}$

따라서 $\log_2\left(\dfrac{2}{a}+b\right)+\log_2\left(\dfrac{2}{b}+a\right)$의 최솟값은 $\underline{3}$이다.

49 답 $4\sqrt{2}$

풀이 $a>1,\ b>1$에서 $\log_a b>0,\ \log_b a>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\log_a b^4+\log_{\sqrt{b}} a=4\log_a b+2\log_b a$

$\ge 2\sqrt{4\log_a b\times 2\log_b a}=2\sqrt{8}=4\sqrt{2}$

$\left(\text{단, 등호는 } 4\log_a b=2\log_b a,\ \text{즉 } \log_a b=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\text{일 때 성립한다.}\right)$

따라서 $\log_a b^4+\log_{\sqrt{b}} a$의 최솟값은 $4\sqrt{2}$이다.

50 답 -2

풀이 $x>0,\ y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x+y\ge 2\sqrt{xy}$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립한다.)

그런데 $x+y=10$이므로

$10\ge 2\sqrt{xy}\qquad \therefore xy\le 25$

이때 밑이 $\dfrac{1}{5}$이고 $0<\dfrac{1}{5}<1$이므로

$\log_{\frac{1}{5}} x+\log_{\frac{1}{5}} y=\log_{\frac{1}{5}} xy\ge\log_{\frac{1}{5}} 25=-2$

(단, 등호는 $x=y=5$일 때 성립한다.)

따라서 $\log_{\frac{1}{5}} x+\log_{\frac{1}{5}} y$의 최솟값은 -2이다.

51 답 (1) $x=1$ 또는 $x=2$ (2) $x=4$ (3) $x=3$ 또는 $x=6$ (4) $x=2$ (5) $x=0$

풀이 (1) 로그의 진수 조건에서 $x>0,\ 3x-2>0$

$\therefore x>\dfrac{2}{3}$ …… ㉠

$\log_2 x=\log_4(3x-2)$에서 $\log_4 x^2=\log_4(3x-2)$
따라서 $x^2=3x-2$이므로 $x^2-3x+2=0$
$(x-1)(x-2)=0$ $\therefore x=1$ 또는 $x=2$
그런데 ㉠에서 $x>\frac{2}{3}$이므로 $x=\underline{1}$ 또는 $x=\underline{2}$
(2) 로그의 진수 조건에서 $x-2>0$, $x>0$
$\therefore x>2$ …… ㉠
$\log_2(x-2)=\log_4 x$에서 $\log_4(x-2)^2=\log_4 x$
따라서 $(x-2)^2=x$이므로 $x^2-5x+4=0$
$(x-1)(x-4)=0$ $\therefore x=1$ 또는 $x=4$
그런데 ㉠에서 $x>2$이므로 $x=4$
(3) 로그의 진수 조건에서 $x>0$, $x-2>0$
$\therefore x>2$ …… ㉠
$\log_3 x=\log_9(x-2)+1$에서
$\log_9 x^2=\log_9(x-2)+\log_9 9$
$\log_9 x^2=\log_9 9(x-2)$
따라서 $x^2=9(x-2)$이므로 $x^2-9x+18=0$
$(x-3)(x-6)=0$ $\therefore x=3$ 또는 $x=6$
그런데 ㉠에서 $x>2$이므로 $x=3$ 또는 $x=6$
(4) 로그의 진수 조건에서 $8-x>0$, $x+4>0$
$\therefore -4<x<8$ …… ㉠
$\log_{\frac{1}{2}}(8-x)=-\log_2(x+4)$에서
$\log_{\frac{1}{2}}(8-x)=\log_{\frac{1}{2}}(x+4)$
따라서 $8-x=x+4$이므로 $2x=4$
$\therefore x=2$
그런데 ㉠에서 $-4<x<8$이므로 $x=2$
(5) 로그의 진수 조건에서 $x+2>0$, $x+1>0$
$\therefore x>-1$ …… ㉠
$\log_{\sqrt{2}}(x+2)=\log_2(x+1)+2$에서
$\log_{2^{\frac{1}{2}}}(x+2)=\log_2(x+1)+\log_2 2^2$
$2\log_2(x+2)=\log_2(x+1)+\log_2 4$
$\log_2(x+2)^2=\log_2 4(x+1)$
따라서 $(x+2)^2=4(x+1)$이므로 $x^2=0$
$\therefore x=0$
그런데 ㉠에서 $x>-1$이므로 $x=0$

52 답 (1) $x=3$ 또는 $x=243$ (2) $x=\frac{1}{32}$ 또는 $x=8$
(3) $x=\frac{1}{27}$ 또는 $x=3$ (4) $x=\frac{1}{4}$ 또는 $x=64$
(5) $x=\frac{1}{5}$ 또는 $x=25$ (6) $x=2$ 또는 $x=16$
(7) $x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=9$ (8) $x=\frac{1}{25}$ 또는 $x=5$
(9) $x=\frac{1}{64}$ 또는 $x=2$ (10) $x=\frac{1}{729}$ 또는 $x=3$

풀이 (1) 로그의 진수 조건에서 $x>0$, $x^6>0$
$\therefore x>0$ …… ㉠
$(\log_3 x)^2-6\log_3 x+5=0$에서 $\log_3 x=t$로 놓으면
$t^2-6t+5=0$, $(t-1)(t-5)=0$
$\therefore t=1$ 또는 $t=5$
따라서 $\log_3 x=1$ 또는 $\log_3 x=5$이므로
$x=\underline{3}$ 또는 $x=\underline{243}$
그런데 ㉠에서 $x>0$이므로
$x=\underline{3}$ 또는 $x=\underline{243}$
(2) 로그의 진수 조건에서 $x>0$, $x^2>0$
$\therefore x>0$ …… ㉠
$(\log_2 x)^2+\log_2 x^2-15=0$에서 $\log_2 x=t$로 놓으면
$t^2+2t-15=0$, $(t+5)(t-3)=0$
$\therefore t=-5$ 또는 $t=3$
따라서 $\log_2 x=-5$ 또는 $\log_2 x=3$이므로
$x=\frac{1}{32}$ 또는 $x=8$
그런데 ㉠에서 $x>0$이므로
$x=\frac{1}{32}$ 또는 $x=8$
(3) 로그의 진수 조건에서 $x>0$, $x^2>0$
$\therefore x>0$ …… ㉠
$(\log_3 x)^2+\log_3 x^2-3=0$에서 $\log_3 x=t$로 놓으면
$t^2+2t-3=0$, $(t+3)(t-1)=0$
$\therefore t=-3$ 또는 $t=1$
따라서 $\log_3 x=-3$ 또는 $\log_3 x=1$이므로
$x=\frac{1}{27}$ 또는 $x=3$
그런데 ㉠에서 $x>0$이므로
$x=\frac{1}{27}$ 또는 $x=3$
(4) 로그의 진수 조건에서 $x>0$ …… ㉠
$(\log_2 x)^2-12=4\log_2 x$에서 $\log_2 x=t$로 놓으면
$t^2-4t-12=0$, $(t+2)(t-6)=0$
$\therefore t=-2$ 또는 $t=6$
따라서 $\log_2 x=-2$ 또는 $\log_2 x=6$이므로
$x=\frac{1}{4}$ 또는 $x=64$
그런데 ㉠에서 $x>0$이므로
$x=\frac{1}{4}$ 또는 $x=64$
(5) 로그의 진수 조건에서 $x>0$ …… ㉠
$\log_5 x=(\log_5 x)^2-2$에서 $\log_5 x=t$로 놓으면
$t^2-t-2=0$, $(t+1)(t-2)=0$
$\therefore t=-1$ 또는 $t=2$
따라서 $\log_5 x=-1$ 또는 $\log_5 x=2$이므로
$x=\frac{1}{5}$ 또는 $x=25$
그런데 ㉠에서 $x>0$이므로
$x=\frac{1}{5}$ 또는 $x=25$
(6) 로그의 밑 조건에서 $x>0$, $x\neq1$, 진수 조건에서 $x>0$
$\therefore x>0$, $x\neq1$ …… ㉠
$\log_2 x+\log_x 16=5$에서 $\log_2 x+4\log_x 2=5$
$\log_2 x+\frac{4}{\log_2 x}=5$ …… ㉡
㉠에서 $x\neq1$이므로 $\log_2 x\neq0$

따라서 ㉡의 양변에 $\log_2 x$를 곱하면

$(\log_2 x)^2 - 5\log_2 x + 4 = 0$

$\log_2 x = t$로 놓으면

$t^2 - 5t + 4 = 0$, $(t-1)(t-4) = 0$

$\therefore t = 1$ 또는 $t = 4$

따라서 $\log_2 x = 1$ 또는 $\log_2 x = 4$이므로

$x = 2$ 또는 $x = 16$

그런데 ㉠에서 $x > 0$, $x \neq 1$이므로

$x = 2$ 또는 $x = 16$

(7) 로그의 밑 조건에서 $x > 0$, $x \neq 1$, 진수 조건에서 $x > 0$

$\therefore x > 0$, $x \neq 1$ …… ㉠

$\log_3 x - \log_x 9 = 1$에서 $\log_3 x - 2\log_x 3 = 1$

$\log_3 x - \dfrac{2}{\log_3 x} = 1$ …… ㉡

㉠에서 $x \neq 1$이므로 $\log_3 x \neq 0$

따라서 ㉡의 양변에 $\log_3 x$를 곱하면

$(\log_3 x)^2 - \log_3 x - 2 = 0$

$\log_3 x = t$로 놓으면

$t^2 - t - 2 = 0$, $(t+1)(t-2) = 0$

$\therefore t = -1$ 또는 $t = 2$

따라서 $\log_3 x = -1$ 또는 $\log_3 x = 2$이므로

$x = \dfrac{1}{3}$ 또는 $x = 9$

그런데 ㉠에서 $x > 0$, $x \neq 1$이므로

$x = \dfrac{1}{3}$ 또는 $x = 9$

(8) 로그의 밑 조건에서 $x > 0$, $x \neq 1$, 진수 조건에서 $x > 0$

$\therefore x > 0$, $x \neq 1$ …… ㉠

$\log_5 x - \log_x 25 = -1$에서 $\log_5 x - 2\log_x 5 = -1$

$\log_5 x - \dfrac{2}{\log_5 x} = -1$ …… ㉡

㉠에서 $x \neq 1$이므로 $\log_5 x \neq 0$

따라서 ㉡의 양변에 $\log_5 x$를 곱하면

$(\log_5 x)^2 + \log_5 x - 2 = 0$

$\log_5 x = t$로 놓으면

$t^2 + t - 2 = 0$, $(t+2)(t-1) = 0$

$\therefore t = -2$ 또는 $t = 1$

따라서 $\log_5 x = -2$ 또는 $\log_5 x = 1$이므로

$x = \dfrac{1}{25}$ 또는 $x = 5$

그런데 ㉠에서 $x > 0$, $x \neq 1$이므로

$x = \dfrac{1}{25}$ 또는 $x = 5$

(9) 로그의 진수 조건에서 $8x > 0$, $4x > 0$

$\therefore x > 0$ …… ㉠

$(\log_2 8x)(\log_2 4x) = 12$에서

$(\log_2 8 + \log_2 x)(\log_2 4 + \log_2 x) = 12$

$(3 + \log_2 x)(2 + \log_2 x) = 12$

$6 + 5\log_2 x + (\log_2 x)^2 = 12$

$(\log_2 x)^2 + 5\log_2 x - 6 = 0$

$\log_2 x = t$로 놓으면

$t^2 + 5t - 6 = 0$, $(t+6)(t-1) = 0$

$\therefore t = -6$ 또는 $t = 1$

따라서 $\log_2 x = -6$ 또는 $\log_2 x = 1$이므로

$x = \dfrac{1}{64}$ 또는 $x = 2$

그런데 ㉠에서 $x > 0$이므로

$x = \dfrac{1}{64}$ 또는 $x = 2$

(10) 로그의 진수 조건에서 $81x > 0$, $3x > 0$

$\therefore x > 0$ …… ㉠

$(\log_3 81x)(\log_3 3x) = 10$에서

$(\log_3 81 + \log_3 x)(\log_3 3 + \log_3 x) = 10$

$(4 + \log_3 x)(1 + \log_3 x) = 10$

$4 + 5\log_3 x + (\log_3 x)^2 = 10$

$(\log_3 x)^2 + 5\log_3 x - 6 = 0$

$\log_3 x = t$로 놓으면

$t^2 + 5t - 6 = 0$, $(t+6)(t-1) = 0$

$\therefore t = -6$ 또는 $t = 1$

따라서 $\log_3 x = -6$ 또는 $\log_3 x = 1$이므로

$x = \dfrac{1}{729}$ 또는 $x = 3$

그런데 ㉠에서 $x > 0$이므로

$x = \dfrac{1}{729}$ 또는 $x = 3$

53 답 (1) $x = \dfrac{1}{2}$ 또는 $x = 4$ (2) $x = \dfrac{1}{2}$ 또는 $x = 8$

(3) $x = \dfrac{1}{3}$ 또는 $x = 27$ (4) $x = \dfrac{1}{1000}$ 또는 $x = 10$

(5) $x = \dfrac{1}{625}$ 또는 $x = 5$ (6) $x = \dfrac{1}{243}$ 또는 $x = 3$

(7) $x = 1$ 또는 $x = 10$ (8) $x = 100$

풀이 **(1)** 로그의 진수 조건에서 $x > 0$ …… ㉠

주어진 방정식의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 x^{\log_2 x} = \log_2 4x$, $(\log_2 x)^2 = \log_2 2^2 + \log_2 x$

$(\log_2 x)^2 - \log_2 x - 2 = 0$

$\log_2 x = t$로 놓으면

$t^2 - t - 2 = 0$, $(t+1)(t-2) = 0$

$\therefore t = -1$ 또는 $t = 2$

따라서 $\log_2 x = -1$ 또는 $\log_2 x = 2$이므로

$x = \dfrac{1}{2}$ 또는 $x = 4$

그런데 ㉠에서 $x > 0$이므로

$x = \dfrac{1}{2}$ 또는 $x = 4$

(2) 로그의 진수 조건에서 $x > 0$ …… ㉠

주어진 방정식의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 x^{\log_2 x} = \log_2 8x^2$, $(\log_2 x)^2 = \log_2 2^3 + \log_2 x^2$

$(\log_2 x)^2 - 2\log_2 x - 3 = 0$

$\log_2 x = t$로 놓으면

$t^2 - 2t - 3 = 0$, $(t+1)(t-3) = 0$

$\therefore t = -1$ 또는 $t = 3$

따라서 $\log_2 x=-1$ 또는 $\log_2 x=3$이므로

$x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=8$

그런데 ㉠에서 $x>0$이므로

$x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=8$

(3) 로그의 진수 조건에서 $x>0$ …… ㉠

주어진 방정식의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3 x^{\log_3 x}=\log_3 27x^2$, $(\log_3 x)^2=\log_3 3^3+\log_3 x^2$

$(\log_3 x)^2-2\log_3 x-3=0$

$\log_3 x=t$로 놓으면

$t^2-2t-3=0$, $(t+1)(t-3)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=3$

따라서 $\log_3 x=-1$ 또는 $\log_3 x=3$이므로

$x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=27$

그런데 ㉠에서 $x>0$이므로

$x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=27$

(4) 로그의 진수 조건에서 $x>0$ …… ㉠

주어진 방정식의 양변에 상용로그를 취하면

$\log x^{\log x}=\log\frac{1000}{x^2}$, $(\log x)^2=\log 10^3-\log x^2$

$(\log x)^2+2\log x-3=0$

$\log x=t$로 놓으면

$t^2+2t-3=0$, $(t+3)(t-1)=0$

$\therefore t=-3$ 또는 $t=1$

따라서 $\log x=-3$ 또는 $\log x=1$이므로

$x=\frac{1}{1000}$ 또는 $x=10$

그런데 ㉠에서 $x>0$이므로

$x=\frac{1}{1000}$ 또는 $x=10$

(5) 로그의 진수 조건에서 $x>0$ …… ㉠

주어진 방정식의 양변에 밑이 5인 로그를 취하면

$\log_5 x^{\log_5 x}=\log_5\frac{625}{x^3}$

$(\log_5 x)^2=\log_5 5^4-\log_5 x^3$

$(\log_5 x)^2+3\log_5 x-4=0$

$\log_5 x=t$로 놓으면

$t^2+3t-4=0$, $(t+4)(t-1)=0$

$\therefore t=-4$ 또는 $t=1$

따라서 $\log_5 x=-4$ 또는 $\log_5 x=1$이므로

$x=\frac{1}{625}$ 또는 $x=5$

그런데 ㉠에서 $x>0$이므로

$x=\frac{1}{625}$ 또는 $x=5$

(6) 로그의 진수 조건에서 $x>0$ …… ㉠

주어진 방정식의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3 x^{\log_3 x}=\log_3\frac{243}{x^4}$

$(\log_3 x)^2=\log_3 3^5-\log_3 x^4$

$(\log_3 x)^2+4\log_3 x-5=0$

$\log_3 x=t$로 놓으면

$t^2+4t-5=0$, $(t+5)(t-1)=0$

$\therefore t=-5$ 또는 $t=1$

따라서 $\log_3 x=-5$ 또는 $\log_3 x=1$이므로

$x=\frac{1}{243}$ 또는 $x=3$

그런데 ㉠에서 $x>0$이므로

$x=\frac{1}{243}$ 또는 $x=3$

(7) 로그의 진수 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$x^{\log 3}=3^{\log x}$이므로 주어진 방정식은

$3^{\log x}\times 3^{\log x}=2(3^{\log x}+3^{\log x})-3$

$(3^{\log x})^2-4\times 3^{\log x}+3=0$

$3^{\log x}=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-4t+3=0$, $(t-1)(t-3)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=3$

따라서 $3^{\log x}=1$ 또는 $3^{\log x}=3$이므로

$\log x=0$ 또는 $\log x=1$ $\quad\therefore x=1$ 또는 $x=10$

그런데 ㉠에서 $x>0$이므로

$x=1$ 또는 $x=10$

(8) 로그의 진수 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$x^{\log 2}=2^{\log x}$이므로 주어진 방정식은

$2^{\log x}\times 2^{\log x}=2^{\log x}+2^{\log x}+8$

$(2^{\log x})^2-2\times 2^{\log x}-8=0$

$2^{\log x}=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-2t-8=0$, $(t+2)(t-4)=0$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=4$

이때 $t>0$이므로 $t=4$

따라서 $2^{\log x}=4$이므로 $\log x=2$ $\quad\therefore x=100$

그런데 ㉠에서 $x>0$이므로 $x=100$

54 답 (1) $a=\frac{1}{4}$ 또는 $a=64$ (2) $a=3$ 또는 $a=27$

(3) $a=2$ 또는 $a=4$

(4) $a=\frac{1}{100000}$ 또는 $a=10000000$

풀이 (1) 이차방정식 $x^2-x\log_2 a+\log_2 a+3=0$이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$D=(-\log_2 a)^2-4(\log_2 a+3)=0$

$(\log_2 a)^2-4\log_2 a-12=0$

$\log_2 a=t$로 놓으면

$t^2-4t-12=0$, $(t+2)(t-6)=0$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=6$

따라서 $\log_2 a=-2$ 또는 $\log_2 a=6$이므로

$a=\frac{1}{4}$ 또는 $a=64$

(2) 이차방정식 $x^2-2x\log_3 a+4\log_3 a-3=0$이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-\log_3 a)^2-(4\log_3 a-3)=0$

$(\log_3 a)^2-4\log_3 a+3=0$

$\log_3 a=t$로 놓으면

$t^2-4t+3=0$, $(t-1)(t-3)=0$

$\therefore$ $t=1$ 또는 $t=3$

따라서 $\log_3 a=1$ 또는 $\log_3 a=3$이므로

$a=3$ 또는 $a=27$

(3) 이차방정식 $25x^2-10x\log_2 a+3\log_2 a-2=0$이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-5\log_2 a)^2-25(3\log_2 a-2)=0$

$25(\log_2 a)^2-75\log_2 a+50=0$

$(\log_2 a)^2-3\log_2 a+2=0$

$\log_2 a=t$로 놓으면

$t^2-3t+2=0$, $(t-1)(t-2)=0$

$\therefore$ $t=1$ 또는 $t=2$

따라서 $\log_2 a=1$ 또는 $\log_2 a=2$이므로

$a=2$ 또는 $a=4$

(4) 이차방정식 $x^2-(\log a+1)x+(\log a+9)=0$이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$D=(\log a+1)^2-4(\log a+9)=0$

$(\log a)^2+2\log a+1-4\log a-36=0$

$(\log a)^2-2\log a-35=0$

$\log a=t$로 놓으면

$t^2-2t-35=0$, $(t+5)(t-7)=0$

$\therefore$ $t=-5$ 또는 $t=7$

따라서 $\log a=-5$ 또는 $\log a=7$이므로

$a=\frac{1}{100000}$ 또는 $a=10000000$

55 답 (1) 16 (2) 10 (3) 9 (4) 25

풀이 **(1)** $(\log_2 x)^2-\log_2 x^4-3=0$에서

$(\log_2 x)^2-4\log_2 x-3=0$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $t^2-4t-3=0$ …… ㉠

이때 방정식 $(\log_2 x)^2-4\log_2 x-3=0$의 두 근이 α, β이므로 ㉠의 두 근은 $\log_2 \alpha$, $\log_2 \beta$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2 \alpha+\log_2 \beta=4$, $\log_2 \alpha\beta=4$

$\therefore$ $\alpha\beta=16$

(2) $(\log x)^2-\log x-6=0$에서

$\log x=t$로 놓으면 $t^2-t-6=0$ …… ㉠

이때 방정식 $(\log x)^2-\log x-6=0$의 두 근이 α, β이므로 ㉠의 두 근은 $\log \alpha$, $\log \beta$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log \alpha+\log \beta=1$, $\log \alpha\beta=1$

$\therefore$ $\alpha\beta=10$

(3) $(\log_3 x)^2-2\log_3 x-3=0$에서

$\log_3 x=t$로 놓으면 $t^2-2t-3=0$ …… ㉠

이때 방정식 $(\log_3 x)^2-2\log_3 x-3=0$의 두 근이 α, β이므로 ㉠의 두 근은 $\log_3 \alpha$, $\log_3 \beta$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_3 \alpha+\log_3 \beta=2$, $\log_3 \alpha\beta=2$

$\therefore$ $\alpha\beta=9$

(4) $(\log_5 x)^2-\log_5 x^2-6=0$에서

$(\log_5 x)^2-2\log_5 x-6=0$

$\log_5 x=t$로 놓으면 $t^2-2t-6=0$ …… ㉠

이때 방정식 $(\log_5 x)^2-2\log_5 x-6=0$의 두 근이 α, β이므로 ㉠의 두 근은 $\log_5 \alpha$, $\log_5 \beta$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_5 \alpha+\log_5 \beta=2$, $\log_5 \alpha\beta=2$

$\therefore$ $\alpha\beta=25$

56 답 (1) $1<x<4$ (2) $3<x<5$ (3) $x>-\frac{4}{3}$ (4) $2<x\le 3$

풀이 **(1)** 로그의 진수 조건에서 $x+5>0$, $x-1>0$

$\therefore$ $x>1$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{4}}(x+5)<\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$에서

$\log_{\frac{1}{4}}(x+5)<\log_{\frac{1}{4}}(x-1)^2$

이때 밑이 $\frac{1}{4}$이고 $0<\frac{1}{4}<1$이므로

$x+5>(x-1)^2$, $x^2-3x-4<0$

$(x+1)(x-4)<0$

$\therefore$ $-1<x<4$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $1<x<4$

(2) 로그의 진수 조건에서 $x-1>0$, $x-3>0$

$\therefore$ $x>3$ …… ㉠

$\log_2(x-1)+\log_2(x-3)-3<0$에서

$\log_2(x-1)(x-3)<\log_2 2^3$

이때 밑이 2이고 $2>1$이므로

$(x-1)(x-3)<8$, $x^2-4x-5<0$

$(x+1)(x-5)<0$

$\therefore$ $-1<x<5$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $3<x<5$

(3) 로그의 진수 조건에서 $x+3>0$, $x^2+1>0$

x^2+1은 항상 0보다 크므로 $x>-3$ …… ㉠

$\log_2(x+3)>\log_4(x^2+1)$에서

$\log_4(x+3)^2>\log_4(x^2+1)$

이때 밑이 4이고 $4>1$이므로

$(x+3)^2>x^2+1$, $3x+4>0$

$\therefore$ $x>-\frac{4}{3}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $x>-\frac{4}{3}$

(4) 로그의 진수 조건에서 $x^2-4>0$, $x+2>0$

$\therefore$ $x>2$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{3}}(x^2-4)\ge\log_{\frac{1}{3}}(x+2)$에서

밑이 $\frac{1}{3}$이고 $0<\frac{1}{3}<1$이므로

$x^2-4\le x+2$, $x^2-x-6\le 0$

$(x+2)(x-3)\le 0$

$\therefore$ $-2\le x\le 3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $2<x\le 3$

57 답 (1) $2<x<8$ (2) $0<x<2$ 또는 $x>4$

(3) $\frac{1}{243}<x<\frac{1}{3}$ (4) $\frac{1}{25}\le x\le 5$

풀이 (1) 로그의 진수 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$\log_2 x=t$로 놓으면 주어진 부등식은

$t^2-4t+3<0$, $(t-1)(t-3)<0$

$\therefore 1<t<3$

따라서 $1<\log_2 x<3$이므로 $\log_2 2<\log_2 x<\log_2 2^3$

이때 밑이 2이고 $2>1$이므로 $2<x<2^3$

$\therefore 2<x<8$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $2<x<8$

(2) 로그의 진수 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{2}} x=t$로 놓으면 주어진 부등식은

$t^2+3t+2>0$, $(t+2)(t+1)>0$

$\therefore t<-2$ 또는 $t>-1$

따라서 $\log_{\frac{1}{2}} x<-2$ 또는 $\log_{\frac{1}{2}} x>-1$이므로

$\log_{\frac{1}{2}} x<\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ 또는 $\log_{\frac{1}{2}} x>\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

이때 밑이 $\frac{1}{2}$이고 $0<\frac{1}{2}<1$이므로

$x>\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ 또는 $x<\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

$\therefore x>4$ 또는 $x<2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $0<x<2$ 또는 $x>4$

(3) 로그의 진수 조건에서 $x>0$, $243x^6>0$

$\therefore x>0$ …… ㉠

$(\log_3 x)^2+\log_3 243x^6<0$에서

$(\log_3 x)^2+\log_3 3^5+\log_3 x^6<0$

$(\log_3 x)^2+6\log_3 x+5<0$

$\log_3 x=t$로 놓으면

$t^2+6t+5<0$, $(t+5)(t+1)<0$

$\therefore -5<t<-1$

따라서 $-5<\log_3 x<-1$이므로

$\log_3 3^{-5}<\log_3 x<\log_3 3^{-1}$

이때 밑이 3이고 $3>1$이므로 $3^{-5}<x<3^{-1}$

$\therefore \frac{1}{243}<x<\frac{1}{3}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$\frac{1}{243}<x<\frac{1}{3}$

(4) 로그의 진수 조건에서 $x>0$, $5x>0$

$\therefore x>0$ …… ㉠

$2\ge\log_{\frac{1}{5}} x\times\log_{\frac{1}{5}} 5x$에서

$2\ge\log_{\frac{1}{5}} x(\log_{\frac{1}{5}} 5+\log_{\frac{1}{5}} x)$

$2\ge-\log_{\frac{1}{5}} x+(\log_{\frac{1}{5}} x)^2$

$(\log_{\frac{1}{5}} x)^2-\log_{\frac{1}{5}} x-2\le 0$

$\log_{\frac{1}{5}} x=t$로 놓으면

$t^2-t-2\le 0$, $(t+1)(t-2)\le 0$

$\therefore -1\le t\le 2$

따라서 $-1\le\log_{\frac{1}{5}} x\le 2$이므로

$\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}\le\log_{\frac{1}{5}} x\le\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{5}\right)^2$

이때 밑이 $\frac{1}{5}$이고 $0<\frac{1}{5}<1$이므로 $\left(\frac{1}{5}\right)^2\le x\le\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$

$\therefore \frac{1}{25}\le x\le 5$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$\frac{1}{25}\le x\le 5$

58 답 (1) $\frac{1}{5}<x<25$ (2) $0<x<\frac{1}{2}$ 또는 $x>16$

(3) $0<x<\frac{1}{625}$ 또는 $x>5$ (4) $\frac{1}{1000}<x<10$

풀이 (1) 로그의 진수 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$x^{\log_5 x}<25x$의 양변에 밑이 5인 로그를 취하면

$5>1$이므로

$\log_5 x^{\log_5 x}<\log_5 25x$

$(\log_5 x)^2<\log_5 25+\log_5 x$

$(\log_5 x)^2-\log_5 x-2<0$

$\log_5 x=t$로 놓으면

$t^2-t-2<0$, $(t+1)(t-2)<0$

$\therefore -1<t<2$

따라서 $-1<\log_5 x<2$이므로

$\log_5 5^{-1}<\log_5 x<\log_5 5^2$

이때 밑이 5이고 $5>1$이므로 $5^{-1}<x<5^2$

$\therefore \frac{1}{5}<x<25$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{5}<x<25$

(2) 로그의 진수 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$x^{\log_2 x}>16x^3$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$2>1$이므로

$\log_2 x^{\log_2 x}>\log_2 16x^3$

$(\log_2 x)^2>\log_2 2^4+\log_2 x^3$

$(\log_2 x)^2-3\log_2 x-4>0$

$\log_2 x=t$로 놓으면

$t^2-3t-4>0$, $(t+1)(t-4)>0$

$\therefore t<-1$ 또는 $t>4$

따라서 $\log_2 x<-1$ 또는 $\log_2 x>4$이므로

$\log_2 x<\log_2 2^{-1}$ 또는 $\log_2 x>\log_2 2^4$

이때 밑이 2이고 $2>1$이므로

$x<2^{-1}$ 또는 $x>2^4$

$\therefore x<\frac{1}{2}$ 또는 $x>16$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$0<x<\frac{1}{2}$ 또는 $x>16$

(3) 로그의 진수 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$x^{\log_{\frac{1}{5}} x}<\frac{x^3}{625}$의 양변에 밑이 $\frac{1}{5}$인 로그를 취하면

$0<\frac{1}{5}<1$이므로

$\log_{\frac{1}{5}} x^{\log_{\frac{1}{5}} x} > \log_{\frac{1}{5}} \frac{x^3}{625}$

$(\log_{\frac{1}{5}} x)^2 > \log_{\frac{1}{5}} x^3 + \log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{1}{5}\right)^4$

$(\log_{\frac{1}{5}} x)^2 - 3\log_{\frac{1}{5}} x - 4 > 0$

$\log_{\frac{1}{5}} x = t$로 놓으면

$t^2 - 3t - 4 > 0$, $(t+1)(t-4) > 0$

$\therefore$ $t < -1$ 또는 $t > 4$

따라서 $\log_{\frac{1}{5}} x < -1$ 또는 $\log_{\frac{1}{5}} x > 4$이므로

$\log_{\frac{1}{5}} x < \log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$ 또는 $\log_{\frac{1}{5}} x > \log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{1}{5}\right)^4$

이때 밑이 $\frac{1}{5}$이고 $0 < \frac{1}{5} < 1$이므로

$x > \left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$ 또는 $x < \left(\frac{1}{5}\right)^4$

$\therefore$ $x < \frac{1}{625}$ 또는 $x > 5$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$0 < x < \frac{1}{625}$ 또는 $x > 5$

(4) 로그의 진수 조건에서 $x > 0$ …… ㉠

$x^{\log_{\frac{1}{10}} x} > \frac{x^2}{1000}$의 양변에 밑이 $\frac{1}{10}$인 로그를 취하면

$0 < \frac{1}{10} < 1$이므로

$\log_{\frac{1}{10}} x^{\log_{\frac{1}{10}} x} < \log_{\frac{1}{10}} \frac{x^2}{1000}$

$(\log_{\frac{1}{10}} x)^2 < \log_{\frac{1}{10}} x^2 + \log_{\frac{1}{10}} \left(\frac{1}{10}\right)^3$

$(\log_{\frac{1}{10}} x)^2 - 2\log_{\frac{1}{10}} x - 3 < 0$

$\log_{\frac{1}{10}} x = t$로 놓으면

$t^2 - 2t - 3 < 0$, $(t+1)(t-3) < 0$

$\therefore$ $-1 < t < 3$

따라서 $-1 < \log_{\frac{1}{10}} x < 3$이므로

$\log_{\frac{1}{10}} \left(\frac{1}{10}\right)^{-1} < \log_{\frac{1}{10}} x < \log_{\frac{1}{10}} \left(\frac{1}{10}\right)^3$

이때 밑이 $\frac{1}{10}$이고 $0 < \frac{1}{10} < 1$이므로

$\left(\frac{1}{10}\right)^3 < x < \left(\frac{1}{10}\right)^{-1}$

$\therefore$ $\frac{1}{1000} < x < 10$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$\frac{1}{1000} < x < 10$

59 답 (1) $2 \le x < 16$ (2) $1 < x < 10000$

풀이 (1) 로그의 진수 조건에서 $\log_2 x > 0$, $x > 0$이므로

$x > 1$ …… ㉠

$0 \le \log_4 (\log_2 x) < 1$에서

$\log_4 1 \le \log_4 (\log_2 x) < \log_4 4$

밑이 4이고 $4 > 1$이므로

$1 \le \log_2 x < 4$ $\therefore$ $\log_2 2 \le \log_2 x < \log_2 2^4$

밑이 2이고 $2 > 1$이므로

$2 \le x < 16$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $2 \le x < 16$

다른 풀이 $0 \le \log_4 (\log_2 x) < 1$에서

$4^0 \le \log_2 x < 4^1$ $\therefore$ $1 \le \log_2 x < 4$

이때 밑이 2이고 $2 > 1$이므로

$2^1 \le x < 2^4$ $\therefore$ $2 \le x < 16$

(2) 로그의 진수 조건에서 $\log x > 0$, $x > 0$이므로

$x > 1$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{2}} (\log x) > -2$에서

$\log_{\frac{1}{2}} (\log x) > \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

밑이 $\frac{1}{2}$이고 $0 < \frac{1}{2} < 1$이므로

$\log x < 4$ $\therefore$ $\log x < \log 10^4$

밑이 10이고 $10 > 1$이므로

$x < 10^4$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $1 < x < 10000$

60 답 5년 후

풀이 현재 돼지의 수를 a마리라고 하면 n년 후의 돼지의 수는 $a(1+0.55)^n$, 즉 $1.55^n a$마리이므로 조건에 맞게 부등식을 세우면

$1.55^n a \ge 6a$

$1.55^n \ge 6$

이므로 양변에 상용로그를 취하면 밑이 10이고 $10 > 1$이므로

$\log 1.55^n \ge \log 6$

$n\log 1.55 \ge \log 2 + \log 3$

이때 $\log 1.55 = 0.19 > 0$이므로

$n \ge \frac{\log 2 + \log 3}{\log 1.55} = \frac{0.30 + 0.48}{0.19} = \frac{0.78}{0.19} = 4.1\cdots$

따라서 돼지의 수가 처음으로 현재의 6배 이상이 되는 것은 5년 후이다.

61 답 7장

풀이 현재 자외선의 양을 a라고 하면 이 빛이 유리를 n장 통과하였을 때 자외선의 양은 $a(1-0.1)^n$, 즉 $0.9^n a$이므로 조건에 맞게 부등식을 세우면

$0.9^n a \le \frac{1}{2} a$

$0.9^n \le \frac{1}{2}$

양변에 상용로그를 취하면 밑이 10이고 $10 > 1$이므로

$\log 0.9^n \le \log \frac{1}{2}$

$n\log \frac{9}{10} \le \log 1 - \log 2$

$n(\log 3^2 - \log 10) \le -\log 2$

$n(2\log 3 - 1) \le -\log 2$

이때 $\log 3 = 0.4771$이고 $2\log 3 = 0.9542$이므로

$2\log 3 - 1 = -0.0458 < 0$

$\therefore$ $n \ge \frac{-\log 2}{2\log 3 - 1} = \frac{-0.3010}{-0.0458} = 6.5\cdots$

따라서 자외선의 양이 처음의 50 % 이하가 되게 하려면 유리를 최소한 7장 통과시켜야 한다.

01 답 5

풀이 함수 $y=a^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-3=a^{x-1}$ $\therefore y=a^{x-1}+3$

함수 $y=a^{x-1}+3$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=a^{x-1}+3$ $\therefore y=-a^{x-1}-3$

이 그래프가 점 $(2, -8)$을 지나므로

$-8=-a^{2-1}-3$ $\therefore a=5$

02 답 $\left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{1}{4}}, \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{5}}, \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$

풀이 $\left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{1}{4}}=\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^4\right\}^{\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}$

$\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{5}}=\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}^{\frac{1}{5}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{5}}$

이때 $\frac{1}{3}<\frac{2}{5}<1$이고 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$은 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소하므로

$\frac{1}{3}<\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{5}}<\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$

$\therefore \left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{1}{4}}<\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{5}}<\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$

03 답 $\frac{17}{4}$

풀이 함수 $y=2^{-x^2+6x-7}$에서 밑이 2이고 $2>1$이므로 $-x^2+6x-7$이 최대일 때 y도 최대, $-x^2+6x-7$이 최소일 때 y도 최소가 된다.

$-x^2+6x-7=-(x-3)^2+2$이므로 $1\le x\le 4$에서

$-x^2+6x-7$의 최댓값은 $x=3$일 때 2, 최솟값은 $x=1$일 때 -2이다.

따라서 $M=2^2=4$, $m=2^{-2}=\frac{1}{4}$이므로

$M+m=\frac{17}{4}$

04 답 $\frac{19}{4}$

풀이 $y=4^{-x}-6\times 2^{-x}+a$

$=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2-6\times\left(\frac{1}{2}\right)^x+a$

이므로 $\left(\frac{1}{2}\right)^x=t$ $(t>0)$로 놓으면

$y=t^2-6t+a=(t-3)^2-9+a$

이때 $1\le x\le 2$에서

$\left(\frac{1}{2}\right)^2\le\left(\frac{1}{2}\right)^x\le\left(\frac{1}{2}\right)^1$ $\therefore \frac{1}{4}\le t\le\frac{1}{2}$

따라서 $\frac{1}{4}\le t\le\frac{1}{2}$에서 함수 $y=(t-3)^2-9+a$의 최솟값은 $t=\frac{1}{2}$일 때 2이므로

$\left(\frac{1}{2}-3\right)^2-9+a=2$

$\therefore a=\frac{19}{4}$

05 답 -3

풀이 $\left(\frac{1}{4}\right)^x-3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+8=0$에서

$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}^x-3\times\left(\frac{1}{2}\right)^x\times\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}+8=0$

$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2-6\times\left(\frac{1}{2}\right)^x+8=0$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t$ $(t>0)$로 놓으면

$t^2-6t+8=0$ …… ㉠

방정식 $\left(\frac{1}{4}\right)^x-3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+8=0$의 두 근을 α, β라고 하면

㉠의 두 근은 $\left(\frac{1}{2}\right)^\alpha$, $\left(\frac{1}{2}\right)^\beta$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\left(\frac{1}{2}\right)^\alpha\times\left(\frac{1}{2}\right)^\beta=\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+\beta}=8=\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ $\therefore \alpha+\beta=-3$

따라서 두 근의 합은 -3이다.

06 답 4

풀이 $(x^2)^4=x^x\times x^5$에서 $x^8=x^{x+5}$이므로

$8=x+5$ $\therefore x=3$

또, $x=1$이면 주어진 방정식은 $1^8=1^1\times 1^5=1$로 등식이 성립한다.

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

따라서 모든 근의 합은

$1+3=4$

07 답 -4

풀이 $64^x\ge(0.25)^{4-x^2}$에서 $64^x\ge\left(\frac{1}{4}\right)^{4-x^2}$

밑을 2로 같게 하면

$(2^6)^x\ge(2^{-2})^{4-x^2}$, $2^{6x}\ge 2^{2x^2-8}$

밑이 2이고 $2>1$이므로

$6x\ge 2x^2-8$, $2x^2-6x-8\le 0$

$x^2-3x-4\le 0$, $(x+1)(x-4)\le 0$

$\therefore -1\le x\le 4$

따라서 $M=4$, $m=-1$이므로

$Mm=-4$

08 답 0

풀이 $7^{2x+1}-50\times 7^x+7\le 0$에서

$7\times(7^x)^2-50\times 7^x+7\le 0$

$7^x=t$ $(t>0)$로 놓으면

$7t^2-50t+7\le 0$, $(7t-1)(t-7)\le 0$

$\therefore \frac{1}{7}\le t\le 7$

즉, $\frac{1}{7}\le 7^x\le 7$이므로 $7^{-1}\le 7^x\le 7^1$

이때 밑이 7이고 $7>1$이므로 $-1\le x\le 1$

따라서 정수 x는 -1, 0, 1이므로 모든 정수 x의 값의 합은

$-1+0+1=0$

09 답 5

풀이 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=\log_2 x \qquad \therefore y=-\log_2 x$

함수 $y=-\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-3=-\log_2 (x+2)$

$\therefore y=-\log_2 (x+2)+3$

이 식과 $y=-\log_2 (x+a)+b$가 일치하므로

$a=2,\ b=3$

$\therefore a+b=5$

10 답 50

풀이 $\mathrm{A}(0,\ \log_5 2),\ \mathrm{B}(0,\ \log_5 a)$이고 $\overline{\mathrm{AB}}=2$이므로

$\log_5 a-\log_5 2=2$

$\log_5 a=2+\log_5 2,\ \log_5 a=\log_5 5^2+\log_5 2$

$\log_5 a=\log_5 50 \qquad \therefore a=50$

11 답 2

풀이 $y=\log_2 (x+a)$에서 밑이 2이고 $2>1$이므로

x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

따라서 $x=33$일 때, 함수 $y=\log_2 (x+a)$가 최댓값 5를 가지므로

$5=\log_2 (33+a)$

즉, $33+a=2^5$이므로 $a=-1$

따라서 함수 $y=\log_2 (x-1)$의 최솟값은 $x=5$일 때

$\log_2 (5-1)=\log_2 4=2$

12 답 10

풀이 $y=\log x\times\log\dfrac{100}{x}=\log x\times(\log 100-\log x)$

$\quad=-(\log x)^2+2\log x$

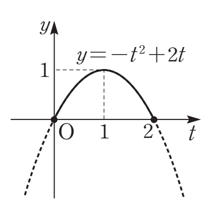
$\log x=t$로 놓으면

$y=-t^2+2t=-(t-1)^2+1$

이때 $1\le x\le 100$이고, $10>1$이므로

$\log 1\le\log x\le\log 100$

$\therefore 0\le t\le 2$



따라서 $0\le t\le 2$에서 함수

$y=-(t-1)^2+1$은 $t=1$일 때 최댓값 1을 갖는다.

$t=\log x=1$일 때, 즉 $x=10$일 때 최댓값 1을 가지므로

$a=10,\ m=1$

$\therefore \dfrac{a}{m}=10$

13 답 -12

풀이 로그의 밑 조건에서

$x^2-1>0,\ x^2-1\ne 1,\ x+11>0,\ x+11\ne 1$ ...... ㉠

$\log_{(x^2-1)} 2=\log_{(x+11)} 2$에서

$x^2-1=x+11,\ x^2-x-12=0$

$(x+3)(x-4)=0 \qquad \therefore x=-3$ 또는 $x=4$

㉠에서 $x=-3$ 또는 $x=4$

따라서 모든 근의 곱은

$-3\times 4=-12$

14 답 $x=8$

풀이 $x=2$를 주어진 방정식에 대입하면

$(a+1)^2-3\times 2+2=0,\ a^2+2a-3=0$

$(a+3)(a-1)=0$

이때 $a>0$이므로 $a=1$

따라서 주어진 방정식은

$(1+\log_2 x)^2-3\log_2 x^2+2=0$

$1+2\log_2 x+(\log_2 x)^2-6\log_2 x+2=0$

$(\log_2 x)^2-4\log_2 x+3=0$

$\log_2 x=t$로 놓으면

$t^2-4t+3=0,\ (t-1)(t-3)=0$

$t=1$ 또는 $t=3$

$\log_2 x=1$에서 $x=2$

$\log_2 x=3$에서 $x=2^3=8$

따라서 나머지 한 근은 $x=8$

15 답 2

풀이 $(\log x)^2-k\log x+3-k\ge 0$에서

$\log x=t$로 놓으면

$t^2-kt+3-k\ge 0$

이 부등식이 항상 성립하기 위해서는 이차방정식

$t^2-kt+3-k=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=(-k)^2-4\times 1\times(3-k)\le 0$

$k^2+4k-12\le 0,\ (k+6)(k-2)\le 0$

$\therefore -6\le k\le 2$

따라서 실수 k의 최댓값은 2이다.

16 답 $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$배

풀이 투과도를 x, 처음 쏘인 빛의 양을 I_0, 투과된 빛의 양을 I라고 하면

$\dfrac{I}{I_0}=x\ (x>0)$

이때 사진 농도가 $\dfrac{1}{2}$ 이상이므로

$-\log x\ge\dfrac{1}{2},\ \log x\le-\dfrac{1}{2}$

$\log x\le\log 10^{-\frac{1}{2}} \qquad \therefore 0<x\le 10^{-\frac{1}{2}}$

따라서 투과된 빛의 양은 처음 쏘인 빛의 양의 최대 $10^{-\frac{1}{2}}$배, 즉 $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$배이다.

Ⅱ 삼각함수

Ⅱ-1 | 삼각함수의 뜻 068-081쪽

01 답 (1) $360^\circ \times n+30^\circ$ (단, n은 정수)
(2) $360^\circ \times n+120^\circ$ (단, n은 정수)
(3) $360^\circ \times n+250^\circ$ (단, n은 정수)

풀이 (1) 동경 OP가 나타내는 한 각이
$\alpha^\circ=30^\circ$ $(0^\circ \le \alpha^\circ < 360^\circ)$이므로 일반각은
$360^\circ \times n+30^\circ$ (단, n은 정수)
(2) 동경 OP가 나타내는 한 각이
$\alpha^\circ=120^\circ$ $(0^\circ \le \alpha^\circ < 360^\circ)$이므로 일반각은
$360^\circ \times n+120^\circ$ (단, n은 정수)
(3) 동경 OP가 나타내는 한 각이
$\alpha^\circ=360^\circ-110^\circ=250^\circ$ $(0^\circ \le \alpha^\circ < 360^\circ)$이므로 일반각은
$360^\circ \times n+250^\circ$ (단, n은 정수)

02 답 ㄷ, ㅁ

풀이 ㄷ. $405^\circ=360^\circ+45^\circ$
ㄹ. $585^\circ=360^\circ+225^\circ$
ㅁ. $765^\circ=360^\circ \times 2+45^\circ$
따라서 45°를 나타내는 동경과 일치하는 것은 ㄷ, ㅁ이다.

03 답 ㄱ, ㄹ

풀이 $375^\circ=360^\circ+15^\circ$
ㄷ. $555^\circ=360^\circ+195^\circ$
ㄹ. $735^\circ=360^\circ \times 2+15^\circ$
ㅁ. $915^\circ=360^\circ \times 2+195^\circ$
따라서 375°를 나타내는 동경과 일치하는 것은 ㄱ, ㄹ이다.

04 답 (1) 제1사분면 (2) 제2사분면 (3) 제3사분면
(4) 제2사분면 (5) 제4사분면 (6) 제4사분면

풀이 (1) $420^\circ=360^\circ+60^\circ$
따라서 420°는 제1사분면의 각이다.
(2) $840^\circ=360^\circ \times 2+120^\circ$
따라서 840°는 제2사분면의 각이다.
(3) $1320^\circ=360^\circ \times 3+240^\circ$
따라서 1320°는 제3사분면의 각이다.
(4) $-625^\circ=360^\circ \times (-2)+95^\circ$
따라서 -625°는 제2사분면의 각이다.
(5) $-1500^\circ=360^\circ \times (-5)+300^\circ$
따라서 -1500°는 제4사분면의 각이다.
(6) $-1830^\circ=360^\circ \times (-6)+330^\circ$
따라서 -1830°는 제4사분면의 각이다.

05 답 (1) 제1사분면, 제3사분면
(2) 제1사분면, 제2사분면, 제4사분면
(3) 제1사분면, 제3사분면, 제4사분면

풀이 (1) θ가 제2사분면의 각이므로
$360^\circ \times n+90^\circ < \theta < 360^\circ \times n+180^\circ$ (n은 정수)
$\therefore 180^\circ \times n+45^\circ < \frac{\theta}{2} < 180^\circ \times n+90^\circ$
(i) $n=2k$ (k는 정수)일 때
$180^\circ \times 2k+45^\circ < \frac{\theta}{2} < 180^\circ \times 2k+90^\circ$
$\therefore 360^\circ \times k+45^\circ < \frac{\theta}{2} < 360^\circ \times k+90^\circ$
따라서 $\frac{\theta}{2}$는 제1사분면의 각이다.
(ii) $n=2k+1$ (k는 정수)일 때
$180^\circ \times (2k+1)+45^\circ < \frac{\theta}{2} < 180^\circ \times (2k+1)+90^\circ$
$\therefore 360^\circ \times k+225^\circ < \frac{\theta}{2} < 360^\circ \times k+270^\circ$
따라서 $\frac{\theta}{2}$는 제3사분면의 각이다.
(i), (ii)에서 $\frac{\theta}{2}$를 나타내는 동경이 존재하는 사분면은 제1사분면, 제3사분면이다.

(2) θ가 제2사분면의 각이므로
$360^\circ \times n+90^\circ < \theta < 360^\circ \times n+180^\circ$ (n은 정수)
$\therefore 120^\circ \times n+30^\circ < \frac{\theta}{3} < 120^\circ \times n+60^\circ$
(i) $n=3k$ (k는 정수)일 때
$120^\circ \times 3k+30^\circ < \frac{\theta}{3} < 120^\circ \times 3k+60^\circ$
$\therefore 360^\circ \times k+30^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k+60^\circ$
따라서 $\frac{\theta}{3}$는 제1사분면의 각이다.
(ii) $n=3k+1$ (k는 정수)일 때
$120^\circ \times (3k+1)+30^\circ < \frac{\theta}{3} < 120^\circ \times (3k+1)+60^\circ$
$\therefore 360^\circ \times k+150^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k+180^\circ$
따라서 $\frac{\theta}{3}$는 제2사분면의 각이다.
(iii) $n=3k+2$ (k는 정수)일 때
$120^\circ \times (3k+2)+30^\circ < \frac{\theta}{3} < 120^\circ \times (3k+2)+60^\circ$
$\therefore 360^\circ \times k+270^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k+300^\circ$
따라서 $\frac{\theta}{3}$는 제4사분면의 각이다.
(i), (ii), (iii)에서 $\frac{\theta}{3}$를 나타내는 동경이 존재하는 사분면은 제1사분면, 제2사분면, 제4사분면이다.

