

풍산짜 반복수학

대수

! 정답과 풀이 !

$$(2) \sqrt[4]{\frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{a}}} \times \sqrt[6]{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}} = \frac{12\sqrt{a}}{\sqrt{a}} \times \frac{8\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = 1$$

$$(3) \sqrt[3]{\frac{4\sqrt{a}}{\sqrt{a}}} \times \sqrt[4]{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}} \times \sqrt[4]{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}} = \frac{12\sqrt{a}}{\sqrt{a}} \times \frac{6\sqrt{a}}{\sqrt{a}} \times \frac{8\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = 1$$

09 답 (1) 3 (2) 2 (3) 9

풀이 (1) $\sqrt[3]{\frac{9^8+3^{11}}{9^4+3^{13}}} = \sqrt[3]{\frac{(3^2)^8+3^{11}}{(3^2)^4+3^{13}}} = \sqrt[3]{\frac{3^{16}+3^{11}}{3^8+3^{13}}}$

$$= \sqrt[3]{\frac{3^{11}(3^5+1)}{3^8(1+3^5)}} = \sqrt[3]{\frac{3^{11}}{3^8}} = \sqrt[3]{3^3} = 3$$

(2) $\sqrt[6]{\frac{8^4+4^8}{8^2+4^5}} = \sqrt[6]{\frac{(2^3)^4+(2^2)^8}{(2^3)^2+(2^2)^5}} = \sqrt[6]{\frac{2^{12}+2^{16}}{2^6+2^{10}}}$

$$= \sqrt[6]{\frac{2^{12}(1+2^4)}{2^6(1+2^4)}} = \sqrt[6]{\frac{2^{12}}{2^6}} = \sqrt[6]{2^6} = 2$$

(3) $\sqrt[4]{\frac{9^{10}+27^8}{9^8+27^4}} = \sqrt[4]{\frac{(3^2)^{10}+(3^3)^8}{(3^2)^8+(3^3)^4}} = \sqrt[4]{\frac{3^{20}+3^{24}}{3^{16}+3^{12}}}$

$$= \sqrt[4]{\frac{3^{20}(1+3^4)}{3^{12}(3^4+1)}} = \sqrt[4]{\frac{3^{20}}{3^{12}}} = \sqrt[4]{3^8} = 9$$

10 답 (1) $\sqrt{2} < \sqrt[6]{10} < \sqrt[3]{4}$ (2) $\sqrt[3]{5} < \sqrt[6]{26} < \sqrt{3}$
 (3) $\sqrt[6]{2} < \sqrt[4]{3} < \sqrt[3]{3}$ (4) $\sqrt[5]{3} < \sqrt{2} < \sqrt[4]{5}$

풀이 (1) 2, 3, 6의 최소공배수인 6으로 근호 앞 수를 통일하면

$$\sqrt{2} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{8}, \sqrt[3]{4} = \sqrt[6]{4^2} = \sqrt[6]{16}$$

이때 $\sqrt[6]{8} < \sqrt[6]{10} < \sqrt[6]{16}$ 이므로 $\sqrt{2} < \sqrt[6]{10} < \sqrt[3]{4}$

(2) 2, 3, 6의 최소공배수인 6으로 근호 앞 수를 통일하면

$$\sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25}$$

$$\sqrt[6]{26} < \sqrt[6]{27} < \sqrt[6]{16}$$

(3) 3, 4, 6의 최소공배수인 12로 근호 앞 수를 통일하면

$$\sqrt[3]{3} = \sqrt[12]{3^4} = \sqrt[12]{81}, \sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{3^3} = \sqrt[12]{27}, \sqrt[6]{2} = \sqrt[12]{2^2} = \sqrt[12]{4}$$

$$\sqrt[12]{4} < \sqrt[12]{27} < \sqrt[12]{81}$$

(4) 2, 5, 4의 최소공배수인 20으로 근호 앞 수를 통일하면

$$\sqrt{2} = \sqrt[20]{2^{10}} = \sqrt[20]{1024}, \sqrt[5]{3} = \sqrt[20]{3^4} = \sqrt[20]{81}$$

$$\sqrt[4]{5} = \sqrt[20]{5^5} = \sqrt[20]{3125}$$

$$\sqrt[20]{81} < \sqrt[20]{1024} < \sqrt[20]{3125}$$

$$\sqrt[5]{3} < \sqrt{2} < \sqrt[4]{5}$$

11 답 (1) a^8 (2) a^6 (3) a^{-10} (4) a^{10}

풀이 (1) $a^4 \times a^2 \div a^{-2} = a^{4+2-(-2)} = a^8$

(2) $(a^5 \div a^8)^{-2} = (a^{5-8})^{-2} = (a^{-3})^{-2} = a^{(-3) \times (-2)} = a^6$

(3) $a^{-2} \times (a^{-4})^2 = a^{-2} \times a^{-8} = a^{-2+(-8)} = a^{-10}$

(4) $(a^{-3})^2 \times (a^4)^3 \div a^{-4} = a^{-6} \times a^{12} \div a^{-4} = a^{-6+12-(-4)} = a^{10}$

12 답 (1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{625}{81}$ (3) 49

풀이 (1) $\left\{ \left(\frac{27}{8} \right)^{-\frac{5}{6}} \right\}^{\frac{2}{5}} = \left(\frac{27}{8} \right)^{-\frac{5}{6} \times \frac{2}{5}} = \left(\frac{27}{8} \right)^{-\frac{1}{3}}$

$$= \left\{ \left(\frac{3}{2} \right)^3 \right\}^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{3}{2} \right)^{-1} = \frac{2}{3}$$

(2) $\left\{ \left(\frac{9}{25} \right)^{-\frac{7}{3}} \right\}^{\frac{6}{7}} = \left(\frac{9}{25} \right)^{-\frac{7}{3} \times \frac{6}{7}} = \left(\frac{9}{25} \right)^{-2}$

$$= \left\{ \left(\frac{3}{5} \right)^2 \right\}^{-2} = \left(\frac{3}{5} \right)^{-4} = \left(\frac{5}{3} \right)^4 = \frac{625}{81}$$

$$(3) 7^{\frac{7}{4}} \times 7^{-\frac{5}{2}} \div 7^{-\frac{11}{4}} = 7^{\frac{7}{4} + (-\frac{5}{2}) - (-\frac{11}{4})} = 7^2 = 49$$

13 답 (1) $a^{\frac{7}{40}}$ (2) $a^{\frac{7}{12}}$ (3) $a^{\frac{11}{8}}$ (4) $a^{\frac{11}{6}}$ (5) $a^{\frac{7}{8}}$

풀이 (1) $\sqrt[4]{\sqrt{a} \times \sqrt[5]{a}} = \left(a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{5}} \right)^{\frac{1}{4}} = \left(a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{5}} \right)^{\frac{1}{4}}$

$$= \left(a^{\frac{7}{10}} \right)^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{7}{40}}$$

(2) $\sqrt[3]{\frac{a^2}{\sqrt{a}}} \times \sqrt[4]{a} = \left(a^2 \div a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{4}} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(a^{2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} \right)^{\frac{1}{3}}$

$$= \left(a^{\frac{7}{4}} \right)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{7}{12}}$$

(3) $\sqrt{a} \sqrt[2]{a^2} \sqrt[3]{a^3} = \left\{ a \times \left(a^2 \times a^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}}$

$$= \left\{ a \times \left(a^{\frac{7}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} = \left(a^{1 + \frac{7}{4}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(a^{\frac{11}{4}} \right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{11}{8}}$$

(4) $\sqrt{a^2} \sqrt[2]{a^2} \sqrt[3]{a^2} = \left(a^2 \times a \times a^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(a^{2 + 1 + \frac{2}{3}} \right)^{\frac{1}{2}}$

$$= \left(a^{\frac{11}{3}} \right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{11}{6}}$$