(3) θ가 제3사분면의 각이므로
$360^\circ \times n+180^\circ < \theta < 360^\circ \times n+270^\circ$ (n은 정수)
$\therefore 120^\circ \times n+60^\circ < \frac{\theta}{3} < 120^\circ \times n+90^\circ$

(ⅰ) $n=3k$ (k는 정수)일 때

$120° \times 3k+60° < \frac{\theta}{3} < 120° \times 3k+90°$

$\therefore$ $360° \times k+60° < \frac{\theta}{3} < 360° \times k+90°$

따라서 $\frac{\theta}{3}$는 제1사분면의 각이다.

(ⅱ) $n=3k+1$ (k는 정수)일 때

$120° \times (3k+1)+60° < \frac{\theta}{3} < 120° \times (3k+1)+90°$

$\therefore$ $360° \times k+180° < \frac{\theta}{3} < 360° \times k+210°$

따라서 $\frac{\theta}{3}$는 제3사분면의 각이다.

(ⅲ) $n=3k+2$ (k는 정수)일 때

$120° \times (3k+2)+60° < \frac{\theta}{3} < 120° \times (3k+2)+90°$

$\therefore$ $360° \times k+300° < \frac{\theta}{3} < 360° \times k+330°$

따라서 $\frac{\theta}{3}$는 제4사분면의 각이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $\frac{\theta}{3}$를 나타내는 동경이 존재하는 사분면은 제1사분면, 제3사분면, 제4사분면이다.

06 답 (1) $15°$, $45°$, $75°$ (2) $135°$ (3) $60°$ (4) $162°$

풀이 (1) 각 θ를 나타내는 동경과 각 13θ를 나타내는 동경이 원점에 대하여 대칭이므로

$13\theta-\theta=360° \times n+180°$ (n은 정수)

$12\theta=360° \times n+180°$

$\theta=30° \times n+15°$

$\therefore$ $\theta=15°, 45°, \underline{75°}, 105°, \cdots$

이 중에서 예각의 크기는 $15°$, $45°$, $\underline{75°}$이다.

(2) 각 θ를 나타내는 동경과 각 3θ를 나타내는 동경이 y축에 대하여 대칭이므로

$\theta+3\theta=360° \times n+180°$ (n은 정수)

$4\theta=360° \times n+180°$

$\theta=90° \times n+45°$

$\therefore$ $\theta=45°, 135°, 225°, \cdots$

이 중에서 둔각의 크기는 $135°$이다.

(3) 각 θ를 나타내는 동경과 각 5θ를 나타내는 동경이 x축에 대하여 대칭이므로

$\theta+5\theta=360° \times n$ (n은 정수)

$6\theta=360° \times n$

$\theta=60° \times n$

$\therefore$ $\theta=60°, 120°, \cdots$

이 중에서 예각의 크기는 $60°$이다.

(4) 각 θ를 나타내는 동경과 각 4θ를 나타내는 동경이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$\theta+4\theta=360° \times n+90°$ (n은 정수)

$5\theta=360° \times n+90°$

$\theta=72° \times n+18°$

$\therefore$ $\theta=18°, 90°, 162°, 234°, \cdots$

이 중에서 둔각의 크기는 $162°$이다.

07 답 (1) $18°$ (2) $72°$ (3) $\frac{2}{3}\pi$ (4) $\frac{5}{6}\pi$ (5) $\frac{5}{4}\pi$

풀이 (1) $\frac{\pi}{10} \times \frac{180°}{\pi}=\underline{18°}$

(2) $\frac{2}{5}\pi \times \frac{180°}{\pi}=72°$

(3) $120 \times \frac{\pi}{180}=\frac{2}{3}\pi$

(4) $150 \times \frac{\pi}{180}=\frac{5}{6}\pi$

(5) $225 \times \frac{\pi}{180}=\frac{5}{4}\pi$

08 답 (1) $\theta=2n\pi+\frac{\pi}{4}$ (단, n은 정수)

(2) $\theta=2n\pi+\frac{\pi}{3}$ (단, n은 정수)

(3) $\theta=2n\pi+\frac{7}{5}\pi$ (단, n은 정수)

(4) $\theta=2n\pi+\frac{7}{4}\pi$ (단, n은 정수)

(5) $\theta=2n\pi+\pi$ (단, n은 정수)

풀이 (1) $\theta=\underline{2n\pi+\frac{\pi}{4}}$ (단, n은 정수)

(2) $\frac{13}{3}\pi=2\pi \times 2+\frac{\pi}{3}$

$\therefore$ $\theta=2n\pi+\frac{\pi}{3}$ (단, n은 정수)

(3) $\frac{27}{5}\pi=2\pi \times 2+\frac{7}{5}\pi$

$\therefore$ $\theta=2n\pi+\frac{7}{5}\pi$ (단, n은 정수)

(4) $-\frac{17}{4}\pi=2\pi \times (-3)+\frac{7}{4}\pi$

$\therefore$ $\theta=2n\pi+\frac{7}{4}\pi$ (단, n은 정수)

(5) $-5\pi=2\pi \times (-3)+\pi$

$\therefore$ $\theta=2n\pi+\pi$ (단, n은 정수)

09 답 (1) 호의 길이: $\frac{20}{3}\pi$, 넓이: $\frac{40}{3}\pi$

(2) 호의 길이: 15π, 넓이: 75π

풀이 (1) 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 중심각의 크기를 θ, 호의 길이를 l, 넓이를 S라고 하면

$r=4$, $\theta=\frac{5}{3}\pi$이므로

$l=r\theta=4 \times \frac{5}{3}\pi=\underline{\frac{20}{3}}\pi$

$S=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2} \times 4^2 \times \frac{5}{3}\pi=\underline{\frac{40}{3}}\pi$

(2) 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 중심각의 크기를 θ, 호의 길이를 l, 넓이를 S라고 하면 $r=10$, $\theta=\frac{3}{2}\pi$이므로

$l=r\theta=10 \times \frac{3}{2}\pi=15\pi$

$S=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2} \times 10^2 \times \frac{3}{2}\pi=75\pi$

10 답 (1) 중심각의 크기: $\frac{\pi}{6}$, 넓이: 3π

(2) 중심각의 크기: $\frac{\pi}{8}$, 넓이: π

풀이 (1) 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 중심각의 크기를 θ, 호의 길이를 l, 넓이를 S라고 하면 $r=6$, $l=\pi$이므로

$l=r\theta$에서 $\pi=6\theta$ $\quad\therefore \theta=\frac{\pi}{6}$

$\therefore S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}\times 6\times\pi=3\pi$

(2) 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 중심각의 크기를 θ, 호의 길이를 l, 넓이를 S라고 하면 $r=4$, $l=\frac{\pi}{2}$이므로

$l=r\theta$에서 $\frac{\pi}{2}=4\theta$ $\quad\therefore \theta=\frac{\pi}{8}$

$\therefore S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}\times 4\times\frac{\pi}{2}=\pi$

11 답 (1) 반지름의 길이: 4, 호의 길이: π
(2) 반지름의 길이: 6, 호의 길이: π

풀이 (1) 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 중심각의 크기를 θ, 호의 길이를 l, 넓이를 S라고 하면

$\theta=45^\circ=\frac{\pi}{4}$, $S=2\pi$이므로

$S=\frac{1}{2}r^2\theta$에서 $2\pi=\frac{1}{2}\times r^2\times\frac{\pi}{4}$, $2\pi=\frac{\pi}{8}r^2$

$2=\frac{1}{8}r^2$, $r^2=16$ $\quad\therefore r=4\ (\because r>0)$

$\therefore l=r\theta=4\times\frac{\pi}{4}=\pi$

(2) 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 중심각의 크기를 θ, 호의 길이를 l, 넓이를 S라고 하면

$\theta=30^\circ=\frac{\pi}{6}$, $S=3\pi$이므로

$S=\frac{1}{2}r^2\theta$에서 $3\pi=\frac{1}{2}\times r^2\times\frac{\pi}{6}$, $3\pi=\frac{\pi}{12}r^2$

$3=\frac{1}{12}r^2$, $r^2=36$ $\quad\therefore r=6\ (\because r>0)$

$\therefore l=r\theta=6\times\frac{\pi}{6}=\pi$

12 답 (1) 중심각의 크기: $\frac{\pi}{2}$, 반지름의 길이: 2
(2) 중심각의 크기: $\frac{2}{9}\pi$, 반지름의 길이: 6

풀이 (1) 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 중심각의 크기를 θ, 호의 길이를 l, 넓이를 S라고 하면 $l=\pi$, $S=\pi$이므로

$S=\frac{1}{2}rl$에서 $\pi=\frac{1}{2}\times r\times\pi$ $\quad\therefore r=2$

$l=r\theta$에서 $\pi=2\times\theta$ $\quad\therefore \theta=\frac{\pi}{2}$

(2) 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 중심각의 크기를 θ, 호의 길이를 l, 넓이를 S라고 하면 $l=\frac{4}{3}\pi$, $S=4\pi$이므로

$S=\frac{1}{2}rl$에서 $4\pi=\frac{1}{2}\times r\times\frac{4}{3}\pi$ $\quad\therefore r=6$

$l=r\theta$에서 $\frac{4}{3}\pi=6\times\theta$ $\quad\therefore \theta=\frac{2}{9}\pi$

13 답 (1) 중심각의 크기: π, 호의 길이: 6π
(2) 중심각의 크기: $\frac{3}{4}\pi$, 호의 길이: 15π

풀이 (1) 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 중심각의 크기를 θ, 호의 길이를 l, 넓이를 S라고 하면 $r=6$, $S=18\pi$이므로

$S=\frac{1}{2}rl$에서 $18\pi=\frac{1}{2}\times 6\times l$ $\quad\therefore l=6\pi$

$l=r\theta$에서 $6\pi=6\times\theta$ $\quad\therefore \theta=\pi$

(2) 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 중심각의 크기를 θ, 호의 길이를 l, 넓이를 S라고 하면 $r=20$, $S=150\pi$이므로

$S=\frac{1}{2}rl$에서 $150\pi=\frac{1}{2}\times 20\times l$ $\quad\therefore l=15\pi$

$l=r\theta$에서 $15\pi=20\times\theta$ $\quad\therefore \theta=\frac{3}{4}\pi$

14 답 (1) 최댓값: $\frac{25}{4}$, 반지름의 길이: $\frac{5}{2}$
(2) 최댓값: 9, 반지름의 길이: 3
(3) 최댓값: 16, 반지름의 길이: 4
(4) 최댓값: $\frac{81}{4}$, 반지름의 길이: $\frac{9}{2}$
(5) 최댓값: 36, 반지름의 길이: 6

풀이 (1) 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l이라고 하면 부채꼴의 둘레의 길이가 10이므로

$2r+l=10$ $\quad\therefore l=10-2r$

이때 $10-2r>0$, $r>0$이므로 $0<r<5$

부채꼴의 넓이를 S라고 하면

$S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r(10-2r)=-r^2+5r$

$\quad=-\left(r-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{25}{4}$

따라서 $r=\frac{5}{2}$, 즉 반지름의 길이가 $\frac{5}{2}$일 때 부채꼴의 넓이는 $\frac{25}{4}$로 최대이다.

(2) 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l이라고 하면 부채꼴의 둘레의 길이가 12이므로

$2r+l=12$ $\quad\therefore l=12-2r$

이때 $12-2r>0$, $r>0$이므로 $0<r<6$

부채꼴의 넓이를 S라고 하면

$S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r(12-2r)=-r^2+6r$

$\quad=-(r-3)^2+9$

따라서 $r=3$, 즉 반지름의 길이가 3일 때 부채꼴의 넓이는 9로 최대이다.

(3) 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l이라고 하면 부채꼴의 둘레의 길이가 16이므로

$2r+l=16$ $\quad\therefore l=16-2r$

이때 $16-2r>0$, $r>0$이므로 $0<r<8$

부채꼴의 넓이를 S라고 하면

$S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r(16-2r)=-r^2+8r$

$\quad=-(r-4)^2+16$

따라서 $r=4$, 즉 반지름의 길이가 4일 때 부채꼴의 넓이는 16으로 최대이다.

(4) 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l이라고 하면 부채꼴의 둘레의 길이가 18이므로

$2r+l=18 \qquad \therefore\ l=18-2r$

이때 $18-2r>0$, $r>0$이므로 $0<r<9$

부채꼴의 넓이를 S라고 하면

$S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r(18-2r)=-r^2+9r$

$\quad =-\left(r-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{81}{4}$

따라서 $r=\frac{9}{2}$, 즉 반지름의 길이가 $\frac{9}{2}$일 때 부채꼴의 넓이는 $\frac{81}{4}$로 최대이다.

(5) 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l이라고 하면 부채꼴의 둘레의 길이가 24이므로

$2r+l=24 \qquad \therefore\ l=24-2r$

이때 $24-2r>0$, $r>0$이므로 $0<r<12$

부채꼴의 넓이를 S라고 하면

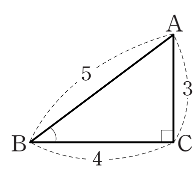
$S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r(24-2r)=-r^2+12r$

$\quad =-(r-6)^2+36$

따라서 $r=6$, 즉 반지름의 길이가 6일 때 부채꼴의 넓이는 36으로 최대이다.

15 답 (1) $\frac{3}{5}$ (2) $\frac{4}{5}$ (3) $\frac{3}{4}$

풀이 (1) 피타고라스 정리에 의하여



$\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=\overline{AB}^2$

$\overline{AC}^2+4^2=5^2$, $\overline{AC}^2=9$

$\therefore\ \overline{AC}=3\ (\because\ \overline{AC}>0)$

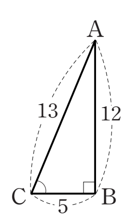
$\therefore\ \sin B=\frac{3}{5}$

(2) $\cos B=\frac{4}{5}$

(3) $\tan B=\frac{3}{4}$

16 답 (1) $\frac{12}{13}$ (2) $\frac{5}{13}$ (3) $\frac{12}{5}$

풀이 (1) 피타고라스 정리에 의하여



$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$

$12^2+\overline{BC}^2=13^2$, $\overline{BC}^2=25$

$\therefore\ \overline{BC}=5\ (\because\ \overline{BC}>0)$

$\therefore\ \sin C=\frac{12}{13}$

(2) $\cos C=\frac{5}{13}$

(3) $\tan C=\frac{12}{5}$

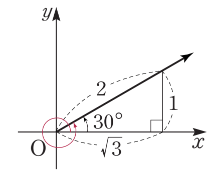
17 답 (1) $\sin 390°=\frac{1}{2}$, $\cos 390°=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan 390°=\frac{\sqrt{3}}{3}$

(2) $\sin 480°=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 480°=-\frac{1}{2}$, $\tan 480°=-\sqrt{3}$

(3) $\sin 585°=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 585°=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan 585°=1$

풀이 (1) $390°=360°+30°$이므로 주어진 각의 동경을 그리면 한 바퀴 돌린 후 $30°$만큼 더 돌리면 된다.

오른쪽 그림과 같이 동경에서 x축에 수선을 그어 직각삼각형을 만들면

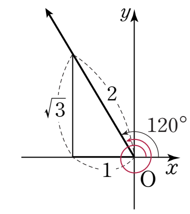


$\sin 390°=\frac{1}{2}$

$\cos 390°=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 390°=\frac{\sqrt{3}}{3}$

(2) $480°=360°+120°$이므로 주어진 각의 동경을 그리면 한 바퀴 돌린 후 $120°$만큼 더 돌리면 된다. 오른쪽 그림과 같이 동경에서 x축에 수선을 그어 직각삼각형을 만들면



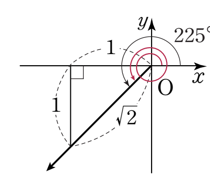
$\sin 480°=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 480°=\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}$

$\tan 480°=\frac{\sqrt{3}}{-1}=-\sqrt{3}$

(3) $585°=360°+225°$이므로 주어진 각의 동경을 그리면 한 바퀴 돌린 후 $225°$만큼 더 돌리면 된다.

오른쪽 그림과 같이 동경에서 x축에 수선을 그어 직각삼각형을 만들면



$\sin 585°=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 585°=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan 585°=\frac{-1}{-1}=1$

18 답 (1) $\sin\frac{7}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{7}{3}\pi=\frac{1}{2}$, $\tan\frac{7}{3}\pi=\sqrt{3}$

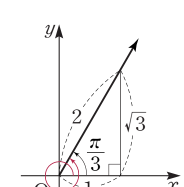
(2) $\sin\frac{17}{6}\pi=\frac{1}{2}$, $\cos\frac{17}{6}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\tan\frac{17}{6}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

(3) $\sin\frac{13}{4}\pi=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\frac{13}{4}\pi=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan\frac{13}{4}\pi=1$

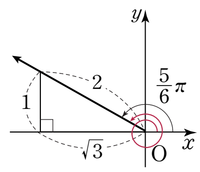
풀이 (1) $\frac{7}{3}\pi=2\pi+\frac{\pi}{3}$이므로 주어진 각의 동경을 그리면 한 바퀴 돌린 후 $\frac{\pi}{3}$만큼 더 돌리면 된다.

오른쪽 그림과 같이 동경에서 x축에 수선을 그어 직각삼각형을 만들면



$\sin\frac{7}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{7}{3}\pi=\frac{1}{2}$, $\tan\frac{7}{3}\pi=\sqrt{3}$

(2) $\frac{17}{6}\pi=2\pi+\frac{5}{6}\pi$이므로 주어진 각의 동경을 그리면 한 바퀴 돌린 후 $\frac{5}{6}\pi$만큼 더 돌리면 된다.

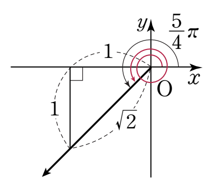


오른쪽 그림과 같이 동경에서 x축에 수선을 그어 직각삼각형을 만들면

$\sin\frac{17}{6}\pi=\frac{1}{2}$, $\cos\frac{17}{6}\pi=\frac{-\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\tan\frac{17}{6}\pi=\frac{1}{-\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

(3) $\frac{13}{4}\pi=2\pi+\frac{5}{4}\pi$이므로 주어진 각의 동경을 그리면 한 바퀴 돌린 후 $\frac{5}{4}\pi$만큼 더 돌리면 된다.



오른쪽 그림과 같이 동경에서 x축에 수선을 그어 직각삼각형을 만들면

$\sin\frac{13}{4}\pi=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\frac{13}{4}\pi=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\tan\frac{13}{4}\pi=\frac{-1}{-1}=1$

19 답 (1) $\sin\theta=\frac{3}{5}$, $\cos\theta=\frac{4}{5}$, $\tan\theta=\frac{3}{4}$

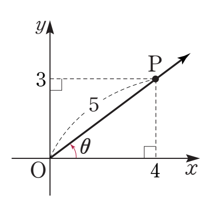
(2) $\sin\theta=-\frac{3}{5}$, $\cos\theta=-\frac{4}{5}$, $\tan\theta=\frac{3}{4}$

(3) $\sin\theta=-\frac{3}{5}$, $\cos\theta=\frac{4}{5}$, $\tan\theta=-\frac{3}{4}$

(4) $\sin\theta=\frac{8}{17}$, $\cos\theta=-\frac{15}{17}$, $\tan\theta=-\frac{8}{15}$

(5) $\sin\theta=-\frac{8}{17}$, $\cos\theta=-\frac{15}{17}$, $\tan\theta=\frac{8}{15}$

풀이 (1) $\overline{OP}=\sqrt{4^2+3^2}=5$이므로



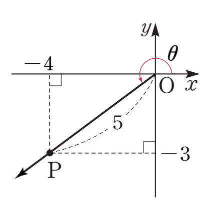
$\sin\theta=\frac{3}{5}$

$\cos\theta=\frac{4}{5}$

$\tan\theta=\frac{3}{4}$

(2) $\overline{OP}=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}=5$

이므로



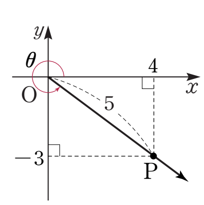
$\sin\theta=\frac{-3}{5}=-\frac{3}{5}$

$\cos\theta=\frac{-4}{5}=-\frac{4}{5}$

$\tan\theta=\frac{-3}{-4}=\frac{3}{4}$

(3) $\overline{OP}=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$

이므로



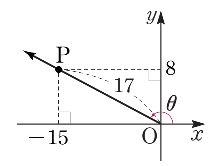
$\sin\theta=\frac{-3}{5}=-\frac{3}{5}$

$\cos\theta=\frac{4}{5}$

$\tan\theta=\frac{-3}{4}=-\frac{3}{4}$

(4) $\overline{OP}=\sqrt{(-15)^2+8^2}=17$

이므로



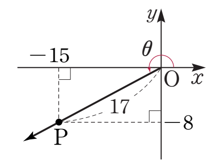
$\sin\theta=\frac{8}{17}$

$\cos\theta=\frac{-15}{17}=-\frac{15}{17}$

$\tan\theta=\frac{8}{-15}=-\frac{8}{15}$

(5) $\overline{OP}=\sqrt{(-15)^2+(-8)^2}=17$

이므로



$\sin\theta=\frac{-8}{17}=-\frac{8}{17}$

$\cos\theta=\frac{-15}{17}=-\frac{15}{17}$

$\tan\theta=\frac{-8}{-15}=\frac{8}{15}$

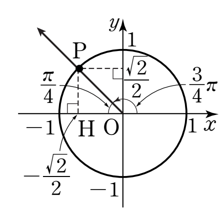
20 답 (1) $\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan\theta=-1$

(2) $\sin\theta=-\frac{1}{2}$, $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

(3) $\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta=-\frac{1}{2}$, $\tan\theta=\sqrt{3}$

(4) $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta=\frac{1}{2}$, $\tan\theta=\sqrt{3}$

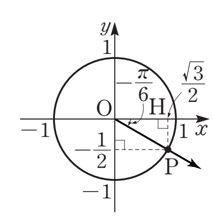
풀이 (1) 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원과 $\theta=\frac{3}{4}\pi$의 동경의 교점을 P, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라고 하면 직각삼각형 POH에서



$\angle POH=\frac{\pi}{4}$이므로 점 P의 좌표는 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$이다.

$\therefore \sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan\theta=-1$

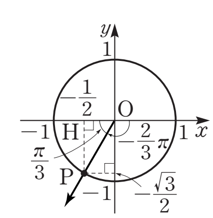
(2) 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원과 $\theta=-\frac{\pi}{6}$의 동경의 교점을 P, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라고 하면 직각삼각형 POH에서 $\angle POH=\frac{\pi}{6}$



이므로 점 P의 좌표는 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$이다.

$\therefore \sin\theta=-\frac{1}{2}$, $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

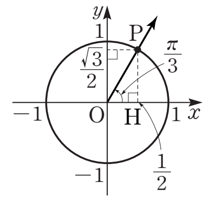
(3) 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원과 $\theta=-\frac{2}{3}\pi$의 동경의 교점을 P, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라고 하면 직각삼각형 POH에서 $\angle POH=\frac{\pi}{3}$



이므로 점 P의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$이다.

$\therefore \sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta=-\frac{1}{2}$, $\tan\theta=\sqrt{3}$

(4) 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원과 $\theta=\frac{\pi}{3}$의 동경의 교점을 P, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라고 하면 직각삼각형 POH에서 $\angle \mathrm{POH}=\frac{\pi}{3}$이므로 점 P의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$이다.



$\therefore \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta=\frac{1}{2}$, $\tan\theta=\sqrt{3}$

21 답 (1) 제2사분면　　(2) 제3사분면　　(3) 제3사분면

풀이 (1) (i) $\sin\theta\tan\theta<0$에서

$\sin\theta>0$, $\tan\theta<0$ 또는 $\sin\theta<0$, $\tan\theta>0$

따라서 θ는 제2사분면 또는 제3사분면의 각이다.

(ii) $\sin\theta\cos\theta<0$에서

$\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$ 또는 $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$

따라서 θ는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 θ는 제2사분면의 각이다.

(2) (i) $\sin\theta\cos\theta>0$에서

$\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$ 또는 $\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$

따라서 θ는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.

(ii) $\cos\theta\tan\theta<0$에서

$\cos\theta>0$, $\tan\theta<0$ 또는 $\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$

따라서 θ는 제4사분면 또는 제3사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 θ는 제3사분면의 각이다.

(3) (i) $\frac{\sin\theta}{\tan\theta}<0$에서

$\sin\theta>0$, $\tan\theta<0$ 또는 $\sin\theta<0$, $\tan\theta>0$

따라서 θ는 제2사분면 또는 제3사분면의 각이다.

(ii) $\frac{\cos\theta}{\tan\theta}<0$에서

$\cos\theta>0$, $\tan\theta<0$ 또는 $\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$

따라서 θ는 제4사분면 또는 제3사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 θ는 제3사분면의 각이다.

22 답 (1) $\tan\theta$　　(2) $\tan\theta$

풀이 (1) θ는 제2사분면의 각이므로

$\sin\theta>0$, $\tan\theta<0$

따라서 $\tan\theta-\sin\theta<0$이므로

$|\sin\theta|-|\tan\theta-\sin\theta|$

$=\sin\theta+(\tan\theta-\sin\theta)$

$=\sin\theta+\tan\theta-\sin\theta$

$=\tan\theta$

(2) θ는 제2사분면의 각이므로

$\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$

따라서 $\cos\theta+\tan\theta<0$이므로

$\sqrt{\cos^2\theta}-\sqrt{(\cos\theta+\tan\theta)^2}$

$=-\cos\theta+(\cos\theta+\tan\theta)$

$=\tan\theta$

23 답 (1) $\sin\theta$　　(2) $-\tan\theta$

풀이 (1) θ는 제3사분면의 각이므로

$\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$

따라서 $\cos\theta+\sin\theta<0$이므로

$\sqrt{\sin^2\theta}-|\cos\theta+\sin\theta|-\sqrt[3]{(\cos\theta-\sin\theta)^3}$

$=-\sin\theta+(\cos\theta+\sin\theta)-(\cos\theta-\sin\theta)$

$=-\sin\theta+\cos\theta+\sin\theta-\cos\theta+\sin\theta$

$=\sin\theta$

(2) θ는 제3사분면의 각이므로

$\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$

따라서 $\cos\theta-\tan\theta<0$이므로

$\sqrt{\cos^2\theta}-\sqrt{(\cos\theta-\tan\theta)^2}$

$=-\cos\theta+(\cos\theta-\tan\theta)$

$=-\tan\theta$

24 답 (1) $-\cos\theta$　　(2) $-\sin\theta$　　(3) $-\cos\theta$

풀이 (1) θ는 제4사분면의 각이므로

$\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$

따라서 $\sin\theta-\cos\theta<0$이므로

$|\sin\theta|-\sqrt{(\sin\theta-\cos\theta)^2}$

$=-\sin\theta+(\sin\theta-\cos\theta)$

$=-\cos\theta$

(2) θ는 제4사분면의 각이므로

$\sin\theta<0$, $\tan\theta<0$

따라서 $\sin\theta+\tan\theta<0$이므로

$\sqrt{(\sin\theta+\tan\theta)^2}-|\tan\theta|$

$=-(\sin\theta+\tan\theta)+\tan\theta$

$=-\sin\theta-\tan\theta+\tan\theta$

$=-\sin\theta$

(3) θ는 제4사분면의 각이므로

$\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$, $\tan\theta<0$

따라서 $\cos\theta-\sin\theta>0$이므로

$\sqrt{\tan^2\theta}-\sqrt{(\cos\theta-\sin\theta)^2}+\sqrt[3]{(\tan\theta-\sin\theta)^3}$

$=-\tan\theta-(\cos\theta-\sin\theta)+(\tan\theta-\sin\theta)$

$=-\tan\theta-\cos\theta+\sin\theta+\tan\theta-\sin\theta$

$=-\cos\theta$

25 답 (1) 2　　(2) $\frac{2}{\cos\theta}$　　(3) 1　　(4) 2

풀이 (1) $(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^2$

$=(\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$
$\quad+(\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=(1+2\sin\theta\cos\theta)+(1-2\sin\theta\cos\theta)$

$=2$

(2) $\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$

$=\frac{\cos\theta(1-\sin\theta)+\cos\theta(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}$

$=\frac{\cos\theta-\cos\theta\sin\theta+\cos\theta+\cos\theta\sin\theta}{1-\sin^2\theta}$

$=\frac{2\cos\theta}{1-\sin^2\theta}=\frac{2\cos\theta}{\cos^2\theta}=\frac{2}{\cos\theta}$

(3) $\dfrac{\cos^2\theta}{1+\sin\theta}+\cos\theta\tan\theta$

$=\dfrac{1-\sin^2\theta}{1+\sin\theta}+\cos\theta\times\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$=\dfrac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{1+\sin\theta}+\sin\theta$

$=1-\sin\theta+\sin\theta=1$

(4) $\dfrac{1-\sin^4\theta}{\cos^2\theta}+\cos^2\theta$

$=\dfrac{(1+\sin^2\theta)(1-\sin^2\theta)}{1-\sin^2\theta}+\cos^2\theta$

$=1+\sin^2\theta+\cos^2\theta=2$

26 답 (1) $\sin\theta=\dfrac{5}{13}$, $\tan\theta=-\dfrac{5}{12}$

(2) $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(3) $\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$, $\tan\theta=\sqrt{3}$

(4) $\sin\theta=-\dfrac{4}{5}$, $\tan\theta=-\dfrac{4}{3}$

풀이 (1) $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(-\dfrac{12}{13}\right)^2=\dfrac{25}{169}$

그런데 θ는 제2사분면의 각이므로 $\sin\theta>0$

$\therefore \sin\theta=\dfrac{5}{13}$

$\therefore \tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}}=-\dfrac{5}{12}$

(2) $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{3}{4}$

그런데 θ는 제4사분면의 각이므로 $\cos\theta>0$

$\therefore \cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(3) $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$

그런데 θ는 제3사분면의 각이므로 $\cos\theta<0$

$\therefore \cos\theta=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore \tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$

(4) $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2=\dfrac{16}{25}$

그런데 θ는 제4사분면의 각이므로 $\sin\theta<0$

$\therefore \sin\theta=-\dfrac{4}{5}$

$\therefore \tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=-\dfrac{4}{3}$

27 답 (1) $-\dfrac{3}{8}$ (2) $\pm\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ (3) $\pm\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

(4) $\dfrac{11}{16}$ (5) $-\dfrac{8}{3}$

풀이 (1) $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{1}{4}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$, $2\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{3}{4}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\dfrac{3}{8}$

(2) $(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1-2\sin\theta\cos\theta$

$=1-2\times\left(-\dfrac{3}{8}\right)$ ($\because$ (1))

$=\dfrac{7}{4}$

$\therefore \sin\theta-\cos\theta=\pm\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

(3) $\sin^2\theta-\cos^2\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)$

$=\dfrac{1}{2}\times\left(\pm\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)$ ($\because$ (2))

$=\pm\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

(4) $\sin^3\theta+\cos^3\theta$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)$

$=\dfrac{1}{2}\times\left\{1-\left(-\dfrac{3}{8}\right)\right\}$ ($\because$ (1))

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{11}{8}=\dfrac{11}{16}$

(5) $\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}+\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\dfrac{1}{-\frac{3}{8}}$ ($\because$ (1))

$=-\dfrac{8}{3}$

28 답 (1) $-\dfrac{\sqrt{35}}{5}$ (2) $-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

(3) $\dfrac{\sqrt{21}}{3}$ (4) $-\sqrt{2}$

풀이 (1) $(\cos\theta-\sin\theta)^2=\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta$

$=1-2\sin\theta\cos\theta$

$=1-2\times\left(-\dfrac{1}{5}\right)$

$=\dfrac{7}{5}$

이때 θ는 제2사분면의 각이므로

$\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$

$\therefore \cos\theta-\sin\theta<0$

$\therefore \cos\theta-\sin\theta=-\sqrt{\dfrac{7}{5}}=-\dfrac{\sqrt{35}}{5}$

(2) $(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1+2\sin\theta\cos\theta$

$=1+2\times\dfrac{1}{4}$

$=\dfrac{3}{2}$

이때 θ는 제3사분면의 각이므로

$\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$

$\therefore \sin\theta+\cos\theta<0$

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=-\sqrt{\dfrac{3}{2}}=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

(3) $(\cos\theta-\sin\theta)^2=\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta$

$=1-2\sin\theta\cos\theta$

$=1-2\times\left(-\frac{2}{3}\right)$

$=\frac{7}{3}$

이때 θ는 제4사분면의 각이므로

$\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$

$\therefore \cos\theta-\sin\theta>0$

$\therefore \cos\theta-\sin\theta=\sqrt{\frac{7}{3}}=\frac{\sqrt{21}}{3}$

(4) $(\cos\theta-\sin\theta)^2=\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta$

$=1-2\sin\theta\cos\theta$

$=1-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=2$

이때 θ는 제2사분면의 각이므로

$\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$

$\therefore \cos\theta-\sin\theta<0$

$\therefore \cos\theta-\sin\theta=-\sqrt{2}$

29 답 (1) $\frac{3}{4}$ (2) $-\frac{5}{6}$ (3) $-\frac{15}{8}$ (4) $2\sqrt{2}$

풀이 (1) 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$ …… ㉠

$\sin\theta\cos\theta=-\frac{a}{2}$ …… ㉡

㉠의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$ …… ㉢

㉡을 ㉢에 대입하면

$1+2\times\left(-\frac{a}{2}\right)=\frac{1}{4}$ $\quad\therefore a=\frac{3}{4}$

(2) 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=-\frac{2}{3}$ …… ㉠

$\sin\theta\cos\theta=\frac{a}{3}$ …… ㉡

㉠의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{4}{9}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{4}{9}$ …… ㉢

㉡을 ㉢에 대입하면

$1+2\times\frac{a}{3}=\frac{4}{9}$ $\quad\therefore a=-\frac{5}{6}$

(3) 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{4}$ …… ㉠

$\sin\theta\cos\theta=\frac{a}{4}$ …… ㉡

㉠의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{16}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{16}$ …… ㉢

㉡을 ㉢에 대입하면

$1+2\times\frac{a}{4}=\frac{1}{16}$ $\quad\therefore a=-\frac{15}{8}$

(4) 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=-\frac{a}{4}$ …… ㉠

$\sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{4}$ …… ㉡

㉠의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{a^2}{16}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{a^2}{16}$ …… ㉢

㉡을 ㉢에 대입하면

$1+2\times\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{a^2}{16}$, $a^2=8$

이때 $a>0$이므로

$a=2\sqrt{2}$

중단원 점검문제 | Ⅱ-1 삼각함수의 뜻 082-083쪽

01 답 $\theta=360^\circ\times n+285^\circ$ (단, n은 정수)

풀이 동경 OP가 나타내는 한 각이

$\alpha^\circ=360^\circ-75^\circ=285^\circ$ $(0^\circ\le\alpha^\circ<360^\circ)$이므로 일반각은

$\theta=360^\circ\times n+285^\circ$ (단, n은 정수)

02 답 ㄴ, ㄹ

풀이 ㄱ. $-50^\circ=360^\circ\times(-1)+310^\circ$

ㄴ. $410^\circ=360^\circ+50^\circ$

ㄷ. $-270^\circ=360^\circ\times(-1)+90^\circ$

ㄹ. $770^\circ=360^\circ\times2+50^\circ$

따라서 50°를 나타내는 동경과 일치하는 것은 ㄴ, ㄹ이다.

03 답 120°

풀이 두 각 θ, 7θ를 나타내는 동경이 일치하므로

$7\theta-\theta=360^\circ\times n$ (n은 정수)

$6\theta=360^\circ\times n$, $\theta=60^\circ\times n$

$\therefore \theta=60^\circ, 120^\circ, 180^\circ, \cdots$

이때 $90^\circ<\theta<180^\circ$이므로

$\theta=120^\circ$

04 답 120°

풀이 각 3θ를 나타내는 동경과 각 6θ를 나타내는 동경이 x축에 대하여 대칭이므로

$3\theta+6\theta=360^\circ\times n$ (n은 정수)

$9\theta=360^\circ\times n$, $\theta=40^\circ\times n$

$\therefore\ \theta=40^\circ,\ 80^\circ,\ 120^\circ,\ \cdots$

따라서 예각인 각 θ의 크기의 합은

$40^\circ+80^\circ=120^\circ$

05 답 ㄱ, ㄹ, ㅁ

풀이 ㄱ. $60^\circ=60\times\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{\pi}{3}$ (○)

ㄴ. $\dfrac{5}{8}\pi=\dfrac{5}{8}\pi\times\dfrac{180^\circ}{\pi}=112.5^\circ$ (×)

ㄷ. $135^\circ=135\times\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{3}{4}\pi$ (×)

ㄹ. $\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{2}{3}\pi\times\dfrac{180^\circ}{\pi}=120^\circ$ (○)

ㅁ. $\dfrac{5}{6}\pi=\dfrac{5}{6}\pi\times\dfrac{180^\circ}{\pi}=150^\circ$ (○)

ㅂ. $270^\circ=270\times\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{3}{2}\pi$ (×)

따라서 옳게 표현한 것은 ㄱ, ㄹ, ㅁ이다.

06 답 $117\pi\ \text{cm}^2$

풀이 (색칠한 부분의 넓이)

=(부채꼴 COD의 넓이)−(부채꼴 AOB의 넓이)

$=\left(\dfrac{1}{2}\times20^2\times\dfrac{2}{3}\pi\right)-\left(\dfrac{1}{2}\times7^2\times\dfrac{2}{3}\pi\right)$

$=\dfrac{400}{3}\pi-\dfrac{49}{3}\pi=117\pi\ (\text{cm}^2)$

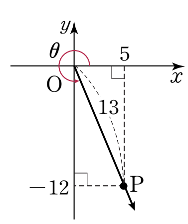
07 답 $-\dfrac{7}{13}$

풀이 $\overline{OP}=\sqrt{5^2+(-12)^2}=13$이므로

$\sin\theta=-\dfrac{12}{13},\ \cos\theta=\dfrac{5}{13}$

$\therefore\ \sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{12}{13}+\dfrac{5}{13}$

$=-\dfrac{7}{13}$



08 답 1

풀이 $\overline{OP}=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$

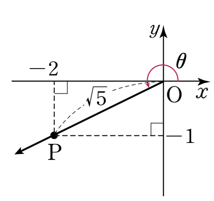
이므로

$\sin\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{5}},\ \cos\theta=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$\therefore\ \sqrt{5}\sin\theta-\sqrt{5}\cos\theta$

$=\sqrt{5}\times\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)-\sqrt{5}\times\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$

$=-1+2=1$



09 답 제2사분면

풀이 (i) $\sin\theta\cos\theta<0$에서

$\sin\theta>0,\ \cos\theta<0$ 또는 $\sin\theta<0,\ \cos\theta>0$

따라서 θ는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(ii) $\cos\theta\tan\theta>0$에서

$\cos\theta>0,\ \tan\theta>0$ 또는 $\cos\theta<0,\ \tan\theta<0$

따라서 θ는 제1사분면 또는 제2사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 θ의 동경이 존재하는 사분면은 제2사분면이다.

10 답 $2\tan\theta$

풀이 θ는 제3사분면의 각이므로

$\sin\theta<0,\ \cos\theta<0,\ \tan\theta>0$

$\therefore\ \sin\theta+\cos\theta+\tan\theta+|\sin\theta|+|\cos\theta|+|\tan\theta|$

$=\sin\theta+\cos\theta+\tan\theta-\sin\theta-\cos\theta+\tan\theta$

$=2\tan\theta$

11 답 $2(\sin\theta-\cos\theta)$

풀이 θ는 제2사분면의 각이므로

$\sin\theta>0,\ \cos\theta<0$

따라서 $\sin\theta-\cos\theta>0,\ \cos\theta-\sin\theta<0$이므로

$\sqrt{(\sin\theta-\cos\theta)^2}+\sqrt{(\cos\theta-\sin\theta)^2}$

$=\sin\theta-\cos\theta-(\cos\theta-\sin\theta)$

$=\sin\theta-\cos\theta-\cos\theta+\sin\theta$

$=2(\sin\theta-\cos\theta)$

12 답 $\dfrac{2}{1-2\cos^2\theta}\left(\text{또는 }\dfrac{2}{2\sin^2\theta-1}\right)$

풀이 $\dfrac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{1+2\sin\theta\cos\theta}+\dfrac{\tan\theta+1}{\tan\theta-1}$

$=\dfrac{(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)}{\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}+\dfrac{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+1}{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}-1}$

$=\dfrac{(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)}{(\sin\theta+\cos\theta)^2}+\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}$

$=\dfrac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}+\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}$

$=\dfrac{(\sin\theta-\cos\theta)^2+(\sin\theta+\cos\theta)^2}{(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)}$

$=\dfrac{1-2\sin\theta\cos\theta+1+2\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta-\cos^2\theta}$

$=\dfrac{2}{\sin^2\theta-\cos^2\theta}$

$=\dfrac{2}{(1-\cos^2\theta)-\cos^2\theta}$

$=\dfrac{2}{1-2\cos^2\theta}\left(\text{또는 }\dfrac{2}{2\sin^2\theta-1}\right)$

13 답 $\dfrac{12}{5}$

풀이 $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$

$=1-\left(-\dfrac{5}{13}\right)^2=\dfrac{144}{169}$

그런데 θ는 제3사분면의 각이므로 $\sin\theta<0$

$\therefore\ \sin\theta=-\dfrac{12}{13}$

$\therefore \tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{-\frac{12}{13}}{-\frac{5}{13}}=\dfrac{12}{5}$

14 답 $\dfrac{8}{3}$

풀이 $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$, $2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{3}{4}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=\dfrac{3}{8}$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}&=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\\&=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\\&=\frac{1}{\frac{3}{8}}=\frac{8}{3}\end{aligned}$$

15 답 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

풀이
$$\begin{aligned}\cos^4\theta-\sin^4\theta&=(\cos^2\theta+\sin^2\theta)(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\\&=\cos^2\theta-\sin^2\theta\\&=(1-\sin^2\theta)-\sin^2\theta\\&=1-2\sin^2\theta=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$\therefore \sin^2\theta=\dfrac{1}{4}$

그런데 θ는 제1사분면의 각이므로 $\sin\theta>0$

$\therefore \sin\theta=\dfrac{1}{2}$

$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$을 $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$에 대입하면

$\cos^2\theta=1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{3}{4}$

그런데 θ는 제1사분면의 각이므로 $\cos\theta>0$

$\therefore \cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

16 답 $-\dfrac{1}{2}$

풀이 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ …… ㉠

$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{a}{2}$ …… ㉡

㉠의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{1}{2}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ …… ㉢

㉡을 ㉢에 대입하면

$1+2\times\dfrac{a}{2}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore a=-\dfrac{1}{2}$

Ⅱ-2 | 삼각함수의 그래프 084-111쪽

01 답 (1) 2 (2) -1 (3) 3

풀이 (1) 함수 $f(x)$의 주기가 2이므로 $f(x+2)=f(x)$

$\therefore f(5)=f(3+2)=f(3)=2$

(2) 함수 $f(x)$의 주기가 3이므로 $f(x+3)=f(x)$

$$\begin{aligned}\therefore f(-2)&=f(-2+3)=f(1)=f(1+3)\\&=f(4)=-1\end{aligned}$$

(3) 함수 $f(x)$의 주기가 7이므로 $f(x+7)=f(x)$

$$\begin{aligned}\therefore f(30)&=f(23+7)=f(23)=f(16+7)=f(16)\\&=f(9+7)=f(9)=f(2+7)=f(2)=3\end{aligned}$$

02 답 (1) 기 (2) 우 (3) 기 (4) 우

풀이 (1) $f(x)=x$에서 $f(-x)=-x=-f(x)$

따라서 $f(x)$는 기함수이다.

(2) $f(x)=x^2$에서 $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$

따라서 $f(x)$는 우함수이다.

(3) $f(x)=x^3+x$에서

$$\begin{aligned}f(-x)&=(-x)^3+(-x)=-x^3-x\\&=-(x^3+x)=-f(x)\end{aligned}$$

따라서 $f(x)$는 기함수이다.

(4) $f(x)=x^4+x^2$에서

$f(-x)=(-x)^4+(-x)^2=x^4+x^2=f(x)$

따라서 $f(x)$는 우함수이다.

03 답 (1) 최댓값: 2, 최솟값: -2, 주기: 2π, 풀이 참조

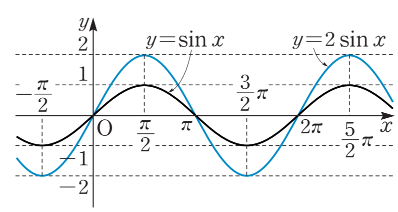
(2) 최댓값: 1, 최솟값: -1, 주기: π, 풀이 참조

(3) 최댓값: 2, 최솟값: -2, 주기: π, 풀이 참조

(4) 최댓값: 2, 최솟값: -2, 주기: 4π, 풀이 참조

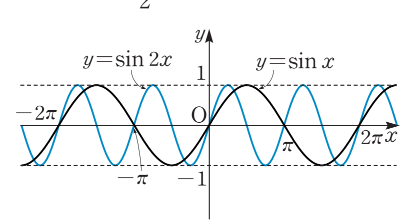
풀이 (1) 최댓값: 2, 최솟값: -2, 주기: $\dfrac{2\pi}{1}=2\pi$

함수 $y=2\sin x$의 그래프는 함수 $y=\sin x$의 그래프를 y축의 방향으로 2배 한 것이므로 다음 그림과 같다.



(2) 최댓값: 1, 최솟값: -1, 주기: $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$

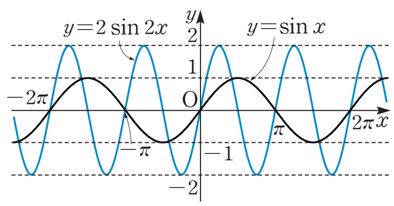
함수 $y=\sin 2x$의 그래프는 함수 $y=\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{1}{2}$배 한 것이므로 다음 그림과 같다.



(3) 최댓값: 2, 최솟값: -2, 주기: $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$

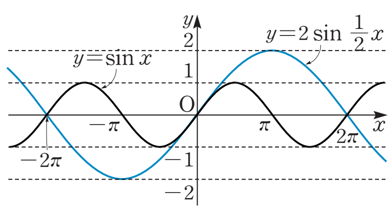
함수 $y=2\sin 2x$의 그래프는 함수 $y=\sin x$의 그래프를

y축의 방향으로 2배, x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$배 한 것이므로 다음 그림과 같다.



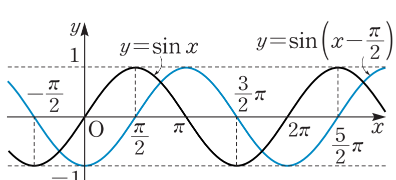
(4) 최댓값: 2, 최솟값: -2, 주기: $\dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$

함수 $y=2\sin\frac{1}{2}x$의 그래프는 함수 $y=\sin x$의 그래프를 y축의 방향으로 2배, x축의 방향으로 2배 한 것이므로 다음 그림과 같다.



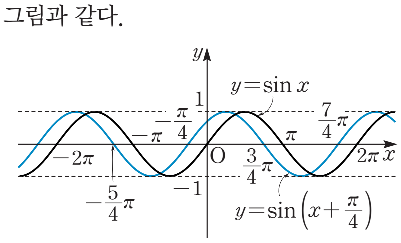
04 답 (1) 풀이 참조, 최댓값: 1, 최솟값: -1, 주기: 2π
(2) 풀이 참조, 최댓값: 1, 최솟값: -1, 주기: 2π
(3) 풀이 참조, 최댓값: 2, 최솟값: 0, 주기: 2π
(4) 풀이 참조, 최댓값: -1, 최솟값: -3, 주기: 2π
(5) 풀이 참조, 최댓값: 2, 최솟값: -2, 주기: 2π
(6) 풀이 참조, 최댓값: $\frac{1}{2}$, 최솟값: $-\frac{1}{2}$, 주기: 2π
(7) 풀이 참조, 최댓값: 5, 최솟값: 1, 주기: 2π
(8) 풀이 참조, 최댓값: $-\frac{3}{2}$, 최솟값: $-\frac{5}{2}$, 주기: 2π

풀이 (1) 함수 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프는 함수 $y=\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 것므로 다음 그림과 같다.



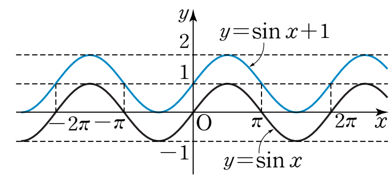
그래프에서 최댓값은 1, 최솟값은 -1, 주기는 2π이다.

(2) 함수 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$의 그래프는 함수 $y=\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{4}$만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



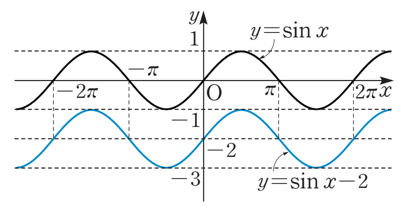
그래프에서 최댓값은 1, 최솟값은 -1, 주기는 2π이다.

(3) 함수 $y=\sin x+1$의 그래프는 함수 $y=\sin x$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



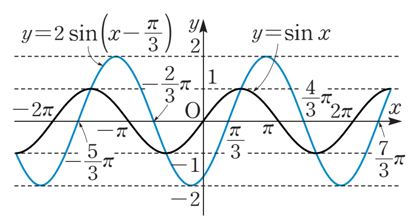
그래프에서 최댓값은 2, 최솟값은 0, 주기는 2π이다.

(4) 함수 $y=\sin x-2$의 그래프는 함수 $y=\sin x$의 그래프를 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



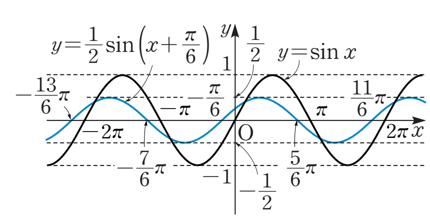
그래프에서 최댓값은 -1, 최솟값은 -3, 주기는 2π이다.

(5) 함수 $y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$의 그래프는 함수 $y=\sin x$의 그래프를 y축의 방향으로 2배 한 후, x축의 방향으로 $\frac{\pi}{3}$만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



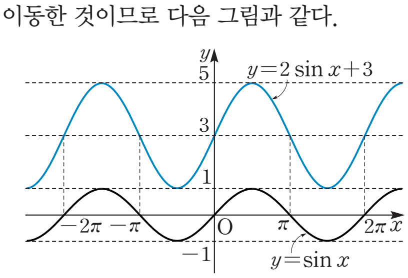
그래프에서 최댓값은 2, 최솟값은 -2, 주기는 2π이다.

(6) 함수 $y=\frac{1}{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$의 그래프는 함수 $y=\sin x$의 그래프를 y축의 방향으로 $\frac{1}{2}$배 한 후, x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{6}$만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



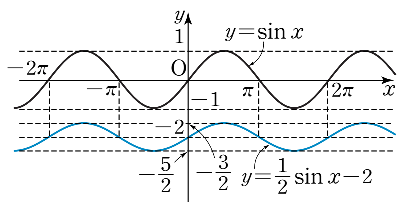
그래프에서 최댓값은 $\frac{1}{2}$, 최솟값은 $-\frac{1}{2}$, 주기는 2π이다.

(7) 함수 $y=2\sin x+3$의 그래프는 함수 $y=\sin x$의 그래프를 y축의 방향으로 2배 한 후, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



그래프에서 최댓값은 5, 최솟값은 1, 주기는 2π이다.

(8) 함수 $y=\frac{1}{2}\sin x-2$의 그래프는 함수 $y=\sin x$의 그래프를 y축의 방향으로 $\frac{1}{2}$배 한 후, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



그래프에서 최댓값은 $-\frac{3}{2}$, 최솟값은 $-\frac{5}{2}$, 주기는 2π이다.

05 답 (1) $a=6$, $b=2$, $c=2$
(2) $a=4$, $b=2$, $c=2$
(3) $a=4$, $b=1$, $c=1$
(4) $a=3$, $b=1$, $c=1$

풀이 (1) 최솟값이 -4이고 $a>0$이므로

$-a+c=-4$ …… ㉠

주기가 π이고 $b>0$이므로 $\frac{2\pi}{b}=\pi$ $\quad\therefore b=2$

$\therefore f(x)=a\sin 2x+c$

$f(0)=2$이므로 $a\sin 0+c=2$ $\quad\therefore c=2$

㉠에 $c=2$를 대입하면 $a=6$

(2) $f(x)=a\sin b\left(x+\frac{\pi}{3b}\right)-c$

최댓값이 2이고 $a>0$이므로 $a-c=2$ …… ㉠

주기가 π이고 $b>0$이므로 $\frac{2\pi}{b}=\pi$ $\quad\therefore b=2$

$\therefore f(x)=a\sin 2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-c$

$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-2$이므로 $a\sin 0-c=-2$ $\quad\therefore c=2$

㉠에 $c=2$를 대입하면 $a=4$

(3) $f(x)=a\sin\frac{1}{b}\left(x-\frac{b}{4}\pi\right)-c$

최댓값이 3이고 $a>0$이므로 $a-c=3$ …… ㉠

주기가 2π이고 $b>0$이므로 $\frac{2\pi}{\frac{1}{b}}=2\pi$ $\quad\therefore b=1$

$\therefore f(x)=a\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-c$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1$이므로 $a\sin 0-c=-1$ $\quad\therefore c=1$

㉠에 $c=1$을 대입하면 $a=4$

(4) $f(x)=a\sin b\left(x+\frac{\pi}{4b}\right)+c$

최솟값이 -2이고 $a>0$이므로

$-a+c=-2$ …… ㉠

주기가 2π이고 $b>0$이므로 $\frac{2\pi}{b}=2\pi$ $\quad\therefore b=1$

$\therefore f(x)=a\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+c$

$f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=1$이므로 $a\sin 0+c=1$ $\quad\therefore c=1$

㉠에 $c=1$을 대입하면 $a=3$

06 답 $a=3$, $b=2$, $c=\frac{\pi}{2}$

풀이 최댓값이 3, 최솟값이 -3이고 $a>0$이므로 $a=3$

주기가 $\frac{5}{4}\pi-\frac{\pi}{4}=\pi$이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=\pi$ $\quad\therefore b=2$

따라서 $y=3\sin(2x-c)=3\sin 2\left(x-\frac{c}{2}\right)$이고 주어진 그래프는 $y=3\sin 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$만큼 평행이동한 것이므로 $\frac{c}{2}=\frac{\pi}{4}$ $\quad\therefore c=\frac{\pi}{2}$

07 답 $a=2$, $b=1$, $c=\frac{\pi}{6}$

풀이 최댓값이 2, 최솟값이 -2이고 $a>0$이므로 $a=2$

주기가 $\frac{13}{6}\pi-\frac{\pi}{6}=2\pi$이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=2\pi$ $\quad\therefore b=1$

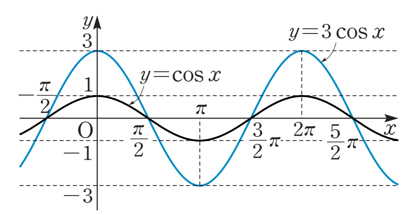
따라서 $y=2\sin(x-c)$이고 주어진 그래프는 $y=2\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{6}$만큼 평행이동한 것이므로

$c=\frac{\pi}{6}$

08 답 (1) 최댓값: 3, 최솟값: -3, 주기: 2π, 풀이 참조
(2) 최댓값: 1, 최솟값: -1, 주기: 8π, 풀이 참조
(3) 최댓값: 3, 최솟값: -3, 주기: π, 풀이 참조
(4) 최댓값: $\frac{1}{2}$, 최솟값: $-\frac{1}{2}$, 주기: 4π, 풀이 참조

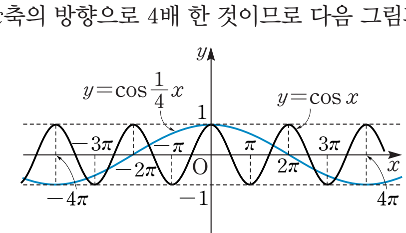
풀이 (1) 최댓값: 3, 최솟값: -3, 주기: $\frac{2\pi}{1}=2\pi$

함수 $y=3\cos x$의 그래프는 함수 $y=\cos x$의 그래프를 y축의 방향으로 3배 한 것이므로 다음 그림과 같다.



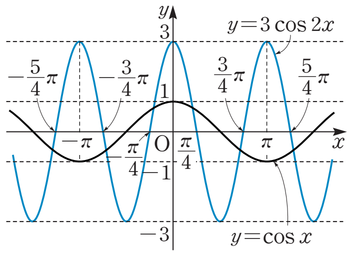
(2) 최댓값: 1, 최솟값: -1, 주기: $\frac{2\pi}{\frac{1}{4}}=8\pi$

함수 $y=\cos\frac{1}{4}x$의 그래프는 함수 $y=\cos x$의 그래프를 x축의 방향으로 4배 한 것이므로 다음 그림과 같다.



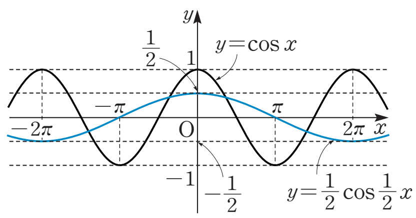
(3) 최댓값: 3, 최솟값: -3, 주기: $\frac{2\pi}{2}=\pi$

함수 $y=3\cos 2x$의 그래프는 함수 $y=\cos x$의 그래프를 y축의 방향으로 3배, x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$배 한 것이므로 다음 그림과 같다.



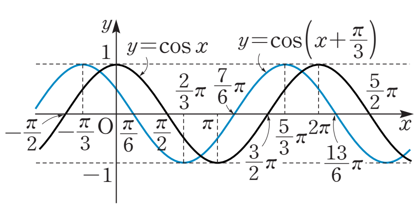
(4) 최댓값: $\frac{1}{2}$, 최솟값: $-\frac{1}{2}$, 주기: $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$

함수 $y=\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}x$의 그래프는 함수 $y=\cos x$의 그래프를 y축의 방향으로 $\frac{1}{2}$배, x축의 방향으로 2배 한 것이므로 다음 그림과 같다.



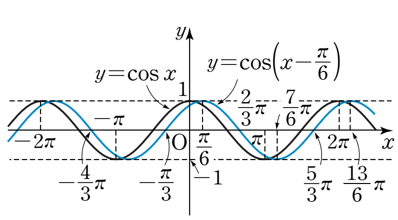
09 답 (1) 풀이 참조, 최댓값: 1, 최솟값: -1, 주기: 2π
(2) 풀이 참조, 최댓값: 1, 최솟값: -1, 주기: 2π
(3) 풀이 참조, 최댓값: 3, 최솟값: 1, 주기: 2π
(4) 풀이 참조, 최댓값: -2, 최솟값: -4, 주기: 2π
(5) 풀이 참조, 최댓값: 2, 최솟값: -2, 주기: 2π
(6) 풀이 참조, 최댓값: $\frac{1}{2}$, 최솟값: $-\frac{1}{2}$, 주기: 2π
(7) 풀이 참조, 최댓값: 2, 최솟값: -4, 주기: 2π
(8) 풀이 참조, 최댓값: $\frac{7}{2}$, 최솟값: $\frac{5}{2}$, 주기: 2π

풀이 (1) 함수 $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$의 그래프는 함수 $y=\cos x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{3}$만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



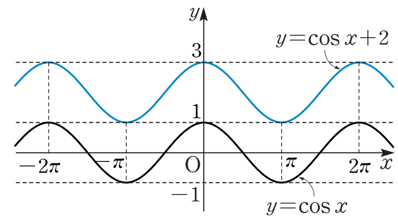
그래프에서 최댓값은 1, 최솟값은 -1, 주기는 2π이다.

(2) 함수 $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$의 그래프는 함수 $y=\cos x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{6}$만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



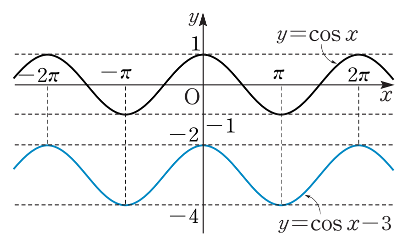
그래프에서 최댓값은 1, 최솟값은 -1, 주기는 2π이다.

(3) 함수 $y=\cos x+2$의 그래프는 함수 $y=\cos x$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



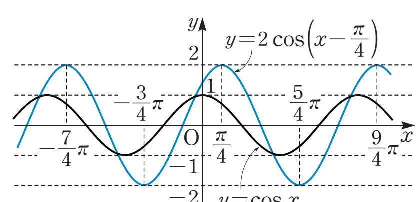
그래프에서 최댓값은 3, 최솟값은 1, 주기는 2π이다.

(4) 함수 $y=\cos x-3$의 그래프는 함수 $y=\cos x$의 그래프를 y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



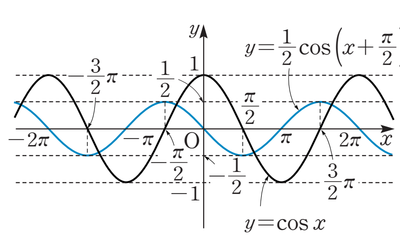
그래프에서 최댓값은 -2, 최솟값은 -4, 주기는 2π이다.

(5) 함수 $y=2\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$의 그래프는 함수 $y=\cos x$의 그래프를 y축의 방향으로 2배 한 후, x축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



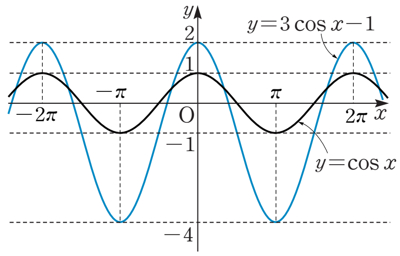
그래프에서 최댓값은 2, 최솟값은 -2, 주기는 2π이다.

(6) 함수 $y=\frac{1}{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프는 함수 $y=\cos x$의 그래프를 y축의 방향으로 $\frac{1}{2}$배 한 후, x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



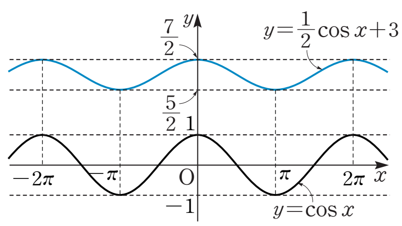
그래프에서 최댓값은 $\frac{1}{2}$, 최솟값은 $-\frac{1}{2}$, 주기는 2π이다.

(7) 함수 $y=3\cos x-1$의 그래프는 함수 $y=\cos x$의 그래프를 y축의 방향으로 3배 한 후, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



그래프에서 최댓값은 2, 최솟값은 -4, 주기는 2π이다.

(8) 함수 $y=\frac{1}{2}\cos x+3$의 그래프는 함수 $y=\cos x$의 그래프를 y축의 방향으로 $\frac{1}{2}$배 한 후, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



그래프에서 최댓값은 $\frac{7}{2}$, 최솟값은 $\frac{5}{2}$, 주기는 2π이다.

10 답 (1) $a=2,\ b=2,\ c=1$ (2) $a=1,\ b=1,\ c=2$
(3) $a=1,\ b=1,\ c=-2$ (4) $a=2,\ b=2,\ c=3$

풀이 (1) $f(x)=a\cos b\left(x+\frac{\pi}{2b}\right)+c$

최솟값이 -1이고 $a>0$이므로 $-a+c=-1$ …… ㉠

주기가 π이고 $b>0$이므로 $\frac{2\pi}{b}=\pi$ $\quad\therefore b=2$

$\therefore f(x)=a\cos 2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+c$

$f(-\pi)=1$이므로 $a\cos 2\left(-\pi+\frac{\pi}{4}\right)+c=1$

$a\cos\left(-\frac{3}{2}\pi\right)+c=1 \quad\therefore c=1$

㉠에 $c=1$을 대입하면 $a=2$

(2) $f(x)=a\cos b\left(x+\frac{\pi}{b}\right)-c$

최댓값이 -1이고 $a>0$이므로 $a-c=-1$ …… ㉠

주기가 2π이고 $b>0$이므로 $\frac{2\pi}{b}=2\pi$ $\quad\therefore b=1$

$\therefore f(x)=a\cos(x+\pi)-c$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-2$이므로 $a\cos\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)-c=-2$

$a\cos\frac{3}{2}\pi-c=-2 \quad\therefore c=2$

㉠에 $c=2$를 대입하면 $a=1$

(3) $f(x)=a\cos b\left(x-\frac{\pi}{b}\right)-c$

최솟값이 1이고 $a>0$이므로 $-a-c=1$ …… ㉠

주기가 2π이고 $b>0$이므로 $\frac{2\pi}{b}=2\pi$ $\quad\therefore b=1$

$\therefore f(x)=a\cos(x-\pi)-c$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$이므로 $a\cos\left(\frac{\pi}{2}-\pi\right)-c=2$

$a\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)-c=2 \quad\therefore c=-2$

㉠에 $c=-2$를 대입하면 $a=1$

(4) $f(x)=a\cos b\left(x+\frac{\pi}{b}\right)+c$

최댓값이 5이고 $a>0$이므로 $a+c=5$ …… ㉠

주기가 π이고 $b>0$이므로 $\frac{2\pi}{b}=\pi$ $\quad\therefore b=2$

$\therefore f(x)=a\cos 2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+c$

$f(\pi)=1$이므로 $a\cos 2\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)+c=1$

$a\cos 3\pi+c=1 \quad\therefore -a+c=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2,\ c=3$

11 답 $a=1,\ b=2,\ c=1$

풀이 주기가 π이므로 $\frac{2\pi}{b}=\pi$ $\quad\therefore b=2$

$a>0$이고 최댓값이 2, 최솟값이 0이므로

$a+c=2,\ -a+c=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1,\ c=1$

12 답 $a=3,\ b=1,\ c=\frac{\pi}{6}$

풀이 주기가 $\frac{13}{6}\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{12}{6}\pi=2\pi$이므로

$\frac{2\pi}{b}=2\pi \quad\therefore b=1$

최댓값이 3, 최솟값이 -3이므로 $a=3$

$\therefore y=3\cos(x-c)$

이때 그래프에서 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=3$이므로

$3\cos\left(\frac{\pi}{6}-c\right)=3$

$\cos\left(\frac{\pi}{6}-c\right)=1$

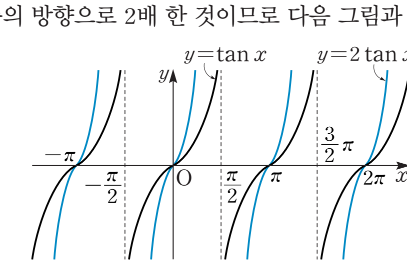
따라서 $\frac{\pi}{6}-c=\cdots,\ -4\pi,\ -2\pi,\ 0,\ 2\pi,\ 4\pi,\ \cdots$이고

$0\le c\le\frac{\pi}{2}$이므로 $c=\frac{\pi}{6}$

13 답 (1) 최댓값, 최솟값: 없다., 주기: π, 풀이 참조
(2) 최댓값, 최솟값: 없다., 주기: π, 풀이 참조
(3) 최댓값, 최솟값: 없다., 주기: 4π, 풀이 참조
(4) 최댓값, 최솟값: 없다., 주기: $\frac{\pi}{4}$, 풀이 참조

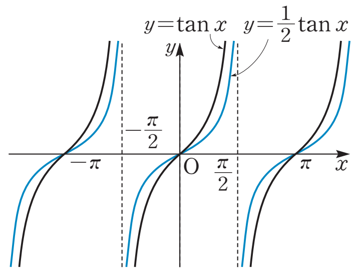
풀이 (1) 최댓값, 최솟값: 없다., 주기: π

함수 $y=2\tan x$의 그래프는 함수 $y=\tan x$의 그래프를 y축의 방향으로 2배 한 것이므로 다음 그림과 같다.



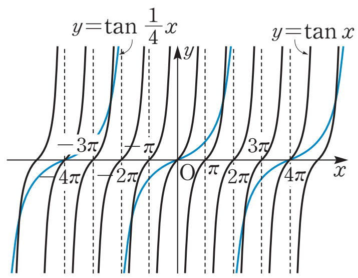
(2) 최댓값, 최솟값: 없다., 주기: π

함수 $y=\frac{1}{2}\tan x$의 그래프는 함수 $y=\tan x$의 그래프를 y축의 방향으로 $\frac{1}{2}$배 한 것이므로 다음 그림과 같다.



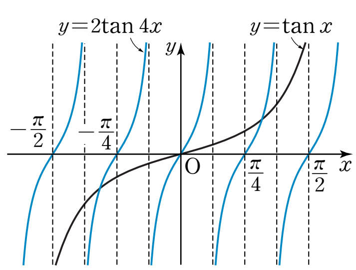
(3) 최댓값, 최솟값: 없다., 주기: $\dfrac{\pi}{\frac{1}{4}}=4\pi$

함수 $y=\tan\frac{1}{4}x$의 그래프는 함수 $y=\tan x$의 그래프를 x축의 방향으로 4배 한 것이므로 다음 그림과 같다.



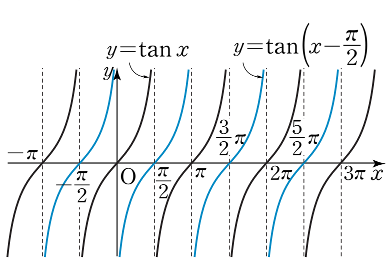
(4) 최댓값, 최솟값: 없다., 주기: $\frac{\pi}{4}$

함수 $y=2\tan 4x$의 그래프는 함수 $y=\tan x$의 그래프를 y축의 방향으로 2배 하고, x축의 방향으로 $\frac{1}{4}$배 한 것이므로 다음 그림과 같다.



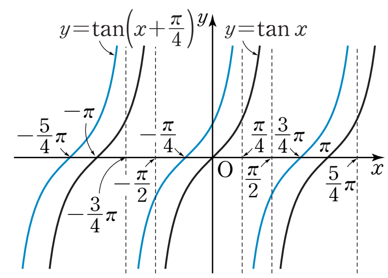
14 답 (1) 풀이 참조, 최댓값, 최솟값: 없다., 주기: π
(2) 풀이 참조, 최댓값, 최솟값: 없다., 주기: π
(3) 풀이 참조, 최댓값, 최솟값: 없다., 주기: π
(4) 풀이 참조, 최댓값, 최솟값: 없다., 주기: π
(5) 풀이 참조, 최댓값, 최솟값: 없다., 주기: π
(6) 풀이 참조, 최댓값, 최솟값: 없다., 주기: π
(7) 풀이 참조, 최댓값, 최솟값: 없다., 주기: π
(8) 풀이 참조, 최댓값, 최솟값: 없다., 주기: π

풀이 (1) 함수 $y=\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프는 함수 $y=\tan x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



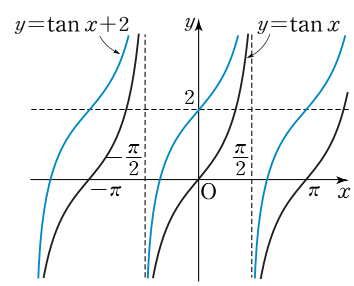
그래프에서 최댓값, 최솟값은 없고, 주기는 π이다.

(2) 함수 $y=\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$의 그래프는 함수 $y=\tan x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{4}$만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



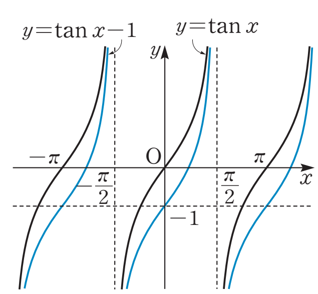
그래프에서 최댓값, 최솟값은 없고, 주기는 π이다.

(3) 함수 $y=\tan x+2$의 그래프는 함수 $y=\tan x$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



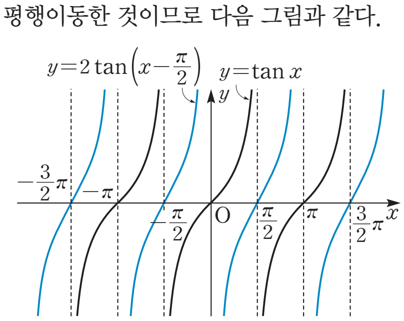
그래프에서 최댓값, 최솟값은 없고, 주기는 π이다.

(4) 함수 $y=\tan x-1$의 그래프는 함수 $y=\tan x$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



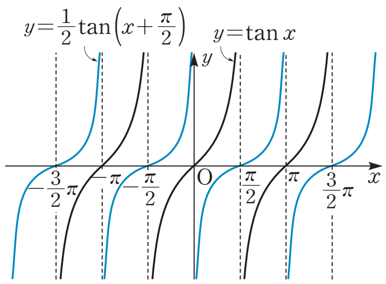
그래프에서 최댓값, 최솟값은 없고, 주기는 π이다.

(5) 함수 $y=2\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프는 함수 $y=\tan x$의 그래프를 y축의 방향으로 2배 한 후, x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



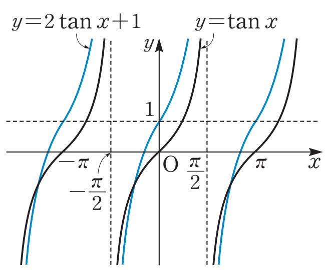
그래프에서 최댓값, 최솟값은 없고, 주기는 π이다.

(6) 함수 $y=\frac{1}{2}\tan\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프는 함수 $y=\tan x$의 그래프를 y축의 방향으로 $\frac{1}{2}$배 한 후, x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



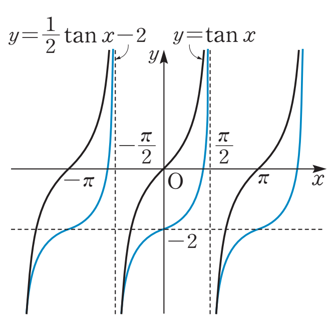
그래프에서 최댓값, 최솟값은 없고, 주기는 π이다.

(7) 함수 $y=2\tan x+1$의 그래프는 함수 $y=\tan x$의 그래프를 y축의 방향으로 2배 한 후, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



그래프에서 최댓값, 최솟값은 없고, 주기는 π이다.

(8) 함수 $y=\frac{1}{2}\tan x-2$의 그래프는 함수 $y=\tan x$의 그래프를 y축의 방향으로 $\frac{1}{2}$배 한 후, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



그래프에서 최댓값, 최솟값은 없고, 주기는 π이다.

15 답 (1) $x=2n\pi+\pi$ (단, n은 정수)
(2) $x=\frac{n}{3}\pi+\frac{\pi}{6}$ (단, n은 정수)
(3) $x=\frac{n}{4}\pi+\frac{\pi}{8}$ (단, n은 정수)
(4) $x=n\pi+\frac{\pi}{3}$ (단, n은 정수)
(5) $x=n\pi+\frac{5}{6}\pi$ (단, n은 정수)
(6) $x=n\pi+\frac{3}{4}\pi$ (단, n은 정수)
(7) $x=n\pi$ (단, n은 정수)
(8) $x=\frac{n}{2}\pi+\frac{3}{8}\pi$ (단, n은 정수)
(9) $x=\frac{n}{3}\pi+\frac{\pi}{9}$ (단, n은 정수)
(10) $x=\frac{n}{2}\pi+\frac{3}{4}\pi$ (단, n은 정수)

풀이 (1) 점근선의 방정식은 $\frac{1}{2}x=n\pi+\frac{\pi}{2}$에서
$\underline{x=2n\pi+\pi}$ (단, n은 정수)

(2) 점근선의 방정식은 $3x=n\pi+\frac{\pi}{2}$에서
$x=\frac{n}{3}\pi+\frac{\pi}{6}$ (단, n은 정수)

(3) 점근선의 방정식은 $4x=n\pi+\frac{\pi}{2}$에서
$x=\frac{n}{4}\pi+\frac{\pi}{8}$ (단, n은 정수)

(4) 점근선의 방정식은 $x+\frac{\pi}{6}=n\pi+\frac{\pi}{2}$에서
$x=n\pi+\frac{\pi}{3}$ (단, n은 정수)

(5) 점근선의 방정식은 $x-\frac{\pi}{3}=n\pi+\frac{\pi}{2}$에서
$x=n\pi+\frac{5}{6}\pi$ (단, n은 정수)

(6) 점근선의 방정식은 $x-\frac{\pi}{4}=n\pi+\frac{\pi}{2}$에서
$x=n\pi+\frac{3}{4}\pi$ (단, n은 정수)

(7) 점근선의 방정식은 $x+\frac{\pi}{2}=n\pi+\frac{\pi}{2}$에서
$x=n\pi$ (단, n은 정수)

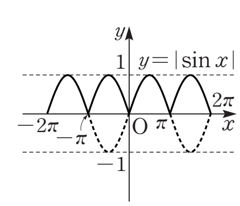
(8) 점근선의 방정식은 $2x-\frac{\pi}{4}=n\pi+\frac{\pi}{2}$에서
$2x=n\pi+\frac{3}{4}\pi$
$\therefore x=\frac{n}{2}\pi+\frac{3}{8}\pi$ (단, n은 정수)

(9) 점근선의 방정식은 $3x+\frac{\pi}{6}=n\pi+\frac{\pi}{2}$에서
$3x=n\pi+\frac{\pi}{3}$
$\therefore x=\frac{n}{3}\pi+\frac{\pi}{9}$ (단, n은 정수)

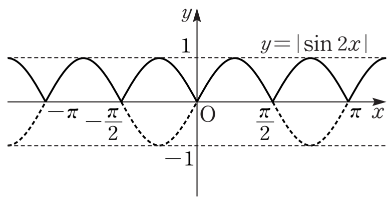
(10) 점근선의 방정식은 $2x-\pi=n\pi+\frac{\pi}{2}$에서
$2x=n\pi+\frac{3}{2}\pi$
$\therefore x=\frac{n}{2}\pi+\frac{3}{4}\pi$ (단, n은 정수)

16 답 (1) 풀이 참조, 최댓값: 1, 최솟값: 0, 주기: π
(2) 풀이 참조, 최댓값: 1, 최솟값: 0, 주기: $\frac{\pi}{2}$
(3) 풀이 참조, 최댓값: 1, 최솟값: 0, 주기: 2π
(4) 풀이 참조, 최댓값: 2, 최솟값: 0, 주기: π
(5) 풀이 참조, 최댓값: $\frac{1}{2}$, 최솟값: 0, 주기: π
(6) 풀이 참조, 최댓값: 2, 최솟값: 0, 주기: $\frac{\pi}{2}$

풀이 (1) 함수 $y=|\sin x|$의 그래프는 함수 $y=\sin x$의 그래프를 그린 후 x축의 아랫부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.
따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 최댓값은 $\underline{1}$, 최솟값은 $\underline{0}$, 주기는 $\underline{\pi}$이다.

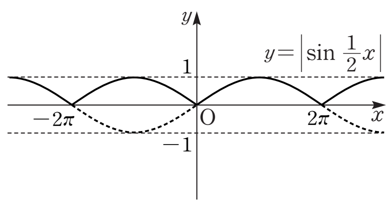


(2) 함수 $y=|\sin 2x|$의 그래프는 함수 $y=\sin 2x$의 그래프를 그린 후 x축의 아랫부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



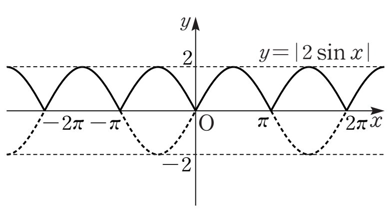
그래프에서 최댓값은 1, 최솟값은 0, 주기는 $\frac{\pi}{2}$이다.

(3) 함수 $y=\left|\sin \frac{1}{2}x\right|$의 그래프는 함수 $y=\sin \frac{1}{2}x$의 그래프를 그린 후 x축의 아랫부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



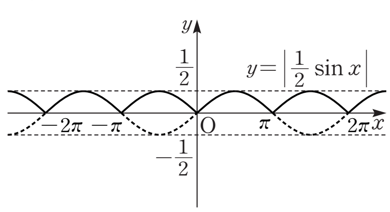
그래프에서 최댓값은 1, 최솟값은 0, 주기는 2π이다.

(4) 함수 $y=|2\sin x|$의 그래프는 함수 $y=2\sin x$의 그래프를 그린 후 x축의 아랫부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



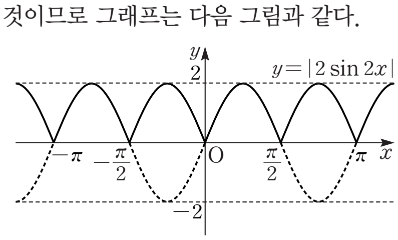
그래프에서 최댓값은 2, 최솟값은 0, 주기는 π이다.

(5) 함수 $y=\left|\frac{1}{2}\sin x\right|$의 그래프는 함수 $y=\frac{1}{2}\sin x$의 그래프를 그린 후 x축의 아랫부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



그래프에서 최댓값은 $\frac{1}{2}$, 최솟값은 0, 주기는 π이다.

(6) 함수 $y=|2\sin 2x|$의 그래프는 함수 $y=2\sin 2x$의 그래프를 그린 후 x축의 아랫부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



그래프에서 최댓값은 2, 최솟값은 0, 주기는 $\frac{\pi}{2}$이다.

17 답 (1) 풀이 참조, 최댓값: 1, 최솟값: 0, 주기: π

(2) 풀이 참조, 최댓값: 1, 최솟값: 0, 주기: $\frac{\pi}{3}$

(3) 풀이 참조, 최댓값: 3, 최솟값: 0, 주기: π

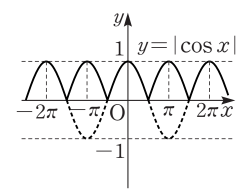
(4) 풀이 참조, 최댓값: $\frac{1}{3}$, 최솟값: 0, 주기: π

(5) 풀이 참조, 최댓값: 3, 최솟값: 0, 주기: $\frac{\pi}{2}$

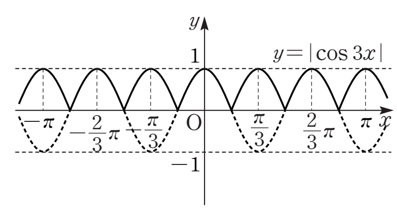
(6) 풀이 참조, 최댓값: $\frac{1}{2}$, 최솟값: 0, 주기: $\frac{\pi}{4}$

풀이 (1) 함수 $y=|\cos x|$의 그래프는 함수 $y=\cos x$의 그래프를 그린 후 x축의 아랫부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 최댓값은 1, 최솟값은 0, 주기는 π이다.

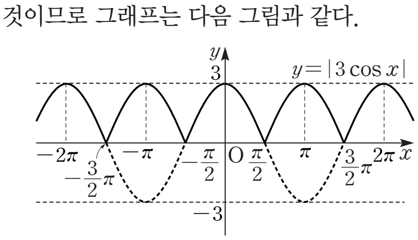


(2) 함수 $y=|\cos 3x|$의 그래프는 함수 $y=\cos 3x$의 그래프를 그린 후 x축의 아랫부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



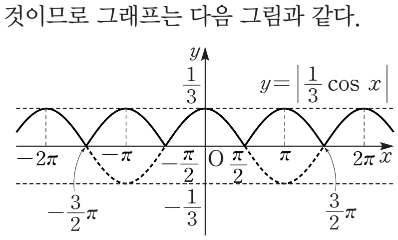
그래프에서 최댓값은 1, 최솟값은 0, 주기는 $\frac{\pi}{3}$이다.

(3) 함수 $y=|3\cos x|$의 그래프는 함수 $y=3\cos x$의 그래프를 그린 후 x축의 아랫부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



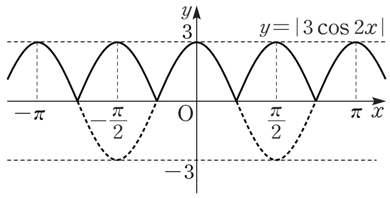
그래프에서 최댓값은 3, 최솟값은 0, 주기는 π이다.

(4) 함수 $y=\left|\frac{1}{3}\cos x\right|$의 그래프는 함수 $y=\frac{1}{3}\cos x$의 그래프를 그린 후 x축의 아랫부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



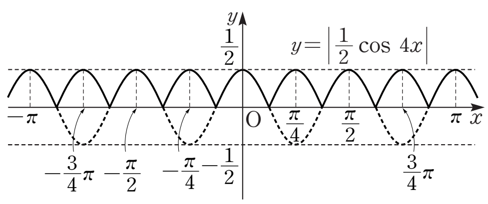
그래프에서 최댓값은 $\frac{1}{3}$, 최솟값은 0, 주기는 π이다.

(5) 함수 $y=|3\cos 2x|$의 그래프는 함수 $y=3\cos 2x$의 그래프를 그린 후 x축의 아랫부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



그래프에서 최댓값은 3, 최솟값은 0, 주기는 $\frac{\pi}{2}$이다.

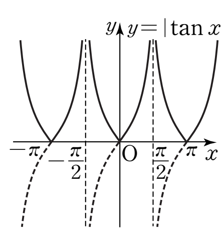
(6) 함수 $y=\left|\frac{1}{2}\cos 4x\right|$의 그래프는 함수 $y=\frac{1}{2}\cos 4x$의 그래프를 그린 후 x축의 아랫부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



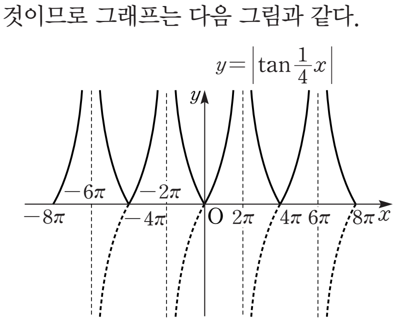
그래프에서 최댓값은 $\frac{1}{2}$, 최솟값은 0, 주기는 $\frac{\pi}{4}$이다.

18 답 (1) 풀이 참조, 최댓값: 없다., 최솟값: 0, 주기: π
(2) 풀이 참조, 최댓값: 없다., 최솟값: 0, 주기: 4π
(3) 풀이 참조, 최댓값: 없다., 최솟값: 0, 주기: π
(4) 풀이 참조, 최댓값: 없다., 최솟값: 0, 주기: π
(5) 풀이 참조, 최댓값: 없다., 최솟값: 0, 주기: 2π
(6) 풀이 참조, 최댓값: 없다., 최솟값: 0, 주기: $\frac{\pi}{2}$

풀이 (1) 함수 $y=|\tan x|$의 그래프는 함수 $y=\tan x$의 그래프를 그린 후 x축의 아랫부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.
따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 최댓값은 없고, 최솟값은 0, 주기는 π이다.

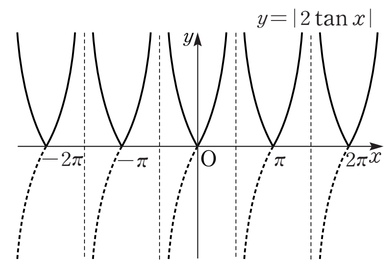


(2) 함수 $y=\left|\tan\frac{1}{4}x\right|$의 그래프는 함수 $y=\tan\frac{1}{4}x$의 그래프를 그린 후 x축의 아랫부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



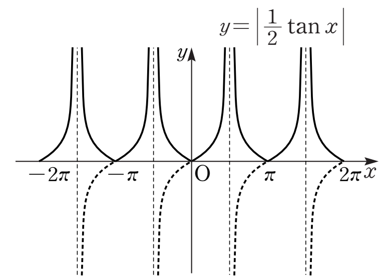
그래프에서 최댓값은 없고, 최솟값은 0, 주기는 4π이다.

(3) 함수 $y=|2\tan x|$의 그래프는 함수 $y=2\tan x$의 그래프를 그린 후 x축의 아랫부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



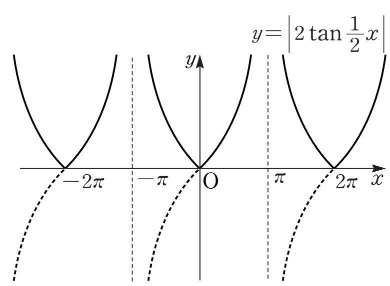
그래프에서 최댓값은 없고, 최솟값은 0, 주기는 π이다.

(4) 함수 $y=\left|\frac{1}{2}\tan x\right|$의 그래프는 함수 $y=\frac{1}{2}\tan x$의 그래프를 그린 후 x축의 아랫부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



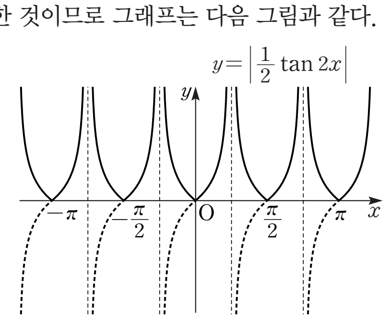
그래프에서 최댓값은 없고, 최솟값은 0, 주기는 π이다.

(5) 함수 $y=\left|2\tan\frac{1}{2}x\right|$의 그래프는 함수 $y=2\tan\frac{1}{2}x$의 그래프를 그린 후 x축의 아랫부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



그래프에서 최댓값은 없고, 최솟값은 0, 주기는 2π이다.

(6) 함수 $y=\left|\frac{1}{2}\tan 2x\right|$의 그래프는 함수 $y=\frac{1}{2}\tan 2x$의 그래프를 그린 후 x축의 아랫부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



그래프에서 최댓값은 없고, 최솟값은 0, 주기는 $\frac{\pi}{2}$이다.

19 답 (1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
(4) $\frac{1}{2}$ (5) $\sqrt{3}$ (6) 1

풀이 (1) $\sin\frac{7}{3}\pi=\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\underline{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

(2) $\sin 390^\circ=\sin(360^\circ+30^\circ)=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$

(3) $\cos\frac{13}{6}\pi=\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(4) $\cos 420^\circ=\cos(360^\circ+60^\circ)=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$

(5) $\tan\frac{13}{3}\pi=\tan\left(4\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

(6) $\tan 405^\circ=\tan(360^\circ+45^\circ)=\tan 45^\circ=1$

20 답 (1) $-\frac{1}{2}$ (2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3) $\frac{1}{2}$
(4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (5) -1 (6) $-\sqrt{3}$

풀이 (1) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=\underline{-\frac{1}{2}}$

(2) $\sin(-405^\circ)=-\sin 405^\circ=-\sin(360^\circ+45^\circ)$
$=-\sin 45^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(3) $\cos\left(-\frac{13}{3}\pi\right)=\cos\frac{13}{3}\pi=\cos\left(4\pi+\frac{\pi}{3}\right)$
$=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

(4) $\cos(-750^\circ)=\cos 750^\circ=\cos(720^\circ+30^\circ)$
$=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(5) $\tan\left(-\frac{9}{4}\pi\right)=-\tan\frac{9}{4}\pi=-\tan\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)$
$=-\tan\frac{\pi}{4}=-1$

(6) $\tan(-1140^\circ)=-\tan 1140^\circ=-\tan(1080^\circ+60^\circ)$
$=-\tan 60^\circ=-\sqrt{3}$

21 답 (1) $-\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
(4) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (5) $\sqrt{3}$ (6) $-\sqrt{3}$

풀이 (1) $\sin\frac{7}{6}\pi=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}$
$=\underline{-\frac{1}{2}}$

(2) $\sin 150^\circ=\sin(180^\circ-30^\circ)=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$

(3) $\cos\frac{5}{4}\pi=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(4) $\cos 135^\circ=\cos(180^\circ-45^\circ)=-\cos 45^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(5) $\tan\frac{4}{3}\pi=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

(6) $\tan 120^\circ=\tan(180^\circ-60^\circ)=-\tan 60^\circ=-\sqrt{3}$

22 답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (3) $-\frac{1}{2}$
(4) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (5) -1 (6) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

풀이 (1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\underline{\frac{1}{2}}$

(2) $\sin 120^\circ=\sin(90^\circ+30^\circ)=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$

(4) $\cos 150^\circ=\cos(90^\circ+60^\circ)=-\sin 60^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(5) $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\tan\frac{\pi}{4}}=-\frac{1}{1}=-1$

(6) $\tan 150^\circ=\tan(90^\circ+60^\circ)=-\frac{1}{\tan 60^\circ}$
$=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

23 답 (1) $-1-\sqrt{3}$ (2) $-\sqrt{3}-3$ (3) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

풀이 (1) $\sin\left(-\frac{17}{6}\pi\right)=-\sin\frac{17}{6}\pi=-\sin\left(\frac{\pi}{2}\times 6-\frac{\pi}{6}\right)$
$=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$

$\tan\frac{2}{3}\pi=\tan\left(\frac{\pi}{2}\times 2-\frac{\pi}{3}\right)=-\tan\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$

$\cos\left(-\frac{10}{3}\pi\right)=\cos\frac{10}{3}\pi=\cos\left(\frac{\pi}{2}\times 6+\frac{\pi}{3}\right)$
$=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

$\therefore$ (주어진 식)$=-\frac{1}{2}-\sqrt{3}-\frac{1}{2}=\underline{-1-\sqrt{3}}$

(2) $\cos 750^\circ=\cos(90^\circ\times 8+30^\circ)=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin 390^\circ=\sin(90^\circ\times 4+30^\circ)=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$

$\sin 225^\circ=\sin(90^\circ\times 2+45^\circ)=-\sin 45^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin 1140^\circ=\sin(90^\circ\times 12+60^\circ)=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 330^\circ=\cos(90^\circ\times 4-30^\circ)=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 135^\circ=\cos(90^\circ+45^\circ)=-\sin 45^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore$ (주어진 식)$=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}-\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1-\sqrt{2}}{2}}-\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}}$

$=\frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

$=-\sqrt{3}(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

$=-\sqrt{3}-\sqrt{6}-3+\sqrt{6}$

$=-\sqrt{3}-3$

참고 $\cos 135^\circ=\cos(90^\circ\times 2-45^\circ)$
$=-\cos 45^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(3) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

$\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\times 3+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\left(3\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\times 6+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

$\therefore$ (주어진 식) $=\dfrac{\dfrac{1}{2}}{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{1}{-\sqrt{3}-1}$

$=\dfrac{\sqrt{3}-1}{-(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$

24 답 (1) 1 (2) 1 (3) 0 (4) $2\sin\theta$ (5) $\dfrac{1}{\cos\theta}$ (6) -1 (7) 0 (8) $1-\tan\theta$ (9) $\dfrac{1}{\cos\theta}-1$

풀이 (1) (주어진 식) $=\sin^2\theta+\cos^2\theta=\underline{1}$

(2) (주어진 식) $=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

(3) (주어진 식) $=\cos\theta-\cos\theta=0$

(4) (주어진 식) $=\sin\theta+\sin\theta=2\sin\theta$

(5) (주어진 식) $=\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\tan\theta$

$=\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$=\dfrac{\cos^2\theta+\sin\theta(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)\cos\theta}$

$=\dfrac{\cos^2\theta+\sin\theta+\sin^2\theta}{(1+\sin\theta)\cos\theta}$

$=\dfrac{1+\sin\theta}{(1+\sin\theta)\cos\theta}=\dfrac{1}{\cos\theta}$

(6) (주어진 식) $=\cos\theta(-\cos\theta)+(-\sin\theta)\sin\theta$

$=-(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=-1$

(7) (주어진 식) $=\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}+\dfrac{-\sin\theta}{1-\cos\theta}$

$=\dfrac{\sin\theta-\sin\theta}{1-\cos\theta}=0$

(8) (주어진 식) $=\dfrac{\cos\theta\tan\theta}{-\cos\theta}-\dfrac{-\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=1-\tan\theta$

(9) (주어진 식)

$=\dfrac{-\cos\theta}{\cos\theta\times(-\cos\theta)}+\dfrac{(-\cos\theta)\times(-\tan\theta)}{-\sin\theta}$

$=\dfrac{1}{\cos\theta}-\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\times\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{1}{\cos\theta}-1$

25 답 (1) 0.5446 (2) 0.7314 (3) 0.6157 (4) 0.9511 (5) 3.0777 (6) 57.2900

풀이 (1) 각의 가로줄과 삼각비의 세로줄이 만나는 곳을 읽으면 $\sin 33°=\underline{0.5446}$

(2) 각의 가로줄과 삼각비의 세로줄이 만나는 곳을 읽으면 $\sin 47°=0.7314$

(3) 각의 가로줄과 삼각비의 세로줄이 만나는 곳을 읽으면 $\cos 52°=0.6157$

(4) 각의 가로줄과 삼각비의 세로줄이 만나는 곳을 읽으면 $\cos 18°=0.9511$

(5) 각의 가로줄과 삼각비의 세로줄이 만나는 곳을 읽으면 $\tan 72°=3.0777$

(6) 각의 가로줄과 삼각비의 세로줄이 만나는 곳을 읽으면 $\tan 89°=57.2900$

26 답 (1) 1.4388 (2) 5.5152 (3) 1.3660 (4) 0.4040

풀이 (1) $\sin 27°=0.4540$, $\cos 10°=0.9848$이므로

$\sin 27°+\cos 10°=0.4540+0.9848=\underline{1.4388}$

(2) $\tan 81°=6.3138$, $\cos 37°=0.7986$이므로

$\tan 81°-\cos 37°=6.3138-0.7986=5.5152$

(3) $\sin 30°=0.5000$, $\cos 30°=0.8660$이므로

$\sin 30°+\cos 30°=0.5000+0.8660=1.3660$

(4) $\sin 22°=0.3746$, $\cos 22°=0.9272$이므로

$\dfrac{\sin 22°}{\cos 22°}=\dfrac{0.3746}{0.9272}=0.4040\cdots$

참고 $\tan 22°=0.4040$이므로 $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$임을 확인할 수 있다.

27 답 (1) 최댓값: 1, 최솟값: -3
(2) 최댓값: 6, 최솟값: -2
(3) 최댓값: 1, 최솟값: -5
(4) 최댓값: 2, 최솟값: -6
(5) 최댓값: 2, 최솟값: 0
(6) 최댓값: 6, 최솟값: 4

풀이 (1) $y=\sin x-\cos\left(\dfrac{3}{2}\pi-x\right)-1$

$=\sin x+\sin x-1=2\sin x-1$

이때 $-1\leq\sin x\leq 1$이므로

$-2\leq 2\sin x\leq 2$ $\quad\therefore -3\leq 2\sin x-1\leq\underline{1}$

따라서 최댓값은 $\underline{1}$, 최솟값은 -3이다.

(2) $y=3\cos x+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)+2$

$=3\cos x+\cos x+2$

$=4\cos x+2$

이때 $-1\leq\cos x\leq 1$이므로

$-4\leq 4\cos x\leq 4$ $\quad\therefore -2\leq 4\cos x+2\leq 6$

따라서 최댓값은 6, 최솟값은 -2이다.

(3) $y=2\sin x+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)-2$

$=2\sin x+\sin x-2$

$=3\sin x-2$

이때 $-1\leq\sin x\leq 1$이므로

$-3\leq 3\sin x\leq 3$ $\quad\therefore -5\leq 3\sin x-2\leq 1$

따라서 최댓값은 1, 최솟값은 -5이다.

(4) $y=\cos x-3\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi+x\right)-2$

$=\cos x+3\cos x-2$

$=4\cos x-2$

이때 $-1\leq\cos x\leq 1$이므로

$-4\leq 4\cos x\leq 4$ $\quad\therefore -6\leq 4\cos x-2\leq 2$

따라서 최댓값은 2, 최솟값은 -6이다.

(5) $y=\sin\left(\dfrac{5}{2}\pi-x\right)+2\cos(\pi-x)+1$

$=\cos x-2\cos x+1$

$=-\cos x+1$

이때 $-1\le\cos x\le1$이므로

$-1\le-\cos x\le1$

$\therefore\ 0\le-\cos x+1\le2$

따라서 최댓값은 2, 최솟값은 0이다.

(6) $y=\cos(\pi+x)-2\sin\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)+5$

$=-\cos x+2\cos x+5$

$=\cos x+5$

이때 $-1\le\cos x\le1$이므로

$4\le\cos x+5\le6$

따라서 최댓값은 6, 최솟값은 4이다.

28 답 (1) 최댓값: 5, 최솟값: 3

(2) 최댓값: 0, 최솟값: -2

(3) 최댓값: 5, 최솟값: 3

(4) 최댓값: -6, 최솟값: -8

(5) 최댓값: 4, 최솟값: 2

(6) 최댓값: 1, 최솟값: -1

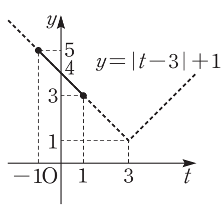
풀이 (1) $y=|\sin x-3|+1$에서 $\sin x=t$로 놓으면

$y=|t-3|+1$ (단, $-1\le t\le1$)

따라서 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$t=-1$일 때 최댓값은 5,

$t=1$일 때 최솟값은 3이다.



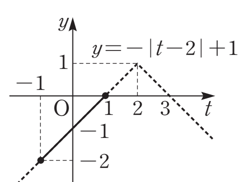
(2) $y=-|\cos x-2|+1$에서 $\cos x=t$로 놓으면

$y=-|t-2|+1$ (단, $-1\le t\le1$)

따라서 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$t=1$일 때 최댓값은 0,

$t=-1$일 때 최솟값은 -2 이다.



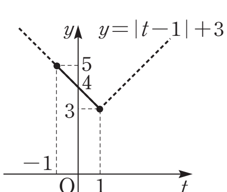
(3) $y=|\cos x-1|+3$에서 $\cos x=t$로 놓으면

$y=|t-1|+3$ (단, $-1\le t\le1$)

따라서 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$t=-1$일 때 최댓값은 5,

$t=1$일 때 최솟값은 3이다.



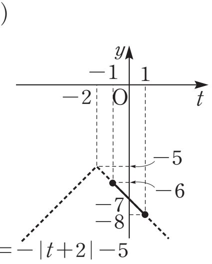
(4) $y=-|\sin x+2|-5$에서 $\sin x=t$로 놓으면

$y=-|t+2|-5$ (단, $-1\le t\le1$)

따라서 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$t=-1$일 때 최댓값은 -6,

$t=1$일 때 최솟값은 -8이다.