(5) $\sqrt{a} \sqrt[3]{a^2} \sqrt[4]{a} = \left\{ a \times \left(a^2 \times a^{\frac{1}{4}} \right)^{\frac{1}{3}} \right\}^{\frac{1}{2}}$

$$= \left\{ a \times \left(a^{\frac{9}{4}} \right)^{\frac{1}{3}} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(a^{1 + \frac{3}{4}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(a^{\frac{7}{4}} \right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{7}{8}}$$

14 답 (1) $a-b$ (2) $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ (3) -4 (4) 1 (5) 8

풀이 (1) $\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}} \right) \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}} \right) = \left(a^{\frac{1}{2}} \right)^2 - \left(b^{\frac{1}{2}} \right)^2 = a - b$

(2) $\left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}} \right) \left(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}} \right) = \left(a^{\frac{1}{4}} \right)^2 - \left(b^{\frac{1}{4}} \right)^2 = a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}$

$$= \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

(3) $\left(a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}} \right)^2 - \left(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} \right)^2$

$$= \left(a - 2 \times a^{\frac{1}{2}} \times a^{-\frac{1}{2}} + a^{-1} \right) - \left(a + 2 \times a^{\frac{1}{2}} \times a^{-\frac{1}{2}} + a^{-1} \right)$$

$$= (a - 2 + a^{-1}) - (a + 2 + a^{-1}) = -4$$

(4) $\left(2^{\frac{1}{2}} + 1 \right) \left(2^{\frac{1}{2}} - 1 \right) = \left(2^{\frac{1}{2}} \right)^2 - 1^2 = 2 - 1 = 1$

(5) $\left(3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{2}{3}} \right)^3 + \left(3^{\frac{1}{3}} + 3^{-\frac{2}{3}} \right)^3$

$$= \left\{ \left(3^{\frac{1}{3}} \right)^3 - 3 \times \left(3^{\frac{1}{3}} \right)^2 \times 3^{-\frac{2}{3}} + 3 \times 3^{\frac{1}{3}} \times \left(3^{-\frac{2}{3}} \right)^2 - \left(3^{-\frac{2}{3}} \right)^3 \right\}$$

$$+ \left\{ \left(3^{\frac{1}{3}} \right)^3 + 3 \times \left(3^{\frac{1}{3}} \right)^2 \times 3^{-\frac{2}{3}} + 3 \times 3^{\frac{1}{3}} \times \left(3^{-\frac{2}{3}} \right)^2 + \left(3^{-\frac{2}{3}} \right)^3 \right\}$$

$$= \left(3 - 3 \times 3^{\frac{2}{3}} \times 3^{-\frac{2}{3}} + 3 \times 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{-\frac{4}{3}} - 3^{-2} \right)$$

$$+ \left(3 + 3 \times 3^{\frac{2}{3}} \times 3^{-\frac{2}{3}} + 3 \times 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{-\frac{4}{3}} + 3^{-2} \right)$$

$$= 3 + 3 \times 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{-\frac{4}{3}} + 3 + 3 \times 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{-\frac{4}{3}}$$

$$= 6 + 2 \times 3 \times 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{-\frac{4}{3}} = 6 + 2 \times \left(3^{1 + \frac{1}{3} - \frac{4}{3}} \right)$$

$$= 6 + 2 \times 3^0 = 8$$

15 답 (1) 14 (2) 194 (3) 52

(4) $\pm 2\sqrt{3}$ (5) $\pm 8\sqrt{3}$

풀이 (1) $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 4$ 의 양변을 제곱하면

$$a + 2 + a^{-1} = 16$$

$$\therefore a + a^{-1} = 14$$

(2) (1)의 $a + a^{-1} = 14$ 의 양변을 제곱하면

$$a^2 + 2 + a^{-2} = 196$$

$$\therefore a^2 + a^{-2} = 194$$

(3) $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 4$ 의 양변을 세제곱하면

$$a^{\frac{3}{2}} + 3 \times a \times a^{-\frac{1}{2}} + 3 \times a^{\frac{1}{2}} \times a^{-1} + a^{-\frac{3}{2}} = 64$$

$$a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} + 3\left(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}\right) = 64$$

$$a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} + 3 \times 4 = 64$$

$$\therefore a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} = 52$$

(4) $\left(a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = a - 2 + a^{-1}$

이때 (1)에서 $a + a^{-1} = 14$ 이므로

$$\left(a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = 12 \quad \therefore a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}} = \pm 2\sqrt{3}$$

(5) $(a - a^{-1})^2 = a^2 - 2 + a^{-2}$

이때 (2)에서 $a^2 + a^{-2} = 194$ 이므로

$$(a - a^{-1})^2 = 192 \quad \therefore a - a^{-1} = \pm 8\sqrt{3}$$

16 답 (1) 5 (2) 82 (3) 15 (4) 24

풀이 (1) $x^3 = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3 + \left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^3 + 3 \times 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{-\frac{1}{3}} \left(2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}\right)$

$$= 2 + 2^{-1} + 3x$$

$$= \frac{5}{2} + 3x$$

따라서 $x^3 - 3x = \frac{5}{2}$ 이므로

$$2x^3 - 6x = 2(x^3 - 3x) = 5$$

(2) $x^3 = \left(3^{\frac{2}{3}}\right)^3 + \left(3^{-\frac{2}{3}}\right)^3 + 3 \times 3^{\frac{2}{3}} \times 3^{-\frac{2}{3}} \left(3^{\frac{2}{3}} + 3^{-\frac{2}{3}}\right)$

$$= 3^2 + 3^{-2} + 3x$$

$$= \frac{82}{9} + 3x$$

따라서 $x^3 - 3x = \frac{82}{9}$ 이므로

$$9x^3 - 27x = 9(x^3 - 3x) = 82$$

(3) $x^3 = \left(2^{\frac{2}{3}}\right)^3 - \left(2^{-\frac{2}{3}}\right)^3 - 3 \times 2^{\frac{2}{3}} \times 2^{-\frac{2}{3}} \left(2^{\frac{2}{3}} - 2^{-\frac{2}{3}}\right)$

$$= 2^2 - 2^{-2} - 3x$$

$$= \frac{15}{4} - 3x$$

따라서 $x^3 + 3x = \frac{15}{4}$ 이므로

$$4x^3 + 12x = 4(x^3 + 3x) = 15$$

(4) $x^3 = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3 - \left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^3 - 3 \times 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{-\frac{1}{3}} \left(3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}\right)$

$$= 3 - 3^{-1} - 3x$$

$$= \frac{8}{3} - 3x$$

따라서 $x^3 + 3x = \frac{8}{3}$ 이므로

$$9x^3 + 27x = 9(x^3 + 3x) = 24$$

17 답 (1) 256 (2) $\frac{1}{27}$ (3) 64 (4) 243 (5) 125

풀이 (1) $\left(\frac{1}{81}\right)^{-4x} = (3^{-4})^{-4x} = 3^{16x} = (3^{2x})^8$

$$= (9^x)^8 = 2^8 = 256$$

(2) $\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)^{2x} = \left(2^{-\frac{3}{2}}\right)^{2x} = 2^{-3x} = (2^x)^{-3}$

$$= 3^{-3} = \frac{1}{27}$$

(3) $\left(\frac{1}{125}\right)^{-2x} = (5^{-3})^{-2x} = 5^{6x} = (5^{2x})^3$

$$= (25^x)^3 = 4^3 = 64$$

(4) $32^{4x} = (2^5)^{4x} = 2^{20x} = (2^{4x})^5$

$$= (16^x)^5 = 3^5 = 243$$

(5) $\left(\frac{1}{27}\right)^{2x} = (3^{-3})^{2x} = 3^{-6x} = (3^{-2x})^3$

$$= \left\{\left(\frac{1}{9}\right)^x\right\}^3 = 5^3 = 125$$

18 답 (1) $-\frac{5}{3}$ (2) $-\frac{7}{9}$ (3) $\frac{3}{5}$ (4) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