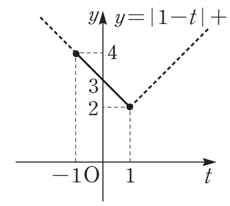
(5) $y=|1-\sin x|+2$에서 $\sin x=t$로 놓으면

$y=|1-t|+2$ (단, $-1\le t\le1$)

따라서 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$t=-1$일 때 최댓값은 4,

$t=1$일 때 최솟값은 2이다.



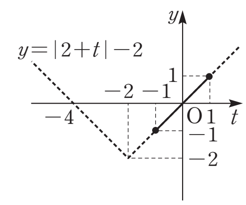
(6) $y=|2+\cos x|-2$에서 $\cos x=t$로 놓으면

$y=|2+t|-2$ (단, $-1\le t\le1$)

따라서 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$t=1$일 때 최댓값은 1,

$t=-1$일 때 최솟값은 -1이다.



29 답 (1) 최댓값: 2, 최솟값: -2

(2) 최댓값: 6, 최솟값: -2

(3) 최댓값: 4, 최솟값: $\frac{7}{4}$

(4) 최댓값: 3, 최솟값: -1

(5) 최댓값: 4, 최솟값: $\frac{7}{4}$

(6) 최댓값: 2, 최솟값: -2

풀이 (1) $y=\cos^2 x+2\sin x$

$=(1-\sin^2 x)+2\sin x$

$=-\sin^2 x+2\sin x+1$

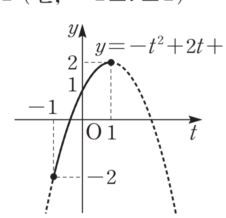
$\sin x=t$로 놓으면

$y=-t^2+2t+1=-(t-1)^2+2$ (단, $-1\le t\le1$)

따라서 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$t=1$일 때 최댓값은 2,

$t=-1$일 때 최솟값은 -2이다.



(2) $y=2\cos^2 x+4\sin x+2$

$=2(1-\sin^2 x)+4\sin x+2$

$=-2\sin^2 x+4\sin x+4$

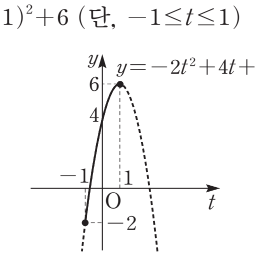
$\sin x=t$로 놓으면

$y=-2t^2+4t+4=-2(t-1)^2+6$ (단, $-1\le t\le1$)

따라서 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$t=1$일 때 최댓값은 6,

$t=-1$일 때 최솟값은 -2 이다.



(3) $y=-\sin^2 x+\cos x+3$

$=-(1-\cos^2 x)+\cos x+3$

$=\cos^2 x+\cos x+2$

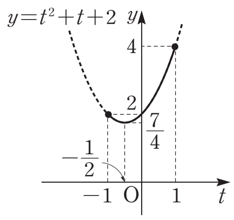
$\cos x=t$로 놓으면

$y=t^2+t+2=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$ (단, $-1\le t\le1$)

따라서 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$t=1$일 때 최댓값은 4,

$t=-\frac{1}{2}$일 때 최솟값은 $\frac{7}{4}$이다.



(4) $y=-\cos^2 x+2\sin x+1$

$=-(1-\sin^2 x)+2\sin x+1$

$=\sin^2 x+2\sin x$

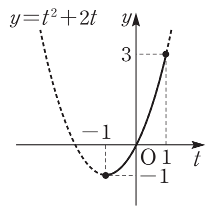
$\sin x=t$로 놓으면

$y=t^2+2t=(t+1)^2-1$ (단, $-1\le t\le 1$)

따라서 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$t=1$일 때 최댓값은 3,

$t=-1$일 때 최솟값은 -1이다.



(5) $y=\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+3$

$=-\sin x-\cos^2 x+3$

$=-\sin x-(1-\sin^2 x)+3$

$=\sin^2 x-\sin x+2$

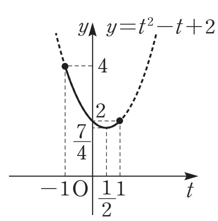
$\sin x=t$로 놓으면

$y=t^2-t+2=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$ (단, $-1\le t\le 1$)

따라서 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$t=-1$일 때 최댓값은 4,

$t=\frac{1}{2}$일 때 최솟값은 $\frac{7}{4}$이다.



(6) $y=\cos^2(\pi+x)+2\cos\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)$

$=\cos^2 x-2\sin x=(1-\sin^2 x)-2\sin x$

$=-\sin^2 x-2\sin x+1$

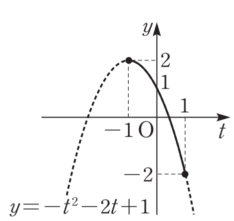
$\sin x=t$로 놓으면

$y=-t^2-2t+1=-(t+1)^2+2$ (단, $-1\le t\le 1$)

따라서 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$t=-1$일 때 최댓값은 2,

$t=1$일 때 최솟값은 -2이다.



30 답 (1) 최댓값: 2, 최솟값: $\frac{4}{3}$

(2) 최댓값: $\frac{3}{4}$, 최솟값: $\frac{1}{6}$

(3) 최댓값: 1, 최솟값: $-\frac{1}{2}$

(4) 최댓값: $\frac{3}{5}$, 최솟값: -1

(5) 최댓값: 7, 최솟값: 1

(6) 최댓값: $\frac{7}{4}$, 최솟값: $\frac{1}{2}$

풀이 (1) $y=\frac{\cos x-3}{\cos x-2}$에서 $\cos x=t$로 놓으면

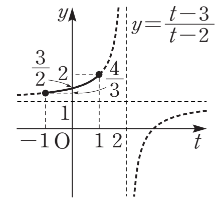
$y=\frac{t-3}{t-2}=\frac{(t-2)-1}{t-2}$

$=1-\frac{1}{t-2}$ (단, $-1\le t\le 1$)

따라서 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$t=1$일 때 최댓값은 2,

$t=-1$일 때 최솟값은 $\frac{4}{3}$이다.



(2) $y=-\frac{\sin x-2}{\sin x+5}$에서 $\sin x=t$로 놓으면

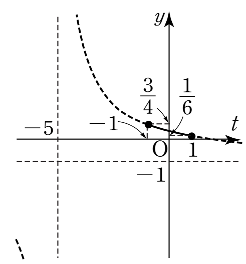
$y=-\frac{t-2}{t+5}=-\frac{(t+5)-7}{t+5}$

$=-1+\frac{7}{t+5}$ (단, $-1\le t\le 1$)

따라서 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$t=-1$일 때 최댓값은 $\frac{3}{4}$,

$t=1$일 때 최솟값은 $\frac{1}{6}$이다.



(3) $y=\frac{-2\sin x}{\sin x+3}$에서 $\sin x=t$로 놓으면

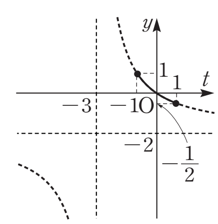
$y=\frac{-2t}{t+3}=\frac{-2(t+3)+6}{t+3}$

$=-2+\frac{6}{t+3}$ (단, $-1\le t\le 1$)

따라서 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$t=-1$일 때 최댓값은 1,

$t=1$일 때 최솟값은 $-\frac{1}{2}$이다.



(4) $y=\frac{3\cos x}{\cos x-4}$에서

$\cos x=t$로 놓으면

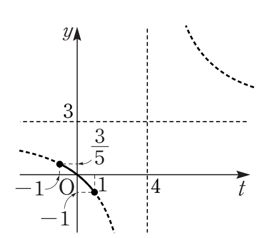
$y=\frac{3t}{t-4}=\frac{3(t-4)+12}{t-4}$

$=3+\frac{12}{t-4}$ (단, $-1\le t\le 1$)

따라서 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$t=-1$일 때 최댓값은 $\frac{3}{5}$,

$t=1$일 때 최솟값은 -1이다.



(5) $y=\frac{-2\cos x+5}{\cos x+2}$에서

$\cos x=t$로 놓으면

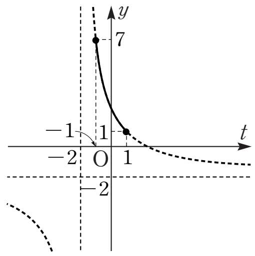
$y=\frac{-2t+5}{t+2}=\frac{-2(t+2)+9}{t+2}$

$=-2+\frac{9}{t+2}$ (단, $-1\le t\le 1$)

따라서 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$t=-1$일 때 최댓값은 7,

$t=1$일 때 최솟값은 1이다.



(6) $y=\dfrac{3\sin x-4}{\sin x-3}$에서

$\sin x=t$로 놓으면

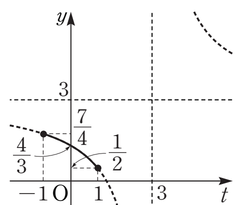
$y=\dfrac{3t-4}{t-3}=\dfrac{3(t-3)+5}{t-3}$

$=3+\dfrac{5}{t-3}$ (단, $-1\le t\le 1$)

따라서 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$t=-1$일 때 최댓값은 $\dfrac{7}{4}$,

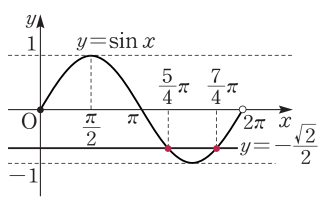
$t=1$일 때 최솟값은 $\dfrac{1}{2}$이다.



31 답 (1) $x=\dfrac{5}{4}\pi$ 또는 $x=\dfrac{7}{4}\pi$ (2) $x=\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $x=\dfrac{5}{3}\pi$

(3) $x=\dfrac{\pi}{4}$ (4) $x=\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $x=\dfrac{11}{6}\pi$

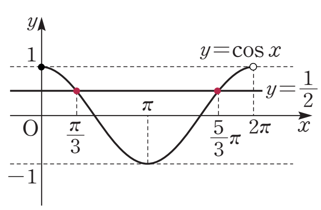
풀이 (1) $0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$의 교점의 x좌표는



$\pi+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{5}{4}\pi$ 또는 $2\pi-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{7}{4}\pi$

따라서 주어진 방정식의 해는 두 그래프의 교점의 x좌표와 같으므로 $x=\dfrac{5}{4}\pi$ 또는 $x=\dfrac{7}{4}\pi$

(2) $0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{1}{2}$의 교점의 x좌표는



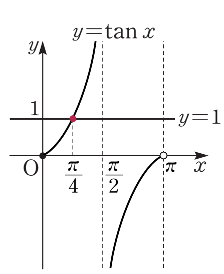
$\dfrac{\pi}{3}$ 또는

$2\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{5}{3}\pi$

따라서 주어진 방정식의 해는 두 그래프의 교점의 x좌표와 같으므로 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $x=\dfrac{5}{3}\pi$

(3) $0\le x<\pi$에서 함수 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점의 x좌표는 $\dfrac{\pi}{4}$

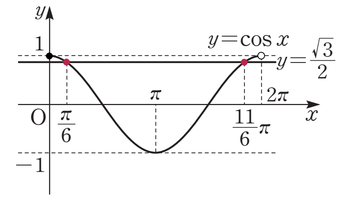
따라서 주어진 방정식의 해는 두 그래프의 교점의 x좌표와 같으므로 $x=\dfrac{\pi}{4}$



(4) $2\cos x=\sqrt{3}$에서

$\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\cos x$와 직선 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$의 교점의



x좌표는 $\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $2\pi-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{11}{6}\pi$

따라서 주어진 방정식의 해는 두 그래프의 교점의 x좌표와 같으므로 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $x=\dfrac{11}{6}\pi$

32 답 (1) $x=\dfrac{\pi}{4}$ 또는 $x=\dfrac{\pi}{2}$ (2) $x=\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $x=\dfrac{5}{6}\pi$

(3) $x=\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $x=\pi$ (4) $x=\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $x=\pi$

(5) $x=\dfrac{\pi}{12}$ (6) $x=\dfrac{\pi}{4}$

풀이 (1) $\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$에서 $2x-\dfrac{\pi}{4}=\theta$로 놓으면

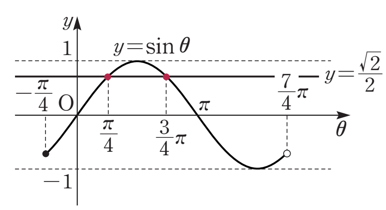
$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$0\le x<\pi$에서 $0\le 2x<2\pi$

$\therefore -\dfrac{\pi}{4}\le 2x-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{7}{4}\pi$

즉, $-\dfrac{\pi}{4}\le\theta<\dfrac{7}{4}\pi$에서 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$의 해는

$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 또는 $\theta=\dfrac{3}{4}\pi$



따라서 $2x-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}$ 또는 $2x-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3}{4}\pi$이므로

$x=\dfrac{\pi}{4}$ 또는 $x=\dfrac{\pi}{2}$

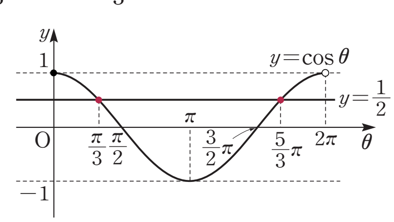
(2) $2\cos 2x=1$에서 $\cos 2x=\dfrac{1}{2}$

$2x=\theta$로 놓으면 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$

$0\le x<\pi$에서 $0\le 2x<2\pi$

즉, $0\le\theta<2\pi$에서 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$의 해는

$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $\theta=\dfrac{5}{3}\pi$



따라서 $2x=\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $2x=\dfrac{5}{3}\pi$이므로

$x=\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $x=\dfrac{5}{6}\pi$

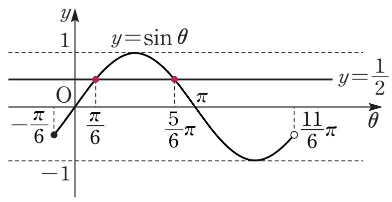
(3) $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$에서 $x-\frac{\pi}{6}=\theta$로 놓으면

$\sin\theta=\frac{1}{2}$

$0\le x<2\pi$에서 $-\frac{\pi}{6}\le x-\frac{\pi}{6}<\frac{11}{6}\pi$

즉, $-\frac{\pi}{6}\le\theta<\frac{11}{6}\pi$에서 $\sin\theta=\frac{1}{2}$의 해는

$\theta=\frac{\pi}{6}$ 또는 $\theta=\frac{5}{6}\pi$



따라서 $x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x-\frac{\pi}{6}=\frac{5}{6}\pi$이므로

$x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\pi$

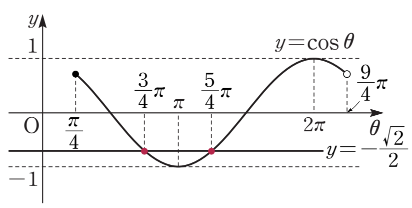
(4) $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$에서 $x+\frac{\pi}{4}=\theta$로 놓으면

$\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$0\le x<2\pi$에서 $\frac{\pi}{4}\le x+\frac{\pi}{4}<\frac{9}{4}\pi$

즉, $\frac{\pi}{4}\le\theta<\frac{9}{4}\pi$에서 $\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$의 해는

$\theta=\frac{3}{4}\pi$ 또는 $\theta=\frac{5}{4}\pi$



따라서 $x+\frac{\pi}{4}=\frac{3}{4}\pi$ 또는 $x+\frac{\pi}{4}=\frac{5}{4}\pi$이므로

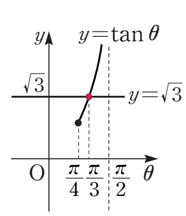
$x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\pi$

(5) $\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}$에서 $x+\frac{\pi}{4}=\theta$로 놓으면

$\tan\theta=\sqrt{3}$

$0\le x<\frac{\pi}{4}$에서 $\frac{\pi}{4}\le x+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$

즉, $\frac{\pi}{4}\le\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $\tan\theta=\sqrt{3}$의 해는 $\theta=\frac{\pi}{3}$



따라서 $x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}$이므로

$x=\frac{\pi}{12}$

(6) $\tan\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-1$에서

$x+\frac{\pi}{2}=\theta$로 놓으면

$\tan\theta=-1$

$0<x<\pi$에서 $\frac{\pi}{2}<x+\frac{\pi}{2}<\frac{3}{2}\pi$

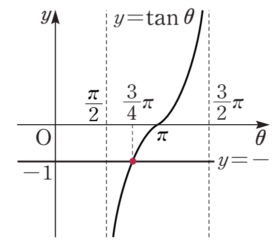
즉, $\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3}{2}\pi$에서

$\tan\theta=-1$의 해는

$\theta=\frac{3}{4}\pi$

따라서 $x+\frac{\pi}{2}=\frac{3}{4}\pi$이

므로 $x=\frac{\pi}{4}$



33 답 (1) $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

(2) $x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $x=\pi$

(3) $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

풀이 (1) $2\cos^2 x+3\sin x-3=0$에서

$2(1-\sin^2 x)+3\sin x-3=0$

$2\sin^2 x-3\sin x+1=0$, $(2\sin x-1)(\sin x-1)=0$

$\therefore \sin x=\frac{1}{2}$ 또는 $\sin x=1$

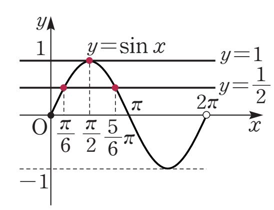
따라서 $0\le x<2\pi$에서

(i) $\sin x=\frac{1}{2}$의 해는

$x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

(ii) $\sin x=1$의 해는

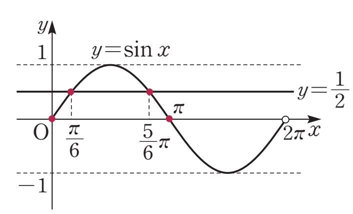
$x=\frac{\pi}{2}$



(i), (ii)에서 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

(2) $\sin(\pi-x)=\sin x$이므로 $2\sin^2(\pi-x)-\sin x=0$에서 $2\sin^2 x-\sin x=0$, $\sin x(2\sin x-1)=0$

$\therefore \sin x=0$ 또는 $\sin x=\frac{1}{2}$



따라서 $0\le x<2\pi$에서

(i) $\sin x=0$의 해는 $x=0$ 또는 $x=\pi$

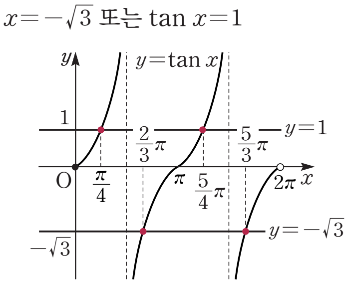
(ii) $\sin x=\frac{1}{2}$의 해는 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

(i), (ii)에서 $x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $x=\pi$

(3) $\tan^2 x-(1-\sqrt{3})\tan x-\sqrt{3}=0$에서

$(\tan x+\sqrt{3})(\tan x-1)=0$

$\therefore \tan x=-\sqrt{3}$ 또는 $\tan x=1$



따라서 $0 \le x < 2\pi$에서

(ⅰ) $\tan x = -\sqrt{3}$의 해는 $x = \frac{2}{3}\pi$ 또는 $x = \frac{5}{3}\pi$

(ⅱ) $\tan x = 1$의 해는 $x = \frac{\pi}{4}$ 또는 $x = \frac{5}{4}\pi$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $x = \frac{\pi}{4}$ 또는 $x = \frac{2}{3}\pi$ 또는 $x = \frac{5}{4}\pi$ 또는 $x = \frac{5}{3}\pi$

34 답 (1) $\theta = \frac{\pi}{4}$ 또는 $\theta = \frac{3}{4}\pi$

(2) $\theta = \frac{\pi}{6}$ 또는 $\theta = \frac{5}{6}\pi$

(3) $\theta = \frac{\pi}{3}$ 또는 $\theta = \frac{5}{3}\pi$

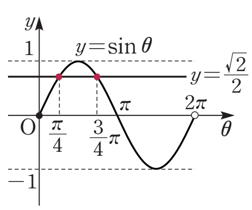
풀이 (1) 이차함수 $f(x) = \sqrt{2}x^2 + x + \frac{1}{4}\sin\theta$의 그래프가 x축과 접하므로 이차방정식 $f(x) = 0$의 판별식을 D라고 하면

$D = 1^2 - 4 \times \sqrt{2} \times \frac{1}{4}\sin\theta = 0$

$\therefore \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 $0 \le \theta < 2\pi$에서 구하는 θ의 값은

$\theta = \frac{\pi}{4}$ 또는 $\theta = \frac{3}{4}\pi$

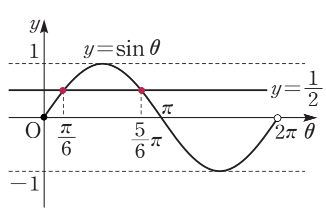


(2) 이차함수 $f(x) = x^2 + x + \frac{1}{2}\sin\theta$의 그래프가 x축과 접하므로 이차방정식 $f(x) = 0$의 판별식을 D라고 하면

$D = 1^2 - 4 \times 1 \times \frac{1}{2}\sin\theta = 0 \qquad \therefore \sin\theta = \frac{1}{2}$

따라서 $0 \le \theta < 2\pi$에서 구하는 θ의 값은

$\theta = \frac{\pi}{6}$ 또는 $\theta = \frac{5}{6}\pi$

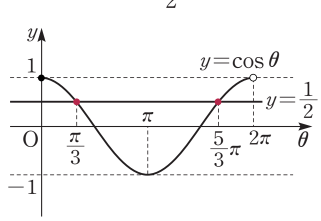


(3) 이차함수 $f(x) = 2x^2 + 2x + \cos\theta$의 그래프가 x축과 접하므로 이차방정식 $f(x) = 0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4} = 1^2 - 2 \times \cos\theta = 0 \qquad \therefore \cos\theta = \frac{1}{2}$

따라서 $0 \le \theta < 2\pi$에서 구하는 θ의 값은

$\theta = \frac{\pi}{3}$ 또는 $\theta = \frac{5}{3}\pi$

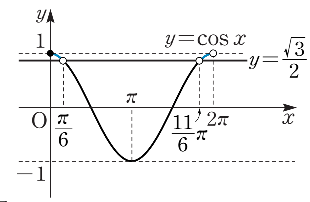


35 답 (1) $0 \le x < \frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{11}{6}\pi < x < 2\pi$ (2) $\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{2}{3}\pi$

(3) $\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{5}{3}\pi$ (4) $0 \le x < \frac{\pi}{4}$

풀이 (1) $0 \le x < 2\pi$에서 함수 $y = \cos x$의 그래프와 직선 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$의 교점의 x좌표는

$\frac{\pi}{6}$ 또는 $2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11}{6}\pi$

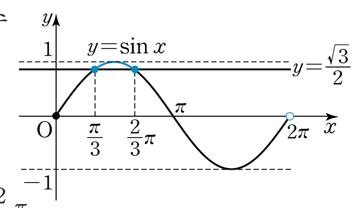


주어진 부등식의 해는 함수 $y = \cos x$의 그래프가 직선 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로

$0 \le x < \frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{11}{6}\pi < x < 2\pi$

(2) $0 \le x < 2\pi$에서 함수 $y = \sin x$의 그래프와 직선 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$의 교점의 x좌표는

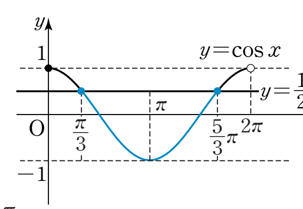
$\frac{\pi}{3}$ 또는 $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$



따라서 주어진 부등식의 해는 함수 $y = \sin x$의 그래프가 직선 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$보다 위쪽에 있거나 만나는 부분의 x의 값의 범위이므로 $\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{2}{3}\pi$

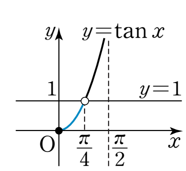
(3) $0 \le x < 2\pi$에서 함수 $y = \cos x$의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{2}$의 교점의 x좌표는

$\frac{\pi}{3}$ 또는 $2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi$



따라서 주어진 부등식의 해는 함수 $y = \cos x$의 그래프가 직선 $y = \frac{1}{2}$보다 아래쪽에 있거나 만나는 부분의 x의 값의 범위이므로 $\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{5}{3}\pi$

(4) $0 \le x < \frac{\pi}{2}$에서 함수 $y = \tan x$의 그래프와 직선 $y = 1$의 교점의 x좌표는 $\frac{\pi}{4}$



따라서 주어진 부등식의 해는 함수 $y = \tan x$의 그래프가 직선 $y = 1$보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 $0 \le x < \frac{\pi}{4}$

36 답 (1) $\pi \le x \le \frac{5}{3}\pi$

(2) $0 \le x < \frac{7}{12}\pi$ 또는 $\frac{23}{12}\pi < x < 2\pi$

(3) $0 \le x \le \frac{5}{4}\pi$ 또는 $\frac{7}{4}\pi \le x < 2\pi$

(4) $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{11}{6}\pi$

(5) $\frac{5}{12}\pi \le x < \frac{2}{3}\pi$

(6) $\frac{\pi}{6} < x < \frac{11}{12}\pi$ 또는 $\frac{7}{6}\pi < x < \frac{23}{12}\pi$

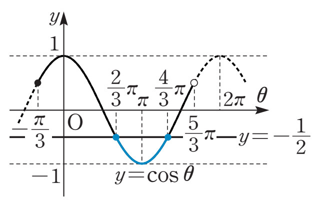
풀이 (1) $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\le-\frac{1}{2}$에서 $x-\frac{\pi}{3}=\theta$로 놓으면

$\cos\theta\le-\frac{1}{2}$

$0\le x<2\pi$에서 $-\frac{\pi}{3}\le x-\frac{\pi}{3}<\frac{5}{3}\pi$

즉, $-\frac{\pi}{3}\le\theta<\frac{5}{3}\pi$에서 $\cos\theta\le-\frac{1}{2}$의 해는

$\frac{2}{3}\pi\le\theta\le\frac{4}{3}\pi$



따라서 $\frac{2}{3}\pi\le x-\frac{\pi}{3}\le\frac{4}{3}\pi$에서 $\underline{\pi\le x\le\frac{5}{3}\pi}$

(2) $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>\frac{1}{2}$에서 $x-\frac{\pi}{4}=\theta$로 놓으면

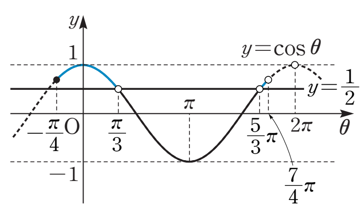
$\cos\theta>\frac{1}{2}$

$0\le x<2\pi$에서

$-\frac{\pi}{4}\le x-\frac{\pi}{4}<\frac{7}{4}\pi$

즉, $-\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{7}{4}\pi$에서 $\cos\theta>\frac{1}{2}$의 해는

$-\frac{\pi}{4}\le\theta<\frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{5}{3}\pi<\theta<\frac{7}{4}\pi$



따라서 $-\frac{\pi}{4}\le x-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{5}{3}\pi<x-\frac{\pi}{4}<\frac{7}{4}\pi$에서

$0\le x<\frac{7}{12}\pi$ 또는 $\frac{23}{12}\pi<x<2\pi$

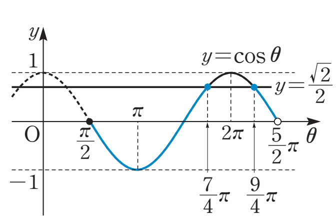
(3) $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\le\frac{\sqrt{2}}{2}$에서 $x+\frac{\pi}{2}=\theta$로 놓으면

$\cos\theta\le\frac{\sqrt{2}}{2}$

$0\le x<2\pi$에서 $\frac{\pi}{2}\le x+\frac{\pi}{2}<\frac{5}{2}\pi$

즉, $\frac{\pi}{2}\le\theta<\frac{5}{2}\pi$에서 $\cos\theta\le\frac{\sqrt{2}}{2}$의 해는

$\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{7}{4}\pi$ 또는 $\frac{9}{4}\pi\le\theta<\frac{5}{2}\pi$



따라서 $\frac{\pi}{2}\le x+\frac{\pi}{2}\le\frac{7}{4}\pi$ 또는 $\frac{9}{4}\pi\le x+\frac{\pi}{2}<\frac{5}{2}\pi$에서

$0\le x\le\frac{5}{4}\pi$ 또는 $\frac{7}{4}\pi\le x<2\pi$

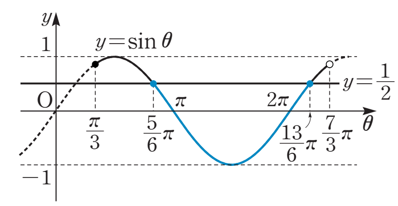
(4) $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\le\frac{1}{2}$에서 $x+\frac{\pi}{3}=\theta$로 놓으면

$\sin\theta\le\frac{1}{2}$

$0\le x<2\pi$에서 $\frac{\pi}{3}\le x+\frac{\pi}{3}<\frac{7}{3}\pi$

즉, $\frac{\pi}{3}\le\theta<\frac{7}{3}\pi$에서 $\sin\theta\le\frac{1}{2}$의 해는

$\frac{5}{6}\pi\le\theta\le\frac{13}{6}\pi$



따라서 $\frac{5}{6}\pi\le x+\frac{\pi}{3}\le\frac{13}{6}\pi$에서 $\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{11}{6}\pi$

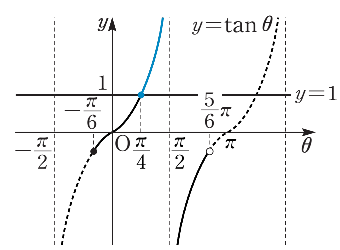
(5) $\tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\ge1$에서 $x-\frac{\pi}{6}=\theta$로 놓으면

$\tan\theta\ge1$

$0\le x<\pi$에서 $-\frac{\pi}{6}\le x-\frac{\pi}{6}<\frac{5}{6}\pi$

즉, $-\frac{\pi}{6}\le\theta<\frac{5}{6}\pi$에서 $\tan\theta\ge1$의 해는

$\frac{\pi}{4}\le\theta<\frac{\pi}{2}$



따라서 $\frac{\pi}{4}\le x-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}$에서 $\frac{5}{12}\pi\le x<\frac{2}{3}\pi$

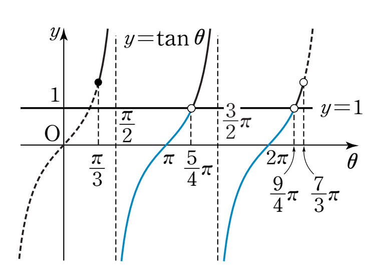
(6) $\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)<1$에서 $x+\frac{\pi}{3}=\theta$로 놓으면

$\tan\theta<1$

$0\le x<2\pi$에서 $\frac{\pi}{3}\le x+\frac{\pi}{3}<\frac{7}{3}\pi$

즉, $\frac{\pi}{3}\le\theta<\frac{7}{3}\pi$에서 $\tan\theta<1$의 해는

$\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{5}{4}\pi$ 또는 $\frac{3}{2}\pi<\theta<\frac{9}{4}\pi$



따라서 $\frac{\pi}{2}<x+\frac{\pi}{3}<\frac{5}{4}\pi$ 또는 $\frac{3}{2}\pi<x+\frac{\pi}{3}<\frac{9}{4}\pi$에서

$\frac{\pi}{6}<x<\frac{11}{12}\pi$ 또는 $\frac{7}{6}\pi<x<\frac{23}{12}\pi$

37 답 (1) $\frac{\pi}{6}<x<\frac{5}{6}\pi$　(2) $\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{5}{3}\pi$

(3) $\frac{\pi}{3}<x<\frac{5}{3}\pi$

풀이 (1) $5\sin x+2\cos^2 x-4>0$에서

$5\sin x+2(1-\sin^2 x)-4>0$, $2\sin^2 x-5\sin x+2<0$

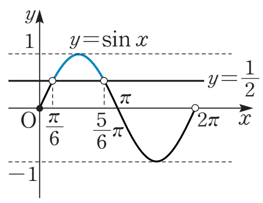
$(2\sin x-1)(\sin x-2)<0$

그런데 $-1\le\sin x\le1$에서 $\sin x-2<0$이므로

$2\sin x-1>0$　$\therefore \sin x>\frac{1}{2}$

따라서 주어진 부등식의 해는

$\frac{\pi}{6}<x<\frac{5}{6}\pi$



(2) $2\cos^2 x+5\cos x-3\le0$에서

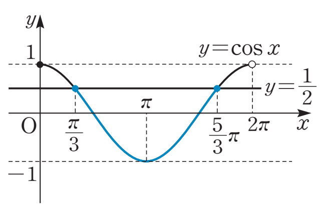
$(2\cos x-1)(\cos x+3)\le0$

그런데 $-1\le\cos x\le1$에서 $\cos x+3>0$이므로

$2\cos x-1\le0$　$\therefore \cos x\le\frac{1}{2}$

따라서 주어진 부등식의 해는

$\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{5}{3}\pi$



(3) $2\sin^2 x-7\cos x+2>0$에서

$2(1-\cos^2 x)-7\cos x+2>0$, $2\cos^2 x+7\cos x-4<0$

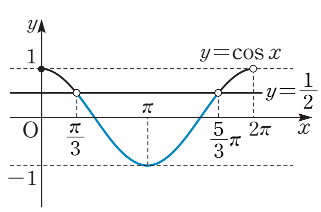
$(2\cos x-1)(\cos x+4)<0$

그런데 $-1\le\cos x\le1$에서 $\cos x+4>0$이므로

$2\cos x-1<0$　$\therefore \cos x<\frac{1}{2}$

따라서 주어진 부등식의 해는

$\frac{\pi}{3}<x<\frac{5}{3}\pi$



38 답 (1) $\pi<\theta<2\pi$　(2) $\frac{2}{3}\pi<\theta<\frac{4}{3}\pi$

풀이 (1) 모든 실수 x에 대하여 부등식

$x^2-2(\sin\theta+1)x+1>0$이 항상 성립해야 하므로

이차방정식 $x^2-2(\sin\theta+1)x+1=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=\{-(\sin\theta+1)\}^2-1<0$

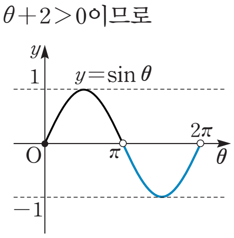
$\sin^2\theta+2\sin\theta<0$, $\sin\theta(\sin\theta+2)<0$

그런데 $-1\le\sin\theta\le1$에서 $\sin\theta+2>0$이므로

$\sin\theta<0$

따라서 구하는 θ의 값의 범위는

$\pi<\theta<2\pi$



(2) 모든 실수 x에 대하여 부등식

$x^2+2\sqrt{2}x\sin\theta-3\cos\theta>0$이 항상 성립해야 하므로

이차방정식 $x^2+2\sqrt{2}x\sin\theta-3\cos\theta=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(\sqrt{2}\sin\theta)^2+3\cos\theta<0$

$2\sin^2\theta+3\cos\theta<0$

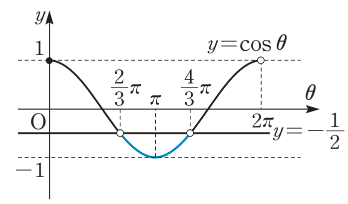
$2(1-\cos^2\theta)+3\cos\theta<0$

$2\cos^2\theta-3\cos\theta-2>0$

$(2\cos\theta+1)(\cos\theta-2)>0$

그런데 $-1\le\cos\theta\le1$에서 $\cos\theta-2<0$이므로

$2\cos\theta+1<0$　$\therefore \cos\theta<-\frac{1}{2}$



따라서 구하는 θ의 값의 범위는 $\frac{2}{3}\pi<\theta<\frac{4}{3}\pi$

중단원 점검문제 | Ⅱ-2 삼각함수의 그래프　112-113쪽

01 답 4

풀이 함수 $f(x)$의 주기가 2이므로

$f(x+2)=f(x)$

$\therefore f(20)=f(18+2)=f(18)=f(16+2)=f(16)$

$=\cdots=f(4)=f(2+2)=f(2)=4$

02 답 $y=\cos x$

풀이 함수 $y=\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

함수 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $-y=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore y=-\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$

03 답 $\sqrt{3}$

풀이 함수 $y=\tan\frac{\pi}{2}x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=\tan\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)$

이 그래프가 점 $\left(\frac{7}{6},\ a\right)$를 지나므로

$a=\tan\frac{\pi}{2}\left(\frac{7}{6}-\frac{1}{2}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}\times\frac{2}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

04 답 -1

풀이 함수 $f(x)=a\sin\frac{1}{2}x+b$의 최댓값이 5이고 $a>0$이므로 $a+b=5$ …… ㉠

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{7}{2}$이므로 $a\sin\frac{\pi}{6}+b=\frac{7}{2}$

$\therefore \frac{1}{2}a+b=\frac{7}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=2$

따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $-a+b=-3+2=-1$

05 답 -4

풀이 최댓값이 1이고 $a>0$이므로 $a+c=1$ …… ㉠

주기가 4π이고 $b>0$이므로 $\dfrac{2\pi}{\frac{1}{b}}=4\pi$ $\quad\therefore b=2$

$\therefore f(x)=a\cos\left(\pi-\frac{x}{2}\right)+c$

$f(\pi)=-1$이므로 $a\cos\frac{\pi}{2}+c=-1$ $\quad\therefore c=-1$

㉠에 $c=-1$을 대입하면 $a=2$

$\therefore abc=2\times2\times(-1)=-4$

06 답 -2π

풀이 최댓값이 2, 최솟값이 -2이고 $a>0$이므로 $a=2$

주기가 $2\times\left(\frac{3}{4}\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\pi$이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=\pi$ $\quad\therefore b=2$

$\therefore y=2\cos(2x+c)$

이때 그래프에서 $f(0)=0$이므로 $2\cos c=0$

따라서 $c=\cdots,\ -\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi,\ \cdots$이고 $-\frac{\pi}{2}\le c\le0$이므로

$c=-\frac{\pi}{2}$

$\therefore abc=2\times2\times\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-2\pi$

07 답 1

풀이 최댓값이 3이고 $a>0$이므로 $a=3$

$y=|a\sin bx|$의 주기는 $y=a\sin bx$의 주기의 $\frac{1}{2}$이고

$b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}\times\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2}$ $\quad\therefore b=2$

$\therefore a-b=3-2=1$

08 답 3

풀이 최댓값이 4이고 $a>0$이므로 $a+c=4$ …… ㉠

주기가 $\frac{\pi}{3}$이고 $b>0$이므로 $\frac{2\pi}{b}\times\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$ $\quad\therefore b=3$

$\therefore f(x)=a|\sin 3x|+c$

$f\left(\frac{\pi}{18}\right)=3$이므로 $a\left|\sin\frac{\pi}{6}\right|+c=3$

$\therefore \frac{1}{2}a+c=3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $c=2$

$\therefore \frac{ab}{c}=\frac{2\times3}{2}=3$

09 답 $\frac{3\sqrt{3}-1}{2}$

풀이 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\tan\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$=\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{3}+\tan\frac{\pi}{3}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}+\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{3}-1}{2}$

10 답 -1

풀이 $\sin 25^\circ=\sin(90^\circ-65^\circ)=\cos 65^\circ$,

$\cos 25^\circ=\cos(90^\circ-65^\circ)=\sin 65^\circ$이므로

$\left(\frac{1}{\sin 25^\circ}-1\right)\left(\frac{1}{\cos 65^\circ}+1\right)\left(1-\frac{1}{\sin 65^\circ}\right)\left(1+\frac{1}{\cos 25^\circ}\right)$

$=\left(\frac{1}{\cos 65^\circ}-1\right)\left(\frac{1}{\cos 65^\circ}+1\right)\left(1-\frac{1}{\sin 65^\circ}\right)\left(1+\frac{1}{\sin 65^\circ}\right)$

$=\left(\frac{1}{\cos^2 65^\circ}-1\right)\left(1-\frac{1}{\sin^2 65^\circ}\right)$

$=\frac{1}{\cos^2 65^\circ}-\frac{1}{\sin^2 65^\circ\cos^2 65^\circ}-1+\frac{1}{\sin^2 65^\circ}$

$=\frac{\sin^2 65^\circ+\cos^2 65^\circ-1}{\sin^2 65^\circ\cos^2 65^\circ}-1=0-1=-1$

11 답 -16

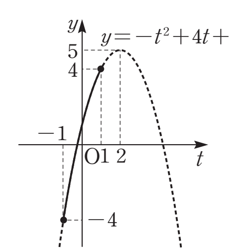
풀이 $y=\cos^2 x+4\sin x=(1-\sin^2 x)+4\sin x$

$\quad=-\sin^2 x+4\sin x+1$

$\sin x=t$로 놓으면

$y=-t^2+4t+1=-(t-2)^2+5$ (단, $-1\le t\le1$)

따라서 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$t=1$일 때 최댓값 4, $t=-1$일 때 최솟값 -4를 갖는다.

따라서 $M=4$, $m=-4$이므로

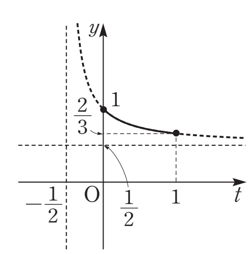
$Mm=4\times(-4)=-16$

12 답 $\frac{5}{3}$

풀이 $|\sin x|=t$로 놓으면 $0\le t\le1$이고

$y=\frac{t+1}{2t+1}=\frac{\left(t+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}{2\left(t+\frac{1}{2}\right)}=\frac{\frac{1}{2}}{2\left(t+\frac{1}{2}\right)}+\frac{1}{2}$

오른쪽 그림에서 $t=0$일 때 최댓값은 1, $t=1$일 때 최솟값은 $\frac{2}{3}$이므로 주어진 함수의 치역은



$\left\{y\,\middle|\,\frac{2}{3}\le y\le1\right\}$

따라서 $\alpha=\frac{2}{3}$, $\beta=1$이므로

$\alpha+\beta=\frac{2}{3}+1=\frac{5}{3}$

13 답 $\frac{2}{3}\pi$

풀이 $4\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)=2\sqrt{3}$에서 $\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}=t$로 놓으면

$4\sin t=2\sqrt{3}$에서 $\sin t=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0 \le x < 2\pi$에서 $0 \le \frac{1}{2}x < \pi$, $\frac{\pi}{3} \le \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3} < \frac{4}{3}\pi$

즉, $\frac{\pi}{3} \le t < \frac{4}{3}\pi$에서 $\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}$의 해는

$t = \frac{\pi}{3}$ 또는 $t = \frac{2}{3}\pi$

따라서 $\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$이므로

$x = 0$ 또는 $x = \frac{2}{3}\pi$

즉, 모든 근의 합은 $\frac{2}{3}\pi$

14 답 $\frac{9}{2}\pi$

풀이 $2\cos^2 x - 3\sin x - 3 = 0$에서

$2(1-\sin^2 x) - 3\sin x - 3 = 0$, $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$

$(2\sin x + 1)(\sin x + 1) = 0$

$\therefore \sin x = -\frac{1}{2}$ 또는 $\sin x = -1$

따라서 $0 \le x < 2\pi$에서

(i) $\sin x = -\frac{1}{2}$의 해는 $x = \frac{7}{6}\pi$ 또는 $x = \frac{11}{6}\pi$

(ii) $\sin x = -1$의 해는 $x = \frac{3}{2}\pi$

(i), (ii)에서 모든 근의 합은

$\frac{7}{6}\pi + \frac{11}{6}\pi + \frac{3}{2}\pi = \frac{9}{2}\pi$

15 답 π

풀이 $2\cos^2 x + 3\sin x - 3 \ge 0$에서

$2(1-\sin^2 x) + 3\sin x - 3 \ge 0$, $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 \le 0$

$(2\sin x - 1)(\sin x - 1) \le 0$

그런데 $-1 \le \sin x \le 1$에서 $\sin x - 1 \le 0$이므로

$2\sin x - 1 \ge 0 \qquad \therefore \sin x \ge \frac{1}{2}$

따라서 주어진 부등식의 해는 $\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{5}{6}\pi$이므로

$\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\beta = \frac{5}{6}\pi \qquad \therefore \alpha + \beta = \pi$

16 답 $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5}{6}\pi$

풀이 모든 실수 x에 대하여 부등식

$x^2 - 2\sqrt{2}(\sin\theta - 1)x + \sin\theta > 0$이 항상 성립해야 하므로

이차방정식 $x^2 - 2\sqrt{2}(\sin\theta - 1)x + \sin\theta = 0$의 판별식을

D라고 하면

$\frac{D}{4} = \{-\sqrt{2}(\sin\theta - 1)\}^2 - \sin\theta < 0$

$2(\sin\theta - 1)^2 - \sin\theta < 0$, $2\sin^2\theta - 5\sin\theta + 2 < 0$

$(2\sin\theta - 1)(\sin\theta - 2) < 0$

그런데 $-1 \le \sin\theta \le 1$에서 $\sin\theta - 2 < 0$이므로

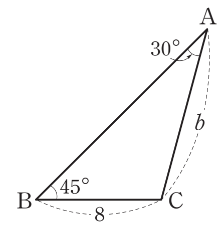
$2\sin\theta - 1 > 0$

따라서 $2\sin\theta - 1 > 0$, 즉 $\sin\theta > \frac{1}{2}$을 만족시키는 θ의 값의 범위는 $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5}{6}\pi$

Ⅱ-3 | 삼각함수의 활용 114-126쪽

01 답 (1) $8\sqrt{2}$ (2) $3\sqrt{2}$ (3) $3\sqrt{6}$ (4) $4\sqrt{3}$ (5) $45°$ (6) $45°$ 또는 $135°$ (7) $90°$ (8) $15°$

풀이 (1) 주어진 조건을 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



사인법칙에 의하여

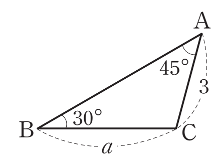
$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

$\frac{8}{\sin 30°} = \frac{b}{\sin 45°}$

$8\sin 45° = b\sin 30°$, $8 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = b \times \frac{1}{2}$

$\therefore b = 8\sqrt{2}$

(2) 주어진 조건을 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



사인법칙에 의하여

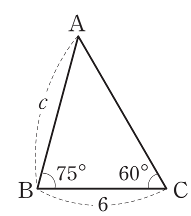
$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

$\frac{a}{\sin 45°} = \frac{3}{\sin 30°}$

$a\sin 30° = 3\sin 45°$, $a \times \frac{1}{2} = 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore a = 3\sqrt{2}$

(3) 주어진 조건을 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



이때 $A = 180° - (75° + 60°) = 45°$

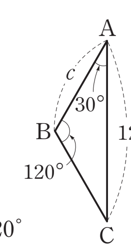
이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$

$\frac{6}{\sin 45°} = \frac{c}{\sin 60°}$, $6\sin 60° = c\sin 45°$

$6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = c \times \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \therefore c = 3\sqrt{6}$

(4) 주어진 조건을 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



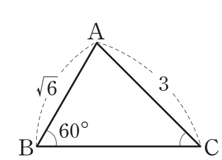
이때 $C = 180° - (30° + 120°) = 30°$이므로

사인법칙에 의하여 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

$\frac{12}{\sin 120°} = \frac{c}{\sin 30°}$, $12\sin 30° = c\sin 120°$

$12 \times \frac{1}{2} = c \times \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \therefore c = 4\sqrt{3}$

(5) 주어진 조건을 나타내면 오른쪽 그림과 같다. 사인법칙에 의하여



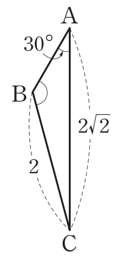
$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

$\frac{3}{\sin 60°} = \frac{\sqrt{6}}{\sin C}$

$3\sin C = \sqrt{6}\sin 60°$, $3\sin C = \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \sin C = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \therefore C = 45°$

(6) 주어진 조건을 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



사인법칙에 의하여

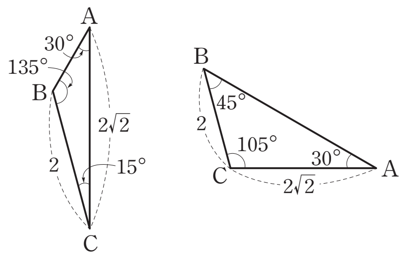
$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$

$\dfrac{2}{\sin 30^\circ}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sin B}$, $2\sin B=2\sqrt{2}\sin 30^\circ$

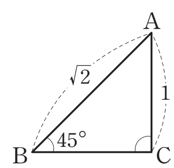
$2\sin B=2\sqrt{2}\times\dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore \sin B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore B=45^\circ$ 또는 $B=135^\circ$

참고



(7) 주어진 조건을 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



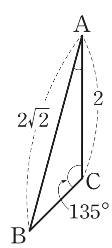
사인법칙에 의하여

$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

$\dfrac{1}{\sin 45^\circ}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sin C}$

$\sin C=\sqrt{2}\sin 45^\circ=\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=1$ $\quad\therefore C=90^\circ$

(8) 주어진 조건을 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



사인법칙에 의하여

$\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{b}{\sin B}$

$\dfrac{2\sqrt{2}}{\sin 135^\circ}=\dfrac{2}{\sin B}$

$2\sqrt{2}\sin B=2\sin 135^\circ$

$2\sqrt{2}\sin B=2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad\therefore \sin B=\dfrac{1}{2}$

따라서 $B=30^\circ$이므로

$A=180^\circ-(135^\circ+30^\circ)=15^\circ$

02 답 (1) 1 (2) $4\sqrt{3}$ (3) 8 (4) $5\sqrt{3}$ (5) 8 (6) $5\sqrt{2}$ (7) 1 (8) 12 (9) 6 (10) 2

풀이 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하자.

(1) 사인법칙에 의하여

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}=2R$

$\dfrac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2R$, $2=2R$ $\quad\therefore R=1$

(2) 사인법칙에 의하여

$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{12}{\sin 120^\circ}=2R$, $\dfrac{12}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2R$

$8\sqrt{3}=2R$ $\quad\therefore R=4\sqrt{3}$

(3) 사인법칙에 의하여

$\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{8}{\sin 150^\circ}=2R$, $\dfrac{8}{\frac{1}{2}}=2R$

$16=2R$ $\quad\therefore R=8$

(4) $B=180^\circ-(45^\circ+75^\circ)=60^\circ$이므로 사인법칙에 의하여

$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{15}{\sin 60^\circ}=2R$, $\dfrac{15}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2R$

$10\sqrt{3}=2R$ $\quad\therefore R=5\sqrt{3}$

(5) $B=180^\circ-(60^\circ+75^\circ)=45^\circ$이므로 사인법칙에 의하여

$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{8\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}=2R$, $\dfrac{8\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2R$

$16=2R$ $\quad\therefore R=8$

(6) $C=180^\circ-(60^\circ+75^\circ)=45^\circ$이므로 사인법칙에 의하여

$\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{10}{\sin 45^\circ}=2R$, $\dfrac{10}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2R$

$10\sqrt{2}=2R$ $\quad\therefore R=5\sqrt{2}$

(7) $C=180^\circ-(60^\circ+60^\circ)=60^\circ$이므로 사인법칙에 의하여

$\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}=2R$, $\dfrac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2R$

$2=2R$ $\quad\therefore R=1$

(8) $A=180^\circ-(55^\circ+95^\circ)=30^\circ$이므로

사인법칙에 의하여

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{12}{\sin 30^\circ}=2R$, $\dfrac{12}{\frac{1}{2}}=2R$

$24=2R$ $\quad\therefore R=12$

(9) $A=180^\circ-(90^\circ+60^\circ)=30^\circ$이므로

사인법칙에 의하여

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{6}{\sin 30^\circ}=2R$, $\dfrac{6}{\frac{1}{2}}=2R$

$12=2R$ $\quad\therefore R=6$

(10) $b=c$이므로

$B=C=\dfrac{1}{2}\times(180^\circ-120^\circ)=30^\circ$

사인법칙에 의하여

$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{2}{\sin 30^\circ}=2R$, $\dfrac{2}{\frac{1}{2}}=2R$

$4=2R$ $\quad\therefore R=2$

03 답 (1) 5 : 6 : 7 (2) 2 : 5 : 6 (3) 3 : 4 : 5 (4) 3 : 2 : 2 (5) 2 : 5 : 4

풀이 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하자.

(1) $a=5k$, $b=6k$, $c=7k$ $(k>0)$라고 하면 사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\sin A:\sin B:\sin C&=\frac{a}{2R}:\frac{b}{2R}:\frac{c}{2R}\\&=\frac{5k}{2R}:\frac{6k}{2R}:\frac{7k}{2R}\\&=5:6:7\end{aligned}$$

(2) $a=2k$, $b=5k$, $c=6k$ $(k>0)$라고 하면 사인법칙에 의하여

$$\sin A : \sin B : \sin C = \frac{a}{2R} : \frac{b}{2R} : \frac{c}{2R}$$
$$= \frac{2k}{2R} : \frac{5k}{2R} : \frac{6k}{2R}$$
$$= 2 : 5 : 6$$

(3) $a+b=7k$, $b+c=9k$, $c+a=8k$ $(k>0)$라고 하면

$2(a+b+c)=24k \qquad \therefore a+b+c=12k$

$\therefore a=3k$, $b=4k$, $c=5k$

사인법칙에 의하여

$$\sin A : \sin B : \sin C = \frac{a}{2R} : \frac{b}{2R} : \frac{c}{2R}$$
$$= \frac{3k}{2R} : \frac{4k}{2R} : \frac{5k}{2R}$$
$$= 3 : 4 : 5$$

(4) $a+b=5k$, $b+c=4k$, $c+a=5k$ $(k>0)$라고 하면

$2(a+b+c)=14k \qquad \therefore a+b+c=7k$

$\therefore a=3k$, $b=2k$, $c=2k$

사인법칙에 의하여

$$\sin A : \sin B : \sin C = \frac{a}{2R} : \frac{b}{2R} : \frac{c}{2R}$$
$$= \frac{3k}{2R} : \frac{2k}{2R} : \frac{2k}{2R}$$
$$= 3 : 2 : 2$$

(5) $ab=5k$, $bc=10k$, $ca=4k$ $(k>0)$라고 하면

$(abc)^2=200k^3$ …… ㉠

㉠에 $ab=5k$를 대입하면 $25k^2c^2=200k^3$

$c^2=8k \qquad \therefore c=\sqrt{8k}$

㉠에 $bc=10k$를 대입하면 $100k^2a^2=200k^3$

$a^2=2k \qquad \therefore a=\sqrt{2k}$

㉠에 $ca=4k$를 대입하면 $16k^2b^2=200k^3$

$b^2=\frac{25}{2}k \qquad \therefore b=\sqrt{\frac{25}{2}k}$

사인법칙에 의하여

$$\sin A : \sin B : \sin C = \frac{a}{2R} : \frac{b}{2R} : \frac{c}{2R}$$
$$= \frac{\sqrt{2k}}{2R} : \frac{\sqrt{\frac{25}{2}k}}{2R} : \frac{\sqrt{8k}}{2R}$$
$$= 2 : 5 : 4$$

04 답 (1) $1 : \sqrt{3} : 2$ (2) $1 : 1 : \sqrt{3}$

풀이 (1) $A+B+C=180^\circ$이므로

$A=180^\circ \times \frac{1}{6}=30^\circ$, $B=180^\circ \times \frac{2}{6}=60^\circ$,

$C=180^\circ \times \frac{3}{6}=90^\circ$

사인법칙에 의하여

$$a : b : c = 2R\sin A : 2R\sin B : 2R\sin C$$
$$= \sin A : \sin B : \sin C$$
$$= \sin 30^\circ : \sin 60^\circ : \sin 90^\circ$$
$$= \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} : 1 = 1 : \sqrt{3} : 2$$

(2) $A+B+C=180^\circ$이므로

$A=180^\circ \times \frac{1}{6}=30^\circ$, $B=180^\circ \times \frac{1}{6}=30^\circ$,

$C=180^\circ \times \frac{4}{6}=120^\circ$

사인법칙에 의하여

$$a : b : c = 2R\sin A : 2R\sin B : 2R\sin C$$
$$= \sin A : \sin B : \sin C$$
$$= \sin 30^\circ : \sin 30^\circ : \sin 120^\circ$$
$$= \frac{1}{2} : \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= 1 : 1 : \sqrt{3}$$

05 답 (1) $4 : 3 : 5$ (2) $\sqrt{2} : \sqrt{3} : 1$ (3) $5 : 6 : 2$

풀이 (1) 사인법칙에 의하여

$$\sin A : \sin B : \sin C = \frac{a}{2R} : \frac{b}{2R} : \frac{c}{2R}$$
$$= a : b : c$$

이때 $\sin A : \sin B : \sin C = 4 : 3 : 5$이므로

$a : b : c = 4 : 3 : 5$

(2) 사인법칙에 의하여

$$\sin A : \sin B : \sin C = \frac{a}{2R} : \frac{b}{2R} : \frac{c}{2R}$$
$$= a : b : c$$

이때 $\sin A : \sin B : \sin C = \sqrt{2} : \sqrt{3} : 1$이므로

$a : b : c = \sqrt{2} : \sqrt{3} : 1$

(3) $A+B+C=180^\circ$이므로

$A+B=180^\circ-C$, $B+C=180^\circ-A$,

$C+A=180^\circ-B$

$$\therefore \sin(A+B) : \sin(B+C) : \sin(C+A)$$
$$= \sin(180^\circ-C) : \sin(180^\circ-A) : \sin(180^\circ-B)$$
$$= \sin C : \sin A : \sin B$$
$$= \frac{c}{2R} : \frac{a}{2R} : \frac{b}{2R}$$
$$= c : a : b$$

이때

$\sin(A+B) : \sin(B+C) : \sin(C+A) = 2 : 5 : 6$

이므로

$c : a : b = 2 : 5 : 6$

$\therefore a : b : c = 5 : 6 : 2$

06 답 (1) 7 (2) $\sqrt{7}$ (3) $2\sqrt{7}$ (4) $\sqrt{29}$ (5) $\sqrt{39}$ (6) $3\sqrt{3}$ (7) $\sqrt{93}$ (8) $6\sqrt{7}$

풀이 (1) $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$$= 3^2+5^2-2\times3\times5\times\cos 120^\circ$$
$$= 9+25-2\times3\times5\times\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$= \underline{49}$$

$a>0$이므로 $a=\underline{7}$

(2) $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$=2^2+3^2-2\times2\times3\times\cos 60^\circ$

$=4+9-2\times2\times3\times\frac{1}{2}$

$=7$

$a>0$이므로 $a=\sqrt{7}$

(3) $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$=2^2+4^2-2\times2\times4\times\cos 120^\circ$

$=4+16-2\times2\times4\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=28$

$c>0$이므로 $c=2\sqrt{7}$

(4) $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$

$=(2\sqrt{2})^2+3^2-2\times2\sqrt{2}\times3\times\cos 135^\circ$

$=8+9-2\times2\sqrt{2}\times3\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$=29$

$b>0$이므로 $b=\sqrt{29}$

(5) $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$=5^2+7^2-2\times5\times7\times\cos 60^\circ$

$=25+49-2\times5\times7\times\frac{1}{2}$

$=39$

$c>0$이므로 $c=\sqrt{39}$

(6) $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$

$=3^2+6^2-2\times3\times6\times\cos 60^\circ$

$=9+36-2\times3\times6\times\frac{1}{2}$

$=27$

$b>0$이므로 $b=3\sqrt{3}$

(7) $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$=4^2+7^2-2\times4\times7\times\cos 120^\circ$

$=16+49-2\times4\times7\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=93$

$c>0$이므로 $c=\sqrt{93}$

(8) $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$=12^2+6^2-2\times12\times6\times\cos 120^\circ$

$=144+36-2\times12\times6\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=252$

$a>0$이므로 $a=6\sqrt{7}$

07 답 (1) 60° (2) 120° (3) 30° (4) 30° (5) 60° (6) 45° (7) 45° (8) 120° (9) 45° (10) 45°

풀이 (1) $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{3^2+8^2-7^2}{2\times3\times8}$

$=\frac{9+64-49}{48}=\frac{1}{2}$

이때 $0^\circ<A<180^\circ$이므로 $A=60^\circ$

(2) $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{8^2+7^2-13^2}{2\times8\times7}$

$=\frac{64+49-169}{112}=-\frac{1}{2}$

이때 $0^\circ<A<180^\circ$이므로 $A=120^\circ$

(3) $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(\sqrt{3})^2+2^2-1^2}{2\times\sqrt{3}\times2}$

$=\frac{3+4-1}{4\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

이때 $0^\circ<A<180^\circ$이므로 $A=30^\circ$

(4) $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{2^2+(2\sqrt{3})^2-2^2}{2\times2\times2\sqrt{3}}$

$=\frac{4+12-4}{8\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

이때 $0^\circ<B<180^\circ$이므로 $B=30^\circ$

(5) $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{5^2+8^2-7^2}{2\times5\times8}$

$=\frac{25+64-49}{80}=\frac{1}{2}$

이때 $0^\circ<B<180^\circ$이므로 $B=60^\circ$

(6) $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{(\sqrt{6})^2+(\sqrt{3})^2-(\sqrt{3})^2}{2\times\sqrt{6}\times\sqrt{3}}$

$=\frac{6+3-3}{6\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

이때 $0^\circ<B<180^\circ$이므로 $B=45^\circ$

(7) $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{3^2+(\sqrt{2})^2-(\sqrt{5})^2}{2\times3\times\sqrt{2}}$

$=\frac{9+2-5}{6\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

이때 $0^\circ<C<180^\circ$이므로 $C=45^\circ$

(8) $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{2^2+1^2-(\sqrt{7})^2}{2\times2\times1}$

$=\frac{4+1-7}{4}=-\frac{1}{2}$

이때 $0^\circ<C<180^\circ$이므로 $C=120^\circ$

(9) $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{6})^2-2^2}{2\times(\sqrt{3}+1)\times\sqrt{6}}$

$=\frac{6+2\sqrt{3}}{6\sqrt{2}+2\sqrt{6}}=\frac{3+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}$

$=\frac{(3+\sqrt{3})(3\sqrt{2}-\sqrt{6})}{(3\sqrt{2}+\sqrt{6})(3\sqrt{2}-\sqrt{6})}=\frac{6\sqrt{2}}{12}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

이때 $0^\circ<C<180^\circ$이므로 $C=45^\circ$

(10) $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{2^2+(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2-(2\sqrt{2})^2}{2\times2\times(\sqrt{6}+\sqrt{2})}$

$=\frac{4+4\sqrt{3}}{4(\sqrt{6}+\sqrt{2})}=\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$

$=\frac{(1+\sqrt{3})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}=\frac{2\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

이때 $0^\circ<B<180^\circ$이므로 $B=45^\circ$

08 답 (1) $A=105^\circ$, $B=45^\circ$, $C=30^\circ$

(2) $A=90^\circ$, $B=30^\circ$, $C=60^\circ$

(3) $A=45^\circ$, $B=120^\circ$, $C=15^\circ$

풀이 (1) $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(2\sqrt{2})^2+2^2-(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}{2\times2\sqrt{2}\times2}$

$=\frac{4-4\sqrt{3}}{8\sqrt{2}}=\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

$=\frac{(1-\sqrt{3})\times\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{2^2+(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2-(2\sqrt{2})^2}{2\times2\times(\sqrt{6}+\sqrt{2})}$$
$$=\frac{4+4\sqrt{3}}{4\sqrt{6}+4\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$
$$=\frac{(1+\sqrt{3})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}=\frac{2\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2-2^2}{2\times(\sqrt{6}+\sqrt{2})\times2\sqrt{2}}$$
$$=\frac{12+4\sqrt{3}}{8\sqrt{3}+8}=\frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+2}$$
$$=\frac{(3+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{2(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
이때 $B=\underline{45^\circ}$, $C=\underline{30^\circ}$이므로 $A=\underline{105^\circ}$

(2) $$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2-(\sqrt{6})^2}{2\times\frac{\sqrt{6}}{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}}=0$$
$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2+(\sqrt{6})^2-\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}{2\times\frac{3\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{6}}$$
$$=\frac{9}{6\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{(\sqrt{6})^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2-\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2\times\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{6}}{2}}$$
$$=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$
$\therefore A=90^\circ$, $B=30^\circ$, $C=60^\circ$

(3) $$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(3\sqrt{2})^2+(3-\sqrt{3})^2-(2\sqrt{3})^2}{2\times3\sqrt{2}\times(3-\sqrt{3})}$$
$$=\frac{18-6\sqrt{3}}{18\sqrt{2}-6\sqrt{6}}=\frac{3-\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}$$
$$=\frac{(3-\sqrt{3})(3\sqrt{2}+\sqrt{6})}{(3\sqrt{2}-\sqrt{6})(3\sqrt{2}+\sqrt{6})}=\frac{6\sqrt{2}}{12}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{(3-\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2-(3\sqrt{2})^2}{2\times(3-\sqrt{3})\times2\sqrt{3}}$$
$$=\frac{6-6\sqrt{3}}{12\sqrt{3}-12}==\frac{6(1-\sqrt{3})}{12(\sqrt{3}-1)}=-\frac{1}{2}$$
$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{(2\sqrt{3})^2+(3\sqrt{2})^2-(3-\sqrt{3})^2}{2\times2\sqrt{3}\times3\sqrt{2}}$$
$$=\frac{18+6\sqrt{3}}{12\sqrt{6}}=\frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}$$
$$=\frac{(3+\sqrt{3})\times\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=\frac{3\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$
이때 $A=45^\circ$, $B=120^\circ$이므로 $C=15^\circ$

09 답 (1) $\sqrt{37}$ (2) $\sqrt{31}$ (3) $\sqrt{2}$

풀이 (1) $a=4$, $c=7$, $B=60^\circ$이므로

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$

$=7^2+4^2-2\times7\times4\times\cos 60^\circ$

$=49+16-2\times7\times4\times\frac{1}{2}$

$=\underline{37}$

$b>0$이므로 $b=\underline{\sqrt{37}}$

(2) $a=5$, $c=6$, $B=60^\circ$이므로

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$

$=6^2+5^2-2\times6\times5\times\cos 60^\circ$

$=36+25-2\times6\times5\times\frac{1}{2}$

$=31$

$b>0$이므로 $b=\sqrt{31}$

(3) $a=\sqrt{2}$, $c=\sqrt{6}$, $B=30^\circ$이므로

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$

$=(\sqrt{6})^2+(\sqrt{2})^2-2\times\sqrt{6}\times\sqrt{2}\times\cos 30^\circ$

$=6+2-2\times\sqrt{6}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=2$

$b>0$이므로 $b=\sqrt{2}$

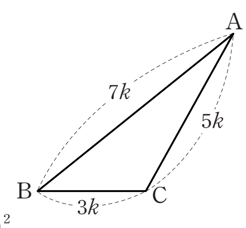
10 답 (1) 120° (2) 60° (3) 90° (4) 30°

풀이 (1) $\sin A:\sin B:\sin C=3:5:7$이므로 사인법칙에 의하여

$a:b:c=3:5:7$

$a=3k$, $b=5k$, $c=7k$

($k>0$)라고 하면 오른쪽 그림에서 코사인법칙에 의하여



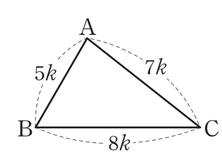
$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$
$$=\frac{(3k)^2+(5k)^2-(7k)^2}{2\times3k\times5k}$$
$$=-\frac{15k^2}{30k^2}=\underline{-\frac{1}{2}}$$

따라서 $0^\circ<C<180^\circ$이므로 $C=\underline{120^\circ}$

(2) $\sin A:\sin B:\sin C=8:7:5$이므로 사인법칙에 의하여

$a:b:c=8:7:5$

$a=8k$, $b=7k$, $c=5k$ ($k>0$)라고 하면 오른쪽 그림에서 코사인법칙에 의하여



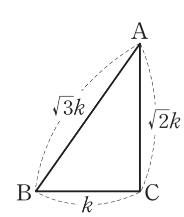
$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{(5k)^2+(8k)^2-(7k)^2}{2\times5k\times8k}$$
$$=\frac{40k^2}{80k^2}=\frac{1}{2}$$

따라서 $0^\circ<B<180^\circ$이므로 $B=60^\circ$

(3) $\sin A:\sin B:\sin C=1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$이므로 사인법칙에 의하여

$a:b:c=1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$

$a=k$, $b=\sqrt{2}k$, $c=\sqrt{3}k$ ($k>0$)라고 하면 오른쪽 그림에서 코사인법칙에 의하여



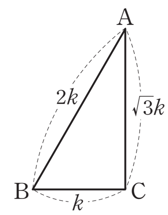
$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$
$$=\frac{k^2+(\sqrt{2}k)^2-(\sqrt{3}k)^2}{2\times k\times\sqrt{2}k}=0$$

따라서 $0^\circ<C<180^\circ$이므로 $C=90^\circ$

(4) $\sin A : \sin B : \sin C = 1 : \sqrt{3} : 2$이므로 사인법칙에 의하여

$a : b : c = 1 : \sqrt{3} : 2$

$a=k,\ b=\sqrt{3}k,\ c=2k\ (k>0)$라고 하면 오른쪽 그림에서 코사인법칙에 의하여



$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

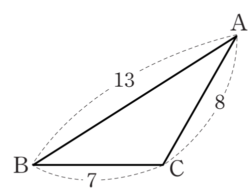
$$= \frac{(\sqrt{3}k)^2+(2k)^2-k^2}{2\times\sqrt{3}k\times 2k}$$

$$= \frac{6k^2}{4\sqrt{3}k^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

따라서 $0^\circ < A < 180^\circ$이므로 $A=30^\circ$

11 답 (1) 120°　(2) 90°　(3) 135°　(4) 30°

풀이 (1) $a=7,\ b=8,\ c=13$이라고 하면 가장 큰 각은 $c=13$인 변의 대각이다.



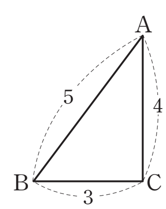
코사인법칙에 의하여

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$= \frac{7^2+8^2-13^2}{2\times7\times8} = -\frac{1}{2}$$

$0^\circ < C < 180^\circ$이므로 $C=120^\circ$

(2) $a=3,\ b=4,\ c=5$라고 하면 가장 큰 각은 $c=5$인 변의 대각이다.



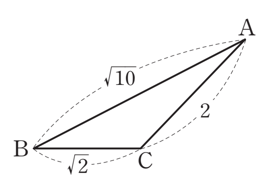
코사인법칙에 의하여

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$= \frac{3^2+4^2-5^2}{2\times3\times4} = 0$$

$0^\circ < C < 180^\circ$이므로 $C=90^\circ$

(3) $a=\sqrt{2},\ b=2,\ c=\sqrt{10}$이라고 하면 가장 큰 각은 $c=\sqrt{10}$인 변의 대각이다.



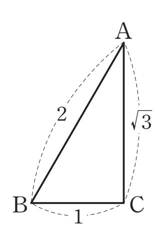
코사인법칙에 의하여

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$= \frac{(\sqrt{2})^2+2^2-(\sqrt{10})^2}{2\times\sqrt{2}\times2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$0^\circ < C < 180^\circ$이므로 $C=135^\circ$

(4) $a=1,\ b=\sqrt{3},\ c=2$라고 하면 가장 작은 각은 $a=1$인 변의 대각이다.



코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$= \frac{(\sqrt{3})^2+2^2-1}{2\times\sqrt{3}\times2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0^\circ < A < 180^\circ$이므로 $A=30^\circ$

12 답 (1) $a=b$인 이등변삼각형　(2) $a=c$인 이등변삼각형
(3) $A=90^\circ$인 직각삼각형　(4) $a=b$인 이등변삼각형
(5) $a=c$인 이등변삼각형　(6) $b=c$인 이등변삼각형

풀이 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하자.

(1) 사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R},\ \sin B = \frac{b}{2R}$$

이 식을 주어진 식에 대입하면

$$\frac{a}{2R} : \frac{b}{2R} = b : a,\ a\times\frac{a}{2R} = b\times\frac{b}{2R}$$

$\therefore a^2=b^2$

$a>0,\ b>0$이므로 $a=b$

따라서 삼각형 ABC는 $a=b$인 이등변삼각형이다.

(2) 코사인법칙에 의하여

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab},\ \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

이 식을 주어진 식에 대입하면

$$a\times\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = c\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{2b} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2b}$$

$a^2+b^2-c^2=b^2+c^2-a^2$

$2a^2=2c^2,\ a^2=c^2$

$a>0,\ c>0$이므로 $a=c$

따라서 삼각형 ABC는 $a=c$인 이등변삼각형이다.

(3) 코사인법칙에 의하여

$$\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},\ \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

이 식을 주어진 식에 대입하면

$$a\times\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} - b\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = c$$

$$\frac{c^2+a^2-b^2}{2c} - \frac{b^2+c^2-a^2}{2c} = c$$

$$\frac{c^2+a^2-b^2-b^2-c^2+a^2}{2c} = c,\ \frac{2(a^2-b^2)}{2c} = c$$

$$\frac{a^2-b^2}{c} = c,\ a^2-b^2=c^2 \qquad \therefore a^2=b^2+c^2$$

따라서 삼각형 ABC는 $A=90^\circ$인 직각삼각형이다.

(4) 사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R},\ \sin B = \frac{b}{2R}$$

코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\ \cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

이 식을 주어진 식에 대입하면

$$\frac{a}{2R} : \frac{b}{2R} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} : \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

$$a : b = \frac{b^2+c^2-a^2}{b} : \frac{c^2+a^2-b^2}{a}$$

$c^2+a^2-b^2=b^2+c^2-a^2,\ 2a^2=2b^2,\ a^2=b^2$

$a>0,\ b>0$이므로 $a=b$

따라서 삼각형 ABC는 $a=b$인 이등변삼각형이다.

(5) 사인법칙에 의하여

$$\sin B = \frac{b}{2R},\ \sin A = \frac{a}{2R}$$

코사인법칙에 의하여 $\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

이 식을 주어진 식에 대입하면

$\frac{b}{2R}=2\times\frac{a}{2R}\times\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$, $\frac{b}{2R}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2Rb}$

$b^2=a^2+b^2-c^2$, $a^2=c^2$

$a>0$, $c>0$이므로 $a=c$

따라서 삼각형 ABC는 $a=c$인 이등변삼각형이다.

(6) 사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$

코사인법칙에 의하여 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

이 식을 주어진 식에 대입하면

$\frac{a}{2R}=2\times\frac{b}{2R}\times\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$, $\frac{a}{2R}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2Ra}$

$a^2=a^2+b^2-c^2$, $b^2=c^2$

$b>0$, $c>0$이므로 $b=c$

따라서 삼각형 ABC는 $b=c$인 이등변삼각형이다.

13 답 3.8 km

풀이 삼각형 ABC에서

$\angle A=180^\circ-(72^\circ+78^\circ)=30^\circ$

$\frac{\overline{AC}}{\sin B}=\frac{\overline{BC}}{\sin A}$에서 $\frac{\overline{AC}}{\sin 72^\circ}=\frac{2}{\sin 30^\circ}$

$\therefore \overline{AC}=\frac{2}{\sin 30^\circ}\times\sin 72^\circ=\frac{2}{\frac{1}{2}}\times 0.95$

$=3.8\,(\text{km})$

따라서 A 지점과 C 지점 사이의 거리는 3.8 km이다.

14 답 $2\sqrt{6}$ m

풀이 삼각형 ABC에서

$\angle C=180^\circ-(60^\circ+75^\circ)=45^\circ$

$\frac{\overline{BC}}{\sin A}=\frac{\overline{AB}}{\sin C}$에서 $\frac{\overline{BC}}{\sin 60^\circ}=\frac{4}{\sin 45^\circ}$

$\therefore \overline{BC}=\frac{4}{\sin 45^\circ}\times\sin 60^\circ=\frac{4}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=2\sqrt{6}\,(\text{m})$

따라서 B 지점에서 목표물 C까지의 거리는 $2\sqrt{6}$ m이다.

15 답 65.31 m

풀이 $\frac{\overline{AB}}{\sin(\angle BCA)}=\frac{\overline{AC}}{\sin(\angle CBA)}$에서

$\frac{\overline{AB}}{\sin 40^\circ}=\frac{100}{\sin 80^\circ}$

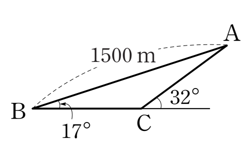
$\therefore \overline{AB}=\frac{100}{\sin 80^\circ}\times\sin 40^\circ=\frac{100}{0.98}\times 0.64$

$=65.306\cdots\,(\text{m})$

따라서 정문과 후문 사이의 거리는 65.31 m이다.

16 답 820.75 m

풀이 150 m/s의 속력으로 10초 동안 갔으므로 오른쪽 그림에서 $\overline{AB}=1500$ m이다.



삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AC}}{\sin(\angle ABC)}=\frac{\overline{AB}}{\sin(\angle ACB)}$

즉, $\frac{\overline{AC}}{\sin 17^\circ}=\frac{1500}{\sin(180^\circ-32^\circ)}$

$\frac{\overline{AC}}{\sin 17^\circ}=\frac{1500}{\sin 32^\circ}$

$\therefore \overline{AC}=\frac{1500}{\sin 32^\circ}\times\sin 17^\circ=\frac{1500}{0.53}\times 0.29$

$=820.754\cdots\,(\text{m})$

따라서 관제탑에서 비행기까지의 거리는 820.75 m이다.

17 답 $\frac{\sqrt{21}}{6}$ m

풀이 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos A$

$=1^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2-2\times1\times\frac{3}{2}\times\cos 60^\circ$

$=1+\frac{9}{4}-2\times1\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}$

$=\frac{7}{4}$

$\overline{BC}>0$이므로 $\overline{BC}=\frac{\sqrt{7}}{2}\,(\text{m})$

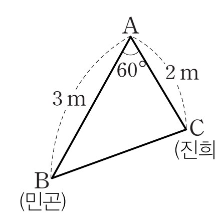
원탁의 반지름의 길이를 R m라고 하면 사인법칙에 의하여

$2R=\frac{\overline{BC}}{\sin 60^\circ}=\frac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{21}}{3}$ $\quad\therefore R=\frac{\sqrt{21}}{6}\,(\text{m})$

따라서 원탁의 반지름의 길이는 $\frac{\sqrt{21}}{6}$ m이다.

18 답 $\sqrt{7}$ m

풀이 오른쪽 그림과 같은 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여



$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$
$-2\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos A$

$=3^2+2^2-2\times3\times2\times\cos 60^\circ$

$=9+4-2\times3\times2\times\frac{1}{2}$

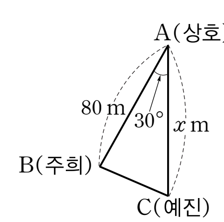
$=7$

$\overline{BC}>0$이므로 $\overline{BC}=\sqrt{7}\,(\text{m})$

따라서 민곤이와 진희 사이의 거리는 $\sqrt{7}$ m이다.

19 답 $(30+40\sqrt{3})$ m

풀이 경기장의 반지름의 길이를 R m라고 하면 오른쪽 그림과 같은 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여



$\frac{\overline{BC}}{\sin A}=2R$, $\frac{\overline{BC}}{\sin 30^\circ}=2\times50$

$\therefore \overline{BC}=100\times\frac{1}{2}=50\,(\text{m})$

$\overline{AC}=x$ m로 놓으면 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos A$

$50^2=80^2+x^2-2\times80\times x\times\cos 30^\circ$

$2500=6400+x^2-2\times80\times x\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x^2-80\sqrt{3}x+3900=0$

$\therefore\ x=40\sqrt{3}\pm\sqrt{(40\sqrt{3})^2-3900}$

$=40\sqrt{3}\pm\sqrt{900}=40\sqrt{3}\pm30\,(\text{m})$

그런데 상호와 예진이는 80 m보다 멀리 떨어져 있으므로 상호와 예진이 사이의 거리는 $(30+40\sqrt{3})$ m이다.

20 답 2.54 km

풀이 코사인법칙에 의하여

$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{CB}^2-2\overline{AC}\times\overline{CB}\times\cos C$

$=2^2+4^2-2\times2\times4\times\cos60^\circ$

$=4+16-2\times2\times4\times\frac{1}{2}=12$

$\overline{AB}>0$이므로 $\overline{AB}=2\sqrt{3}=2\times1.73=3.46$ (km)

따라서 산을 뚫어 직선 터널을 만들면 기존보다 거리가 $(2+4)-3.46=2.54$ (km)만큼 단축된다.

21 답 (1) $\frac{15\sqrt{3}}{2}$ (2) $12\sqrt{3}$ (3) 12 (4) $3\sqrt{2}$

풀이 (1) 삼각형 ABC의 넓이를 S라고 하면

$S=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}\times5\times6\times\sin120^\circ$

$=\frac{1}{2}\times5\times6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{15\sqrt{3}}{2}$

(2) 삼각형 ABC의 넓이를 S라고 하면

$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times8\times6\times\sin60^\circ$

$=\frac{1}{2}\times8\times6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=12\sqrt{3}$

(3) 삼각형 ABC의 넓이를 S라고 하면

$S=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}\times6\times8\times\sin30^\circ$

$=\frac{1}{2}\times6\times8\times\frac{1}{2}=12$

(4) 삼각형 ABC의 넓이를 S라고 하면

$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times3\times4\times\sin45^\circ$

$=\frac{1}{2}\times3\times4\times\frac{\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$

22 답 (1) $6\sqrt{11}$ (2) $2\sqrt{2}$ (3) $2\sqrt{14}$ (4) 24

풀이 (1) 코사인법칙에 의하여 $\cos C=\frac{5^2+8^2-9^2}{2\times5\times8}=\frac{1}{10}$

$0^\circ<C<180^\circ$에서 $\sin C>0$이므로

$\sin C=\sqrt{1-\cos^2C}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{10}\right)^2}=\frac{3\sqrt{11}}{10}$

따라서 삼각형의 ABC의 넓이를 S라고 하면

$S=\frac{1}{2}\times5\times8\times\frac{3\sqrt{11}}{10}=6\sqrt{11}$

(2) 코사인법칙에 의하여 $\cos C=\frac{3^2+3^2-2^2}{2\times3\times3}=\frac{7}{9}$

$0^\circ<C<180^\circ$에서 $\sin C>0$이므로

$\sin C=\sqrt{1-\cos^2C}=\sqrt{1-\left(\frac{7}{9}\right)^2}=\frac{4\sqrt{2}}{9}$

따라서 삼각형의 ABC의 넓이를 S라고 하면

$S=\frac{1}{2}\times3\times3\times\frac{4\sqrt{2}}{9}=2\sqrt{2}$

(3) 코사인법칙에 의하여 $\cos C=\frac{6^2+3^2-5^2}{2\times6\times3}=\frac{5}{9}$

$0^\circ<C<180^\circ$에서 $\sin C>0$이므로

$\sin C=\sqrt{1-\cos^2C}=\sqrt{1-\left(\frac{5}{9}\right)^2}=\frac{2\sqrt{14}}{9}$

따라서 삼각형의 ABC의 넓이를 S라고 하면

$S=\frac{1}{2}\times6\times3\times\frac{2\sqrt{14}}{9}=2\sqrt{14}$

(4) 코사인법칙에 의하여 $\cos C=\frac{6^2+8^2-10^2}{2\times6\times8}=0$

$0^\circ<C<180^\circ$에서 $C=90^\circ$이므로

삼각형의 ABC는 직각삼각형이다.

따라서 삼각형의 ABC의 넓이를 S라고 하면

$S=\frac{1}{2}\times6\times8=24$

다른 풀이 (1) $s=\frac{5+8+9}{2}=11$이므로

삼각형의 ABC의 넓이를 S라고 하면

$S=\sqrt{11\times(11-5)\times(11-8)\times(11-9)}$

$=\sqrt{11\times6\times3\times2}=\sqrt{11\times36}=6\sqrt{11}$

(2) $s=\frac{3+3+2}{2}=4$이므로

삼각형의 ABC의 넓이를 S라고 하면

$S=\sqrt{4\times(4-3)\times(4-3)\times(4-2)}$

$=\sqrt{4\times1\times1\times2}=2\sqrt{2}$

(3) $s=\frac{6+3+5}{2}=7$이므로

삼각형의 ABC의 넓이를 S라고 하면

$S=\sqrt{7\times(7-6)\times(7-3)\times(7-5)}$

$=\sqrt{7\times1\times4\times2}=\sqrt{4\times14}=2\sqrt{14}$

(4) $s=\frac{6+8+10}{2}=12$이므로

삼각형의 ABC의 넓이를 S라고 하면

$S=\sqrt{12\times(12-6)\times(12-8)\times(12-10)}$

$=\sqrt{12\times6\times4\times2}=\sqrt{24\times24}=24$

23 답 (1) $17\sqrt{3}$ (2) $10\sqrt{3}+4\sqrt{19}$

풀이 (1) 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{DB}^2=5^2+8^2-2\times5\times8\times\cos60^\circ$

$=25+64-2\times5\times8\times\frac{1}{2}=49$

$\overline{DB}>0$이므로 $\overline{DB}=7$

사각형 ABCD의 넓이를 S라고 하면

$S=\frac{1}{2}\times5\times8\times\sin60^\circ+\frac{1}{2}\times2\sqrt{6}\times7\times\sin45^\circ$

$=\frac{1}{2}\times5\times8\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times2\sqrt{6}\times7\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=10\sqrt{3}+7\sqrt{3}=17\sqrt{3}$

(2) 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{DB}^2=4^2+10^2-2\times4\times10\times\cos60^\circ$

$=16+100-2\times4\times10\times\frac{1}{2}=76$

$\overline{DB}>0$이므로 $\overline{DB}=2\sqrt{19}$

사각형 ABCD의 넓이를 S라고 하면

$S=\frac{1}{2}\times4\times10\times\sin60°+\frac{1}{2}\times2\sqrt{19}\times8\times\sin30°$

$=\frac{1}{2}\times4\times10\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times2\sqrt{19}\times8\times\frac{1}{2}$

$=10\sqrt{3}+4\sqrt{19}$

24 답 $\frac{24}{5}$

풀이 $\overline{AD}=x$라고 하면

$\frac{1}{2}\times12\times8\times\sin120°$

$=\frac{1}{2}\times12\times x\times\sin60°+\frac{1}{2}\times x\times8\times\sin60°$

$24\sqrt{3}=3\sqrt{3}x+2\sqrt{3}x$, $24\sqrt{3}=5\sqrt{3}x$

$\therefore x=\frac{24}{5}$

25 답 $\frac{12\sqrt{3}}{7}$

풀이 $\overline{AD}=x$라고 하면

$\frac{1}{2}\times4\times3\times\sin60°$

$=\frac{1}{2}\times4\times x\times\sin30°+\frac{1}{2}\times x\times3\times\sin30°$

$3\sqrt{3}=x+\frac{3}{4}x$, $3\sqrt{3}=\frac{7}{4}x$

$\therefore x=\frac{12\sqrt{3}}{7}$

26 답 (1) $4\sqrt{3}$ (2) $10\sqrt{2}$ (3) 12

풀이 (1) 평행사변형의 성질에 의하여 이웃하는 두 각의 크기의 합은 $180°$이므로

$B=120°$

따라서 평행사변형의 넓이를 S라고 하면

$S=\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin120°=2\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$

(2) 평행사변형의 성질에 의하여 이웃하는 두 각의 크기의 합은 $180°$이므로

$B=45°$

따라서 평행사변형의 넓이를 S라고 하면

$S=\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin45°=4\times5\times\frac{\sqrt{2}}{2}=10\sqrt{2}$

(3) 평행사변형의 성질에 의하여 이웃하는 두 각의 크기의 합은 $180°$이므로

$A=150°$

따라서 평행사변형의 넓이를 S라고 하면

$S=\overline{AB}\times\overline{AD}\times\sin150°=4\times6\times\frac{1}{2}=12$

27 답 (1) $12\sqrt{3}$ (2) 18 (3) $24\sqrt{2}$

풀이 (1) 사각형 ABCD의 넓이를 S라고 하면

$S=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}\times\sin60°$

$=\frac{1}{2}\times6\times8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=12\sqrt{3}$

(2) 사각형 ABCD의 넓이를 S라고 하면

$S=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}\times\sin150°$

$=\frac{1}{2}\times8\times9\times\frac{1}{2}=18$

(3) 사각형 ABCD의 넓이를 S라고 하면

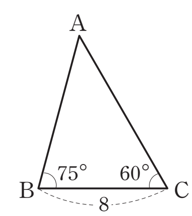
$S=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}\times\sin45°$

$=\frac{1}{2}\times8\times12\times\frac{\sqrt{2}}{2}=24\sqrt{2}$

중단원 점검문제 | Ⅱ-3 삼각함수의 활용 127-128쪽

01 답 $4\sqrt{6}$

풀이 주어진 조건을 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$A=180°-(75°+60°)=45°$이므로

사인법칙에 의하여

$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$

$\frac{8}{\sin45°}=\frac{c}{\sin60°}$

$c\sin45°=8\sin60°$, $c\times\frac{\sqrt{2}}{2}=8\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore c=4\sqrt{6}$

02 답 $5\sqrt{3}$

풀이 삼각형의 외접원의 반지름의 길이가 5이므로

$\frac{c}{\sin60°}=2\times5$ $\quad\therefore c=10\times\frac{\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$

03 답 $2:3:4$

풀이 $a+b=5k$, $b+c=7k$, $c+a=6k$ $(k>0)$라고 하면

$2(a+b+c)=18k$, $a+b+c=9k$

$\therefore a=2k$, $b=3k$, $c=4k$

삼각형의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A:\sin B:\sin C=\frac{a}{2R}:\frac{b}{2R}:\frac{c}{2R}$

$=\frac{2k}{2R}:\frac{3k}{2R}:\frac{4k}{2R}=2:3:4$

04 답 $30°$

풀이 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(2\sqrt{3})^2+4^2-2^2}{2\times2\sqrt{3}\times4}=\frac{24}{16\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0°<A<180°$이므로 $A=30°$

05 답 $\sqrt{21}$

풀이 $b=4$, $c=5$, $A=60°$이므로

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=4^2+5^2-2\times4\times5\times\cos60°$

$=16+25-2\times4\times5\times\frac{1}{2}=21$

$a>0$이므로 $a=\sqrt{21}$

06 답 $\frac{19}{20}$

풀이 $a=2k$, $b=5k$, $c=6k$ $(k>0)$라고 하면

코사인법칙에 의하여

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(5k)^2+(6k)^2-(2k)^2}{2\times5k\times6k}$$
$$=\frac{25k^2+36k^2-4k^2}{60k^2}=\frac{57k^2}{60k^2}=\frac{19}{20}$$

07 답 $\frac{4}{5}$

풀이 $\frac{a+b}{7}=\frac{b+c}{9}=\frac{c+a}{8}=k$ $(k>0)$라고 하면

$a+b=7k$, $b+c=9k$, $c+a=8k$

$2(a+b+c)=24k$, $a+b+c=12k$

$\therefore$ $a=3k$, $b=4k$, $c=5k$

따라서 가장 작은 각 θ는 $a=3k$인 변의 대각이다.

코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(4k)^2+(5k)^2-(3k)^2}{2\times4k\times5k}$$
$$=\frac{16k^2+25k^2-9k^2}{40k^2}=\frac{32k^2}{40k^2}=\frac{4}{5}$$

08 답 30°

풀이 $2\sqrt{3}\sin A=2\sin B=\sqrt{3}\sin C$의 각 변을 $2\sqrt{3}$으로 나누면

$$\sin A=\frac{\sin B}{\sqrt{3}}=\frac{\sin C}{2}$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면

사인법칙에 의하여

$$\frac{a}{2R}=\frac{\frac{b}{2R}}{\sqrt{3}}=\frac{\frac{c}{2R}}{2}$$

즉, $a=\frac{b}{\sqrt{3}}=\frac{c}{2}=k$ $(k>0)$라고 하면

$a=k$, $b=\sqrt{3}k$, $c=2k$

코사인법칙에 의하여

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(\sqrt{3}k)^2+(2k)^2-k^2}{2\times\sqrt{3}k\times2k}$$
$$=\frac{3k^2+4k^2-k^2}{4\sqrt{3}k^2}=\frac{6k^2}{4\sqrt{3}k^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0^\circ<A<90^\circ$이므로 $A=30^\circ$

09 답 $b=c$인 이등변삼각형

풀이 $A+B+C=180^\circ$이므로 $A+C=180^\circ-B$

즉, $A-B+C=180^\circ-2B$이므로

$$\sin\frac{A-B+C}{2}=\sin\frac{180^\circ-2B}{2}=\sin(90^\circ-B)$$
$$=\cos B$$

따라서 $\sin A=2\sin\frac{A-B+C}{2}\sin C$에서

$\sin A=2\cos B\sin C$

삼각형의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 사인법칙과 코사인법칙에 의하여

$$\frac{a}{2R}=2\times\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\times\frac{c}{2R},\ a=\frac{c^2+a^2-b^2}{a}$$

$a^2=c^2+a^2-b^2$, $b^2=c^2$

$b>0$, $c>0$이므로 $b=c$

따라서 삼각형 ABC는 $b=c$인 이등변삼각형이다.

10 답 $\frac{27\sqrt{2}}{2}$

풀이 삼각형 ABC의 넓이를 S라고 하면

$$S=\frac{1}{2}\times6\times9\times\sin135^\circ$$
$$=\frac{1}{2}\times6\times9\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{27\sqrt{2}}{2}$$

11 답 $6\sqrt{6}$

풀이 코사인법칙에 의하여

$$\cos C=\frac{5^2+6^2-7^2}{2\times5\times6}=\frac{1}{5}$$

$0^\circ<C<180^\circ$에서 $\sin C>0$이므로

$$\sin C=\sqrt{1-\cos^2C}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

따라서 삼각형의 ABC의 넓이를 S라고 하면

$$S=\frac{1}{2}\times5\times6\times\frac{2\sqrt{6}}{5}=6\sqrt{6}$$

다른 풀이 $s=\frac{5+6+7}{2}=9$이므로

삼각형 ABC의 넓이를 S라고 하면

$$S=\sqrt{9\times(9-5)\times(9-6)\times(9-7)}$$
$$=\sqrt{9\times4\times3\times2}$$
$$=\sqrt{36\times6}=6\sqrt{6}$$

12 답 $\frac{4\sqrt{3}+3\sqrt{6}}{2}$

풀이 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2=2^2+4^2-2\times2\times4\times\cos60^\circ$$
$$=4+16-2\times2\times4\times\frac{1}{2}=12$$

$\overline{AC}>0$이므로 $\overline{AC}=2\sqrt{3}$

사각형 ABCD의 넓이를 S라고 하면

$$S=\frac{1}{2}\times2\times4\times\sin60^\circ+\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times3\times\sin45^\circ$$
$$=\frac{1}{2}\times2\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times3\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$=2\sqrt{3}+\frac{3\sqrt{6}}{2}=\frac{4\sqrt{3}+3\sqrt{6}}{2}$$

13 답 $27\sqrt{3}$

풀이 평행사변형 ABCD의 넓이를 S라고 하면

$$S=6\times9\times\sin120^\circ$$
$$=6\times9\times\frac{\sqrt{3}}{2}=27\sqrt{3}$$

14 답 $27\sqrt{3}$

풀이 사각형 ABCD의 넓이를 S라고 하면

$$S=\frac{1}{2}\times9\times12\times\sin60^\circ$$
$$=\frac{1}{2}\times9\times12\times\frac{\sqrt{3}}{2}=27\sqrt{3}$$

Ⅲ 수열

Ⅲ-1 | 등차수열과 등비수열 132-157쪽

01 답 (1) 2, 5, 8, 11 (2) 3, 5, 9, 17

(3) 2, 6, 12, 20 (4) $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{6}$

풀이 (1) $a_n=3n-1$에 $n=1, 2, 3, 4$를 차례대로 대입하면

$a_1=3\times1-1=2$, $a_2=3\times2-1=5$,

$a_3=3\times3-1=8$, $a_4=3\times4-1=11$

(2) $a_n=2^n+1$에 $n=1, 2, 3, 4$를 차례대로 대입하면

$a_1=2^1+1=3$, $a_2=2^2+1=5$,

$a_3=2^3+1=9$, $a_4=2^4+1=17$

(3) $a_n=n^2+n$에 $n=1, 2, 3, 4$를 차례대로 대입하면

$a_1=1^2+1=2$, $a_2=2^2+2=6$,

$a_3=3^2+3=12$, $a_4=4^2+4=20$

(4) $a_n=\frac{n}{n+2}$에 $n=1, 2, 3, 4$를 차례대로 대입하면

$a_1=\frac{1}{1+2}=\frac{1}{3}$, $a_2=\frac{2}{2+2}=\frac{2}{4}$,

$a_3=\frac{3}{3+2}=\frac{3}{5}$, $a_4=\frac{4}{4+2}=\frac{4}{6}$

02 답 (1) $a_n=\frac{1}{2n}$ (2) $a_n=5$

(3) $a_n=(-1)^n$ (4) $a_n=n(n+1)$

풀이 (1) $a_1=\frac{1}{2}=\frac{1}{2\times1}$, $a_2=\frac{1}{4}=\frac{1}{2\times2}$,

$a_3=\frac{1}{6}=\frac{1}{2\times3}$, $a_4=\frac{1}{8}=\frac{1}{2\times4}$, $\cdots$

이므로

$a_n=\frac{1}{2n}$

(2) $a_1=5$, $a_2=5$, $a_3=5$, $a_4=5$, $\cdots$

이므로 $a_n=5$

(3) $a_1=-1=(-1)^1$, $a_2=1=(-1)^2$,

$a_3=-1=(-1)^3$, $a_4=1=(-1)^4$, $\cdots$

이므로 $a_n=(-1)^n$

(4) $a_1=1\times2=1\times(1+1)$,

$a_2=2\times3=2\times(2+1)$,

$a_3=3\times4=3\times(3+1)$,

$a_4=4\times5=4\times(4+1)$, $\cdots$

이므로 $a_n=n(n+1)$

03 답 (1) $a_n=4n-2$ (2) $a_n=\frac{n}{2}-\frac{7}{2}$

(3) $a_n=3n-6$ (4) $a_n=6n-26$

(5) $a_n=6n-1$ (6) $a_n=4n-9$

(7) $a_n=5n+2$ (8) $a_n=-8n+30$

풀이 등차수열의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

(1) 첫째항은 $a=2$, 공차는 $d=6-2=4$

$\therefore a_n=a+(n-1)d=2+(n-1)\times4=4n-2$

(2) 첫째항은 $a=-3$, 공차는 $d=-\frac{5}{2}-(-3)=\frac{1}{2}$

$\therefore a_n=a+(n-1)d=-3+(n-1)\times\frac{1}{2}=\frac{n}{2}-\frac{7}{2}$

(3) 첫째항은 $a=-3$, 공차는 $d=0-(-3)=3$

$\therefore a_n=a+(n-1)d=-3+(n-1)\times3=3n-6$

(4) 첫째항은 $a=-20$, 공차는 $d=-14-(-20)=6$

$\therefore a_n=a+(n-1)d=-20+(n-1)\times6=6n-26$

(5) 첫째항은 $a=5$, 공차는 $d=11-5=6$

$\therefore a_n=a+(n-1)d=5+(n-1)\times6=6n-1$

(6) 첫째항은 $a=-5$, 공차는 $d=-1-(-5)=4$

$\therefore a_n=a+(n-1)d=-5+(n-1)\times4=4n-9$

(7) 첫째항은 $a=7$, 공차는 $d=12-7=5$

$\therefore a_n=a+(n-1)d=7+(n-1)\times5=5n+2$

(8) 첫째항은 $a=22$, 공차는 $d=14-22=-8$

$\therefore a_n=a+(n-1)d=22+(n-1)\times(-8)$

$=-8n+30$

04 답 (1) 풀이 참조, 첫째항: 9, 공차: 2

(2) 풀이 참조, 첫째항: 7, 공차: 5

(3) 풀이 참조, 첫째항: 13, 공차: 6

(4) 풀이 참조, 첫째항: 1, 공차: 3

(5) 풀이 참조, 첫째항: -1, 공차: 6

(6) 풀이 참조, 첫째항: -1, 공차: -4

(7) 풀이 참조, 첫째항: 4, 공차: -3

(8) 풀이 참조, 첫째항: 1, 공차: -1

풀이 (1) $a_n=2n+7$에서 $a_{n+1}=2(n+1)+7=2n+9$

$\therefore$ (공차)$=a_{n+1}-a_n=(2n+9)-(2n+7)=2$

또, $a_1=2\times1+7=9$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 9, 공차가 2인 등차수열이다.

(2) $a_n=5n+2$에서 $a_{n+1}=5(n+1)+2=5n+7$

$\therefore$ (공차)$=a_{n+1}-a_n=(5n+7)-(5n+2)=5$

또, $a_1=5\times1+2=7$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 7, 공차가 5인 등차수열이다.

(3) $a_n=6n+7$에서 $a_{n+1}=6(n+1)+7=6n+13$

$\therefore$ (공차)$=a_{n+1}-a_n=(6n+13)-(6n+7)=6$

또, $a_1=6\times1+7=13$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 13, 공차가 6인 등차수열이다.

(4) $a_n=3n-2$에서 $a_{n+1}=3(n+1)-2=3n+1$

$\therefore$ (공차)$=a_{n+1}-a_n=(3n+1)-(3n-2)=3$

또, $a_1=3\times1-2=1$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공차가 3인 등차수열이다.

(5) $a_n=6n-7$에서 $a_{n+1}=6(n+1)-7=6n-1$

$\therefore$ (공차)$=a_{n+1}-a_n=(6n-1)-(6n-7)=6$

또, $a_1=6\times1-7=-1$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 -1, 공차가 6인 등차수열이다.