풀이 (1) $\frac{a+a^{-1}}{a-a^{-1}}$ 의 분모, 분자에 각각 $a+a^{-1}$ 을 곱하면

$$\frac{(a+a^{-1})^2}{a^2-a^{-2}} = \frac{a^2+2+a^{-2}}{a^2-a^{-2}}$$

이때 $a^{-2} = 4$, $a^2 = \frac{1}{4}$ 을 위의 식에 대입하면

$$\frac{a^2+2+a^{-2}}{a^2-a^{-2}} = \frac{\frac{1}{4}+2+4}{\frac{1}{4}-4} = -\frac{5}{3}$$

(2) $\frac{a^3-a^{-3}}{a^3+a^{-3}}$ 의 분모, 분자에 각각 a^3-a^{-3} 을 곱하면

$$\frac{(a^3-a^{-3})^2}{a^6-a^{-6}} = \frac{a^6-2+a^{-6}}{a^6-a^{-6}}$$

이때 $a^{-2} = 2$ 이므로 $a^{-6} = (a^{-2})^3 = 2^3 = 8$, $a^6 = \frac{1}{8}$ 을

위의 식에 대입하면

$$\frac{a^6-2+a^{-6}}{a^6-a^{-6}} = \frac{\frac{1}{8}-2+8}{\frac{1}{8}-8} = -\frac{7}{9}$$

(3) $\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}$ 의 분모, 분자에 각각 a^x 을 곱하면

$$\frac{a^{2x}-1}{a^{2x}+1}$$

이때 $a^{2x} = 4$ 를 위의 식에 대입하면

$$\frac{a^{2x}-1}{a^{2x}+1} = \frac{4-1}{4+1} = \frac{3}{5}$$

(4) $\frac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^x+a^{-3x}}$ 의 분모, 분자에 각각 a^x 을 곱하면

$$\frac{a^{4x}-1}{a^{2x}+a^{-2x}}$$

이때 $a^{2x} = \sqrt{2} + 1$, $a^{-2x} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1$ 을 위의 식에

대입하면

$$\frac{a^{4x}-1}{a^{2x}+a^{-2x}} = \frac{(\sqrt{2}+1)^2-1}{\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

19 답 (1) -3 (2) -2 (3) -1 (4) 2

풀이 (1) $3^x = 32$ 에서 $3 = 32^{\frac{1}{x}} = (2^5)^{\frac{1}{x}} = 2^{\frac{5}{x}}$ ㉠

$24^y = 256$ 에서 $24 = 256^{\frac{1}{y}} = (2^8)^{\frac{1}{y}} = 2^{\frac{8}{y}}$ ㉡

㉠ ÷ ㉡을 하면 $\frac{3}{24} = 2^{\frac{5}{x}} \div 2^{\frac{8}{y}}$

$\frac{1}{8} = 2^{\frac{5}{x} - \frac{8}{y}}, 2^{-3} = 2^{\frac{5}{x} - \frac{8}{y}}$

$\therefore \frac{5}{x} - \frac{8}{y} = -3$

(2) $4^x = 27$ 에서 $4 = 27^{\frac{1}{x}} = (3^3)^{\frac{1}{x}} = 3^{\frac{3}{x}}$ ㉢

$36^y = 81$ 에서 $36 = 81^{\frac{1}{y}} = (3^4)^{\frac{1}{y}} = 3^{\frac{4}{y}}$ ㉣

㉢ ÷ ㉣을 하면 $\frac{4}{36} = 3^{\frac{3}{x}} \div 3^{\frac{4}{y}}$

$\frac{1}{9} = 3^{\frac{3}{x} - \frac{4}{y}}, 3^{-2} = 3^{\frac{3}{x} - \frac{4}{y}}$

$\therefore \frac{3}{x} - \frac{4}{y} = -2$

(3) $6^x = 25$ 에서 $6 = 25^{\frac{1}{x}} = (5^2)^{\frac{1}{x}} = 5^{\frac{2}{x}}$ ㉤

$30^y = 125$ 에서 $30 = 125^{\frac{1}{y}} = (5^3)^{\frac{1}{y}} = 5^{\frac{3}{y}}$ ㉥

㉤ ÷ ㉥을 하면 $\frac{6}{30} = 5^{\frac{2}{x}} \div 5^{\frac{3}{y}}$

$\frac{1}{5} = 5^{\frac{2}{x} - \frac{3}{y}}, 5^{-1} = 5^{\frac{2}{x} - \frac{3}{y}}$

$\therefore \frac{2}{x} - \frac{3}{y} = -1$

(4) $20^x = 64$ 에서 $20 = 64^{\frac{1}{x}} = (2^6)^{\frac{1}{x}} = 2^{\frac{6}{x}}$ ㉦

$5^y = 128$ 에서 $5 = 128^{\frac{1}{y}} = (2^7)^{\frac{1}{y}} = 2^{\frac{7}{y}}$ ㉧

㉦ ÷ ㉧을 하면 $\frac{20}{5} = 2^{\frac{6}{x}} \div 2^{\frac{7}{y}}$

$4 = 2^{\frac{6}{x} - \frac{7}{y}}, 2^2 = 2^{\frac{6}{x} - \frac{7}{y}}$

$\therefore \frac{6}{x} - \frac{7}{y} = 2$

20 답 (1) 0 (2) 0 (3) 0 (4) 0

풀이 (1) $2^x = 4^y = 8^z = k$ 로 놓으면 $k > 0$ 이고, $xyz \neq 0$ 에서 $k \neq 1$ 이다.

$2^x = k$ 에서 $2 = k^{\frac{1}{x}}$ ㉠

$4^y = k$ 에서 $4 = k^{\frac{1}{y}}$ ㉡

$8^z = k$ 에서 $8 = k^{\frac{1}{z}}$ ㉢

㉠ × ㉡ ÷ ㉢을 하면

$\frac{2 \times 4}{8} = k^{\frac{1}{x}} \times k^{\frac{1}{y}} \div k^{\frac{1}{z}}, 1 = k^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z}}$

$k > 0$ 이고, $k \neq 1$ 이므로

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = 0$

(2) $3^x = 5^y = 15^z = k$ 로 놓으면 $k > 0$ 이고, $xyz \neq 0$ 에서 $k \neq 1$ 이다.

$3^x = k$ 에서 $3 = k^{\frac{1}{x}}$ ㉣

$5^y = k$ 에서 $5 = k^{\frac{1}{y}}$ ㉤

$15^z = k$ 에서 $15 = k^{\frac{1}{z}}$ ㉥

㉣ × ㉤ ÷ ㉥을 하면

$\frac{3 \times 5}{15} = k^{\frac{1}{x}} \times k^{\frac{1}{y}} \div k^{\frac{1}{z}}, 1 = k^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z}}$

$k > 0$ 이고, $k \neq 1$ 이므로

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = 0$

(3) $2^x = 5^y = 10^z = k$ 로 놓으면 $k > 0$ 이고, $xyz \neq 0$ 에서 $k \neq 1$ 이다.

$2^x = k$ 에서 $2 = k^{\frac{1}{x}}$ ㉦

$5^y = k$ 에서 $5 = k^{\frac{1}{y}}$ ㉧

$10^z = k$ 에서 $10 = k^{\frac{1}{z}}$ ㉨

㉦ × ㉧ ÷ ㉨을 하면

$\frac{2 \times 5}{10} = k^{\frac{1}{x}} \times k^{\frac{1}{y}} \div k^{\frac{1}{z}}, 1 = k^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z}}$

$k > 0$ 이고, $k \neq 1$ 이므로

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = 0$

(4) $4^x = 5^y = 20^z = k$ 로 놓으면 $k > 0$ 이고, $xyz \neq 0$ 에서 $k \neq 1$ 이다.