(6) $a_n=-4n+3$에서 $a_{n+1}=-4(n+1)+3=-4n-1$

$\therefore$ (공차)$=a_{n+1}-a_n=(-4n-1)-(-4n+3)=-4$

또, $a_1=-4\times1+3=-1$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 -1, 공차가 -4인 등차수열이다.

(7) $a_n=-3n+7$에서 $a_{n+1}=-3(n+1)+7=-3n+4$

$\therefore$ (공차)$=a_{n+1}-a_n=(-3n+4)-(-3n+7)=-3$

또, $a_1=-3\times1+7=4$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 4, 공차가 -3인 등차수열이다.

(8) $a_n=-n+2$에서 $a_{n+1}=-(n+1)+2=-n+1$

$\therefore$ (공차)$=a_{n+1}-a_n=(-n+1)-(-n+2)=-1$

또, $a_1=-1+2=1$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공차가 -1인 등차수열이다.

05 답 (1) 29 (2) -27 (3) 54 (4) -50 (5) 107 (6) 165 (7) 198 (8) 113

풀이 (1) 등차수열의 첫째항을 a, 공차를 d, 일반항을 a_n이라고 하면 $a_n=a+(n-1)d$

$a_2=3$이므로 $a+d=3$ …… ㉠

$a_7=13$이므로 $a+6d=13$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $d=2$

$\therefore a_{15}=a+14d=1+14\times2=29$

(2) 등차수열의 첫째항을 a, 공차를 d, 일반항을 a_n이라고 하면 $a_n=a+(n-1)d$

$a_3=5$이므로 $a+2d=5$ …… ㉠

$a_8=-5$이므로 $a+7d=-5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=9$, $d=-2$

$\therefore a_{19}=a+18d=9+18\times(-2)=-27$

(3) 등차수열의 첫째항을 a, 공차를 d, 일반항을 a_n이라고 하면 $a_n=a+(n-1)d$

$a_2=8$이므로 $a+d=8$ …… ㉠

$a_6=16$이므로 $a+5d=16$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=6$, $d=2$

$\therefore a_{25}=a+24d=6+24\times2=54$

(4) 등차수열의 첫째항을 a, 공차를 d, 일반항을 a_n이라고 하면 $a_n=a+(n-1)d$

$a_3=6$이므로 $a+2d=6$ …… ㉠

$a_{10}=-8$이므로 $a+9d=-8$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=10$, $d=-2$

$\therefore a_{31}=a+30d=10+30\times(-2)=-50$

(5) 등차수열의 첫째항을 a, 공차를 d, 일반항을 a_n이라고 하면 $a_n=a+(n-1)d$

$a_3=7$이므로 $a+2d=7$ …… ㉠

$a_{11}=39$이므로 $a+10d=39$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $d=4$

$\therefore a_{28}=a+27d=-1+27\times4=107$

(6) 등차수열의 첫째항을 a, 공차를 d, 일반항을 a_n이라고 하면 $a_n=a+(n-1)d$

$a_3=-10$이므로 $a+2d=-10$ …… ㉠

$a_7=10$이므로 $a+6d=10$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-20$, $d=5$

$\therefore a_{38}=a+37d=-20+37\times5=165$

(7) 등차수열의 첫째항을 a, 공차를 d, 일반항을 a_n이라고 하면 $a_n=a+(n-1)d$

$a_{11}=86$이므로 $a+10d=86$ …… ㉠

$a_{19}=142$이므로 $a+18d=142$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=16$, $d=7$

$\therefore a_{27}=a+26d=16+26\times7=198$

(8) 등차수열의 첫째항을 a, 공차를 d, 일반항을 a_n이라고 하면 $a_n=a+(n-1)d$

$a_7=23$이므로 $a+6d=23$ …… ㉠

$a_{23}=71$이므로 $a+22d=71$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5$, $d=3$

$\therefore a_{37}=a+36d=5+36\times3=113$

06 답 (1) 11 (2) 43 (3) 1 (4) 57

풀이 (1) 등차수열의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_n=a+(n-1)d$

$a_5=4a_3$에서 $a+4d=4(a+2d)$

$\therefore 3a+4d=0$ …… ㉠

$a_2+a_4=4$에서 $a+d+a+3d=4$

$\therefore 2a+4d=4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-4$, $d=3$

$\therefore a_6=a+5d=-4+5\times3=11$

(2) 등차수열의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_n=a+(n-1)d$

$a_9=-5a_4$에서 $a+8d=-5(a+3d)$

$\therefore 6a+23d=0$ …… ㉠

$a_2+a_6=-10$에서 $a+d+a+5d=-10$

$\therefore 2a+6d=-10$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-23$, $d=6$

$\therefore a_{12}=a+11d=-23+11\times6=43$

(3) 등차수열의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_n=a+(n-1)d$

$a_1=4a_5$에서 $a=4(a+4d)$

$\therefore 3a+16d=0$ …… ㉠

$a_2+a_{11}=-1$에서 $a+d+a+10d=-1$

$\therefore 2a+11d=-1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=16$, $d=-3$

$\therefore a_6=a+5d=16+5\times(-3)=1$

(4) 등차수열의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_n=a+(n-1)d$

$a_7=5a_2$에서 $a+6d=5(a+d)$

$\therefore 4a-d=0$ …… ㉠

$a_8-a_3=20$에서 $a+7d-(a+2d)=20$

$5d=20$ $\quad\therefore d=4$

$d=4$를 ㉠에 대입하면 $a=1$

$\therefore a_{15}=a+14d=1+14\times4=57$

07 답 (1) 첫째항: 10, 공차: -2
(2) 첫째항: 28, 공차: -4

풀이 (1) 등차수열의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_n=a+(n-1)d$

제3항과 제9항은 절댓값이 같고 부호가 반대이므로

$a_3=-a_9$, $a+2d=-(a+8d)$

$2a+10d=0$ $\quad\therefore a+5d=0$ …… ㉠

$a_{13}=-14$에서 $a+12d=-14$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\underline{10}$, $d=\underline{-2}$

(2) 등차수열의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_n=a+(n-1)d$

제5항과 제11항은 절댓값이 같고 부호가 반대이므로

$a_5=-a_{11}$, $a+4d=-(a+10d)$

$2a+14d=0$ $\quad\therefore a+7d=0$ …… ㉠

$a_7=4$에서 $a+6d=4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=28$, $d=-4$

08 답 (1) 47 (2) 3

풀이 (1) 등차수열의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_n=a+(n-1)d$

$a_3=11$에서 $a+2d=11$ …… ㉠

$a_6:a_{10}=5:8$에서 $8a_6=5a_{10}$

$8(a+5d)=5(a+9d)$ $\quad\therefore 3a-5d=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5$, $d=\underline{3}$

$\therefore a_{15}=a+14d=5+14\times3=\underline{47}$

(2) 등차수열의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_n=a+(n-1)d$

$(a_1+a_2):(a_3+a_4)=1:2$에서

$2(a_1+a_2)=a_3+a_4$, $2(a+a+d)=a+2d+a+3d$

$4a+2d=2a+5d$ $\quad\therefore d=\frac{2}{3}a$

$$\therefore \frac{a_4}{a_1}=\frac{a+3d}{a}=\frac{a+3\times\left(\frac{2}{3}a\right)}{a}=\frac{3a}{a}=3$$

09 답 (1) 제9항 (2) 제19항
(3) 제35항 (4) 제14항
(5) 제16항 (6) 제16항
(7) 제32항 (8) 제54항

풀이 (1) 주어진 수열의 일반항을 a_n이라고 하면

$a_n=-22+(n-1)\times3=3n-25$

제n항이 처음으로 양수가 된다고 하면

$3n-25>0$ $\quad\therefore n>\frac{25}{3}=8.333\cdots$

이때 n이 자연수이므로 제9항이 처음으로 양수가 된다.

(2) 주어진 수열의 일반항을 a_n이라고 하면

$a_n=107+(n-1)\times(-6)=-6n+113$

제n항이 처음으로 음수가 된다고 하면

$-6n+113<0$ $\quad\therefore n>\frac{113}{6}=18.833\cdots$

이때 n이 자연수이므로 제19항이 처음으로 음수가 된다.

(3) 주어진 수열의 일반항을 a_n이라고 하면

$a_n=100+(n-1)\times(-3)=-3n+103$

제n항이 처음으로 음수가 된다고 하면

$-3n+103<0$ $\quad\therefore n>\frac{103}{3}=34.3333\cdots$

이때 n이 자연수이므로 제35항이 처음으로 음수가 된다.

(4) 주어진 수열의 일반항을 a_n이라고 하면

$a_n=-25+(n-1)\times2=2n-27$

제n항이 처음으로 양수가 된다고 하면

$2n-27>0$ $\quad\therefore n>\frac{27}{2}=13.5$

이때 n이 자연수이므로 제14항이 처음으로 양수가 된다.

(5) 등차수열의 첫째항을 a, 공차를 d, 일반항을 a_n이라고 하면

$a_7=50$에서 $a+6d=50$ …… ㉠

$a_{11}=26$에서 $a+10d=26$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=86$, $d=-6$

$\therefore a_n=86+(n-1)\times(-6)=-6n+92$

제n항이 처음으로 음수가 된다고 하면

$-6n+92<0$ $\quad\therefore n>\frac{46}{3}=15.333\cdots$

이때 n이 자연수이므로 제16항이 처음으로 음수가 된다.

(6) 등차수열의 첫째항을 a, 공차를 d, 일반항을 a_n이라고 하면

$a_4=47$에서 $a+3d=47$ …… ㉠

$a_{10}=23$에서 $a+9d=23$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=59$, $d=-4$

$\therefore a_n=59+(n-1)\times(-4)=-4n+63$

제n항이 처음으로 음수가 된다고 하면

$-4n+63<0$ $\quad\therefore n>\frac{63}{4}=15.75$

이때 n이 자연수이므로 제16항이 처음으로 음수가 된다.

(7) 등차수열의 첫째항을 a, 공차를 d, 일반항을 a_n이라고 하면

$a_{14}=53$에서 $a+13d=53$ …… ㉠

$a_{28}=11$에서 $a+27d=11$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=92$, $d=-3$

$\therefore a_n=92+(n-1)\times(-3)=-3n+95$

제n항이 처음으로 음수가 된다고 하면

$-3n+95<0 \quad \therefore n>\frac{95}{3}=31.666\cdots$

이때 n이 자연수이므로 제32항이 처음으로 음수가 된다.

(8) 주어진 수열의 일반항을 a_n이라고 하면

$a_n=-5+(n-1)\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}n-\frac{17}{3}$

제n항이 처음으로 30보다 큰 항이 된다고 하면

$\frac{2}{3}n-\frac{17}{3}>30$, $\frac{2}{3}n>\frac{107}{3}$

$\therefore n>\frac{107}{3}\times\frac{3}{2}=53.5$

이때 n이 자연수이므로 제54항이 처음으로 30보다 커진다.

10 답 (1) -1, 4, 9 (2) -22, -15, -8 (3) 7, 11, 15

풀이 (1) 두 수 -6과 14 사이에 세 개의 수를 넣으면 첫째항이 -6, 제5항이 14가 된다.

첫째항을 a, 공차를 d, 일반항을 a_n이라고 하면

$a_5=a+4d=14$, $-6+4d=14 \quad \therefore d=5$

-6에서부터 14까지 공차 5씩 더해 가면

-6, -1, $\underline{4}$, 9, 14

따라서 구하는 세 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면 -1, $\underline{4}$, 9이다.

(2) 두 수 -1과 -29 사이에 세 개의 수를 넣으면 첫째항이 -1, 제5항이 -29가 된다.

첫째항을 a, 공차를 d, 일반항을 a_n이라고 하면

$a_5=a+4d=-29$, $-1+4d=-29 \quad \therefore d=-7$

-1에서부터 -29까지 공차 -7씩 더해 가면

-1, -8, -15, -22, -29

따라서 구하는 세 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면 -22, -15, -8이다.

(3) 두 수 3과 19 사이에 세 개의 수를 넣으면 첫째항이 3, 제5항이 19가 된다.

첫째항을 a, 공차를 d, 일반항을 a_n이라고 하면

$a_5=a+4d=19$, $3+4d=19 \quad \therefore d=4$

3에서부터 19까지 공차 4씩 더해 가면

3, 7, 11, 15, 19

따라서 구하는 세 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면 7, 11, 15이다.

11 답 (1) 11, 18, 25, 32
(2) -2, 1, 4, 7
(3) $-\frac{20}{3}$, -6, $-\frac{16}{3}$, $-\frac{14}{3}$

풀이 (1) 두 수 4와 39 사이에 네 개의 수를 넣으면 첫째항이 4, 제6항이 39가 된다.

첫째항을 a, 공차를 d, 일반항을 a_n이라고 하면

$a_6=a+5d=39$, $4+5d=39 \quad \therefore d=7$

4에서부터 39까지 공차 7씩 더해 가면

4, 11, 18, $\underline{25}$, 32, 39

따라서 구하는 네 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면 11, 18, $\underline{25}$, 32이다.

(2) 두 수 10과 -5 사이에 네 개의 수를 넣으면 첫째항이 10, 제6항이 -5가 된다.

첫째항을 a, 공차를 d, 일반항을 a_n이라고 하면

$a_6=a+5d=-5$, $10+5d=-5 \quad \therefore d=-3$

10에서부터 -5까지 공차 -3씩 더해 가면

10, 7, 4, 1, -2, -5

따라서 구하는 네 수를 작은 순서대로 나열하면 -2, 1, 4, 7이다.

(3) 두 수 -4와 $-\frac{22}{3}$ 사이에 네 개의 수를 넣으면 첫째항이 -4, 제6항이 $-\frac{22}{3}$가 된다.

첫째항을 a, 공차를 d, 일반항을 a_n이라고 하면

$a_6=a+5d=-\frac{22}{3}$, $-4+5d=-\frac{22}{3} \quad \therefore d=-\frac{2}{3}$

-4에서부터 $-\frac{22}{3}$까지 공차 $-\frac{2}{3}$씩 더해 가면

-4, $-\frac{14}{3}$, $-\frac{16}{3}$, -6, $-\frac{20}{3}$, $-\frac{22}{3}$

따라서 구하는 네 수를 작은 순서대로 나열하면

$-\frac{20}{3}$, -6, $-\frac{16}{3}$, $-\frac{14}{3}$이다.

12 답 (1) 2 (2) 0, 4
(3) -1, $\frac{5}{2}$ (4) -3, $\frac{7}{2}$

풀이 (1) 세 수 x, $2x+3$, $6x$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2(2x+3)=x+6x$, $4x+6=7x$

$\therefore x=\underline{2}$

참고 $x=2$일 때, 세 수는 2, 7, 12로 첫째항이 2, 공차가 5인 등차수열이다.

(2) 세 수 $2x$, $3x-1$, x^2-2가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2(3x-1)=2x+x^2-2$, $x^2-4x=0$

$x(x-4)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=4$

참고 $x=0$일 때, 세 수는 0, -1, -2로 첫째항이 0, 공차가 -1인 등차수열이다.

$x=4$일 때, 세 수는 8, 11, 14로 첫째항이 8, 공차가 3인 등차수열이다.

(3) 세 수 x, x^2-1, $2x+3$이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2(x^2-1)=x+2x+3$, $2x^2-3x-5=0$

$(x+1)(2x-5)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=\frac{5}{2}$

참고 $x=-1$일 때, 세 수는 -1, 0, 1로 첫째항이 -1, 공차가 1인 등차수열이다.

$x=\frac{5}{2}$일 때, 세 수는 $\frac{5}{2}$, $\frac{21}{4}$, 8로 첫째항이 $\frac{5}{2}$, 공차가 $\frac{11}{4}$인 등차수열이다.

(4) 세 수 $3x$, x^2-3, $15-2x$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2(x^2-3)=3x+15-2x$, $2x^2-x-21=0$

$(x+3)(2x-7)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=\frac{7}{2}$

참고 $x=-3$일 때, 세 수는 -9, 6, 21로 첫째항이 -9, 공차가 15인 등차수열이다.

$x=\frac{7}{2}$일 때, 세 수는 $\frac{21}{2}$, $\frac{37}{4}$, 8로 첫째항이 $\frac{21}{2}$, 공차가 $-\frac{5}{4}$인 등차수열이다.

13 답 (1) 4, 7, 10 (2) 3, 5, 7 (3) -2, 1, 4

풀이 (1) 등차수열의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면 등차수열을 이루는 세 수를 $a-d$, a, $a+d$로 놓을 수 있다.

세 수의 합이 21이므로 $(a-d)+a+(a+d)=21$

$3a=21 \quad \therefore a=7$

세 수의 곱이 280이므로 $(a-d)\times a\times(a+d)=280$

$a^3-ad^2=280$, $7^3-7\times d^2=280$, $d^2=9$

$\therefore d=-3$ 또는 $d=3$

(i) $a=7$, $d=-3$일 때, 세 수는 10, 7, 4이다.

(ii) $a=7$, $d=3$일 때, 세 수는 4, 7, 10이다.

따라서 구하는 세 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면 4, 7, 10이다.

(2) 등차수열의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면 등차수열을 이루는 세 수를 $a-d$, a, $a+d$로 놓을 수 있다.

세 수의 합이 15이므로 $(a-d)+a+(a+d)=15$

$3a=15 \quad \therefore a=5$

세 수의 곱이 105이므로 $(a-d)\times a\times(a+d)=105$

$a^3-ad^2=105$, $5^3-5\times d^2=105$, $d^2=4$

$\therefore d=-2$ 또는 $d=2$

(i) $a=5$, $d=-2$일 때, 세 수는 7, 5, 3이다.

(ii) $a=5$, $d=2$일 때, 세 수는 3, 5, 7이다.

따라서 구하는 세 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면 3, 5, 7이다.

(3) 등차수열의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면 등차수열을 이루는 세 수를 $a-d$, a, $a+d$로 놓을 수 있다.

세 수의 합이 3이므로 $(a-d)+a+(a+d)=3$

$3a=3 \quad \therefore a=1$

세 수의 곱이 -8이므로 $(a-d)\times a\times(a+d)=-8$

$a^3-ad^2=-8$, $1^3-1\times d^2=-8$, $d^2=9$

$\therefore d=-3$ 또는 $d=3$

(i) $a=1$, $d=-3$일 때, 세 수는 4, 1, -2이다.

(ii) $a=1$, $d=3$일 때, 세 수는 -2, 1, 4이다.

따라서 구하는 세 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면 -2, 1, 4이다.

14 답 (1) 968 (2) 315 (3) 116 (4) 648

풀이 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

(1) $S_{22}=\frac{22\times(2+86)}{2}=\frac{22\times 88}{2}=968$

(2) $S_{15}=\frac{15\times(7+35)}{2}=\frac{15\times 42}{2}=315$

(3) $S_8=\frac{8\times(2+27)}{2}=\frac{8\times 29}{2}=116$

(4) $S_{16}=\frac{16\times(3+78)}{2}=\frac{16\times 81}{2}=648$

15 답 (1) 265 (2) 225 (3) -143 (4) -460

풀이 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

(1) $S_{10}=\frac{10\times\{2\times 4+(10-1)\times 5\}}{2}$

$=\frac{10\times(8+45)}{2}$

$=265$

(2) $S_{15}=\frac{15\times\{2\times(-6)+(15-1)\times 3\}}{2}$

$=\frac{15\times(-12+42)}{2}$

$=225$

(3) $S_{11}=\frac{11\times\{2\times 2+(11-1)\times(-3)\}}{2}$

$=\frac{11\times(4-30)}{2}$

$=-143$

(4) $S_{20}=\frac{20\times\{2\times(-4)+(20-1)\times(-2)\}}{2}$

$=\frac{20\times(-8-38)}{2}$

$=-460$

16 답 (1) 222 (2) 550 (3) 684 (4) -190 (5) -920

풀이 (1) 첫째항이 35, 공차가 $32-35=-3$이므로 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_{12}=\frac{12\times\{2\times 35+(12-1)\times(-3)\}}{2}$

$=\frac{12\times(70-33)}{2}=222$

(2) 첫째항이 -1, 공차가 $2-(-1)=3$이므로 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_{20}=\frac{20\times\{2\times(-1)+(20-1)\times 3\}}{2}$

$=\frac{20\times(-2+57)}{2}=550$

(3) 첫째항이 4, 공차가 $8-4=4$이므로 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_{18}=\frac{18\times\{2\times4+(18-1)\times4\}}{2}$

$=\frac{18\times(8+68)}{2}=684$

(4) 첫째항이 -1, 공차가 $-5-(-1)=-4$이므로 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_{10}=\frac{10\times\{2\times(-1)+(10-1)\times(-4)\}}{2}$

$=\frac{10\times(-2-36)}{2}=-190$

(5) 첫째항이 11, 공차가 $5-11=-6$이므로 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_{20}=\frac{20\times\{2\times11+(20-1)\times(-6)\}}{2}$

$=\frac{20\times(22-114)}{2}=-920$

17 답 (1) -253 (2) -351 (3) 1520 (4) 1404 (5) 7

풀이 (1) 첫째항이 42, 공차가 $29-42=-13$이므로 끝항 -88을 제n항이라고 하면

$42+(n-1)\times(-13)=-88$, $13n=143$ $\therefore n=11$

따라서 항수는 11이다.

첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_{11}=\frac{11\times(42-88)}{2}=\underline{-253}$

(2) 첫째항이 15, 공차가 $8-15=-7$이므로 끝항 -69를 제n항이라고 하면

$15+(n-1)\times(-7)=-69$, $7n=91$ $\therefore n=13$

따라서 항수는 13이다.

첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_{13}=\frac{13\times(15-69)}{2}=-351$

(3) 첫째항이 3, 공차가 $5-3=2$이므로 끝항 77을 제n항이라고 하면

$3+(n-1)\times2=77$, $2n=76$ $\therefore n=38$

따라서 항수는 38이다.

첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_{38}=\frac{38\times(3+77)}{2}=1520$

(4) 첫째항이 4, 공차가 $8-4=4$이므로 끝항 104를 제n항이라고 하면

$4+(n-1)\times4=104$, $4n=104$ $\therefore n=26$

따라서 항수는 26이다.

첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_{26}=\frac{26\times(4+104)}{2}=1404$

(5) 첫째항이 -19, 공차가 $-16-(-19)=3$이므로 끝항 20을 제n항이라고 하면

$-19+(n-1)\times3=20$, $3n=42$ $\therefore n=14$

따라서 항수는 14이다.

첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_{14}=\frac{14\times(-19+20)}{2}=7$

18 답 (1) 첫째항: 40, 공차: -3
(2) 첫째항: 57, 공차: -4

풀이 (1) 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면 제20항이 -17이므로 $a+19d=-17$ ...... ㉠

첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_{20}=\frac{20\times\{2a+(20-1)d\}}{2}=230$

$\therefore 2a+19d=23$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\underline{40}$, $d=\underline{-3}$

(2) 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면 제3항이 49이므로

$a+2d=49$ ...... ㉠

첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_{10}=\frac{10\times\{2a+(10-1)d\}}{2}=390$

$\therefore 2a+9d=78$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=57$, $d=-4$

19 답 (1) $a_n=7n-2$
(2) $a_n=5n-16$

풀이 (1) 첫째항을 a, 공차를 d, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_5=\frac{5\times\{2a+(5-1)d\}}{2}=95$

$\therefore 2a+4d=38$ ...... ㉠

$S_{10}=\frac{10\times\{2a+(10-1)d\}}{2}=365$

$\therefore 2a+9d=73$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5$, $d=7$

따라서 이 등차수열의 일반항 a_n은

$a_n=5+(n-1)\times7=7n-2$

(2) 첫째항을 a, 공차를 d, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_{10}=\frac{10\times\{2a+(10-1)d\}}{2}=115$

$\therefore 2a+9d=23$ ...... ㉠

$S_{20}=\frac{20\times\{2a+(20-1)d\}}{2}=730$

$\therefore 2a+19d=73$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-11$, $d=5$

따라서 이 등차수열의 일반항 a_n은

$a_n=-11+(n-1)\times5=5n-16$

20 답 (1) 제8항, 128
(2) 제10항, 100
(3) 제15항, -345

풀이 (1) 일반항 a_n을 구하면

$a_n=30+(n-1)\times(-4)=-4n+34$

$a_n<0$인 경우는 $-4n+34<0$에서

$n>\frac{34}{4}=8.5$

따라서 제8항까지는 양수이고, 제9항부터는 음수이므로 첫째항부터 제8항까지의 합이 최대가 된다.

첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면 구하는 최댓값은

$S_8=\frac{8\times\{2\times30+(8-1)\times(-4)\}}{2}=\underline{128}$

(2) 일반항 a_n을 구하면

$a_n=19+(n-1)\times(-2)=-2n+21$

$a_n<0$인 경우는 $-2n+21<0$에서

$n>\frac{21}{2}=10.5$

따라서 제10항까지는 양수이고, 제11항부터는 음수이므로 첫째항부터 제10항까지의 합이 최대가 된다.

첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면 구하는 최댓값은

$S_{10}=\frac{10\times\{2\times19+(10-1)\times(-2)\}}{2}=100$

(3) 일반항 a_n을 구하면

$a_n=-44+(n-1)\times3=3n-47$

$a_n>0$인 경우는 $3n-47>0$에서

$n>\frac{47}{3}=15.666\cdots$

따라서 제15항까지는 음수이고, 제16항부터는 양수이므로 첫째항부터 제15항까지의 합이 최소가 된다.

첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면 구하는 최솟값은

$S_{15}=\frac{15\times\{2\times(-44)+(15-1)\times3\}}{2}=-345$

21 답 (1) $n=9$, $d=5$

(2) $n=10$, $d=-4$

(3) $n=13$, $d=5$

풀이 (1) 첫째항이 -1, 끝항이 49, 항수가 $n+2$인 등차수열의 합이 264이므로

$\frac{(n+2)(-1+49)}{2}=264$, $n+2=11$ $\quad\therefore n=\underline{9}$

따라서 49가 제11항이므로

$-1+10d=49$, $10d=50$ $\quad\therefore d=\underline{5}$

(2) 첫째항이 52, 끝항이 8, 항수가 $n+2$인 등차수열의 합이 360이므로

$\frac{(n+2)(52+8)}{2}=360$, $n+2=12$ $\quad\therefore n=10$

따라서 8이 제12항이므로

$52+11d=8$, $11d=-44$ $\quad\therefore d=-4$

(3) 첫째항이 -7, 끝항이 63, 항수가 $n+2$인 등차수열의 합이 420이므로

$\frac{(n+2)(-7+63)}{2}=420$, $n+2=15$ $\quad\therefore n=13$

따라서 63이 제15항이므로

$-7+14d=63$, $14d=70$ $\quad\therefore d=5$

22 답 (1) 816 (2) 735

풀이 (1) 1과 100 사이에 있는 6의 배수는

6, 12, 18, 24, $\cdots$, 90, 96

이때 $96=6\times16$이므로 항수는 16이다.

따라서 구하는 총합은 첫째항이 6, 끝항이 96, 항수가 16인 등차수열의 합이므로

$\frac{16\times(6+96)}{2}=\underline{816}$

(2) 1과 100 사이에 있는 7의 배수는

7, 14, 21, 28, $\cdots$, 91, 98

이때 $98=7\times14$이므로 항수는 14이다.

따라서 구하는 총합은 첫째항이 7, 끝항이 98, 항수가 14인 등차수열의 합이므로

$\frac{14\times(7+98)}{2}=735$

23 답 (1) $a_n=2n$

(2) $a_n=4n-5$

(3) $a_n=6n+6$

(4) $a_1=-1$, $a_n=2n-4$ (단, $n\geq2$)

(5) $a_1=5$, $a_n=6n-2$ (단, $n\geq2$)

(6) $a_1=4$, $a_n=-4n+9$ (단, $n\geq2$)

풀이 (1) (i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=1^2+1=2$

(ii) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2+n)-\{(n-1)^2+n-1\}$

$=(n^2+n)-(n^2-n)=\underline{2n}$ …… ㉠

그런데 $a_1=2$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 값과 같으므로

$a_n=\underline{2n}$

(2) (i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=2\times1^2-3\times1=-1$

(ii) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(2n^2-3n)-\{2(n-1)^2-3(n-1)\}$

$=(2n^2-3n)-(2n^2-7n+5)$

$=4n-5$ …… ㉠

그런데 $a_1=-1$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 값과 같으므로

$a_n=4n-5$

(3) (i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=3\times1^2+9\times1=12$

(ii) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(3n^2+9n)-\{3(n-1)^2+9(n-1)\}$

$=(3n^2+9n)-(3n^2+3n-6)$

$=6n+6$ …… ㉠

그런데 $a_1=12$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 값과 같으므로

$a_n=6n+6$

(4) (i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=1^2-3\times1+1=-1$

(ii) $n\geq 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=(n^2-3n+1)-\{(n-1)^2-3(n-1)+1\}$
$=(n^2-3n+1)-(n^2-5n+5)$
$=2n-4$ …… ㉠

그런데 $a_1=-1$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 값과 다르므로

$a_1=-1$, $a_n=2n-4$ (단, $n\geq 2$)

(5) (i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=3\times 1^2+1+1=5$

(ii) $n\geq 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=(3n^2+n+1)-\{3(n-1)^2+(n-1)+1\}$
$=(3n^2+n+1)-(3n^2-5n+3)$
$=6n-2$ …… ㉠

그런데 $a_1=5$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 값과 다르므로

$a_1=5$, $a_n=6n-2$ (단, $n\geq 2$)

(6) (i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=-2\times 1^2+7\times 1-1=4$

(ii) $n\geq 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=(-2n^2+7n-1)$
$-\{-2(n-1)^2+7(n-1)-1\}$
$=(-2n^2+7n-1)-(-2n^2+11n-10)$
$=-4n+9$ …… ㉠

그런데 $a_1=4$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 값과 다르므로

$a_1=4$, $a_n=-4n+9$ (단, $n\geq 2$)

24 답 (1) $a_n=3^{n-1}$ (2) $a_n=5\times 2^{n-1}$
(3) $a_n=10^{n-1}$ (4) $a_n=2^{-n+2}$
(5) $a_n=2^{-2n+4}$ (6) $a_n=2\times 3^{-n+2}$
(7) $a_n=(-2)^n$ (8) $a_n=-5\times(-2)^{-n+2}$

풀이 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

(1) 첫째항은 $a=1$, 공비는 $r=\frac{3}{1}=3$이므로

$a_n=1\times 3^{n-1}=3^{n-1}$

(2) 첫째항은 $a=5$, 공비는 $r=\frac{10}{5}=2$이므로

$a_n=5\times 2^{n-1}$

(3) 첫째항은 $a=1$, 공비는 $r=\frac{10}{1}=10$이므로

$a_n=1\times 10^{n-1}=10^{n-1}$

(4) 첫째항은 $a=2$, 공비는 $r=\frac{1}{2}$이므로

$a_n=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=2^{-n+2}$

(5) 첫째항은 $a=4$, 공비는 $r=\frac{1}{4}$이므로

$a_n=4\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=4^{-n+2}=2^{-2n+4}$

(6) 첫째항은 $a=6$, 공비는 $r=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이므로

$a_n=6\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=2\times 3^{-n+2}$

(7) 첫째항은 $a=-2$, 공비는 $r=\frac{4}{-2}=-2$이므로

$a_n=-2\times(-2)^{n-1}=(-2)^n$

(8) 첫째항은 $a=10$, 공비는 $r=\frac{-5}{10}=-\frac{1}{2}$이므로

$a_n=10\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-5\times(-2)^{-n+2}$

25 답 (1) 제9항 (2) 제9항
(3) 제7항 (4) 제13항

풀이 (1) 첫째항이 3, 공비가 $\frac{6}{3}=2$이므로 등비수열의 일반항을 a_n이라고 하면

$a_n=3\times 2^{n-1}$

768이 제n항이라고 하면

$3\times 2^{n-1}=768$에서 $2^{n-1}=256$, $2^{n-1}=2^8$

즉, $n-1=8$에서 $n=9$

따라서 768은 제9항이다.

(2) 첫째항이 $\frac{1}{27}$, 공비가 $\frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{27}}=3$이므로 등비수열의 일반항을 a_n이라고 하면

$a_n=\frac{1}{27}\times 3^{n-1}=3^{-3}\times 3^{n-1}=3^{n-4}$

243이 제n항이라고 하면 $3^{n-4}=243$에서 $3^{n-4}=3^5$

즉, $n-4=5$에서 $n=9$

따라서 243은 제9항이다.

(3) 첫째항이 10, 공비가 $\frac{-\frac{5}{2}}{10}=-\frac{1}{4}$이므로 등비수열의 일반항을 a_n이라고 하면

$a_n=10\times\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$\frac{5}{2048}$가 제n항이라고 하면

$10\times\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\frac{5}{2048}$에서 $\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\frac{1}{4096}$

$\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\left(-\frac{1}{4}\right)^6$

즉, $n-1=6$에서 $n=7$

따라서 $\frac{5}{2048}$는 제7항이다.

(4) 첫째항이 1, 공비가 $\frac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}$이므로 등비수열의 일반항을 a_n이라고 하면

$a_n=(\sqrt{2})^{n-1}$

64가 제n항이라고 하면

$(\sqrt{2})^{n-1}=64$에서 $(2^{\frac{1}{2}})^{n-1}=2^6$

즉, $\frac{n-1}{2}=6$에서 $n=13$

따라서 64는 제13항이다.

26 답 (1) 첫째항: 3, 공비: 3 (2) 첫째항: -12, 공비: 2
(3) 첫째항: 12, 공비: $\frac{1}{2}$ (4) 첫째항: $\frac{5}{2}$, 공비: $\frac{1}{4}$
(5) 첫째항: $\frac{8}{9}$, 공비: -3

풀이 (1) $a_1=3^1=3$, $a_2=3^2=9$이므로

$\frac{a_2}{a_1}=\frac{9}{3}=3$

따라서 주어진 등비수열의 첫째항은 3, 공비는 3이다.

(2) $a_1=-3\times 2^{1+1}=-12$, $a_2=-3\times 2^{2+1}=-24$이므로

$\frac{a_2}{a_1}=\frac{-24}{-12}=2$

따라서 주어진 등비수열의 첫째항은 -12, 공비는 2이다.

(3) $a_1=3\times 2^{-1+3}=12$, $a_2=3\times 2^{-2+3}=6$이므로

$\frac{a_2}{a_1}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$

따라서 주어진 등비수열의 첫째항은 12, 공비는 $\frac{1}{2}$이다.

(4) $a_1=5\times 2^{1-2\times 1}=\frac{5}{2}$, $a_2=5\times 2^{1-2\times 2}=\frac{5}{8}$이므로

$\frac{a_2}{a_1}=\frac{\frac{5}{8}}{\frac{5}{2}}=\frac{1}{4}$

따라서 주어진 등비수열의 첫째항은 $\frac{5}{2}$, 공비는 $\frac{1}{4}$이다.

(5) $a_1=8\times(-3)^{1-3}=\frac{8}{9}$, $a_2=8\times(-3)^{2-3}=-\frac{8}{3}$이므로

$\frac{a_2}{a_1}=\frac{-\frac{8}{3}}{\frac{8}{9}}=-3$

따라서 주어진 등비수열의 첫째항은 $\frac{8}{9}$, 공비는 -3이다.

27 답 (1) $a_n=(-2)^{n-1}$ (2) $a_n=3\times(-2)^{n-1}$ (3) $a_n=5\times 2^{n-3}$

풀이 (1) 등비수열의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_n=ar^{n-1}$

$a_4=-8$이므로 ar^3 …… ㉠

$a_7=64$이므로 $ar^6=64$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $\frac{ar^6}{ar^3}=\frac{64}{-8}$ $\quad\therefore r^3=-8$

이때 r는 실수이므로 $r=-2$

이 값을 ㉠에 대입하면 $-8a=-8$ $\quad\therefore a=1$

$\therefore a_n=(-2)^{n-1}$

(2) 등비수열의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_n=ar^{n-1}$

$a_2=-6$이므로 $ar=-6$ …… ㉠

$a_5=48$이므로 $ar^4=48$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $\frac{ar^4}{ar}=\frac{48}{-6}$ $\quad\therefore r^3=-8$

이때 r는 실수이므로 $r=-2$

이 값을 ㉠에 대입하면 $-2a=-6$ $\quad\therefore a=3$

$\therefore a_n=3\times(-2)^{n-1}$

(3) 등비수열의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_n=ar^{n-1}$

$a_3=5$이므로 $ar^2=5$ …… ㉠

$a_6=40$이므로 $ar^5=40$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $\frac{ar^5}{ar^2}=\frac{40}{5}$ $\quad\therefore r^3=8$

이때 r는 실수이므로 $r=2$

이 값을 ㉠에 대입하면 $4a=5$ $\quad\therefore a=\frac{5}{4}$

$\therefore a_n=\frac{5}{4}\times 2^{n-1}=5\times 2^{n-3}$

28 답 (1) 첫째항: $3\sqrt{3}-3$, 공비: $\sqrt{3}$

(2) 첫째항: 20, 공비: 2

(3) 첫째항: $\frac{3}{2}$, 공비: $\frac{1}{4}$

풀이 (1) 등비수열의 첫째항을 a, 공비를 r, 일반항을 a_n이라고 하면 $a_n=ar^{n-1}$

$a_1+a_2=6$이므로 $a+ar=6$

$a(1+r)=6$ …… ㉠

$a_3+a_4=18$이므로 $ar^2+ar^3=18$

$ar^2(1+r)=18$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $\frac{ar^2(1+r)}{a(1+r)}=\frac{18}{6}$ $\quad\therefore r^2=3$

이때 r는 양수이므로 $r=\sqrt{3}$

이 값을 ㉠에 대입하면 $(1+\sqrt{3})a=6$ $\quad\therefore a=3\sqrt{3}-3$

따라서 주어진 등비수열의 첫째항은 $3\sqrt{3}-3$, 공비는 $\sqrt{3}$이다.

(2) 등비수열의 첫째항을 a, 공비를 r, 일반항을 a_n이라고 하면 $a_n=ar^{n-1}$

$a_2+a_3=120$이므로 $ar+ar^2=120$

$ar(1+r)=120$ …… ㉠

$a_4+a_5=480$이므로 $ar^3+ar^4=480$

$ar^3(1+r)=480$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $\frac{ar^3(1+r)}{ar(1+r)}=\frac{480}{120}$ $\quad\therefore r^2=4$

이때 r는 양수이므로 $r=2$

이 값을 ㉠에 대입하면 $6a=120$ $\quad\therefore a=20$

따라서 주어진 등비수열의 첫째항은 20, 공비는 2이다.

(3) 등비수열의 첫째항을 a, 공비를 r, 일반항을 a_n이라고 하면 $a_n=ar^{n-1}$

$a+ar=\frac{15}{8}$이므로 $a(1+r)=\frac{15}{8}$ …… ㉠

$a_3+a_4=\frac{15}{128}$이므로 $ar^2+ar^3=\frac{15}{128}$

$ar^2(1+r)=\frac{15}{128}$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $\frac{ar^2(1+r)}{a(1+r)}=\frac{\frac{15}{128}}{\frac{15}{8}}$ $\quad\therefore r^2=\frac{1}{16}$

이때 r는 양수이므로 $r=\frac{1}{4}$

이 값을 ㉠에 대입하면 $\frac{5}{4}a=\frac{15}{8}$ $\quad\therefore a=\frac{3}{2}$

따라서 주어진 등비수열의 첫째항은 $\frac{3}{2}$, 공비는 $\frac{1}{4}$이다.

29 답 (1) 10, 20, 40 (2) $\frac{4}{3}$, 4, 12

(3) 2, $2\sqrt{2}$, 4

풀이 (1) 등비수열의 첫째항이 5, 제5항이 80이므로 공비를 r, 일반항을 a_n이라고 하면

$a_n=5\times r^{n-1}$

$a_5=5\times r^4=80$에서 $r^4=16$

이때 이 등비수열의 모든 항이 양수이므로 $r=2$

5에서부터 80까지 공비 2씩 곱해 가면

5, 10, 20, 40, 80

따라서 구하는 세 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

10, 20, 40이다.

(2) 등비수열의 첫째항이 36, 제5항이 $\frac{4}{9}$이므로 공비를 r, 일반항을 a_n이라고 하면

$a_n=36\times r^{n-1}$

$a_5=36\times r^4=\frac{4}{9}$에서 $r^4=\frac{1}{81}$

이때 이 등비수열의 모든 항이 양수이므로 $r=\frac{1}{3}$

36에서부터 $\frac{4}{9}$까지 공비 $\frac{1}{3}$씩 곱해 가면

36, 12, 4, $\frac{4}{3}$, $\frac{4}{9}$

따라서 구하는 세 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

$\frac{4}{3}$, 4, 12이다.

(3) 등비수열의 첫째항이 $\sqrt{2}$, 제5항이 $4\sqrt{2}$이므로 공비를 r, 일반항을 a_n이라고 하면

$a_n=\sqrt{2}\times r^{n-1}$

$a_5=\sqrt{2}\times r^4=4\sqrt{2}$에서 $r^4=4$

이때 이 등비수열의 모든 항이 양수이므로 $r=\sqrt{2}$

$\sqrt{2}$에서부터 $4\sqrt{2}$까지 공비 $\sqrt{2}$씩 곱해 가면

$\sqrt{2}$, 2, $2\sqrt{2}$, 4, $4\sqrt{2}$

따라서 구하는 세 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

2, $2\sqrt{2}$, 4이다.

30 답 (1) 6, 18, 54, 162 (2) 6, 12, 24, 48

(3) $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{9}{8}$, $\frac{27}{8}$

풀이 (1) 등비수열의 첫째항이 2, 제6항이 486이므로 공비를 r, 일반항을 a_n이라고 하면

$a_n=2\times r^{n-1}$

$a_6=2\times r^5=486$에서 $r^5=243$

이때 r는 실수이므로 $r=3$

2에서부터 486까지 공비 3씩 곱해 가면

2, 6, 18, 54, 162, 486

따라서 구하는 네 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

6, 18, 54, 162이다.

(2) 등비수열의 첫째항이 3, 제6항이 96이므로 공비를 r, 일반항을 a_n이라고 하면

$a_n=3\times r^{n-1}$

$a_6=3\times r^5=96$에서 $r^5=32$ $\therefore r=2$ ($\because$ r는 실수)

3에서부터 96까지 공비 2씩 곱해 가면

3, 6, 12, 24, 48, 96

따라서 구하는 네 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

6, 12, 24, 48이다.

(3) 등비수열의 첫째항이 $\frac{1}{24}$, 제6항이 $\frac{81}{8}$이므로 공비를 r, 일반항을 a_n이라고 하면

$a_n=\frac{1}{24}\times r^{n-1}$

$a_6=\frac{1}{24}\times r^5=\frac{81}{8}$에서 $r^5=243$

$\therefore r=3$ ($\because$ r는 실수)

$\frac{1}{24}$에서부터 $\frac{81}{8}$까지 공비 3씩 곱해 가면

$\frac{1}{24}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{9}{8}$, $\frac{27}{8}$, $\frac{81}{8}$

따라서 구하는 네 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

$\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{9}{8}$, $\frac{27}{8}$이다.

31 답 (1) 제7항 (2) 제10항

(3) 제8항 (4) 제7항

(5) 제11항 (6) 제9항

풀이 (1) 첫째항이 1, 공비가 5인 등비수열의 일반항 a_n은

$a_n=1\times 5^{n-1}=5^{n-1}$

제n항이 처음으로 10000보다 커진다고 하면

$5^{n-1}>10000$, $5^n\times 5^{-1}>10000$, $5^n\times\frac{1}{5}>10000$

$5^n>50000$

이때 $5^6=15625$, $5^7=78125$이고 n은 자연수이므로

$n\geq 7$

따라서 처음으로 10000보다 커지는 항은 제7항이다.

(2) 첫째항이 3, 공비가 2인 등비수열의 일반항 a_n은

$a_n=3\times 2^{n-1}$

제n항이 처음으로 1000보다 커진다고 하면

$3\times 2^{n-1}>1000$, $2^{n-1}>\frac{1000}{3}$, $2^n\times 2^{-1}>\frac{1000}{3}$

$2^n\times\frac{1}{2}>\frac{1000}{3}$, $2^n>\frac{2000}{3}=666.6\cdots$

이때 $2^9=512$, $2^{10}=1024$이고 n은 자연수이므로 $n\geq 10$

따라서 처음으로 1000보다 커지는 항은 제10항이다.

(3) 첫째항이 2, 공비가 5인 등비수열의 일반항 a_n은

$a_n=2\times 5^{n-1}$

제n항이 처음으로 50000보다 커진다고 하면

$2\times 5^{n-1}>50000$, $5^{n-1}>25000$, $5^n\times 5^{-1}>25000$

$5^n\times\frac{1}{5}>25000$, $5^n>125000$

이때 $5^7=78125$, $5^8=390625$이고 n은 자연수이므로

$n\geq 8$

따라서 처음으로 50000보다 커지는 항은 제8항이다.

(4) 주어진 등비수열의 일반항 a_n은 $a_n=300\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

제n항이 처음으로 1보다 작아진다고 하면

$300\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}<1$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}<\frac{1}{300}$

$\left(\frac{1}{3}\right)^n\times\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}<\frac{1}{300}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^n<\frac{1}{900}$

이때 $\left(\frac{1}{3}\right)^6=\frac{1}{729}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^7=\frac{1}{2187}$이고 n은 자연수이므로

$n\ge7$

따라서 처음으로 1보다 작아지는 항은 제7항이다.

(5) 주어진 등비수열의 일반항 a_n은 $a_n=1024\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

제n항이 처음으로 2보다 작아진다고 하면

$1024\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<2$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<\frac{1}{512}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}<\frac{1}{512}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{n}<\frac{1}{1024}$

이때 $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{1}{1024}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{11}=\frac{1}{2048}$이고 n은 자연수이므로 $n\ge11$

따라서 처음으로 2보다 작아지는 항은 제11항이다.

(6) 주어진 등비수열의 일반항 a_n은 $a_n=9\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

제n항이 처음으로 $\frac{1}{500}$보다 작아진다고 하면

$9\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}<\frac{1}{500}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}<\frac{1}{4500}$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}<\frac{1}{4500}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{n}<\frac{1}{13500}$

이때 $\left(\frac{1}{3}\right)^{8}=\frac{1}{6561}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{9}=\frac{1}{19683}$이고 n은 자연수이므로 $n\ge9$

따라서 처음으로 $\frac{1}{500}$보다 작아지는 항은 제9항이다.

32 답 (1) $-\frac{3}{2}$, 3　(2) -1, 3　(3) $-\frac{1}{2}$, 5　(4) -7

풀이 (1) 세 수 x, $x+6$, $9x$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$(x+6)^2=x\times9x$에서 $8x^2-12x-36=0$

$2x^2-3x-9=0$, $(2x+3)(x-3)=0$

$\therefore x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=3$

참고 $x=-\frac{3}{2}$일 때, 세 수는 $-\frac{3}{2}$, $\frac{9}{2}$, $-\frac{27}{2}$로 첫째항이 $-\frac{3}{2}$, 공비가 -3인 등비수열이다.

$x=3$일 때, 세 수는 3, 9, 27로 첫째항이 3, 공비가 3인 등비수열이다.

(2) 세 수 x, $x+3$, $4x$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$(x+3)^2=x\times4x$에서 $3x^2-6x-9=0$

$x^2-2x-3=0$, $(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

참고 $x=-1$일 때, 세 수는 -1, 2, -4로 첫째항이 -1, 공비가 -2인 등비수열이다.

$x=3$일 때, 세 수는 3, 6, 12로 첫째항이 3, 공비가 2인 등비수열이다.

(3) 세 수 $x-4$, $x-1$, $3x+1$이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$(x-1)^2=(x-4)(3x+1)$에서 $2x^2-9x-5=0$

$(2x+1)(x-5)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=5$

참고 $x=-\frac{1}{2}$일 때, 세 수는 $-\frac{9}{2}$, $-\frac{3}{2}$, $-\frac{1}{2}$로 첫째항이 $-\frac{9}{2}$, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이다.

$x=5$일 때, 세 수는 1, 4, 16으로 첫째항이 1, 공비가 4인 등비수열이다.

(4) 세 수 $x-2$, $x+10$, $x+6$이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$(x+10)^2=(x-2)(x+6)$에서 $16x=-112$

$\therefore x=-7$

참고 $x=-7$일 때, 세 수는 -9, 3, -1로 첫째항이 -9, 공비가 $-\frac{1}{3}$인 등비수열이다.

33 답 (1) 1, 2, 4　(2) -8, -2, 4

풀이 (1) 세 수를 a, ar, ar^2으로 놓으면

세 수의 합이 7이므로 $a+ar+ar^2=7$

$\therefore a(1+r+r^2)=7$ ······ ㉠

세 수의 곱이 8이므로 $a\times ar\times ar^2=8$

$(ar)^3=8$　$\therefore ar=2$ ······ ㉡

㉠÷㉡을 하면 $\frac{a(1+r+r^2)}{ar}=\frac{7}{2}$, $\frac{1+r+r^2}{r}=\frac{7}{2}$

$2+2r+2r^2=7r$, $2r^2-5r+2=0$

$(r-2)(2r-1)=0$　$\therefore r=2$ 또는 $r=\frac{1}{2}$

이 값을 ㉡에 대입하면

(i) $r=2$일 때, $a=1$이므로 세 실수는 1, 2, 4이다.

(ii) $r=\frac{1}{2}$일 때, $a=4$이므로 세 실수는 4, 2, 1이다.

따라서 구하는 세 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면 1, 2, 4이다.

(2) 세 수를 a, ar, ar^2으로 놓으면

세 수의 합이 -6이므로 $a+ar+ar^2=-6$

$\therefore a(1+r+r^2)=-6$ ······ ㉠

세 수의 곱이 64이므로 $a\times ar\times ar^2=64$

$(ar)^3=64$　$\therefore ar=4$ ······ ㉡

㉠÷㉡을 하면

$\frac{a(1+r+r^2)}{ar}=\frac{-6}{4}$, $\frac{1+r+r^2}{r}=-\frac{3}{2}$

$2+2r+2r^2=-3r$, $2r^2+5r+2=0$

$(r+2)(2r+1)=0$　$\therefore r=-2$ 또는 $r=-\frac{1}{2}$

이 값을 ㉡에 대입하면

(i) $r=-2$일 때, $a=-2$이므로 세 수는 -2, 4, -8이다.

(ii) $r=-\frac{1}{2}$일 때, $a=-8$이므로 세 수는 -8, 4, -2이다.

따라서 구하는 세 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면 -8, -2, 4이다.

34 답 $9\times\left(\frac{8}{9}\right)^{10}$

풀이 주어진 정사각형의 넓이가 $3\times3=9$이므로

첫 번째 시행 후 남은 도형의 넓이는

$9\times\frac{8}{9}$

두 번째 시행 후 남은 도형의 넓이는

$9\times\frac{8}{9}\times\frac{8}{9}=9\times\left(\frac{8}{9}\right)^2$

세 번째 시행 후 남은 도형의 넓이는

$9\times\left(\frac{8}{9}\right)^2\times\frac{8}{9}=9\times\left(\frac{8}{9}\right)^3$

⋮

n번째 시행 후 남은 도형의 넓이는

$9\times\left(\frac{8}{9}\right)^n$

따라서 10회 시행 후 남은 도형의 넓이는

$9\times\left(\frac{8}{9}\right)^{10}$

35 답 $6\times\left(\frac{1}{2}\right)^8$

풀이 정삼각형 ABC의 한 변의 길이는 2이므로 첫 번째 시행에서 정삼각형 $A_1B_1C_1$의 한 변의 길이는

$2\times\frac{1}{2}$

따라서 정삼각형 $A_1B_1C_1$의 둘레의 길이는

$3\times2\times\frac{1}{2}$

두 번째 시행에서 정삼각형 $A_2B_2C_2$의 한 변의 길이는

$2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2$

이므로 정삼각형 $A_2B_2C_2$의 둘레의 길이는

$3\times2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2$

세 번째 시행에서 정삼각형 $A_3B_3C_3$의 한 변의 길이는

$2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3$

이므로 정삼각형 $A_3B_3C_3$의 둘레의 길이는

$3\times2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3$

⋮

n번째 시행 후 정삼각형 $A_nB_nC_n$의 한 변의 길이는

$2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$이므로 정삼각형 $A_nB_nC_n$의 둘레의 길이는

$3\times2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n=6\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

따라서 정삼각형 $A_8B_8C_8$의 둘레의 길이는

$6\times\left(\frac{1}{2}\right)^8$

36 답 $5\times\left(\frac{2}{3}\right)^7$ m

풀이 n번째 튀어 오른 공의 높이를 a_n m라고 하면

첫 번째 튀어 오른 공의 높이는

$a_1=5\times\frac{2}{3}$

두 번째 튀어 오른 공의 높이는

$a_2=5\times\left(\frac{2}{3}\right)^2$

세 번째 튀어 오른 공의 높이는

$a_3=5\times\left(\frac{2}{3}\right)^3$

⋮

n번째 튀어 오른 공의 높이는

$a_n=5\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$

따라서 7번째 튀어 오른 공의 높이는

$a_7=5\times\left(\frac{2}{3}\right)^7$ m

37 답 (1) $S_n=\frac{3}{2}(3^n-1)$ (2) $S_n=\frac{1}{12}(4^n-1)$

(3) $S_n=\frac{5}{4}(5^n-1)$ (4) $S_n=(\sqrt{2}+1)\{(\sqrt{2})^n-1\}$

(5) $S_n=\frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$ (6) $S_n=\frac{625}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right\}$

(7) $S_n=\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ (8) $S_n=\frac{81}{4}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$

풀이 (1) 첫째항이 3, 공비가 3이므로

$$S_n=\frac{3\times(3^n-1)}{3-1}=\frac{3}{2}(3^n-1)$$

(2) 첫째항이 $\frac{1}{4}$, 공비가 4이므로

$$S_n=\frac{\frac{1}{4}\times(4^n-1)}{4-1}=\frac{1}{12}(4^n-1)$$

(3) 첫째항이 5, 공비가 5이므로

$$S_n=\frac{5\times(5^n-1)}{5-1}=\frac{5}{4}(5^n-1)$$

(4) 첫째항이 1, 공비가 $\sqrt{2}$이므로

$$S_n=\frac{1\times\{(\sqrt{2})^n-1\}}{\sqrt{2}-1}=(\sqrt{2}+1)\{(\sqrt{2})^n-1\}$$

(5) 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{3}$이므로

$$S_n=\frac{1\times\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

(6) 첫째항이 125, 공비가 $\frac{1}{5}$이므로

$$S_n=\frac{125\times\left\{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{125\times\left\{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right\}}{\frac{4}{5}}$$

$$=\frac{625}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right\}$$

(7) 첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 $-\frac{1}{2}$이므로

$$S_n=\frac{\frac{1}{2}\times\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

(8) 첫째항이 27, 공비가 $-\frac{1}{3}$이므로

$$S_n=\frac{27\times\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{81}{4}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

38 답 (1) 511 (2) 2730

(3) 1094 (4) 11111111

(5) $\frac{341}{128}$

풀이 (1) 256을 제n항이라고 하면 첫째항이 1, 공비가 2이므로

$2^{n-1}=256$에서 $2^{n-1}=2^8$

$n-1=8$ $\therefore n=9$

첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_9=\dfrac{2^9-1}{2-1}=\underline{511}$

(2) 2048을 제n항이라고 하면 첫째항이 2, 공비가 4이므로

$2\times4^{n-1}=2048$에서 $4^{n-1}=1024$

$2^{2n-2}=2^{10}$, $2n-2=10$ $\therefore n=6$

첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_6=\dfrac{2\times(4^6-1)}{4-1}=\dfrac{2\times4095}{3}=2730$

(3) 1458을 제n항이라고 하면 첫째항이 2, 공비가 -3이므로

$2\times(-3)^{n-1}=1458$에서 $(-3)^{n-1}=729$

이때 $729=3^6$이므로 $(-3)^{n-1}=(-3)^6$

$n-1=6$ $\therefore n=7$

첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_7=\dfrac{2\times\{1-(-3)^7\}}{1-(-3)}=\dfrac{2\times2188}{4}=1094$

(4) 이 등비수열의 첫째항은 1, 공비는 10이고, 10^7은 제8항이므로 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_8=\dfrac{10^8-1}{10-1}=\dfrac{100000000-1}{9}$

$=\dfrac{99999999}{9}=11111111$

(5) $-\dfrac{1}{128}$을 제n항이라고 하면 첫째항이 4, 공비가 $-\dfrac{1}{2}$이므로

$4\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=-\dfrac{1}{128}$에서 $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=-\dfrac{1}{512}$

이때 $512=2^9$이므로 $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^9$

$n-1=9$ $\therefore n=10$

첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_{10}=\dfrac{4\times\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{10}\right\}}{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)}=\dfrac{4\times\left(1-\dfrac{1}{1024}\right)}{\dfrac{3}{2}}$

$=\dfrac{4\times\dfrac{1023}{1024}}{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{341}{128}$

39 답 (1) 315 (2) $6+7\sqrt{2}$ (3) 189

풀이 (1) 첫째항을 a, 공비를 r, 일반항을 a_n, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$a_1+a_3=25$이므로 $a+ar^2=25$

$\therefore a(1+r^2)=25$ …… ㉠

$a_3+a_5=100$이므로 $ar^2+ar^4=100$

$\therefore ar^2(1+r^2)=100$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $\dfrac{ar^2(1+r^2)}{a(1+r^2)}=\dfrac{100}{25}$ $\therefore r^2=4$

이때 r는 양수이므로 $r=2$

이 값을 ㉠에 대입하면 $5a=25$ $\therefore a=\underline{5}$

$\therefore S_6=\dfrac{5\times(2^6-1)}{2-1}=\underline{315}$

(2) 첫째항을 a, 공비를 r, 일반항을 a_n, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$a_1+a_3=3\sqrt{2}$이므로 $a+ar^2=3\sqrt{2}$

$\therefore a(1+r^2)=3\sqrt{2}$ …… ㉠

$a_3+a_5=6\sqrt{2}$이므로 $ar^2+ar^4=6\sqrt{2}$

$\therefore ar^2(1+r^2)=6\sqrt{2}$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $\dfrac{ar^2(1+r^2)}{a(1+r^2)}=\dfrac{6\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$ $\therefore r^2=2$

이때 r는 양수이므로 $r=\sqrt{2}$

이 값을 ㉠에 대입하면 $3a=3\sqrt{2}$ $\therefore a=\sqrt{2}$

$\therefore S_5=\dfrac{\sqrt{2}\{(\sqrt{2})^5-1\}}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{8-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=6+7\sqrt{2}$

(3) 첫째항을 a, 공비를 r, 일반항을 a_n, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$a_2+a_4=30$이므로 $ar+ar^3=30$

$\therefore ar(1+r^2)=30$ …… ㉠

$a_4+a_6=120$이므로 $ar^3+ar^5=120$

$\therefore ar^3(1+r^2)=120$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $\dfrac{ar^3(1+r^2)}{ar(1+r^2)}=\dfrac{120}{30}$ $\therefore r^2=4$

이때 r는 양수이므로 $r=2$

이 값을 ㉠에 대입하면 $10a=30$ $\therefore a=3$

$\therefore S_6=\dfrac{3\times(2^6-1)}{2-1}=189$

40 답 (1) $a_n=3^{n-1}$ (2) $a_n=-2\times3^{n-1}$ (3) $a_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

풀이 (1) 첫째항을 a, 공비를 r, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_3=13$이므로 $\dfrac{a(1-r^3)}{1-r}=13$ …… ㉠

$S_6=364$이므로 $\dfrac{a(1-r^6)}{1-r}=364$

$\therefore \dfrac{a(1-r^3)(1+r^3)}{1-r}=364$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $13(1+r^3)=364$

$1+r^3=28$, $r^3=27$

이때 r는 실수이므로 $r=\underline{3}$

이 값을 ㉠에 대입하면 $-26a=-26$ $\therefore a=\underline{1}$

$\therefore a_n=\underline{3^{n-1}}$

(2) 첫째항을 a, 공비를 r, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_3=-26$이므로 $\dfrac{a(1-r^3)}{1-r}=-26$ …… ㉠

$S_6=-728$이므로 $\dfrac{a(1-r^6)}{1-r}=-728$

$\therefore \dfrac{a(1-r^3)(1+r^3)}{1-r}=-728$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $-26(1+r^3)=-728$

$1+r^3=28$, $r^3=27$

이때 r는 실수이므로 $r=3$

이 값을 ㉠에 대입하면 $-26a=52 \qquad \therefore a=-2$

$\therefore a_n=-2\times 3^{n-1}$

(3) 첫째항을 a, 공비를 r, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_5=\frac{31}{32}$이므로 $\frac{a(1-r^5)}{1-r}=\frac{31}{32}$ …… ㉠

$S_{10}=\frac{1023}{1024}$이므로 $\frac{a(1-r^{10})}{1-r}=\frac{1023}{1024}$

$\therefore \frac{a(1-r^5)(1+r^5)}{1-r}=\frac{1023}{1024}$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $\frac{31}{32}(1+r^5)=\frac{1023}{1024}$

$1+r^5=\frac{1023}{1024}\times\frac{32}{31}=\frac{33}{32}$, $r^5=\frac{1}{32}$

이때 r는 실수이므로 $r=\frac{1}{2}$

이 값을 ㉠에 대입하면

$\frac{a\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^5\right\}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{31}{32}$, $\frac{\frac{31}{32}a}{\frac{1}{2}}=\frac{31}{32}$

$\therefore a=\frac{1}{2}$

$\therefore a_n=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$

41 답 (1) $x\neq 0$일 때 $S_n=\frac{(x+1)^n-1}{x}$, $x=0$일 때 $S_n=n$

(2) $S_n=(x+1)^n-1$

(3) $S_n=\frac{(x+1)^{2n}-1}{x+2}$

(4) $x\neq -1$일 때 $S_n=\frac{x\{1-(-x)^n\}}{1+x}$,

$x=-1$일 때 $S_n=-n$

풀이 (1) 첫째항이 1, 공비가 $x+1$이므로

(ⅰ) $x+1=1$, 즉 $x=0$일 때,

$S_n=1+1+1+\cdots+1=\underline{n}$

(ⅱ) $x+1\neq 1$, 즉 $x\neq 0$일 때,

$S_n=\frac{1\times\{(x+1)^n-1\}}{(x+1)-1}=\underline{\frac{(x+1)^n-1}{x}}$

(2) 첫째항이 x, 공비가 $x+1$이고 $x>0$이므로

$x+1\neq 1$

$\therefore S_n=\frac{x\{(x+1)^n-1\}}{(x+1)-1}=(x+1)^n-1$

(3) 첫째항이 x, 공비가 $(x+1)^2$이고 $x>0$이므로

$(x+1)^2\neq 1$

$\therefore S_n=\frac{x[\{(x+1)^2\}^n-1]}{(x+1)^2-1}$

$=\frac{x\{(x+1)^{2n}-1\}}{x^2+2x}$

$=\frac{(x+1)^{2n}-1}{x+2}$

(4) 첫째항이 x, 공비가 $-x$이므로

(ⅰ) $-x=1$, 즉 $x=-1$일 때,

$S_n=(-1)+(-1)+(-1)+\cdots+(-1)=-n$

(ⅱ) $-x\neq 1$, 즉 $x\neq -1$일 때,

$S_n=\frac{x\{1-(-x)^n\}}{1-(-x)}=\frac{x\{1-(-x)^n\}}{1+x}$

42 답 (1) $a_n=2\times 3^n$ (2) $a_n=3\times 4^n$

(3) $a_n=\frac{4}{5}\times 5^n$ (4) $a_1=3$, $a_n=2^{n-1}$ (단, $n\geq 2$)

(5) $a_1=24$, $a_n=4\times 5^n$ (단, $n\geq 2$)

풀이 (1) (ⅰ) $n=1$일 때, $a_1=S_1=3^2-3=6$

(ⅱ) $n\geq 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=(3^{n+1}-3)-(3^n-3)$

$=3^{n+1}-3^n=3\times 3^n-3^n$

$=(3-1)\times 3^n=\underline{2\times 3^n}$ …… ㉠

그런데 $a_1=6$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 값과 같으므로

$\underline{a_n=2\times 3^n}$

(2) (ⅰ) $n=1$일 때, $a_1=S_1=4^2-4=12$

(ⅱ) $n\geq 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=(4^{n+1}-4)-(4^n-4)$

$=4^{n+1}-4^n=4\times 4^n-4^n$

$=(4-1)\times 4^n=3\times 4^n$ …… ㉠

그런데 $a_1=12$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 값과 같으므로

$a_n=3\times 4^n$

(3) (ⅰ) $n=1$일 때, $a_1=S_1=5-1=4$

(ⅱ) $n\geq 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=(5^n-1)-(5^{n-1}-1)$

$=5^n-5^{n-1}=5^n-(5^n\times 5^{-1})$

$=\left(1-\frac{1}{5}\right)\times 5^n=\frac{4}{5}\times 5^n$ …… ㉠

그런데 $a_1=4$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 값과 같으므로

$a_n=\frac{4}{5}\times 5^n$

(4) (ⅰ) $n=1$일 때, $a_1=S_1=2+1=3$

(ⅱ) $n\geq 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=(2^n+1)-(2^{n-1}+1)$

$=2^n-2^{n-1}=2^n-(2^n\times 2^{-1})$

$=\left(1-\frac{1}{2}\right)\times 2^n=\frac{1}{2}\times 2^n$

$=2^{n-1}$ …… ㉠

그런데 $a_1=3$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 값과 다르므로

$a_1=3$, $a_n=2^{n-1}$ (단, $n\geq 2$)

(5) (ⅰ) $n=1$일 때, $a_1=S_1=5^2-1=24$

(ⅱ) $n\geq 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=(5^{n+1}-1)-(5^n-1)$

$=5^{n+1}-5^n=5\times 5^n-5^n$

$=(5-1)\times 5^n=4\times 5^n$ …… ㉠

그런데 $a_1=24$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 값과 다르므로

$a_1=24$, $a_n=4\times 5^n$ (단, $n\geq 2$)

43 답 (1) -3 (2) -2

(3) -4 (4) -6

풀이 (1) (ⅰ) $n=1$일 때, $a_1=S_1=12+k$ …… ㉠

(ⅱ) $n\geq 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(3\times 4^n+k)-(3\times 4^{n-1}+k)$

$=3\times 4\times 4^{n-1}-3\times 4^{n-1}$

$=(12-3)\times 4^{n-1}=9\times 4^{n-1}$ …… ㉡

첫째항부터 등비수열을 이루려면 ㉡에 $n=1$을 대입한 값이 ㉠과 같아야 하므로

$9\times 4^{1-1}=12+k$, $9=12+k$ $\therefore k=\underline{-3}$

(2) (ⅰ) $n=1$일 때, $a_1=S_1=6+k$ …… ㉠

(ⅱ) $n\geq 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(2\times 3^n+k)-(2\times 3^{n-1}+k)$

$=2\times 3\times 3^{n-1}-2\times 3^{n-1}$

$=(6-2)\times 3^{n-1}=4\times 3^{n-1}$ …… ㉡

첫째항부터 등비수열을 이루려면 ㉡에 $n=1$을 대입한 값이 ㉠과 같아야 하므로

$4\times 3^{1-1}=6+k$, $4=6+k$ $\therefore k=-2$

(3) (ⅰ) $n=1$일 때, $a_1=S_1=20+k$ …… ㉠

(ⅱ) $n\geq 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(4\times 5^n+k)-(4\times 5^{n-1}+k)$

$=4\times 5\times 5^{n-1}-4\times 5^{n-1}$

$=(20-4)\times 5^{n-1}=16\times 5^{n-1}$ …… ㉡

첫째항부터 등비수열을 이루려면 ㉡에 $n=1$을 대입한 값이 ㉠과 같아야 하므로

$16\times 5^{1-1}=20+k$, $16=20+k$ $\therefore k=-4$

(4) (ⅰ) $n=1$일 때, $a_1=S_1=2\times 3^3+k=54+k$ …… ㉠

(ⅱ) $n\geq 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(2\times 3^{2n+1}+k)-(2\times 3^{2n-1}+k)$

$=2\times 3^2\times 3^{2n-1}-2\times 3^{2n-1}$

$=(18-2)\times 3^{2n-1}=16\times 3^{2n-1}$ …… ㉡

첫째항부터 등비수열을 이루려면 ㉡에 $n=1$을 대입한 값이 ㉠과 같아야 하므로

$16\times 3^{2-1}=54+k$, $48=54+k$ $\therefore k=-6$

44 답 (1) 30만 원 (2) 120만 원

풀이 (1) 1년 후의 원리합계는

$20+(20\times 0.05)=20(1+0.05)$(만 원)

2년 후의 원리합계는

$20+(20\times 0.05)+(20\times 0.05)=20(1+2\times 0.05)$(만 원)

3년 후의 원리합계는

$20+(20\times 0.05)+(20\times 0.05)+(20\times 0.05)$

$=20(1+3\times 0.05)$(만 원)

⋮

이므로 10년 후의 원리합계는

$20(1+10\times 0.05)=20\times \underline{1.5}=\underline{30}$(만 원)

(2) 1년 후의 원리합계는

$100+(100\times 0.02)=100(1+0.02)$(만 원)

2년 후의 원리합계는

$100+(100\times 0.02)+(100\times 0.02)$

$=100(1+2\times 0.02)$(만 원)

3년 후의 원리합계는

$100+(100\times 0.02)+(100\times 0.02)+(100\times 0.02)$

$=100(1+3\times 0.02)$(만 원)

⋮

이므로 10년 후의 원리합계는

$100(1+10\times 0.02)=100\times 1.2=120$(만 원)

45 답 (1) 32만 원 (2) 120만 원

풀이 (1) 1년 후의 원리합계는

$20+20\times 0.05=20(1+0.05)$(만 원)

2년 후의 원리합계는

$20(1+0.05)+20(1+0.05)\times 0.05$

$=20(1+0.05)(1+0.05)=20(1+0.05)^2$(만 원)

3년 후의 원리합계는

$20(1+0.05)^2+20(1+0.05)^2\times 0.05$

$=20(1+0.05)^2(1+0.05)=20(1+0.05)^3$(만 원)

⋮

이므로 10년 후의 원리합계는

$20(1+0.05)^{10}=20\times 1.05^{10}=20\times 1.6$

$=\underline{32}$(만 원)

(2) 1년 후의 원리합계는

$100+100\times 0.02=100(1+0.02)$(만 원)

2년 후의 원리합계는

$100(1+0.02)+100(1+0.02)\times 0.02$

$=100(1+0.02)(1+0.02)=100(1+0.02)^2$(만 원)

3년 후의 원리합계는

$100(1+0.02)^2+100(1+0.02)^2\times 0.02$

$=100(1+0.02)^2(1+0.02)=100(1+0.02)^3$(만 원)

⋮

이므로 10년 후의 원리합계는

$100(1+0.02)^{10}=100\times 1.02^{10}=100\times 1.2$

$=120$(만 원)

46 답 (1) 424만 원 (2) 504만 원 (3) 816만 원

풀이 (1) 10년 후의 원리합계를 S라고 하면

$S=30\times 1.06+30\times 1.06^2+\cdots+30\times 1.06^{10}$

$=\dfrac{30\times 1.06\times (1.06^{10}-1)}{1.06-1}$

$=\dfrac{30\times 1.06\times (1.8-1)}{0.06}=\underline{424}$(만 원)

(2) 10년 후의 원리합계를 S라고 하면

$S=40\times 1.05+40\times 1.05^2+\cdots+40\times 1.05^{10}$

$=\dfrac{40\times 1.05\times (1.05^{10}-1)}{1.05-1}$

$=\dfrac{40\times 1.05\times (1.6-1)}{0.05}=504$(만 원)

(3) 10년 후의 원리합계를 S라고 하면

$S=80\times1.02+80\times1.02^2+\cdots+80\times1.02^{10}$

$=\dfrac{80\times1.02\times(1.02^{10}-1)}{1.02-1}$

$=\dfrac{80\times1.02\times(1.2-1)}{0.02}=816$(만 원)

47 답 (1) 1750만 원 (2) 3600만 원 (3) 1000만 원

풀이 (1) 10년 후의 원리합계를 S라고 하면

$S=100+100\times1.12+100\times1.12^2+\cdots+100\times1.12^9$

$=\dfrac{100\times(1.12^{10}-1)}{1.12-1}=\dfrac{100\times(3.1-1)}{0.12}$

$=1750$(만 원)

(2) 10년 후의 원리합계를 S라고 하면

$S=300+300\times1.05+300\times1.05^2+\cdots+300\times1.05^9$

$=\dfrac{300\times(1.05^{10}-1)}{1.05-1}=\dfrac{300\times(1.6-1)}{0.05}$

$=3600$(만 원)

(3) 10년 후의 원리합계를 S라고 하면

$S=80+80\times1.04+80\times1.04^2+\cdots+80\times1.04^9$

$=\dfrac{80\times(1.04^{10}-1)}{1.04-1}=\dfrac{80\times(1.5-1)}{0.04}$

$=1000$(만 원)

중단원 점검문제 | Ⅲ-1 등차수열과 등비수열 158-159쪽

01 답 $a_n=6n-8$

풀이 등차수열의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a+5d=28$ …… ㉠

$a+9d=52$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $d=6$

따라서 일반항은 $a_n=-2+(n-1)\times6=6n-8$

02 답 3

풀이 등차수열의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_1+a_2=a+a+d=2a+d$

$a_3+a_4=a+2d+a+3d=2a+5d$

$(a_1+a_2):(a_3+a_4)=2:3$에서

$(2a+d):(2a+5d)=2:3$, $3(2a+d)=2(2a+5d)$

$6a+3d=4a+10d$, $2a=7d$ $\therefore d=\dfrac{2}{7}a$

$\therefore \dfrac{a_8}{a_1}=\dfrac{a+7d}{a}=\dfrac{a+7\times\frac{2}{7}a}{a}=\dfrac{3a}{a}=3$

03 답 제16항

풀이 등차수열의 첫째항을 a, 공차를 d, 일반항을 a_n이라고 하면

$a+2d=51$ …… ㉠

$a+6d=35$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=59$, $d=-4$

$\therefore a_n=59+(n-1)\times(-4)=-4n+63$

제n항이 처음으로 음수가 된다고 하면

$-4n+63<0$, $-4n<-63$

$\therefore n>15.75$

이때 n이 자연수이므로 제16항이 처음으로 음수가 된다.

04 답 30

풀이 두 수 3과 102 사이에 10개의 수를 넣으면 첫째항이 3, 제12항이 102가 된다.

첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a=3$, $a+11d=102$ $\therefore d=9$

$\therefore a_3=3+3\times9=30$

05 답 10

풀이 등차수열을 이루는 세 수를 $a-d$, a, $a+d$라고 하면

$(a-d)+a+(a+d)=18$에서 $3a=18$ $\therefore a=6$

$(a-d)^2+a^2+(a+d)^2=140$에서 $3a^2+2d^2=140$

이 식에 $a=6$을 대입하면 $3\times6^2+2d^2=140$

$2d^2=32$, $d^2=16$ $\therefore d=\pm4$

(i) $a=6$, $d=4$일 때, 세 수는 2, 6, 10이다.

(ii) $a=6$, $d=-4$일 때, 세 수는 10, 6, 2이다.

따라서 세 수는 2, 6, 10이므로 이 중에서 가장 큰 수는 10이다.

06 답 $a_n=-2n+32$

풀이 등차수열의 공차를 d, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_{10}=\dfrac{10\times\{2\times30+(10-1)\times d\}}{2}=210$

$60+9d=42$, $9d=-18$

$\therefore d=-2$

따라서 등차수열의 일반항 a_n은

$a_n=30+(n-1)\times(-2)=-2n+32$

07 답 480

풀이 등차수열의 첫째항을 a, 공차를 d, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_5=\dfrac{5\times\{2a+(5-1)\times d\}}{2}=-10$

$\therefore 2a+4d=-4$ …… ㉠

$S_{10}=\dfrac{10\times\{2a+(10-1)\times d\}}{2}=80$

$\therefore 2a+9d=16$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-10$, $d=4$

따라서 이 등차수열의 제11항부터 제20항까지의 합은 첫째항부터 제20항까지의 합에서 첫째항부터 제10항까지의 합을 빼면 되므로

$S_{20}-S_{10}=\dfrac{20\times\{2\times(-10)+(20-1)\times4\}}{2}-80$

$=560-80=480$

08 답 $a_n=6n-5$

풀이 (i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=3\times1^2-2\times1=1$

(ii) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=(3n^2-2n)-\{3(n-1)^2-2(n-1)\}$
$=6n-5$ …… ㉠

그런데 $a_1=1$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 값과 같으므로

$a_n=6n-5$

09 답 $a_n=3\times2^{n-2}$

풀이 등비수열의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_n=ar^{n-1}$

$a_2=3$이므로 $ar=3$ …… ㉠

$a_5=24$이므로 $ar^4=24$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $\frac{ar^4}{ar}=\frac{24}{3}$ $\therefore r^3=8$

이때 r는 실수이므로 $r=2$

이 값을 ㉠에 대입하면

$2a=3$ $\therefore a=\frac{3}{2}$

$\therefore a_n=\frac{3}{2}\times2^{n-1}=3\times2^{n-2}$

10 답 48

풀이 등비수열의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_2+a_3=18$에서 $ar+ar^2=18$

$\therefore ar(1+r)=18$ …… ㉠

$a_4=24$에서 $ar^3=24$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $\frac{r^2}{(1+r)}=\frac{4}{3}$

$3r^2-4r-4=0$, $(3r+2)(r-2)=0$

이때 r는 양수이므로 $r=2$

이 값을 ㉠에 대입하면 $2a\times3=18$ $\therefore a=3$

$\therefore a_5=ar^4=3\times2^4=48$

11 답 8

풀이 등비수열의 첫째항이 4, 제6항이 128이므로 공비를 r, 일반항을 a_n이라고 하면

$a_n=4\times r^{n-1}$

$a_6=4\times r^5=128$에서 $r^5=32$

이때 r는 실수이므로 $r=2$

4에서부터 128까지 공비 2씩 곱해 가면

4, 8, 16, 32, 64, 128

따라서 네 수는 8, 16, 32, 64이므로 이 중에서 가장 작은 수는 8이다.

12 답 제13항

풀이 등비수열의 첫째항을 a, 공비를 r, 일반항을 a_n이라고 하면

$a_n=ar^{n-1}$

$a_3=5$이므로 $ar^2=5$ …… ㉠

$a_6=40$이므로 $ar^5=40$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $\frac{ar^5}{ar^2}=\frac{40}{5}$ $\therefore r^3=8$

이때 r는 실수이므로 $r=2$

이 값을 ㉠에 대입하면 $4a=5$ $\therefore a=\frac{5}{4}$

$\therefore a_n=\frac{5}{4}\times2^{n-1}=5\times2^{n-3}$

제n항이 처음으로 3000보다 커진다고 하면

$5\times2^{n-3}>3000$, $2^{n-3}>600$

이때 $2^9=512$, $2^{10}=1024$이고 n은 자연수이므로

$n-3\geq10$, $n\geq13$

따라서 처음으로 3000보다 커지는 항은 제13항이다.

13 답 10

풀이 세 수 2, x, y가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$x=\frac{2+y}{2}$ …… ㉠

세 수 x, y, 9가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$y^2=9x$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $y^2=9\times\frac{2+y}{2}$

$2y^2-9y-18=0$, $(2y+3)(y-6)=0$

이때 y는 양수이므로 $y=6$

이 값을 ㉠에 대입하면 $x=4$

$\therefore x+y=10$

14 답 $\frac{1}{3}$

풀이 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_6=\frac{a(2^6-1)}{2-1}=21$, $63a=21$

$\therefore a=\frac{1}{3}$

15 답 -3

풀이 등비수열의 일반항을 a_n이라고 하면

(i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=9+k$ …… ㉠

(ii) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=(3^{n+1}+k)-(3^n+k)$
$=3^{n+1}-3^n$
$=3^n(3-1)=2\times3^n$ …… ㉡

첫째항부터 등비수열을 이루려면 ㉡에 $n=1$을 대입한 값이 ㉠과 같아야 하므로

$2\times3^1=9+k$, $6=9+k$ $\therefore k=-3$

16 답 5544만 원

풀이 30년 후의 원리합계를 S라고 하면

$S=80\times1.05+80\times1.05^2+\cdots+80\times1.05^{30}$
$=\frac{80\times1.05\times(1.05^{30}-1)}{1.05-1}$
$=\frac{80\times1.05\times(4.3-1)}{0.05}$
$=5544$(만 원)

01 답 (1) $2+4+6+8+10$

(2) $3+3^2+3^3+3^4$

(또는 $3+9+27+81$)

(3) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$

(4) $1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+5\times6+6\times7$

(또는 $2+6+12+20+30+42$)

(5) $2+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\frac{5}{4}+\frac{6}{5}$

(6) $8+11+14+\cdots+(3n+5)$

(7) $1+2+4+\cdots+2^{n-1}$

(8) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}$

(9) $\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}$

(10) $-1+2-3+\cdots+(-1)^n\times n$

풀이 (1) $2k$의 k에 1부터 5까지 대입하여 더한 것이므로

$\sum_{k=1}^{5}2k=2+4+6+8+10$

(2) 3^k의 k에 1부터 4까지 대입하여 더한 것이므로

$\sum_{k=1}^{4}3^k=3+3^2+3^3+3^4$

(3) $\frac{1}{i}$의 i에 1부터 7까지 대입하여 더한 것이므로

$\sum_{i=1}^{7}\frac{1}{i}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$

(4) $j(j+1)$의 j에 1부터 6까지 대입하여 더한 것이므로

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{6}j(j+1)&=1\times(1+1)+2\times(2+1)+3\times(3+1)\\&\quad+4\times(4+1)+5\times(5+1)+6\times(6+1)\\&=1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+5\times6+6\times7\end{aligned}$$

(5) $\frac{k+1}{k}$의 k에 1부터 5까지 대입하여 더한 것이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{5}\frac{k+1}{k}&=\frac{1+1}{1}+\frac{2+1}{2}+\frac{3+1}{3}+\frac{4+1}{4}+\frac{5+1}{5}\\&=2+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\frac{5}{4}+\frac{6}{5}\end{aligned}$$

(6) $3k+5$의 k에 1부터 n까지 대입하여 더한 것이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(3k+5)&=(3\times1+5)+(3\times2+5)+(3\times3+5)\\&\quad+\cdots+(3n+5)\\&=8+11+14+\cdots+(3n+5)\end{aligned}$$

(7) 2^{k-1}의 k에 1부터 n까지 대입하여 더한 것이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}&=2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1}\\&=1+2+4+\cdots+2^{n-1}\end{aligned}$$

(8) $\frac{1}{2i-1}$의 i에 1부터 n까지 대입하여 더한 것이므로

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2i-1}&=\frac{1}{2-1}+\frac{1}{4-1}+\frac{1}{6-1}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\\&=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\end{aligned}$$

(9) $\frac{1}{j(j+2)}$의 j에 1부터 n까지 대입하여 더한 것이므로

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j(j+2)}\\&=\frac{1}{1\times(1+2)}+\frac{1}{2\times(2+2)}+\frac{1}{3\times(3+2)}+\cdots\\&\qquad+\frac{1}{n(n+2)}\\&=\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{3\times5}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}\\&=\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}\end{aligned}$$

(10) $(-1)^k\times k$의 k에 1부터 n까지 대입하여 더한 것이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\times k&=(-1)^1\times1+(-1)^2\times2+(-1)^3\times3\\&\quad+(-1)^4\times4+\cdots+(-1)^n\times n\\&=-1+2-3+4+\cdots+(-1)^n\times n\end{aligned}$$

02 답 (1) $\sum_{k=1}^{n}(2k+1)$ (2) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$

(3) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}$ (4) $\sum_{k=1}^{n}7^{k-1}$

(5) $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}$ (6) $\sum_{k=1}^{9}(k^2+k)$

(7) $\sum_{k=1}^{10}(3k-2)$ (8) $\sum_{k=1}^{8}\frac{k}{k+1}$

(9) $\sum_{k=1}^{30}3k$ (10) $\sum_{k=1}^{20}5^k$

풀이 (1) $2k+1$의 k에 1부터 n까지 대입하여 더한 것이므로

$3+5+7+\cdots+(2n+1)=\sum_{k=1}^{n}(2k+1)$

(2) $2k-1$의 k에 1부터 n까지 대입하여 더한 것이므로

$1+3+5+\cdots+(2n-1)=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$

(3) $\frac{1}{2^k}$의 k에 1부터 n까지 대입하여 더한 것이므로

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}$

(4) 7^{k-1}의 k에 1부터 n까지 대입하여 더한 것이므로

$1+7+7^2+\cdots+7^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}7^{k-1}$

(5) $\frac{(-1)^k}{k}$의 k에 1부터 n까지 대입하여 더한 것이므로

$-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{(-1)^k}{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}$

(6) $k(k+1)$의 k에 1부터 9까지 대입하여 더한 것이므로

$$\begin{aligned}&1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+9\times10\\&=\sum_{k=1}^{9}k(k+1)=\sum_{k=1}^{9}(k^2+k)\end{aligned}$$

(7) $3k-2$의 k에 1부터 10까지 대입하여 더한 것이므로

$1+4+7+\cdots+28=\sum_{k=1}^{10}(3k-2)$

(8) $\frac{k}{k+1}$의 k에 1부터 8까지 대입하여 더한 것이므로

$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{8}{9}=\sum_{k=1}^{8}\frac{k}{k+1}$

(9) $3k$의 k에 1부터 30까지 대입하여 더한 것이므로

$3+6+9+\cdots+90=\sum_{k=1}^{30}3k$

(10) 5^k의 k에 1부터 20까지 대입하여 더한 것이므로

$5+5^2+5^3+\cdots+5^{20}=\sum_{k=1}^{20}5^k$

03 답 (1) 35 (2) 50

풀이 (1) $\sum_{k=1}^{10}(a_k+1)^2=\sum_{k=1}^{10}(a_k^2+2a_k+1)$

$=\sum_{k=1}^{10}a_k^2+2\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}1$

$=15+2\times5+10=\underline{35}$

(2) $\sum_{k=1}^{10}(2a_k-1)^2=\sum_{k=1}^{10}(4a_k^2-4a_k+1)$

$=4\sum_{k=1}^{10}a_k^2-4\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}1$

$=4\times15-4\times5+10=50$

04 답 (1) 80 (2) 20

풀이 (1) $\sum_{k=1}^{10}(2a_k+4b_k)=2\sum_{k=1}^{10}a_k+4\sum_{k=1}^{10}b_k$

$=2\times10+4\times15=\underline{80}$

(2) $\sum_{k=1}^{10}(-a_k+2b_k)=-\sum_{k=1}^{10}a_k+2\sum_{k=1}^{10}b_k$

$=-10+2\times15=20$

05 답 (1) 40 (2) 90 (3) 1 (4) 187

풀이 (1) $\sum_{k=1}^{10}(k+2)-\sum_{k=1}^{10}(k-2)=\sum_{k=1}^{10}\{(k+2)-(k-2)\}$

$=\sum_{k=1}^{10}4=4\times10=\underline{40}$

(2) $\sum_{k=1}^{10}(k^2+4)-\sum_{k=1}^{10}(k^2-5)=\sum_{k=1}^{10}\{(k^2+4)-(k^2-5)\}$

$=\sum_{k=1}^{10}9=9\times10=90$

(3) $\sum_{k=1}^{10}(k^2-2)-\sum_{k=3}^{10}(k^2-2)=\sum_{k=1}^{2}(k^2-2)$

$=(1^2-2)+(2^2-2)$

$=-1+2=1$

(4) $\sum_{k=1}^{10}(k^2+3)-\sum_{k=1}^{8}(k^2+3)=\sum_{k=9}^{10}(k^2+3)$

$=(9^2+3)+(10^2+3)$

$=84+103=187$

06 답 (1) n^2-4n (2) 95

(3) $\frac{4}{3}n^3+4n^2+\frac{11}{3}n$ (4) 450

풀이 (1) $\sum_{k=1}^{n}(2k-5)=\sum_{k=1}^{n}2k-\sum_{k=1}^{n}5=2\sum_{k=1}^{n}k-5n$

$=2\times\frac{n(n+1)}{2}-5n=\underline{n^2-4n}$

(2) $\sum_{k=1}^{10}(k+4)=\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}4=\frac{10\times11}{2}+4\times10$

$=55+40=95$

(3) $\sum_{k=1}^{n}(2k+1)^2=\sum_{k=1}^{n}(4k^2+4k+1)$

$=4\sum_{k=1}^{n}k^2+4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$

$=4\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$+4\times\frac{n(n+1)}{2}+n$

$=\frac{4}{3}n^3+4n^2+\frac{11}{3}n$

(4) $\sum_{k=1}^{10}(k^2+k+1)=\sum_{k=1}^{10}k^2+\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}1$

$=\frac{10\times11\times21}{6}+\frac{10\times11}{2}+10$

$=385+55+10=450$

07 답 (1) -58 (2) 408 (3) 123 (4) 5454

풀이 (1) $\sum_{k=1}^{5}(2^k-8k)=\sum_{k=1}^{5}2^k-8\sum_{k=1}^{5}k$

$=2^1+2^2+2^3+2^4+2^5-8\times\frac{5\times6}{2}$

$=\frac{2\times(2^5-1)}{2-1}-120$

$=62-120=\underline{-58}$

(2) $\sum_{k=1}^{5}(3^k+3k)=\sum_{k=1}^{5}3^k+3\sum_{k=1}^{5}k$

$=3^1+3^2+3^3+3^4+3^5+3\times\frac{5\times6}{2}$

$=\frac{3\times(3^5-1)}{3-1}+45$

$=363+45=408$

(3) $\sum_{k=1}^{6}(2^{k-1}+10)=\sum_{k=1}^{6}2^{k-1}+\sum_{k=1}^{6}10$

$=1+2^1+2^2+2^3+2^4+2^5+10\times6$

$=\frac{2^6-1}{2-1}+60$

$=63+60=123$

(4) $\sum_{k=1}^{6}(4^k-1)=\sum_{k=1}^{6}4^k-\sum_{k=1}^{6}1$

$=4^1+4^2+4^3+4^4+4^5+4^6-1\times6$

$=\frac{4\times(4^6-1)}{4-1}-6$

$=5460-6=5454$

08 답 (1) $S_n=\frac{n(n+1)(4n-1)}{3}$ (2) $S_n=n(n+1)(2n-1)$

(3) $S_n=4^n-1$

풀이 (1) 제k항을 a_k라고 하면

$a_k=(2k-1)\times2k=4k^2-2k$

$\therefore S_n=\sum_{k=1}^{n}(4k^2-2k)=4\sum_{k=1}^{n}k^2-2\sum_{k=1}^{n}k$

$=4\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-2\times\frac{n(n+1)}{2}$

$=\frac{n(n+1)(4n-1)}{3}$

(2) 제k항을 a_k라고 하면

$a_k=2k\times(3k-2)=6k^2-4k$

$\therefore S_n=\sum_{k=1}^{n}(6k^2-4k)=6\sum_{k=1}^{n}k^2-4\sum_{k=1}^{n}k$

$=6\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-4\times\frac{n(n+1)}{2}$

$=n(n+1)(2n-1)$

(3) 제k항을 a_k라고 하면

$a_k=3\times4^{k-1}$

$\therefore S_n=\sum_{k=1}^{n}(3\times4^{k-1})=3\sum_{k=1}^{n}4^{k-1}$

$=3\times\frac{4^n-1}{4-1}$

$=4^n-1$

09 답 (1) $S_n=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$

(2) $S_n=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $S_n=\dfrac{4^{n+1}}{9}-\dfrac{n}{3}-\dfrac{4}{9}$

풀이 (1) 제k항을 a_k라고 하면

$$a_k=1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}=\frac{k^2}{2}+\frac{k}{2}$$

$$\therefore S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k^2}{2}+\frac{k}{2}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\underline{\frac{n(n+1)(n+2)}{6}}$$

(2) 제k항을 a_k라고 하면

$$a_k=1+3+5+\cdots+(2k-1)=\frac{k\{1+(2k-1)\}}{2}=k^2$$

$$\therefore S_n=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(3) 제k항을 a_k라고 하면

$$a_k=1+4+4^2+\cdots+4^{k-1}=\frac{4^k-1}{4-1}=\frac{4^k}{3}-\frac{1}{3}$$

$$\therefore S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4^k}{3}-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}4^k-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{4(4^n-1)}{4-1}-\frac{n}{3}$$

$$=\frac{4^{n+1}}{9}-\frac{n}{3}-\frac{4}{9}$$

10 답 28

풀이 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2-2n$이라고 하면

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=-1$

(ii) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(n^2-2n)-\{(n-1)^2-2(n-1)\}$

$=2n-3$ …… ㉠

그런데 $a_1=-1$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 값과 같다.

$\therefore a_n=2n-3$

$a_{2k}=2\times2k-3=4k-3$이므로

$$\sum_{k=1}^{4}a_{2k}=\sum_{k=1}^{4}(4k-3)=4\sum_{k=1}^{4}k-\sum_{k=1}^{4}3$$

$$=4\times\frac{4\times5}{2}-3\times4=40-12=\underline{28}$$

11 답 80

풀이 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2-n$이라고 하면

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=0$

(ii) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(n^2-n)-\{(n-1)^2-(n-1)\}$

$=2n-2$ …… ㉠

그런데 $a_1=0$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 값과 같다.

$\therefore a_n=2n-2$

$a_{3k}=2\times3k-2=6k-2$이므로

$$\sum_{k=1}^{5}a_{3k}=\sum_{k=1}^{5}(6k-2)=6\sum_{k=1}^{5}k-\sum_{k=1}^{5}2$$

$$=6\times\frac{5\times6}{2}-2\times5=90-10=80$$

12 답 102

풀이 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2+2n$이라고 하면

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=3$

(ii) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(n^2+2n)-\{(n-1)^2+2(n-1)\}$

$=2n+1$ …… ㉠

그런데 $a_1=3$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 값과 같다.

$\therefore a_n=2n+1$

$a_{2k+1}=2(2k+1)+1=4k+3$이므로

$$\sum_{k=1}^{6}a_{2k+1}=\sum_{k=1}^{6}(4k+3)=4\sum_{k=1}^{6}k+\sum_{k=1}^{6}3$$

$$=4\times\frac{6\times7}{2}+3\times6=84+18=102$$

13 답 280

풀이 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2+5n$이라고 하면

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=6$

(ii) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(n^2+5n)-\{(n-1)^2+5(n-1)\}$

$=2n+4$ …… ㉠

그런데 $a_1=6$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 값과 같다.

$\therefore a_n=2n+4$

$a_{2k}=2\times2k+4=4k+4$이므로

$$\sum_{k=1}^{5}(ka_{2k})=\sum_{k=1}^{5}\{k(4k+4)\}=\sum_{k=1}^{5}(4k^2+4k)$$

$$=4\sum_{k=1}^{5}k^2+4\sum_{k=1}^{5}k$$

$$=4\times\frac{5\times6\times11}{6}+4\times\frac{5\times6}{2}$$

$$=220+60=280$$

14 답 85

풀이 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=2^n-1$이라고 하면

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=1$

(ii) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(2^n-1)-(2^{n-1}-1)=2^n-2^{n-1}$

$=2\times2^{n-1}-2^{n-1}=(2-1)\times2^{n-1}=2^{n-1}$ …… ㉠

그런데 $a_1=1$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 값과 같다.

$\therefore a_n=2^{n-1}$

$a_{2k-1}=2^{(2k-1)-1}=2^{2(k-1)}=4^{k-1}$이므로

$$\sum_{k=1}^{4}a_{2k-1}=\sum_{k=1}^{4}4^{k-1}=1+4+4^2+4^3$$

$$=\frac{4^4-1}{4-1}=\frac{255}{3}=85$$

15 답 2340

풀이 $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k=2^n-1$이라고 하면

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=1$

(ii) $n\geq 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(2^n-1)-(2^{n-1}-1)=2^n-2^{n-1}$

$=2\times 2^{n-1}-2^{n-1}=(2-1)\times 2^{n-1}=2^{n-1}$ …… ㉠

그런데 $a_1=1$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 값과 같다.

$\therefore a_n=2^{n-1}$

$a_{3k}=2^{3k-1}$이므로

$\sum_{k=1}^{4} a_{3k}=\sum_{k=1}^{4} 2^{3k-1}=2^2+2^5+2^8+2^{11}$

$=\frac{2^2\times\{(2^3)^4-1\}}{2^3-1}=\frac{4\times 4095}{7}=2340$

16 답 4920

풀이 $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k=3^n-1$이라고 하면

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=2$

(ii) $n\geq 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(3^n-1)-(3^{n-1}-1)=3^n-3^{n-1}$

$=3\times 3^{n-1}-3^{n-1}=(3-1)\times 3^{n-1}=2\times 3^{n-1}$ …… ㉠

그런데 $a_1=2$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 값과 같다.

$\therefore a_n=2\times 3^{n-1}$

$a_{2k}=2\times 3^{2k-1}$이므로

$\sum_{k=1}^{4} a_{2k}=\sum_{k=1}^{4}(2\times 3^{2k-1})=2\sum_{k=1}^{4} 3^{2k-1}$

$=2\times(3+3^3+3^5+3^7)=2\times\frac{3\times\{(3^2)^4-1\}}{3^2-1}$

$=2\times\frac{3\times 6560}{8}=4920$

17 답 12

풀이 $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k=3^n-1$이라고 하면

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=2$

(ii) $n\geq 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=(3^n-1)-(3^{n-1}-1)=3^n-3^{n-1}$

$=3\times 3^{n-1}-3^{n-1}=(3-1)\times 3^{n-1}=2\times 3^{n-1}$ …… ㉠

그런데 $a_1=2$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 값과 같다.