$4^x = k$ 에서 $4 = k^{\frac{1}{x}}$ ㉩

$5^y = k$ 에서 $5 = k^{\frac{1}{y}}$ ㉪

$20^z = k$ 에서 $20 = k^{\frac{1}{z}}$ ㉫

㉩ × ㉪ ÷ ㉫을 하면

$\frac{4 \times 5}{20} = k^{\frac{1}{x}} \times k^{\frac{1}{y}} \div k^{\frac{1}{z}}, 1 = k^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z}}$

$k > 0$ 이고, $k \neq 1$ 이므로

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = 0$

21 답 (1) $\sqrt{2}$ (2) 81 (3) $25\sqrt{5}$ (4) 27 (5) $\sqrt{2}$

풀이 (1) $\log_2 x = \frac{1}{2}$ 에서 $x = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

(2) $\log_3 x = 4$ 에서 $x = 3^4 = 81$

(3) $\log_5 x = \frac{5}{2}$ 에서 $x = 5^{\frac{5}{2}} = \sqrt{5^5} = 25\sqrt{5}$

(4) $\log_9 x = \frac{3}{2}$ 에서 $x = 9^{\frac{3}{2}} = \sqrt{9^3} = \sqrt{3^6} = 27$

(5) $\log_2 (\log_4 x) = -2$ 에서 $\log_4 x = 2^{-2} = \frac{1}{4}$

$\therefore x = 4^{\frac{1}{4}} = (2^2)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

22 답 (1) $\frac{1}{4}$ (2) 4 (3) 2 (4) 5

풀이 (1) $\log_x 64 = -3$ 에서 $x^{-3} = 64$

양변을 $-\frac{1}{3}$ 제곱하면 $(x^{-3})^{-\frac{1}{3}} = 64^{-\frac{1}{3}}$

$\therefore x = (2^6)^{-\frac{1}{3}} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$

(2) $\log_x 16 = 2$ 에서 $x^2 = 16$

양변을 $\frac{1}{2}$ 제곱하면 $(x^2)^{\frac{1}{2}} = 16^{\frac{1}{2}}$

$\therefore x = (2^4)^{\frac{1}{2}} = 2^2 = 4$

(3) $\log_x \frac{1}{32} = -5$ 에서 $x^{-5} = \frac{1}{32}$
 양변을 $-\frac{1}{5}$ 제곱하면 $(x^{-5})^{-\frac{1}{5}} = \left(\frac{1}{32}\right)^{-\frac{1}{5}}$
 $\therefore x = (2^{-5})^{-\frac{1}{5}} = 2$
 (4) $\log_x 25 = 2$ 에서 $x^2 = 25$
 양변을 $\frac{1}{2}$ 제곱하면 $(x^2)^{\frac{1}{2}} = 25^{\frac{1}{2}}$
 $\therefore x = (5^2)^{\frac{1}{2}} = 5$

- 23 답** (1) $2 < x < 3$ 또는 $3 < x < 5$
 (2) $3 < x < 5$ 또는 $5 < x < 6$
 (3) $x < -4$ 또는 $x > 6$
 (4) $-1 < x < 0$ 또는 $0 < x < 2$
 (5) $1 < x < 2$ 또는 $2 < x < 5$
 (6) $2 < x < 3$ 또는 $3 < x < 7$
 (7) $3 < x < 4$ 또는 $x > 4$
 (8) $3 < x < 4$ 또는 $4 < x < 8$

풀이 (1) 밑 조건에서 $x-2 > 0$, $x-2 \neq 1$

$\therefore x > 2$, $x \neq 3$ ㉠

진수 조건에서 $5-x > 0$

$\therefore x < 5$ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$2 < x < 3$ 또는 $3 < x < 5$

(2) 밑 조건에서 $6-x > 0$, $6-x \neq 1$

$\therefore x < 6$, $x \neq 5$ ㉢

진수 조건에서 $x-3 > 0$

$\therefore x > 3$ ㉣

㉢, ㉣의 공통 범위를 구하면

$3 < x < 5$ 또는 $5 < x < 6$

(3) 진수 조건에서 $x^2 - 2x - 24 > 0$

$(x+4)(x-6) > 0$

$\therefore x < -4$ 또는 $x > 6$

(4) 밑 조건에서 $x+1 > 0$, $x+1 \neq 1$

$\therefore x > -1$, $x \neq 0$ ㉤

진수 조건에서 $-x^2 - x + 6 > 0$

$x^2 + x - 6 < 0$, $(x+3)(x-2) < 0$

$\therefore -3 < x < 2$ ㉥

㉤, ㉥의 공통 범위를 구하면

$-1 < x < 0$ 또는 $0 < x < 2$

(5) 밑 조건에서 $x-1 > 0$, $x-1 \neq 1$

$\therefore x > 1$, $x \neq 2$ ㉦

진수 조건에서 $-x^2 + 6x - 5 > 0$

$x^2 - 6x + 5 < 0$, $(x-1)(x-5) < 0$

$\therefore 1 < x < 5$ ㉧

㉦, ㉧의 공통 범위를 구하면

$1 < x < 2$ 또는 $2 < x < 5$

(6) 밑 조건에서 $x-2 > 0$, $x-2 \neq 1$

$\therefore x > 2$, $x \neq 3$ ㉨

진수 조건에서 $-x^2 + 5x + 14 > 0$

$x^2 - 5x - 14 < 0$, $(x+2)(x-7) < 0$

$\therefore -2 < x < 7$ ㉩

㉠, ㉩의 공통 범위를 구하면

$2 < x < 3$ 또는 $3 < x < 7$

(7) 밑 조건에서 $x-3 > 0$, $x-3 \neq 1$

$\therefore x > 3$, $x \neq 4$ ㉪

진수 조건에서 $x^2 - 3x + 2 > 0$

$(x-1)(x-2) > 0$

$\therefore x < 1$ 또는 $x > 2$ ㉫

㉪, ㉫의 공통 범위를 구하면

$3 < x < 4$ 또는 $x > 4$

(8) 밑 조건에서 $x-3 > 0$, $x-3 \neq 1$

$\therefore x > 3$, $x \neq 4$ ㉬

진수 조건에서 $-x^2 + 11x - 24 > 0$

$x^2 - 11x + 24 < 0$, $(x-3)(x-8) < 0$

$\therefore 3 < x < 8$ ㉭

㉬, ㉭의 공통 범위를 구하면

$3 < x < 4$ 또는 $4 < x < 8$

- 24 답** (1) -2 (2) 0 (3) 5 (4) 1 (5) $\frac{1}{2}$
 (6) $-\frac{3}{2}$ (7) $\frac{3}{5}$ (8) $\frac{2}{3}$ (9) 6 (10) $\frac{3}{2}$

풀이 (1) $\log_2 \frac{1}{4} = \log_2 2^{-2} = -2 \log_2 2 = -2$

다른 풀이 $\log_2 \frac{1}{4} = \log_2 1 - \log_2 4$
 $= \log_2 1 - \log_2 2^2$
 $= 0 - 2 \log_2 2 = -2$

(3) $\log_3 243 = \log_3 3^5 = 5 \log_3 3 = 5$

(5) $\log_2 \sqrt{2} = \log_2 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_2 2 = \frac{1}{2}$

(6) $\log_2 \frac{1}{2\sqrt{2}} = \log_2 \frac{1}{2 \times 2^{\frac{1}{2}}} = \log_2 \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}$
 $= \log_2 2^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2} \log_2 2 = -\frac{3}{2}$

(7) $\log_3 \sqrt[5]{27} = \log_3 27^{\frac{1}{5}} = \log_3 (3^3)^{\frac{1}{5}}$
 $= \log_3 3^{\frac{3}{5}} = \frac{3}{5} \log_3 3 = \frac{3}{5}$

(8) $\log_5 \sqrt[3]{25} = \log_5 25^{\frac{1}{3}} = \log_5 (5^2)^{\frac{1}{3}}$
 $= \log_5 5^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \log_5 5 = \frac{2}{3}$

(9) $\log_{\sqrt{2}} 8 = \log_{\sqrt{2}} 2^3 = \log_{\sqrt{2}} \{(\sqrt{2})^2\}^3$
 $= \log_{\sqrt{2}} (\sqrt{2})^6 = 6 \log_{\sqrt{2}} \sqrt{2} = 6$

(10) $\log_{10} \sqrt{1000} = \log_{10} 1000^{\frac{1}{2}} = \log_{10} (10^3)^{\frac{1}{2}}$
 $= \log_{10} 10^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \log_{10} 10 = \frac{3}{2}$

- 25 답** (1) 4 (2) 1 (3) 2 (4) 3
 (5) 1 (6) 6 (7) $\frac{1}{2}$ (8) $-\frac{3}{2}$
 (9) $\frac{3}{2}$ (10) $\frac{1}{2}$ (11) $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
 \text{풀이 (1)} \quad & \log_2 \frac{4}{3} + 2\log_2 \sqrt{12} = \log_2 \frac{4}{3} + \log_2 (\sqrt{12})^2 \\
 & = \log_2 \frac{4}{3} + \log_2 12 \\
 & = \log_2 \left(\frac{4}{3} \times 12 \right) = \log_2 16 \\
 & = \log_2 2^4 = 4
 \end{aligned}$$

$$(2) \log_{15} 3 + \log_{15} 5 = \log_{15} (3 \times 5) = \log_{15} 15 = 1$$

$$(3) \log_2 5 + \log_2 \frac{4}{5} = \log_2 \left(5 \times \frac{4}{5} \right) = \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2$$

$$(4) \log_3 \frac{9}{2} + \log_3 6 = \log_3 \left(\frac{9}{2} \times 6 \right) = \log_3 27 = \log_3 3^3 = 3$$

$$\begin{aligned}
 (5) \quad & \log_3 75 + 2\log_3 \frac{1}{5} = \log_3 75 + \log_3 \left(\frac{1}{5} \right)^2 \\
 & = \log_3 75 + \log_3 \frac{1}{25} = \log_3 \left(75 \times \frac{1}{25} \right) \\
 & = \log_3 3 = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (6) \quad & \log_2 100 - 2\log_2 \frac{5}{4} = \log_2 100 - \log_2 \left(\frac{5}{4} \right)^2 \\
 & = \log_2 100 - \log_2 \frac{25}{16} \\
 & = \log_2 \left(100 \times \frac{16}{25} \right) = \log_2 64 \\
 & = \log_2 2^6 = 6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (7) \quad & \log_5 \sqrt{10} + \frac{1}{2} \log_5 3 - \frac{3}{2} \log_5 \sqrt[3]{6} \\
 & = \log_5 \sqrt{10} + \log_5 3^{\frac{1}{2}} - \log_5 (6^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{2}} \\
 & = \log_5 \sqrt{10} + \log_5 \sqrt{3} - \log_5 \sqrt{6} \\
 & = \log_5 \left(\frac{\sqrt{10} \times \sqrt{3}}{\sqrt{6}} \right) = \log_5 \sqrt{5} \\
 & = \log_5 5^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (8) \quad & \log_5 3 - 2\log_5 \sqrt[4]{15} - \log_5 \sqrt{75} \\
 & = \log_5 3 - \log_5 (15^{\frac{1}{4}})^2 - \log_5 5\sqrt{3} \\
 & = \log_5 3 - \log_5 \sqrt{15} - \log_5 5\sqrt{3} \\
 & = \log_5 \left(\frac{3}{\sqrt{15}} \times \frac{1}{5\sqrt{3}} \right) = \log_5 \frac{1}{5\sqrt{5}} \\
 & = \log_5 5^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (9) \quad & \log_2 \sqrt{3} - 2\log_2 \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log_2 6 \\
 & = \log_2 \sqrt{3} - \log_2 \left(\frac{1}{2} \right)^2 - \log_2 6^{\frac{1}{2}} \\
 & = \log_2 \sqrt{3} - \log_2 \frac{1}{4} - \log_2 \sqrt{6} \\
 & = \log_2 \left(\sqrt{3} \times 4 \times \frac{1}{\sqrt{6}} \right) = \log_2 2\sqrt{2} \\
 & = \log_2 2^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (10) \quad & \log_3 2 + \log_3 \sqrt{6} - \frac{1}{2} \log_3 8 \\
 & = \log_3 2 + \log_3 \sqrt{6} - \log_3 8^{\frac{1}{2}} \\
 & = \log_3 2 + \log_3 \sqrt{6} - \log_3 \sqrt{8} \\
 & = \log_3 \left(\frac{2 \times \sqrt{6}}{\sqrt{8}} \right) = \log_3 \sqrt{3} \\
 & = \log_3 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (11) \quad & \log_5 3 + \log_5 \sqrt{15} - \frac{1}{2} \log_5 27 \\
 & = \log_5 3 + \log_5 \sqrt{15} - \log_5 27^{\frac{1}{2}} \\
 & = \log_5 3 + \log_5 \sqrt{15} - \log_5 \sqrt{27} \\
 & = \log_5 \left(\frac{3 \times \sqrt{15}}{\sqrt{27}} \right) = \log_5 \sqrt{5} \\
 & = \log_5 5^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

26 답 (1) 3 (2) 2 (3) $\frac{2}{3}$ (4) 0

$$\begin{aligned}
 \text{풀이 (1)} \quad & \log_2 3 \times \log_3 5 \times \log_5 8 \\
 & = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} \times \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 3} \times \frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 5} \\
 & = \frac{\log_{10} 2^3}{\log_{10} 2} \\
 & = \frac{3\log_{10} 2}{\log_{10} 2} = 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \frac{1}{\log_{16} 8} + \frac{1}{\log_4 8} = \log_8 16 + \log_8 4 \\
 & = \log_8 (16 \times 4) \\
 & = \log_8 64 \\
 & = \log_8 8^2 = 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{다른 풀이} \quad & \frac{1}{\log_{16} 8} + \frac{1}{\log_4 8} \\
 & = \log_8 16 + \log_8 4 \\
 & = \log_{2^3} 2^4 + \log_{2^2} 2^3 \\
 & = \frac{4}{3} \log_2 2 + \frac{2}{3} \log_2 2 \\
 & = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2
 \end{aligned}$$

$$(3) \log_{27} 9 = \log_{3^3} 3^2 = \frac{2}{3} \log_3 3 = \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad & \log_4 3 - \log_2 \sqrt{3} = \log_{2^2} 3 - \log_2 \sqrt{3} \\
 & = \frac{1}{2} \log_2 3 - \log_2 \sqrt{3} \\
 & = \log_2 3^{\frac{1}{2}} - \log_2 \sqrt{3} \\
 & = \log_2 \sqrt{3} - \log_2 \sqrt{3} = 0
 \end{aligned}$$

27 답 (1) 5 (2) 27 (3) 64 (4) 16

$$\text{풀이 (1)} \quad 4^{\log_4 5} = 5^{\log_4 4} = 5$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & 8^{\log_2 3} = 3^{\log_2 8} = 3^{\log_2 2^3} \\
 & = 3^{3\log_2 2} = 3^3 = 27
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & 9^{\log_3 4 + \log_3 2} = 9^{\log_3 (4 \times 2)} = 9^{\log_3 8} \\
 & = 8^{\log_3 9} = 8^{\log_3 3^2} \\
 & = 8^{2\log_3 3} = 8^2 = 64
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad & \text{주어진 식의 지수 부분을 정리하면} \\
 & 2\log_2 5 - 2\log_{\frac{1}{2}} 4 - 2\log_2 10 \\
 & = \log_2 5^2 - \log_{2^{-1}} 2^4 - \log_2 10^2 \\
 & = \log_2 25 + \log_2 2^4 - \log_2 100 \\
 & = \log_2 \left(\frac{25 \times 16}{100} \right) = \log_2 4 \\
 & = \log_2 2^2 = 2 \\
 & \therefore 4^{2\log_2 5 - 2\log_{\frac{1}{2}} 4 - 2\log_2 10} = 4^2 = 16
 \end{aligned}$$

28 답 (1) $1-a$ (2) $\frac{a+1}{b}$ (3) $2a+2b-3$

(4) $\frac{2a+b}{a+2b}$ (5) $\frac{2b-a}{1-a}$ (6) $\frac{2a+b}{2a+2b}$

풀이 (1) $\log_{10} 5 = \log_{10} \frac{10}{2} = \log_{10} 10 - \log_{10} 2$
 $= 1 - a$