$\therefore a_n=2\times 3^{n-1}$

$a_{2k}=2\times 3^{2k-1}$, $a_{2k-1}=2\times 3^{(2k-1)-1}=2\times 3^{2k-2}$이므로

$\sum_{k=1}^{4}\frac{a_{2k}}{a_{2k-1}}=\sum_{k=1}^{4}\frac{2\times 3^{2k-1}}{2\times 3^{2k-2}}=\sum_{k=1}^{4}\frac{3^{-1}\times 3^{2k}}{3^{-2}\times 3^{2k}}$

$=\sum_{k=1}^{4} 3=3\times 4=12$

18 답

(1) 1650	(2) 0
(3) -75	(4) 225
(5) 1911	(6) 900
(7) 196	(8) 70
(9) 195	(10) 840

풀이 (1) $\sum_{n=1}^{10}(2m+n)=\sum_{n=1}^{10} 2m+\sum_{n=1}^{10} n$

$=20m+\frac{10\times 11}{2}=20m+55$

$\therefore$ (주어진 식) $=\sum_{m=1}^{10}(20m+55)$

$=20\sum_{m=1}^{10} m+\sum_{m=1}^{10} 55$

$=20\times\frac{10\times 11}{2}+55\times 10=\underline{1650}$

(2) $\sum_{n=1}^{7}(m-n)=\sum_{n=1}^{7} m-\sum_{n=1}^{7} n=7m-\frac{7\times 8}{2}$

$=7m-28$

$\therefore$ (주어진 식) $=\sum_{m=1}^{7}(7m-28)=7\sum_{m=1}^{7} m-\sum_{m=1}^{7} 28$

$=7\times\frac{7\times 8}{2}-28\times 7=196-196=0$

(3) $\sum_{j=1}^{5}(j-2i)=\sum_{j=1}^{5} j-\sum_{j=1}^{5} 2i=\frac{5\times 6}{2}-10i$

$=15-10i$

$\therefore$ (주어진 식) $=\sum_{i=1}^{5}(15-10i)=\sum_{i=1}^{5} 15-10\sum_{i=1}^{5} i$

$=15\times 5-10\times\frac{5\times 6}{2}=75-150$

$=-75$

(4) $\sum_{n=1}^{5} mn=m\sum_{n=1}^{5} n=m\times\frac{5\times 6}{2}=15m$

$\therefore$ (주어진 식) $=\sum_{m=1}^{5} 15m=15\sum_{m=1}^{5} m$

$=15\times\frac{5\times 6}{2}=225$

(5) $\sum_{n=1}^{6} m^2n=m^2\sum_{n=1}^{6} n=m^2\times\frac{6\times 7}{2}=21m^2$

$\therefore$ (주어진 식) $=\sum_{m=1}^{6} 21m^2=21\sum_{m=1}^{6} m^2$

$=21\times\frac{6\times 7\times 13}{6}=1911$

(6) $\sum_{j=1}^{4}(ij)^2=i^2\sum_{j=1}^{4} j^2=i^2\times\frac{4\times 5\times 9}{6}=30i^2$

$\therefore$ (주어진 식) $=\sum_{i=1}^{4} 30i^2=30\sum_{i=1}^{4} i^2$

$=30\times\frac{4\times 5\times 9}{6}=900$

(7) $\sum_{k=1}^{j} j=j\times j=j^2$

$\sum_{j=1}^{i} j^2=\frac{i(i+1)(2i+1)}{6}=\frac{2i^3+3i^2+i}{6}$

$=\frac{i^3}{3}+\frac{i^2}{2}+\frac{i}{6}$

$\therefore$ (주어진 식) $=\sum_{i=1}^{6}\left(\frac{i^3}{3}+\frac{i^2}{2}+\frac{i}{6}\right)$

$=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{6} i^3+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6} i^2+\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} i$

$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{6\times 7}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\times\frac{6\times 7\times 13}{6}$

$+\frac{1}{6}\times\frac{6\times 7}{2}$

$=147+\frac{91}{2}+\frac{7}{2}=196$

(8) $\sum_{k=1}^{j}2k=2\sum_{k=1}^{j}k=2\times\frac{j(j+1)}{2}=j^2+j$

$\sum_{j=1}^{i}(j^2+j)=\sum_{j=1}^{i}j^2+\sum_{j=1}^{i}j=\frac{i(i+1)(2i+1)}{6}+\frac{i(i+1)}{2}$

$=\frac{i^3}{3}+i^2+\frac{2}{3}i$

∴ (주어진 식)

$=\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{i^3}{3}+i^2+\frac{2}{3}i\right)$

$=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{4}i^3+\sum_{i=1}^{4}i^2+\frac{2}{3}\sum_{i=1}^{4}i$

$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{4\times5}{2}\right)^2+\frac{4\times5\times9}{6}+\frac{2}{3}\times\frac{4\times5}{2}$

$=\frac{100}{3}+30+\frac{20}{3}=70$

(9) $\sum_{k=1}^{j}3i=3ij$

$\sum_{j=1}^{i}3ij=3i\sum_{j=1}^{i}j=3i\times\frac{i(i+1)}{2}=\frac{3}{2}i^3+\frac{3}{2}i^2$

∴ (주어진 식)$=\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{3}{2}i^3+\frac{3}{2}i^2\right)$

$=\frac{3}{2}\sum_{i=1}^{4}i^3+\frac{3}{2}\sum_{i=1}^{4}i^2$

$=\frac{3}{2}\times\left(\frac{4\times5}{2}\right)^2+\frac{3}{2}\times\frac{4\times5\times9}{6}$

$=150+45=195$

(10) $\sum_{k=1}^{j}10=10j$

$\sum_{j=1}^{i}10j=10\sum_{j=1}^{i}j=10\times\frac{i(i+1)}{2}=5i^2+5i$

∴ (주어진 식)$=\sum_{i=1}^{7}(5i^2+5i)$

$=5\sum_{i=1}^{7}i^2+5\sum_{i=1}^{7}i$

$=5\times\frac{7\times8\times15}{6}+5\times\frac{7\times8}{2}$

$=700+140=840$

19 답 (1) $\frac{9}{10}$ (2) $\frac{20}{21}$ (3) $\frac{175}{132}$

풀이 제k항을 a_k라고 하면

(1) $a_k=\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$이므로

(주어진 식)$=\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\cdots$

$+\left(\cancel{\frac{1}{8}}-\cancel{\frac{1}{9}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{9}}-\frac{1}{10}\right)$

$=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$

(2) $a_k=\frac{2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}$이므로

(주어진 식)$=\left(1-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{7}}\right)+\cdots$

$+\left(\cancel{\frac{1}{17}}-\cancel{\frac{1}{19}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{19}}-\frac{1}{21}\right)$

$=1-\frac{1}{21}=\frac{20}{21}$

(3) $a_k=\frac{2}{k(k+2)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}$이므로

(주어진 식)

$=\left(1-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{6}}\right)+\cdots$

$+\left(\cancel{\frac{1}{8}}-\cancel{\frac{1}{10}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{9}}-\frac{1}{11}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{10}}-\frac{1}{12}\right)$

$=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{11}-\frac{1}{12}=\frac{175}{132}$

20 답 (1) $\frac{n(5n+13)}{12(n+2)(n+3)}$ (2) $\frac{n}{2n+1}$

풀이 (1) 주어진 수열의 제n항을 a_n, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$a_n=\frac{1}{(n+1)(n+3)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)$

$\therefore S_n=\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{4\times6}+\frac{1}{5\times7}+\cdots$

$+\frac{1}{(n+1)(n+3)}$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\frac{1}{3}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{6}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{7}}\right)\right.$

$\left.+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{n+1}}-\frac{1}{n+3}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{5n^2+13n}{6(n+2)(n+3)}=\frac{n(5n+13)}{12(n+2)(n+3)}$

(2) 주어진 수열의 제n항을 a_n, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$a_n=\frac{1}{(2n)^2-1}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$\therefore S_n=\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+\frac{1}{6^2-1}+\frac{1}{8^2-1}+\cdots$

$+\frac{1}{(2n)^2-1}$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{7}}\right)+\cdots\right.$

$\left.+\left(\cancel{\frac{1}{2n-3}}-\cancel{\frac{1}{2n-1}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2n-1}}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$

21 답 (1) $\frac{\sqrt{101}-1}{2}$ (2) $10-\sqrt{2}$ (3) 18

풀이 제k항을 a_k라고 하면

(1) $a_k=\frac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1}}$

$=\frac{(\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1})}{(\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1})(\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1})}$

$=-\frac{1}{2}(\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1})$

∴ (주어진 식)

$=\sum_{k=1}^{50}a_k=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{50}(\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1})$

$=-\frac{1}{2}\times\{(1-\cancel{\sqrt{3}})+(\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{5}})+(\cancel{\sqrt{5}}-\cancel{\sqrt{7}})+\cdots$

$+(\cancel{\sqrt{97}}-\cancel{\sqrt{99}})+(\cancel{\sqrt{99}}-\sqrt{101})\}$

$=\frac{\sqrt{101}-1}{2}$

(2) $a_k=\dfrac{2}{\sqrt{2k+2}+\sqrt{2k}}$

$=\dfrac{2(\sqrt{2k+2}-\sqrt{2k})}{(\sqrt{2k+2}+\sqrt{2k})(\sqrt{2k+2}-\sqrt{2k})}$

$=\sqrt{2k+2}-\sqrt{2k}$

$\therefore$ (주어진 식) $=\sum_{k=1}^{49}a_k=\sum_{k=1}^{49}(\sqrt{2k+2}-\sqrt{2k})$

$=(\cancel{\sqrt{4}}-\sqrt{2})+(\cancel{\sqrt{6}}-\cancel{\sqrt{4}})+(\cancel{\sqrt{8}}-\cancel{\sqrt{6}})$
$+\cdots+(\cancel{\sqrt{98}}-\cancel{\sqrt{96}})+(\sqrt{100}-\cancel{\sqrt{98}})$

$=\sqrt{100}-\sqrt{2}=10-\sqrt{2}$

(3) $a_k=\dfrac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$

$=\dfrac{2(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})}$

$=-2(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})$

$\therefore$ (주어진 식)

$=\sum_{k=1}^{99}a_k=-2\sum_{k=1}^{99}(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})$

$=-2\times\{(1-\cancel{\sqrt{2}})+(\cancel{\sqrt{2}}-\cancel{\sqrt{3}})+(\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{4}})+\cdots$
$+(\cancel{\sqrt{98}}-\cancel{\sqrt{99}})+(\cancel{\sqrt{99}}-\sqrt{100})\}$

$=-2\times(1-\sqrt{100})$

$=-2\times(-9)=18$

22 답 (1) $S_n=\sqrt{n+1}-1$ (2) $S_n=\sqrt{2n+1}-1$
(3) $S_n=\sqrt{2n+2}-\sqrt{2}$

풀이 제k항을 a_k라고 하면

(1) $a_k=\dfrac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\dfrac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})}$

$=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$

$\therefore S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

$=(\cancel{\sqrt{2}}-1)+(\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{2}})+(\cancel{\sqrt{4}}-\cancel{\sqrt{3}})+\cdots$
$+(\cancel{\sqrt{n}}-\cancel{\sqrt{n-1}})+(\sqrt{n+1}-\cancel{\sqrt{n}})$

$=\underline{\sqrt{n+1}-1}$

(2) $a_k=\dfrac{2}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k-1}}$

$=\dfrac{2(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})}{(\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k-1})(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})}$

$=\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}$

$\therefore S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})$

$=(\cancel{\sqrt{3}}-1)+(\cancel{\sqrt{5}}-\cancel{\sqrt{3}})+(\cancel{\sqrt{7}}-\cancel{\sqrt{5}})+\cdots$
$+(\cancel{\sqrt{2n-1}}-\cancel{\sqrt{2n-3}})+(\sqrt{2n+1}-\cancel{\sqrt{2n-1}})$

$=\sqrt{2n+1}-1$

(3) $a_k=\dfrac{2}{\sqrt{2k+2}+\sqrt{2k}}$

$=\dfrac{2(\sqrt{2k+2}-\sqrt{2k})}{(\sqrt{2k+2}+\sqrt{2k})(\sqrt{2k+2}-\sqrt{2k})}$

$=\sqrt{2k+2}-\sqrt{2k}$

$\therefore S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{2k+2}-\sqrt{2k})$

$=(\cancel{\sqrt{4}}-\sqrt{2})+(\cancel{\sqrt{6}}-\cancel{\sqrt{4}})+(\cancel{\sqrt{8}}-\cancel{\sqrt{6}})+\cdots$
$+(\cancel{\sqrt{2n}}-\cancel{\sqrt{2n-2}})+(\sqrt{2n+2}-\cancel{\sqrt{2n}})$

$=\sqrt{2n+2}-\sqrt{2}$

23 답 (1) $\log 66$ (2) 2 (3) $\log 6$ (4) $\log\dfrac{11}{20}$
(5) 2 (6) 1

풀이 (1) $1+\dfrac{2}{k}=\dfrac{k+2}{k}$이므로

$\sum_{k=1}^{10}\log\left(1+\dfrac{2}{k}\right)=\sum_{k=1}^{10}\log\dfrac{k+2}{k}$

$=\log\dfrac{3}{1}+\log\dfrac{4}{2}+\log\dfrac{5}{3}+\cdots$
$+\log\dfrac{10}{8}+\log\dfrac{11}{9}+\log\dfrac{12}{10}$

$=\log\left(\dfrac{\cancel{3}}{1}\times\dfrac{\cancel{4}}{2}\times\dfrac{\cancel{5}}{\cancel{3}}\times\cdots\right.$
$\left.\times\dfrac{\cancel{10}}{\cancel{8}}\times\dfrac{11}{\cancel{9}}\times\dfrac{12}{\cancel{10}}\right)$

$=\log\dfrac{11\times12}{1\times2}=\underline{\log 66}$

(2) $\sum_{k=1}^{99}\log\dfrac{k+1}{k}$

$=\log\dfrac{2}{1}+\log\dfrac{3}{2}+\log\dfrac{4}{3}+\cdots+\log\dfrac{99}{98}+\log\dfrac{100}{99}$

$=\log\left(\dfrac{\cancel{2}}{1}\times\dfrac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\times\dfrac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\times\cdots\times\dfrac{\cancel{98}}{\cancel{97}}\times\dfrac{\cancel{99}}{\cancel{98}}\times\dfrac{100}{\cancel{99}}\right)$

$=\log 100=2$

(3) $\dfrac{1}{k+1}+1=\dfrac{k+2}{k+1}$이므로

$\sum_{k=1}^{10}\log\left(\dfrac{1}{k+1}+1\right)=\sum_{k=1}^{10}\log\dfrac{k+2}{k+1}$

$=\log\dfrac{3}{2}+\log\dfrac{4}{3}+\log\dfrac{5}{4}+\cdots$
$+\log\dfrac{10}{9}+\log\dfrac{11}{10}+\log\dfrac{12}{11}$

$=\log\left(\dfrac{\cancel{3}}{2}\times\dfrac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\times\dfrac{\cancel{5}}{\cancel{4}}\times\cdots\right.$
$\left.\times\dfrac{\cancel{10}}{\cancel{9}}\times\dfrac{\cancel{11}}{\cancel{10}}\times\dfrac{12}{\cancel{11}}\right)$

$=\log\dfrac{12}{2}=\log 6$

(4) $\dfrac{k^2-1}{k^2}=\dfrac{(k-1)(k+1)}{k\times k}$이므로

$\sum_{k=2}^{10}\log\dfrac{k^2-1}{k^2}=\sum_{k=2}^{10}\log\dfrac{(k-1)(k+1)}{k\times k}$

$=\log\dfrac{1\times3}{2\times2}+\log\dfrac{2\times4}{3\times3}+\log\dfrac{3\times5}{4\times4}+\cdots$
$+\log\dfrac{8\times10}{9\times9}+\log\dfrac{9\times11}{10\times10}$

$=\log\left(\dfrac{1\times\cancel{3}}{2\times\cancel{2}}\times\dfrac{\cancel{2}\times\cancel{4}}{\cancel{3}\times\cancel{3}}\times\dfrac{\cancel{3}\times\cancel{5}}{\cancel{4}\times\cancel{4}}\times\cdots\right.$
$\left.\times\dfrac{\cancel{8}\times\cancel{10}}{\cancel{9}\times\cancel{9}}\times\dfrac{\cancel{9}\times11}{\cancel{10}\times10}\right)$

$=\log\left(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{11}{10}\right)=\log\dfrac{11}{20}$

(5) $\sum_{k=1}^{15}\log_2\dfrac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}}$

$=\log_2\dfrac{\sqrt{2}}{1}+\log_2\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\log_2\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}}+\cdots$
$+\log_2\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{14}}+\log_2\dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{15}}$

$=\log_2\left(\dfrac{\cancel{\sqrt{2}}}{1}\times\dfrac{\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{\sqrt{2}}}\times\dfrac{\cancel{\sqrt{4}}}{\cancel{\sqrt{3}}}\times\cdots\times\dfrac{\cancel{\sqrt{15}}}{\cancel{\sqrt{14}}}\times\dfrac{\sqrt{16}}{\cancel{\sqrt{15}}}\right)$

$=\log_2\sqrt{16}=\log_2 2^2=2$

(6) $\log_{k+1}(k+2)=\dfrac{\log(k+2)}{\log(k+1)}$이므로

$$\sum_{k=1}^{30}[\log_5\{\log_{k+1}(k+2)\}]$$
$$=\sum_{k=1}^{30}\left\{\log_5\frac{\log(k+2)}{\log(k+1)}\right\}$$
$$=\log_5\left(\frac{\log 3}{\log 2}\right)+\log_5\left(\frac{\log 4}{\log 3}\right)+\log_5\left(\frac{\log 5}{\log 4}\right)+\cdots+\log_5\left(\frac{\log 31}{\log 30}\right)+\log_5\left(\frac{\log 32}{\log 31}\right)$$
$$=\log_5\left(\frac{\cancel{\log 3}}{\log 2}\times\frac{\cancel{\log 4}}{\cancel{\log 3}}\times\frac{\cancel{\log 5}}{\cancel{\log 4}}\times\cdots\times\frac{\cancel{\log 31}}{\cancel{\log 30}}\times\frac{\log 32}{\cancel{\log 31}}\right)$$
$$=\log_5\left(\frac{\log 32}{\log 2}\right)=\log_5\left(\frac{\log 2^5}{\log 2}\right)$$
$$=\log_5\left(\frac{5\log 2}{\log 2}\right)=\log_5 5$$
$$=1$$

24 답 $\frac{5}{21}$

풀이 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2+n$이라고 하면

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=1^2+1=2$

(ii) $n\geq 2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2+n)-\{(n-1)^2+(n-1)\}=2n \quad\cdots\cdots ㉠$$

그런데 $a_1=2$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 값과 같으므로

$a_n=2n$

$a_k=2k$, $a_{k+1}=2(k+1)=2k+2$이므로

$$\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{a_ka_{k+1}}$$
$$=\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{2k(2k+2)}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times\left\{\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{6}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{6}}-\cancel{\frac{1}{8}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{40}}-\frac{1}{42}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{42}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{10}{21}=\underline{\frac{5}{21}}$$

25 답 $\frac{5}{48}$

풀이 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2+3n$이라고 하면

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=1^2+3\times1=4$

(ii) $n\geq 2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2+3n)-\{(n-1)^2+3(n-1)\}=2n+2 \quad\cdots\cdots ㉠$$

그런데 $a_1=4$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 값과 같으므로

$a_n=2n+2$

$a_k=2k+2$, $a_{k+1}=2(k+1)+2=2k+4$이므로

$$\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{a_ka_{k+1}}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{(2k+2)(2k+4)}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{2k+4}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times\left\{\left(\frac{1}{4}-\cancel{\frac{1}{6}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{6}}-\cancel{\frac{1}{8}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{8}}-\cancel{\frac{1}{10}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{22}}-\frac{1}{24}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{24}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{5}{24}=\frac{5}{48}$$

26 답 $\frac{5}{63}$

풀이 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=2n^2-3n$이라고 하면

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=2\times1^2-3\times1=-1$

(ii) $n\geq 2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}=(2n^2-3n)-\{2(n-1)^2-3(n-1)\}=4n-5 \quad\cdots\cdots ㉠$$

그런데 $a_1=-1$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 값과 같으므로

$a_n=4n-5$

$a_{k+1}=4(k+1)-5=4k-1$, $a_{k+2}=4(k+2)-5=4k+3$

이므로

$$\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{a_{k+1}a_{k+2}}$$
$$=\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{(4k-1)(4k+3)}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{15}\left(\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{4k+3}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\times\left\{\left(\frac{1}{3}-\cancel{\frac{1}{7}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{7}}-\cancel{\frac{1}{11}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{11}}-\cancel{\frac{1}{15}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{55}}-\cancel{\frac{1}{59}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{59}}-\frac{1}{63}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{63}\right)=\frac{1}{4}\times\frac{20}{63}=\frac{5}{63}$$

27 답 4

풀이 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2+8n$이라고 하면

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=1^2+8\times1=9$

(ii) $n\geq 2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-8n-\{2(n-1)^2+8(n-1)\}=2n+7 \quad\cdots\cdots ㉠$$

그런데 $a_1=9$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 값과 같으므로

$a_n=2n+7$

$a_k=2k+7$, $a_{k+1}=2(k+1)+7=2k+9$이므로

$$\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k}}$$
$$=\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{\sqrt{2k+9}+\sqrt{2k+7}}=\sum_{k=1}^{20}(\sqrt{2k+9}-\sqrt{2k+7})$$
$$=(\cancel{\sqrt{11}}-\sqrt{9})+(\cancel{\sqrt{13}}-\cancel{\sqrt{11}})+(\cancel{\sqrt{15}}-\cancel{\sqrt{13}})+\cdots+(\cancel{\sqrt{47}}-\cancel{\sqrt{45}})+(\sqrt{49}-\cancel{\sqrt{47}})$$
$$=\sqrt{49}-\sqrt{9}=7-3=4$$

28 답 8

풀이 $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k=2n^2-n$이라고 하면

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=2\times1^2-1=1$

(ii) $n\ge2$일 때,

$$\begin{aligned} a_n&=S_n-S_{n-1}\\ &=2n^2-n-\{2(n-1)^2-(n-1)\}\\ &=4n-3 \quad \cdots\cdots ㉠ \end{aligned}$$

그런데 $a_1=1$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 값과 같으므로

$a_n=4n-3$

$a_k=4k-3$, $a_{k+1}=4(k+1)-3=4k+1$이므로

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{20}\frac{4}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}\\ &=\sum_{k=1}^{20}\frac{4}{\sqrt{4k-3}+\sqrt{4k+1}}\\ &=\sum_{k=1}^{20}(\sqrt{4k+1}-\sqrt{4k-3})\\ &=(\cancel{\sqrt{5}}-\sqrt{1})+(\cancel{\sqrt{9}}-\cancel{\sqrt{5}})+(\cancel{\sqrt{13}}-\cancel{\sqrt{9}})+\cdots\\ &\qquad+(\cancel{\sqrt{77}}-\cancel{\sqrt{73}})+(\sqrt{81}-\cancel{\sqrt{77}})\\ &=\sqrt{81}-\sqrt{1}=9-1=8 \end{aligned}$$

29 답 3

풀이 $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k=2n^2+n$이라고 하면

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=2\times1^2+1=3$

(ii) $n\ge2$일 때,

$$\begin{aligned} a_n&=S_n-S_{n-1}\\ &=2n^2+n-\{2(n-1)^2+(n-1)\}\\ &=4n-1 \quad \cdots\cdots ㉠ \end{aligned}$$

그런데 $a_1=3$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 값과 같으므로

$a_n=4n-1$

$a_k=4k-1$, $a_{k+1}=4(k+1)-1=4k+3$이므로

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{15}\frac{2}{\sqrt{a_k+1}+\sqrt{a_{k+1}+1}}\\ &=\sum_{k=1}^{15}\frac{2}{\sqrt{4k}+\sqrt{4k+4}}=\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}\\ &=\sum_{k=1}^{15}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})\\ &=(\cancel{\sqrt{2}}-\sqrt{1})+(\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{2}})+(\cancel{\sqrt{4}}-\cancel{\sqrt{3}})+\cdots\\ &\qquad+(\cancel{\sqrt{15}}-\cancel{\sqrt{14}})+(\sqrt{16}-\cancel{\sqrt{15}})\\ &=\sqrt{16}-\sqrt{1}=4-1=3 \end{aligned}$$

30 답 (1) $\frac{19}{4}\times3^{11}+\frac{3}{4}$ (2) $\frac{29}{9}\times4^{10}+\frac{1}{9}$

(3) $2^{11}-12$ (4) $-3\times\left(\frac{1}{2}\right)^8+2$

풀이 (1) 등비수열의 공비가 3이므로 주어진 식의 양변에 3을 곱하여 변끼리 빼면

$$\begin{aligned} S&=1\times3+2\times3^2+3\times3^3+\cdots+10\times3^{10}\\ -)\,3S&=\qquad 1\times3^2+2\times3^3+\cdots+9\times3^{10}+10\times3^{11}\\ \hline -2S&=(3+3^2+3^3+\cdots+3^{10})-10\times3^{11}\\ &=\frac{3\times(3^{10}-1)}{3-1}-10\times3^{11}\\ &=\frac{3}{2}\times(3^{10}-1)-10\times3^{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore S&=-\frac{3}{4}\times(3^{10}-1)+5\times3^{11}\\ &=\frac{19}{4}\times3^{11}+\frac{3}{4} \end{aligned}$$

(2) 등비수열의 공비가 4이므로 주어진 식의 양변에 4를 곱하여 변끼리 빼면

$$\begin{aligned} S&=1+2\times4+3\times4^2+\cdots+10\times4^9\\ -)\,4S&=\qquad 1\times4+2\times4^2+\cdots+9\times4^9+10\times4^{10}\\ \hline -3S&=(1+4+4^2+\cdots+4^9)-10\times4^{10}\\ &=\frac{4^{10}-1}{4-1}-10\times4^{10}\\ &=\frac{4^{10}-1}{3}-10\times4^{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore S&=-\frac{1}{9}\times(4^{10}-1)+\frac{10}{3}\times4^{10}\\ &=\frac{29}{9}\times4^{10}+\frac{1}{9} \end{aligned}$$

(3) 등비수열의 공비가 2이므로 주어진 식의 양변에 2를 곱하여 변끼리 빼면

$$\begin{aligned} S&=10\times1+9\times2+8\times2^2+\cdots+1\times2^9\\ -)\,2S&=\qquad 10\times2+9\times2^2+\cdots+2\times2^9+1\times2^{10}\\ \hline -S&=10\times1-(2+2^2+\cdots+2^9+2^{10})\\ &=10-\frac{2\times(2^{10}-1)}{2-1}\\ &=10-2\times(2^{10}-1)=-2^{11}+12 \end{aligned}$$

$\therefore S=2^{11}-12$

(4) 등비수열의 공비가 $\frac{1}{2}$이므로 주어진 식의 양변에 $\frac{1}{2}$을 곱하여 변끼리 빼면

$$\begin{aligned} S&=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{10}{2^{10}}\\ -)\,\frac{1}{2}S&=\qquad \frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\cdots+\frac{9}{2^{10}}+\frac{10}{2^{11}}\\ \hline \frac{1}{2}S&=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{10}}\right)-\frac{10}{2^{11}}\\ &=\frac{\frac{1}{2}\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{10}{2^{11}}\\ &=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}-\left(\frac{1}{2^{10}}\times\frac{10}{2}\right)\\ &=(-1-5)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{10}+1\\ &=-6\times\left(\frac{1}{2}\right)^{10}+1=-3\times\left(\frac{1}{2}\right)^9+1 \end{aligned}$$

$\therefore S=-3\times\left(\frac{1}{2}\right)^8+2$

중단원 점검문제 | Ⅲ-2 수열의 합 172-173쪽

01 답 230

풀이
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{20}(3a_k-1)^2&=\sum_{k=1}^{20}(9a_k^2-6a_k+1)\\ &=9\sum_{k=1}^{20}a_k^2-6\sum_{k=1}^{20}a_k+\sum_{k=1}^{20}1\\ &=9\times30-6\times10+1\times20\\ &=270-60+20=230 \end{aligned}$$

02 답 70

풀이 $\sum_{k=1}^{10}(2a_k-b_k+7)=2\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{10}b_k+\sum_{k=1}^{10}7$

$=2\times8-16+7\times10$

$=16-16+70=70$

03 답 50

풀이 $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2=100$에서

$\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+2a_kb_k+b_k^2)=100$

$\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)+2\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=100$

$\therefore \sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)=100-2\times25=100-50=50$

04 답 50

풀이 $\sum_{k=1}^{10}(k^2+3)-\sum_{k=1}^{10}(k^2-2)=\sum_{k=1}^{10}\{(k^2+3)-(k^2-2)\}$

$=\sum_{k=1}^{10}5$

$=5\times10=50$

05 답 $4n$

풀이 $\sum_{k=1}^{n}(k-2)^2-\sum_{k=1}^{n}(k^2-4k)=\sum_{k=1}^{n}\{(k-2)^2-(k^2-4k)\}$

$=\sum_{k=1}^{n}(k^2-4k+4-k^2+4k)$

$=\sum_{k=1}^{n}4=4n$

06 답 13

풀이 $\sum_{k=1}^{n}(k+1)-\sum_{k=1}^{n-1}(k-1)$

$=\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1-\sum_{k=1}^{n-1}k+\sum_{k=1}^{n-1}1$

$=\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n-1}k+\sum_{k=1}^{n}1+\sum_{k=1}^{n-1}1$

$=\left(\sum_{k=1}^{n-1}k+n\right)-\sum_{k=1}^{n-1}k+n+(n-1)$

$=3n-1$

즉, $3n-1=38$에서 $3n=39$ $\quad\therefore n=13$

07 답 $\dfrac{2n^3+3n^2-23n}{6}$

풀이 $\sum_{k=1}^{n}(k+2)(k-2)=\sum_{k=1}^{n}(k^2-4)=\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}4$

$=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}-4n$

$=\dfrac{2n^3+3n^2+n}{6}-\dfrac{24n}{6}$

$=\dfrac{2n^3+3n^2-23n}{6}$

08 답 585

풀이 $\sum_{k=1}^{6}(2^k+k^3+3)=\sum_{k=1}^{6}2^k+\sum_{k=1}^{6}k^3+\sum_{k=1}^{6}3$

$=\dfrac{2\times(2^6-1)}{2-1}+\left(\dfrac{6\times7}{2}\right)^2+3\times6$

$=2\times63+21^2+18$

$=126+441+18=585$

09 답 1

풀이 $k=5$부터 $k=n+5$까지 항의 개수는

$(n+5)-5+1=n+1$

$\therefore \sum_{k=5}^{n+5}(2k+3)=2\sum_{k=5}^{n+5}k+\sum_{k=5}^{n+5}3$

$=2\times\{5+6+7+\cdots+(n+5)\}+3(n+1)$

$=2\times\dfrac{(n+1)\{5+(n+5)\}}{2}+3(n+1)$

$=(n+1)(n+10)+3(n+1)$

$=n^2+14n+13$

즉, $n^2+14n+13=an^2+bn+c$에서

$a=1,\ b=14,\ c=13$

$\therefore \dfrac{a+c}{b}=\dfrac{1+13}{14}=1$

10 답 $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

풀이 수열의 제k항을 a_k라고 하면

$a_k=2\times\dfrac{k(k+1)}{2}=k^2+k$

주어진 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)$

$=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k$

$=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\dfrac{n(n+1)}{2}$

$=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\dfrac{3n(n+1)}{6}$

$=\dfrac{2n^3+6n^2+4n}{6}$

$=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

11 답 310

풀이 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2+10n$이라고 하면

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=1^2+10\times1=11$

(ii) $n\ge2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(n^2+10n)-\{(n-1)^2+10(n-1)\}$

$=2n+9$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

그런데 $a_1=11$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 값과 같으므로

$a_n=2n+9$

$a_{2k}=2\times2k+9=4k+9$이므로

$\sum_{k=1}^{10}a_{2k}=\sum_{k=1}^{10}(4k+9)=4\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}9$

$=4\times\dfrac{10\times11}{2}+9\times10$

$=220+90=310$

12 답 $n(n+1)(2n+1)$

풀이 $\sum_{k=1}^{l}(12k-6)=12\sum_{k=1}^{l}k-\sum_{k=1}^{l}6$

$=12\times\dfrac{l(l+1)}{2}-6l$

$=6l^2$

$$\therefore \sum_{l=1}^{n}\left\{\sum_{k=1}^{l}(12k-6)\right\}=\sum_{l=1}^{n}6l^2=6\sum_{l=1}^{n}l^2$$
$$=6\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$=n(n+1)(2n+1)$$

13 답 8

풀이 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 4, 공차가 2인 등차수열이므로 수열 $\{a_n\}$을 첫째항부터 제49항까지 나열하면

4, 6, 8, 10, $\cdots$, 98, 100

$$\therefore \frac{2}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{2}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\frac{2}{\sqrt{a_3}+\sqrt{a_4}}+\cdots+\frac{2}{\sqrt{a_{48}}+\sqrt{a_{49}}}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{4}+\sqrt{6}}+\frac{2}{\sqrt{6}+\sqrt{8}}+\frac{2}{\sqrt{8}+\sqrt{10}}+\cdots+\frac{2}{\sqrt{98}+\sqrt{100}}$$
$$=(\cancel{\sqrt{6}}-\sqrt{4})+(\cancel{\sqrt{8}}-\cancel{\sqrt{6}})+(\cancel{\sqrt{10}}-\cancel{\sqrt{8}})+\cdots+(\cancel{\sqrt{96}}-\cancel{\sqrt{94}})+(\cancel{\sqrt{98}}-\cancel{\sqrt{96}})+(\sqrt{100}-\cancel{\sqrt{98}})$$
$$=\sqrt{100}-\sqrt{4}$$
$$=10-2=8$$

14 답 6

풀이 $\displaystyle\sum_{k=1}^{48}\frac{1}{f(k,\ k+1)}$

$$=\sum_{k=1}^{48}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\sum_{k=1}^{48}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$
$$=(\cancel{\sqrt{2}}-\sqrt{1})+(\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{2}})+(\cancel{\sqrt{4}}-\cancel{\sqrt{3}})+\cdots+(\cancel{\sqrt{47}}-\cancel{\sqrt{46}})+(\cancel{\sqrt{48}}-\cancel{\sqrt{47}})+(\sqrt{49}-\cancel{\sqrt{48}})$$
$$=\sqrt{49}-\sqrt{1}$$
$$=7-1=6$$

15 답 2

풀이 $\displaystyle\sum_{k=2}^{8}\log_6\left(\frac{k+1}{k-1}\right)$

$$=\log_6\frac{3}{1}+\log_6\frac{4}{2}+\log_6\frac{5}{3}+\log_6\frac{6}{4}+\log_6\frac{7}{5}+\log_6\frac{8}{6}+\log_6\frac{9}{7}$$
$$=\log_6\left(\frac{\cancel{3}}{1}\times\frac{\cancel{4}}{2}\times\frac{\cancel{5}}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{6}}{\cancel{4}}\times\frac{\cancel{7}}{\cancel{5}}\times\frac{8}{\cancel{6}}\times\frac{9}{\cancel{7}}\right)$$
$$=\log_6\left(\frac{8\times9}{1\times2}\right)=\log_6 36$$
$$=\log_6 6^2=2$$

16 답 $\frac{19}{2}\times3^{11}+\frac{3}{2}$

풀이 등비수열의 공비가 3이므로 주어진 식의 양변에 3을 곱하여 변끼리 빼면

$$\begin{array}{rl} S= & 2\times3+4\times3^2+6\times3^3+\cdots+20\times3^{10} \\ -\big)\,3S= & \phantom{2\times3+{}}2\times3^2+4\times3^3+\cdots+18\times3^{10}+20\times3^{11} \\ \hline -2S= & 2\times3+2\times3^2+2\times3^3+\cdots+2\times3^{10}-20\times3^{11} \end{array}$$
$$=2\times(3+3^2+3^3+\cdots+3^{10})-20\times3^{11}$$
$$=2\times\frac{3\times(3^{10}-1)}{3-1}-20\times3^{11}$$
$$=3^{11}-3-20\times3^{11}$$
$$=-19\times3^{11}-3$$
$$\therefore S=\frac{19}{2}\times3^{11}+\frac{3}{2}$$

Ⅲ-3 | 수학적 귀납법 174-179쪽

01 답 (1) 122 (2) 23 (3) -5 (4) 32 (5) 375 (6) 7 (7) 16 (8) 30

풀이 (1) $n=1$일 때, $a_2=3a_1-1=3\times5-1=14$

$n=2$일 때, $a_3=3a_2-1=3\times14-1=\underline{41}$

$n=3$일 때, $a_4=3a_3-1=3\times\underline{41}-1=\underline{122}$

(2) $n=1$일 때, $a_2=a_1+7=2+7=9$

$n=2$일 때, $a_3=a_2+7=9+7=16$

$n=3$일 때, $a_4=a_3+7=16+7=23$

(3) $n=1$일 때, $a_2=a_1-3=4-3=1$

$n=2$일 때, $a_3=a_2-3=1-3=-2$

$n=3$일 때, $a_4=a_3-3=-2-3=-5$

(4) $n=1$일 때, $a_2=2a_1=2\times4=8$

$n=2$일 때, $a_3=2a_2=2\times8=16$

$n=3$일 때, $a_4=2a_3=2\times16=32$

(5) $n=1$일 때, $a_2=5a_1=5\times3=15$

$n=2$일 때, $a_3=5a_2=5\times15=75$

$n=3$일 때, $a_4=5a_3=5\times75=375$

(6) $n=1$일 때, $2a_2=a_1+a_3$

$2\times3=1+a_3$ $\quad\therefore a_3=5$

$n=2$일 때, $2a_3=a_2+a_4$

$2\times5=3+a_4$ $\quad\therefore a_4=7$

(7) $n=1$일 때, ${a_2}^2=a_1a_3$

$16=2a_3$ $\quad\therefore a_3=8$

$n=2$일 때, ${a_3}^2=a_2a_4$

$64=4a_4$ $\quad\therefore a_4=16$

(8) $n=1$일 때, $a_2=\dfrac{a_1+a_3}{2}$

$12=\dfrac{3+a_3}{2}$ $\quad\therefore a_3=21$

$n=2$일 때, $a_3=\dfrac{a_2+a_4}{2}$

$21=\dfrac{12+a_4}{2}$ $\quad\therefore a_4=30$

02 답 (1) $a_n=4n-1$ (2) $a_n=-5n+3$ (3) $a_n=5n-8$ (4) $a_n=6n-1$

풀이 (1) 첫째항이 3, 공차가 4인 등차수열이므로

$a_n=3+(n-1)\times4=\underline{4n-1}$

(2) 첫째항이 -2, 공차가 -5인 등차수열이므로

$a_n=-2+(n-1)\times(-5)=-5n+3$

(3) 첫째항이 -3, 둘째항이 2인 등차수열이고,

공차는 $a_2-a_1=2-(-3)=5$이므로

$a_n=-3+(n-1)\times5=5n-8$

(4) 첫째항이 5, 둘째항이 11인 등차수열이고,

공차는 $a_2-a_1=11-5=6$이므로

$a_n=5+(n-1)\times6=6n-1$

03 답 (1) $a_n=2^{3-n}$ (2) $a_n=(-2)^n$

(3) $a_n=3^n$ (4) $a_n=-(-2)^{n+1}$

풀이 (1) 첫째항이 4, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$$a_n=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=2^2\times(2^{-1})^{n-1}=2^2\times 2^{1-n}=\underline{2^{3-n}}$$

(2) 첫째항이 -2, 공비가 -2인 등비수열이므로

$$a_n=(-2)\times(-2)^{n-1}=(-2)^n$$

(3) 첫째항이 3, 둘째항이 9인 등비수열이고,

공비는 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{9}{3}=3$이므로

$$a_n=3\times 3^{n-1}=3^n$$

(4) 첫째항이 -4, 둘째항이 8인 등비수열이고,

공비는 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{8}{-4}=-2$이므로

$$a_n=-4\times(-2)^{n-1}=-(-2)^2\times(-2)^{n-1}$$
$$=-(-2)^{n+1}$$

04 답 (1) $a_n=\frac{n^2-n+2}{2}$ (2) $a_n=\frac{3n^2-3n+4}{2}$

(3) $a_n=2^n$

풀이 (1) $a_{n+1}=a_n+n$의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 차례대로 대입한 후 변끼리 더하면

$$\begin{aligned} a_2&=a_1+1\\ a_3&=a_2+2\\ a_4&=a_3+3\\ &\vdots\\ +)\ a_n&=a_{n-1}+n-1\\ \hline a_n&=a_1+\{1+2+3+\cdots+(n-1)\}\end{aligned}$$

$$\therefore a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}k=a_1+\frac{n(n-1)}{2}$$
$$=1+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n^2-n+2}{2}$$

(2) $a_{n+1}=a_n+3n$의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 차례대로 대입한 후 변끼리 더하면

$$\begin{aligned} a_2&=a_1+3\\ a_3&=a_2+6\\ a_4&=a_3+9\\ &\vdots\\ +)\ a_n&=a_{n-1}+3(n-1)\\ \hline a_n&=a_1+\{3+6+9+\cdots+3(n-1)\}\end{aligned}$$

$$\therefore a_n=2+3\times\frac{n(n-1)}{2}=\frac{3n^2-3n+4}{2}$$

(3) $a_{n+1}=a_n+2^n$의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 차례대로 대입한 후 변끼리 더하면

$$\begin{aligned} a_2&=a_1+2\\ a_3&=a_2+2^2\\ a_4&=a_3+2^3\\ &\vdots\\ +)\ a_n&=a_{n-1}+2^{n-1}\\ \hline a_n&=a_1+(2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1})\end{aligned}$$

$$\therefore a_n=2+\frac{2\times(2^{n-1}-1)}{2-1}$$
$$=2+2^n-2=2^n$$

05 답 (1) $a_n=2n$ (2) $a_n=\frac{(n+1)(n+2)}{6}$

(3) $a_n=3^{\frac{n(n-1)}{2}}$

풀이 (1) $a_{n+1}=\frac{n+1}{n}a_n$의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 차례대로 대입한 후 변끼리 곱하면

$$\begin{aligned} a_2&=2a_1\\ a_3&=\frac{3}{2}a_2\\ a_4&=\frac{4}{3}a_3\\ &\vdots\\ \times)\ a_n&=\frac{n}{n-1}a_{n-1}\\ \hline a_n&=a_1\times\left(\cancel{2}\times\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\times\cdots\times\frac{n}{\cancel{n-1}}\right)\end{aligned}$$

$$\therefore a_n=a_1\times n=\underline{2n}$$

(2) $a_{n+1}=\frac{n+3}{n+1}a_n$의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 차례대로 대입한 후 변끼리 곱하면

$$\begin{aligned} a_2&=\frac{4}{2}a_1\\ a_3&=\frac{5}{3}a_2\\ a_4&=\frac{6}{4}a_3\\ &\vdots\\ \times)\ a_n&=\frac{n+2}{n}a_{n-1}\\ \hline a_n&=a_1\times\left(\frac{\cancel{4}}{2}\times\frac{\cancel{5}}{3}\times\frac{\cancel{6}}{\cancel{4}}\times\frac{\cancel{7}}{\cancel{5}}\times\cdots\right.\\ &\qquad\left.\times\frac{\cancel{n}}{\cancel{n-2}}\times\frac{n+1}{\cancel{n-1}}\times\frac{n+2}{\cancel{n}}\right)\end{aligned}$$

$$\therefore a_n=a_1\times\frac{(n+1)(n+2)}{2\times 3}=\frac{(n+1)(n+2)}{6}$$

(3) $a_{n+1}=3^na_n$의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 차례대로 대입한 후 변끼리 곱하면

$$\begin{aligned} a_2&=3\times a_1\\ a_3&=3^2\times a_2\\ a_4&=3^3\times a_3\\ &\vdots\\ \times)\ a_n&=3^{n-1}\times a_{n-1}\\ \hline a_n&=a_1\times(3\times 3^2\times 3^3\times\cdots\times 3^{n-1})\\ &=a_1\times 3^{1+2+3+\cdots+(n-1)}\end{aligned}$$

$$\therefore a_n=a_1\times 3^{\frac{n(n-1)}{2}}=3^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

06 답 (1) 9

(2) $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+4$ (단, $n=1, 2, 3, \cdots$)

풀이 (1) a_1 L는 10 L의 절반을 버리고 다시 $\underline{4}$ L를 넣은 물의 양이므로

$$a_1=10\times\frac{1}{2}+\underline{4}=\underline{9}$$

(2) $(n+1)$번 반복한 후 물통에 남아 있는 물의 양 a_{n+1} L는 n번 반복한 후 남은 양의 절반을 버리고 다시 4 L를 넣은 물의 양이므로

$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+4$ (단, $n=1, 2, 3, \cdots$)

07 답 (1) 180

(2) $a_{n+1}=2a_n-20$ (단, $n=1, 2, 3, \cdots$)

풀이 (1) a_1은 100마리에서 10마리는 죽고 나머지는 각각 2마리로 분열한 것이므로

$a_1=(100-10)\times2=180$

(2) $(n+1)$시간 후 살아 있는 세균의 수 a_{n+1}은 n시간 후 살아 있는 세균에서 10마리는 죽고 나머지는 각각 2마리로 분열한 것이므로

$a_{n+1}=(a_n-10)\times2$

$\therefore a_{n+1}=2a_n-20$ (단, $n=1, 2, 3, \cdots$)

08 답 풀이 참조

풀이 (1) (i) $n=1$일 때,

(좌변)$=2\times1-1=1$, (우변)$=1^2=1$

이므로 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$ …… ㉠

㉠의 양변에 $2k+1$을 더하면

$1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)$

$=k^2+2k+1=(k+1)^2$

즉, $n=k+1$일 때에도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

(2) (i) $n=1$일 때,

(좌변)$=2\times1=2$, (우변)$=1\times2=2$

이므로 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$2+4+6+\cdots+2k=k(k+1)$ …… ㉠

㉠의 양변에 $2k+2$를 더하면

$2+4+6+\cdots+2k+(2k+2)$

$=k(k+1)+2k+2$

$=k^2+3k+2$

$=(k+1)(k+2)$

즉, $n=k+1$일 때에도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

(3) (i) $n=1$일 때,

(좌변)$=1^3=1$, (우변)$=\frac{1^2\times2^2}{4}=1$

이므로 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}$ …… ㉠

㉠의 양변에 $(k+1)^3$을 더하면

$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3$

$=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3$

$=\frac{k^2(k+1)^2+4(k+1)^3}{4}$

$=\frac{(k+1)^2\{k^2+4(k+1)\}}{4}$

$=\frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4}$

$=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$

즉, $n=k+1$일 때에도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

(4) (i) $n=1$일 때,

(좌변)$=1\times2=2$, (우변)$=\frac{1\times2\times3}{3}=2$

이므로 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+k(k+1)$

$=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}$ …… ㉠

㉠의 양변에 $(k+1)(k+2)$를 더하면

$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots$

$+k(k+1)+(k+1)(k+2)$

$=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)$

$=\frac{k(k+1)(k+2)+3(k+1)(k+2)}{3}$

$=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$

$=\frac{(k+1)\{(k+1)+1\}\{(k+1)+2\}}{3}$

즉, $n=k+1$일 때에도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

09 답 풀이 참조

풀이 (i) $n=1$일 때,

(좌변)$=a+b$, (우변)$=a+b$

이므로 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$(a+b)^k\ge a^k+b^k$ …… ㉠

㉠의 양변에 $a+b$를 곱하면

$(a+b)^{k+1}\ge(a^k+b^k)(a+b)$

$=a^{k+1}+b^{k+1}+a^kb+ab^k$

$>a^{k+1}+b^{k+1}$

($\because a>0, b>0$이므로 $a^kb+ab^k>0$)

$\therefore (a+b)^{k+1}\ge a^{k+1}+b^{k+1}$

즉, $n=k+1$일 때에도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

10 답 풀이 참조

풀이 (i) $n=2$일 때,

$(\text{좌변})=1+\frac{1}{2^2}=\frac{5}{4}$, $(\text{우변})=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

이므로 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k\ (k\geq 2)$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{k} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $\frac{1}{(k+1)^2}$을 더하면

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}$$
$$<2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}$$

이때 $\frac{1}{k}-\frac{1}{(k+1)^2}-\frac{1}{k+1}=\frac{1}{k(k+1)^2}>0$이므로

$$2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k+1}$$

$$\therefore 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k+1}$$

즉, $n=k+1$일 때에도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 $n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

11 답 풀이 참조

풀이 (i) $n=4$일 때,

$(\text{좌변})=3\times 4+2=14$, $(\text{우변})=2^4=16$

이므로 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k\ (k\geq 4)$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$3k+2<2^k \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 3을 더하면

$(3k+2)+3=3(k+1)+2<2^k+3$

그런데 $k\geq 4$인 k에 대하여

$2^{k+1}-2^k=2^k>3$이므로 $2^k+3<2^{k+1}$

$\therefore 3(k+1)+2<2^{k+1}$

즉, $n=k+1$일 때에도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 $n\geq 4$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

12 답 풀이 참조

풀이 (i) $n=5$일 때,

$(\text{좌변})=2^5=32$, $(\text{우변})=5^2=25$

이므로 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k\ (k\geq 5)$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$2^k>k^2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 2를 곱하면

$2^{k+1}=2^k\times 2>2k^2$

이때 $k\geq 5$에서

$$\begin{aligned}2k^2-(k+1)^2&=k^2-2k-1\\&=(k-1)^2-2>0\end{aligned}$$

이므로 $2k^2>(k+1)^2$

$\therefore 2^{k+1}>(k+1)^2$

즉, $n=k+1$일 때에도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 $n\geq 5$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

중단원 점검문제 | Ⅲ-3 수학적 귀납법 180-181쪽

01 답 $a_n=7n-17$

풀이 첫째항이 -10, 공차가 7인 등차수열이므로

$a_n=-10+(n-1)\times 7=7n-17$

02 답 $a_n=2^{2n-1}$

풀이 첫째항이 2, 공비가 4인 등비수열이므로

$$\begin{aligned}a_n&=2\times 4^{n-1}\\&=2\times(2^2)^{n-1}\\&=2\times 2^{2n-2}=2^{2n-1}\end{aligned}$$

03 답 $a_n=-n^2+n+1$

풀이 주어진 식의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 차례대로 대입한 후 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}a_2&=a_1-2\times 1\\a_3&=a_2-2\times 2\\a_4&=a_3-2\times 3\\&\vdots\\+\underline{)\ a_n}&\underline{=a_{n-1}-2\times(n-1)}\\a_n&=a_1-2\{1+2+3+\cdots+(n-1)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore a_n&=1-2\times\frac{n(n-1)}{2}\\&=-n^2+n+1\end{aligned}$$

04 답 $a_n=\frac{3^n+3}{2}$

풀이 주어진 식의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 차례대로 대입한 후 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}a_2&=a_1+3\\a_3&=a_2+3^2\\a_4&=a_3+3^3\\&\vdots\\+\underline{)\ a_n}&\underline{=a_{n-1}+3^{n-1}}\\a_n&=a_1+(3+3^2+3^3+\cdots+3^{n-1})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore a_n&=3+\frac{3\times(3^{n-1}-1)}{3-1}\\&=\frac{3^n+3}{2}\end{aligned}$$

05 답 $a_n=6n-3$

풀이 주어진 식의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 차례대로 대입한 후 변끼리 곱하면

$$a_2=\frac{3}{1}a_1$$
$$a_3=\frac{5}{3}a_2$$
$$a_4=\frac{7}{5}a_3$$
$$\vdots$$
$$\times\,\underline{)\,a_n=\frac{2n-1}{2n-3}a_{n-1}}$$
$$a_n=a_1\times\left(\frac{\cancel{3}}{1}\times\frac{\cancel{5}}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{7}}{\cancel{5}}\times\cdots\times\frac{2n-1}{\cancel{2n-3}}\right)$$
$$\therefore a_n=(2n-1)a_1$$
$$=3(2n-1)$$
$$=6n-3$$

06 답 $a_n=2^{\frac{n^2-3n+4}{2}}$

풀이 주어진 식의 n에 1, 2, 3, ⋯, $n-1$을 차례대로 대입한 후 변끼리 곱하면

$$a_2=2^0a_1$$
$$a_3=2^1a_2$$
$$a_4=2^2a_3$$
$$\vdots$$
$$\times\,\underline{)\,a_n=2^{n-2}a_{n-1}}$$
$$a_n=a_1\times(2^0\times2^1\times2^2\times\cdots\times2^{n-2})$$
$$=2\times2^{1+2+\cdots+(n-2)}$$
$$\therefore a_n=2\times2^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}$$
$$=2^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}+1}$$
$$=2^{\frac{n^2-3n+4}{2}}$$

07 답 $a_n=2^n-1$

풀이 주어진 식의 n에 1, 2, 3, ⋯을 차례대로 대입하면

$a_2=2a_1+1=2\times1+1=2+1$

$a_3=2a_2+1=2\times(2+1)+1=2^2+2+1$

$a_4=2a_3+1=2\times(2^2+2+1)+1=2^3+2^2+2+1$

$\vdots$

따라서 일반항 a_n은

$$a_n=2^{n-1}+2^{n-2}+2^{n-3}+\cdots+2+1$$
$$=\frac{2^n-1}{2-1}=2^n-1$$

08 답 $a_1=\frac{2}{3}p$, $a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n$ (단, $n=1, 2, 3, \cdots$)

풀이 $a_1=\frac{2}{3}p$, $a_2=\frac{2}{3}a_1$, ⋯이므로

$a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n$임을 알 수 있다.

따라서 이 수열의 귀납적 정의는

$a_1=\frac{2}{3}p$, $a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n$ (단, $n=1, 2, 3, \cdots$)

09 답 (가) $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$, (나) $\frac{k}{k+1}$, (다) $\frac{k+1}{(k+1)+1}$

풀이 (i) $n=1$일 때

(좌변)$=\frac{1}{1\times2}=\frac{1}{2}$, (우변)$=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

이므로 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$$

위의 식의 양변에 $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$을 더하면

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{k+1}{k+2}=\frac{k+1}{(k+1)+1}$$

즉, $n=k+1$일 때에도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

10 답 (가) $k+1$, (나) 2^k

풀이 (i) $n=3$일 때,

(좌변)$=1\times2\times3=6>2^{3-1}=4=$(우변)

이므로 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k$ $(k\ge3)$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$1\times2\times3\times\cdots\times k>2^{k-1}$

위의 식의 양변에 $k+1$을 곱하면

$1\times2\times3\times\cdots\times k\times(k+1)>2^{k-1}\times(k+1)$

이때 $k+1\ge4$이므로

$2^{k-1}\times(k+1)\ge2^{k-1}\times2^2>2^k$

$\therefore 1\times2\times3\times\cdots\times k\times(k+1)>2^k$

즉, $n=k+1$일 때에도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 $n\ge3$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.