(2) $\log_3 20 = \frac{\log_{10} 20}{\log_{10} 3} = \frac{\log_{10} (2 \times 10)}{\log_{10} 3}$
 $= \frac{\log_{10} 2 + \log_{10} 10}{\log_{10} 3} = \frac{a+1}{b}$

(3) $\log_{10} 0.036 = \log_{10} \frac{36}{1000}$
 $= \log_{10} 36 - \log_{10} 1000$
 $= \log_{10} 6^2 - \log_{10} 10^3$
 $= 2\log_{10} (2 \times 3) - 3\log_{10} 10$
 $= 2(\log_{10} 2 + \log_{10} 3) - 3$
 $= 2(a+b) - 3 = 2a+2b-3$

(4) $\log_{18} 12 = \frac{\log_{10} 12}{\log_{10} 18} = \frac{\log_{10} (2^2 \times 3)}{\log_{10} (2 \times 3^2)}$
 $= \frac{2\log_{10} 2 + \log_{10} 3}{\log_{10} 2 + 2\log_{10} 3} = \frac{2a+b}{a+2b}$

(5) $\log_5 \frac{9}{2} = \log_5 3^2 - \log_5 2 = \frac{2\log_{10} 3}{\log_{10} 5} - \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 5}$
 $= \frac{2\log_{10} 3 - \log_{10} 2}{\log_{10} 5} = \frac{2\log_{10} 3 - \log_{10} 2}{\log_{10} \frac{10}{2}}$

$= \frac{2\log_{10} 3 - \log_{10} 2}{\log_{10} 10 - \log_{10} 2} = \frac{2b-a}{1-a}$

(6) $\log_6 \sqrt{12} = \frac{\log_{10} 2\sqrt{3}}{\log_{10} 6} = \frac{\log_{10} 2 + \log_{10} 3^{\frac{1}{2}}}{\log_{10} (2 \times 3)}$
 $= \frac{\log_{10} 2 + \frac{1}{2}\log_{10} 3}{\log_{10} 2 + \log_{10} 3} = \frac{a + \frac{1}{2}b}{a+b}$
 $= \frac{2a+b}{2a+2b}$

29 답 (1) $\frac{ab+b+2}{ab+2b+1}$ (2) $\frac{ab+2b+2}{2ab+b+2}$

(3) $\frac{2ab+b+1}{ab+b+1}$ (4) $\frac{8ab}{ab+2b+1}$

풀이 (1) 주어진 조건식의 로그의 밑을 3으로 통일하면

$\log_5 3 = \frac{1}{\log_3 5} = b \quad \therefore \log_3 5 = \frac{1}{b}$

$\therefore \log_{90} 150 = \frac{\log_3 150}{\log_3 90}$
 $= \frac{\log_3 (2 \times 3 \times 5^2)}{\log_3 (2 \times 3^2 \times 5)}$
 $= \frac{\log_3 2 + \log_3 3 + 2\log_3 5}{\log_3 2 + 2\log_3 3 + \log_3 5}$
 $= \frac{a+1+\frac{2}{b}}{a+2+\frac{1}{b}} = \frac{ab+b+2}{ab+2b+1}$

(2) 주어진 조건식의 로그의 밑을 3으로 통일하면

$\log_5 3 = \frac{1}{\log_3 5} = b \quad \therefore \log_3 5 = \frac{1}{b}$

$\therefore \log_{300} 450 = \frac{\log_3 450}{\log_3 300} = \frac{\log_3 (2 \times 3^2 \times 5^2)}{\log_3 (2^2 \times 3 \times 5^2)}$
 $= \frac{\log_3 2 + 2\log_3 3 + 2\log_3 5}{2\log_3 2 + \log_3 3 + 2\log_3 5}$
 $= \frac{a+2+\frac{2}{b}}{2a+1+\frac{2}{b}} = \frac{ab+2b+2}{2ab+b+2}$

(3) 주어진 조건식의 로그의 밑을 3으로 통일하면

$\log_7 3 = \frac{1}{\log_3 7} = b \quad \therefore \log_3 7 = \frac{1}{b}$

$\therefore \log_{42} 84 = \frac{\log_3 84}{\log_3 42} = \frac{\log_3 (2^2 \times 3 \times 7)}{\log_3 (2 \times 3 \times 7)}$
 $= \frac{2\log_3 2 + \log_3 3 + \log_3 7}{\log_3 2 + \log_3 3 + \log_3 7}$
 $= \frac{2a+1+\frac{1}{b}}{a+1+\frac{1}{b}} = \frac{2ab+b+1}{ab+b+1}$

(4) 주어진 조건식의 로그의 밑을 3으로 통일하면

$\log_7 3 = \frac{1}{\log_3 7} = b \quad \therefore \log_3 7 = \frac{1}{b}$

$\therefore \log_{126} 256 = \frac{\log_3 256}{\log_3 126} = \frac{\log_3 2^8}{\log_3 (2 \times 3^2 \times 7)}$
 $= \frac{8\log_3 2}{\log_3 2 + 2\log_3 3 + \log_3 7}$
 $= \frac{8a}{a+2+\frac{1}{b}} = \frac{8ab}{ab+2b+1}$

30 답 (1) $\frac{y}{3x}$ (2) $\frac{3y}{2x}$ (3) $\frac{4y}{x}$

(4) $\frac{2y}{3x}$ (5) $-\frac{3y}{x}$

풀이 $3^x = a, 3^y = b$ 에서 $x = \log_3 a, y = \log_3 b$

(1) $\log_{a^3} b = \frac{1}{3} \log_a b = \frac{1}{3} \times \frac{\log_3 b}{\log_3 a} = \frac{y}{3x}$

(2) $\log_{a^2} b^3 = \frac{3}{2} \log_a b = \frac{3}{2} \times \frac{\log_3 b}{\log_3 a} = \frac{3y}{2x}$

(3) $\log_{\sqrt{a}} b^2 = \log_{a^{\frac{1}{2}}} b^2 = 4 \log_a b = 4 \times \frac{\log_3 b}{\log_3 a} = \frac{4y}{x}$

(4) $\log_{\sqrt{a}} \sqrt[3]{b} = \log_{a^{\frac{1}{2}}} b^{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \log_a b = \frac{2}{3} \times \frac{\log_3 b}{\log_3 a} = \frac{2y}{3x}$

(5) $\log_{\sqrt{a}} \frac{1}{b} = \log_{a^{\frac{1}{2}}} b^{-1} = -3 \log_a b = -3 \times \frac{\log_3 b}{\log_3 a} = -\frac{3y}{x}$

31 답 (1) $x+2y+3z$ (2) $2x+y-2z$

(3) $-3x+4y+z$ (4) $\frac{3z}{x+y}$

(5) $\frac{z}{3x+3y}$

풀이 $5^x = a, 5^y = b, 5^z = c$ 에서

$x = \log_5 a, y = \log_5 b, z = \log_5 c$

(1) $\log_5 ab^2c^3 = \log_5 a + \log_5 b^2 + \log_5 c^3$
 $= \log_5 a + 2\log_5 b + 3\log_5 c$
 $= x + 2y + 3z$

(2) $\log_5 \frac{a^2b}{c^2} = \log_5 a^2 + \log_5 b - \log_5 c^2$
 $= 2\log_5 a + \log_5 b - 2\log_5 c$
 $= 2x + y - 2z$

$$(3) \log_5 \frac{b^4 c}{a^3} = \log_5 b^4 + \log_5 c - \log_5 a^3$$

$$= 4\log_5 b + \log_5 c - 3\log_5 a$$

$$= -3x + 4y + z$$

$$(4) \log_{ab} c^3 = \frac{\log_5 c^3}{\log_5 ab} = \frac{3\log_5 c}{\log_5 a + \log_5 b} = \frac{3z}{x+y}$$

$$(5) \log_{ab} \sqrt[3]{c} = \frac{\log_5 \sqrt[3]{c}}{\log_5 ab} = \frac{\frac{1}{3}\log_5 c}{\log_5 a + \log_5 b} = \frac{\frac{1}{3}z}{x+y} = \frac{z}{3x+3y}$$

32 답 (1) $\frac{1}{2}$

(2) $-\frac{9}{2}$

풀이 $a^3 b^2 = 1$ 의 양변에 밑이 a 인 로그를 취하면

$$\log_a a^3 b^2 = \log_a 1$$

$$\log_a a^3 + \log_a b^2 = 0, \quad 3 + 2\log_a b = 0 \quad \therefore \log_a b = -\frac{3}{2}$$

$$(1) \log_a a^2 b = \log_a a^2 + \log_a b = 2 + \log_a b \\ = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$(2) \log_a a^3 b^5 = \log_a a^3 + \log_a b^5 = 3 + 5\log_a b \\ = 3 + 5 \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{2}$$

33 답 (1) 12

(2) $\frac{15}{4}$

풀이 $a^3 = b^4$ 의 양변에 밑이 a 인 로그를 취하면

$$\log_a a^3 = \log_a b^4, \quad 3 = 4\log_a b \quad \therefore \log_a b = \frac{3}{4}$$

$$(1) 16\log_a b = 16 \times \frac{3}{4} = 12$$

$$(2) \log_a a^3 b = \log_a a^3 + \log_a b = 3 + \log_a b = 3 + \frac{3}{4} = \frac{15}{4}$$

34 답 (1) 2

(2) 2

(3) 4

(4) 3

풀이 (1) $36^x = 9, 4^y = 27$ 에서 $x = \log_{36} 9, y = \log_4 27$

$$\therefore \frac{2}{x} - \frac{3}{y} = \frac{2}{\log_{36} 9} - \frac{3}{\log_4 27} = \frac{2}{\log_{36} 3^2} - \frac{3}{\log_4 3^3} \\ = \frac{2}{2\log_{36} 3} - \frac{3}{3\log_4 3} = \frac{1}{\log_{36} 3} - \frac{1}{\log_4 3} \\ = \log_3 36 - \log_3 4 = \log_3 \frac{36}{4} \\ = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$$

(2) $80^x = 16, 5^y = 64$ 에서 $x = \log_{80} 16, y = \log_5 64$

$$\therefore \frac{2}{x} - \frac{3}{y} = \frac{2}{\log_{80} 16} - \frac{3}{\log_5 64} = \frac{2}{\log_{80} 4^2} - \frac{3}{\log_5 4^3} \\ = \frac{2}{2\log_{80} 4} - \frac{3}{3\log_5 4} = \frac{1}{\log_{80} 4} - \frac{1}{\log_5 4} \\ = \log_4 80 - \log_4 5 = \log_4 \frac{80}{5} \\ = \log_4 16 = \log_4 4^2 = 2$$

(3) $150^x = 25, 6^y = 125$ 에서 $x = \log_{150} 25, y = \log_6 125$

$$\therefore \frac{4}{x} - \frac{6}{y} = \frac{4}{\log_{150} 25} - \frac{6}{\log_6 125} \\ = \frac{4}{\log_{150} 5^2} - \frac{6}{\log_6 5^3} \\ = \frac{4}{2\log_{150} 5} - \frac{6}{3\log_6 5} \\ = 2\left(\frac{1}{\log_{150} 5} - \frac{1}{\log_6 5}\right) \\ = 2(\log_5 150 - \log_5 6) \\ = 2\log_5 \frac{150}{6} = 2\log_5 25 = 2\log_5 5^2 = 4$$

(4) $56^x = 8, 7^y = 16$ 에서 $x = \log_{56} 8, y = \log_7 16$

$$\therefore \frac{3}{x} - \frac{4}{y} = \frac{3}{\log_{56} 8} - \frac{4}{\log_7 16} = \frac{3}{\log_{56} 2^3} - \frac{4}{\log_7 2^4} \\ = \frac{3}{3\log_{56} 2} - \frac{4}{4\log_7 2} = \frac{1}{\log_{56} 2} - \frac{1}{\log_7 2} \\ = \log_2 56 - \log_2 7 = \log_2 \frac{56}{7} \\ = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$$

35 답 (1) -1

(2) 1

풀이 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 3, \quad \alpha\beta = 1$$

$$(1) \log_3 \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} = \log_3 \frac{1}{3} = \log_3 3^{-1} = -1$$

$$(2) \log_3 (\alpha^{-1} + \beta^{-1}) = \log_3 \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) = \log_3 \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} \\ = \log_3 3 = 1$$

36 답 (1) 1

(2) 1

풀이 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 2, \quad \alpha\beta = 1$$

$$(1) \log_2 (\alpha^2 + \beta^2) = \log_2 \{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta\} \\ = \log_2 2 = 1$$

$$(2) \log_4 (\alpha + \alpha^{-1}) + \log_4 (\beta + \beta^{-1}) \\ = \log_4 \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) \\ = \log_4 \left(\alpha\beta + \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}\right) \\ = \log_4 \left(\alpha\beta + \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta}\right) \\ = \log_4 \left\{\alpha\beta + \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta}\right\} \\ = \log_4 (1 + 1 + 2) \\ = \log_4 4 = 1$$

37 답 (1) 14

(2) 25

풀이 (1) 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_2 a + \log_2 b = 8, \quad \log_2 a \times \log_2 b = 4$$

$$\therefore \log_a b + \log_b a \\ = \frac{\log_2 b}{\log_2 a} + \frac{\log_2 a}{\log_2 b} \\ = \frac{(\log_2 b)^2 + (\log_2 a)^2}{\log_2 a \times \log_2 b} \\ = \frac{(\log_2 a + \log_2 b)^2 - 2 \times \log_2 a \times \log_2 b}{\log_2 a \times \log_2 b} \\ = \frac{8^2 - 2 \times 4}{4} = 14$$

(2) 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_2 a + \log_2 b = 9, \quad \log_2 a \times \log_2 b = 3$$

$$\therefore \log_a b + \log_b a \\ = \frac{\log_2 b}{\log_2 a} + \frac{\log_2 a}{\log_2 b} \\ = \frac{(\log_2 b)^2 + (\log_2 a)^2}{\log_2 a \times \log_2 b} \\ = \frac{(\log_2 a + \log_2 b)^2 - 2 \times \log_2 a \times \log_2 b}{\log_2 a \times \log_2 b} \\ = \frac{9^2 - 2 \times 3}{3} = 25$$

38 답 (1) 23

(2) 6

풀이 (1) 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_3 a + \log_3 b = 5, \log_3 a \times \log_3 b = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore \log_a b + \log_b a &= \frac{\log_3 b}{\log_3 a} + \frac{\log_3 a}{\log_3 b} \\ &= \frac{(\log_3 b)^2 + (\log_3 a)^2}{\log_3 a \times \log_3 b} \\ &= \frac{(\log_3 a + \log_3 b)^2 - 2 \times \log_3 a \times \log_3 b}{\log_3 a \times \log_3 b} \\ &= \frac{5^2 - 2 \times 1}{1} = 23 \end{aligned}$$

(2) 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_3 a + \log_3 b = -4, \log_3 a \times \log_3 b = 2$$

$$\begin{aligned} \therefore \log_a b + \log_b a &= \frac{\log_3 b}{\log_3 a} + \frac{\log_3 a}{\log_3 b} \\ &= \frac{(\log_3 b)^2 + (\log_3 a)^2}{\log_3 a \times \log_3 b} \\ &= \frac{(\log_3 a + \log_3 b)^2 - 2 \times \log_3 a \times \log_3 b}{\log_3 a \times \log_3 b} \\ &= \frac{(-4)^2 - 2 \times 2}{2} = 6 \end{aligned}$$

39 답 (1) -1 (2) -1 (3) -3 (4) $\frac{3}{2}$ (5) -4

풀이 (1) $\log \frac{1}{10} = \log_{10} 10^{-1} = -1$

(2) $\log \frac{1}{\sqrt{100}} = \log \frac{1}{\sqrt{10^2}} = \log \frac{1}{10} = \log_{10} 10^{-1} = -1$

(3) $\log 0.001 = \log \frac{1}{1000} = \log \frac{1}{10^3} = \log_{10} 10^{-3} = -3$

(4) $\log \sqrt{1000} = \log (10^3)^{\frac{1}{2}} = \log_{10} 10^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$

(5) $\log \frac{1}{10000} = \log \frac{1}{10^4} = \log_{10} 10^{-4} = -4$

40 답 (1) 1,5276 (2) 3,5276 (3) -0,4724

풀이 (1) $\log 33.7 = \log (3.37 \times 10) = \log 3.37 + \log 10$
 $= 0.5276 + 1 = 1.5276$

(2) $\log 3370 = \log (3.37 \times 1000) = \log 3.37 + \log 10^3$
 $= 0.5276 + 3 = 3.5276$

(3) $\log 0.337 = \log \left(3.37 \times \frac{1}{10} \right) = \log 3.37 + \log 10^{-1}$
 $= 0.5276 + (-1) = -0.4724$

41 답 (1) 4,2122 (2) -1,7878 (3) -3,7878

풀이 (1) $\log 16300 = \log (1.63 \times 10000)$
 $= \log 1.63 + \log 10^4$
 $= 0.2122 + 4 = 4.2122$

(2) $\log 0.0163 = \log \left(1.63 \times \frac{1}{100} \right) = \log 1.63 + \log 10^{-2}$
 $= 0.2122 + (-2) = -1.7878$

(3) $\log 0.000163 = \log \left(1.63 \times \frac{1}{10000} \right)$
 $= \log 1.63 + \log 10^{-4}$
 $= 0.2122 + (-4) = -3.7878$

42 답 (1) 1,2040 (2) 1,4313 (3) 1,5050

(4) 1,2552 (5) 1,3801 (6) 1,8572

(7) 1,1761 (8) 1,3010 (9) 1,3980

(10) 1,4771

풀이 (1) $\log 16 = \log 2^4 = 4 \log 2$
 $= 4 \times 0.3010 = 1.2040$

(2) $\log 27 = \log 3^3 = 3 \log 3$
 $= 3 \times 0.4771 = 1.4313$

(3) $\log 32 = \log 2^5 = 5 \log 2 = 5 \times 0.3010$
 $= 1.5050$

(4) $\log 18 = \log (2 \times 3^2) = \log 2 + 2 \log 3$
 $= 0.3010 + 2 \times 0.4771 = 1.2552$

(5) $\log 24 = \log (2^3 \times 3) = 3 \log 2 + \log 3$
 $= 3 \times 0.3010 + 0.4771 = 1.3801$

(6) $\log 72 = \log (2^3 \times 3^2) = 3 \log 2 + 2 \log 3$
 $= 3 \times 0.3010 + 2 \times 0.4771 = 1.8572$

(7) $\log 15 = \log (3 \times 5) = \log 3 + \log 5$

이때

$$\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2$$

$$= 1 - 0.3010 = 0.6990$$

이므로

$$\log 15 = \log 3 + \log 5$$

$$= 0.4771 + 0.6990 = 1.1761$$

(8) $\log 20 = \log (2^2 \times 5) = \log 2^2 + \log 5 = 2 \log 2 + \log 5$

이때 (7)에서 $\log 5 = 0.6990$ 이므로

$$\log 20 = 2 \log 2 + \log 5$$

$$= 2 \times 0.3010 + 0.6990 = 1.3010$$

다른 풀이 $\log 20 = \log (2 \times 10) = \log 2 + \log 10$
 $= 0.3010 + 1 = 1.3010$

(9) $\log 25 = \log 5^2 = 2 \log 5$

이때 (7)에서 $\log 5 = 0.6990$ 이므로

$$\log 25 = 2 \log 5 = 2 \times 0.6990 = 1.3980$$

(10) $\log 30 = \log (2 \times 3 \times 5) = \log 2 + \log 3 + \log 5$

이때 (7)에서 $\log 5 = 0.6990$ 이므로

$$\log 30 = \log 2 + \log 3 + \log 5$$

$$= 0.3010 + 0.4771 + 0.6990 = 1.4771$$

다른 풀이 $\log 30 = \log (3 \times 10) = \log 3 + \log 10$
 $= 0.4771 + 1 = 1.4771$

43 답 (1) 2,3304 (2) 1,3655 (3) -0,6536

(4) 3,3075 (5) -1,6144

풀이 (1) 주어진 상용로그표에서

$$\log 2.14 = 0.3304 \text{ 이므로}$$

$$\log 214 = \log (2.14 \times 100) = \log 2.14 + \log 10^2$$

$$= 0.3304 + 2 = 2.3304$$

(2) 주어진 상용로그표에서 $\log 2.32 = 0.3655$ 이므로

$$\log 23.2 = \log (2.32 \times 10) = \log 2.32 + \log 10$$

$$= 0.3655 + 1 = 1.3655$$

(3) 주어진 상용로그표에서 $\log 2.22=0.3464$ 이므로

$$\begin{aligned}\log 0.222 &= \log \left(2.22 \times \frac{1}{10} \right) = \log 2.22 + \log 10^{-1} \\ &= 0.3464 + (-1) = -0.6536\end{aligned}$$

(4) 주어진 상용로그표에서 $\log 2.03=0.3075$ 이므로

$$\begin{aligned}\log 2030 &= \log (2.03 \times 1000) = \log 2.03 + \log 10^3 \\ &= 0.3075 + 3 = 3.3075\end{aligned}$$

(5) 주어진 상용로그표에서 $\log 2.43=0.3856$ 이므로

$$\begin{aligned}\log 0.0243 &= \log \left(2.43 \times \frac{1}{100} \right) = \log 2.43 + \log 10^{-2} \\ &= 0.3856 + (-2) = -1.6144\end{aligned}$$

44 답 6년 후

풀이 올해 생산량을 a 라고 하면 n 년 후의 생산량은

$$\begin{aligned}a(1+0.14)^n \\ a(1+0.14)^n \geq 2a \text{에서 } 1.14^n \geq 2 \quad \dots\dots \textcircled{7}\end{aligned}$$

$\textcircled{7}$ 의 양변에 상용로그를 취하면

$$\begin{aligned}\log 1.14^n &\geq \log 2 \\ n \log 1.14 &\geq \log 2, \quad n \times 0.0569 \geq 0.3010 \\ \therefore n &\geq 5.28\dots\end{aligned}$$

따라서 처음으로 현재 생산량의 2배 이상이 되는 것은 6년 후부터이다.

45 답 11번

풀이 폐수 처리 기계를 1번 통과한 후의 중금속의 농도는

$$30 \times \frac{9}{10} \text{ ppm},$$

폐수 처리 기계를 2번 통과한 후의 중금속의 농도는

$$30 \times \left(\frac{9}{10} \right)^2 \text{ ppm}$$

이므로 폐수 처리 기계를 n 번 통과한 후의 중금속의 농도는

$$30 \times \left(\frac{9}{10} \right)^n \text{ ppm}$$

$$30 \times \left(\frac{9}{10} \right)^n \leq 10 \text{의 양변에 상용로그를 취하면}$$

$$\log \left\{ 30 \times \left(\frac{9}{10} \right)^n \right\} \leq \log 10$$

$$\log 30 + n \log \frac{9}{10} \leq 1$$

$$\log 3 + 1 + n(2 \log 3 - 1) \leq 1$$

$$\begin{aligned}\therefore n &\geq \frac{-\log 3}{2 \log 3 - 1} = \frac{-0.4771}{2 \times 0.4771 - 1} = \frac{-0.4771}{-0.0458} \\ &= 10.41\dots\end{aligned}$$

따라서 중금속의 농도를 10 ppm 이하로 만들려면 폐수 처리 기계에 최소한 11번 통과시켜야 한다.

46 답 20

$$\text{풀이 } P_A = 20 \log 255 - 10 \log E_A$$

$$P_B = 20 \log 255 - 10 \log E_B$$

이때 $E_B = 100 E_A$ 이므로

$$P_A - P_B$$

$$= (20 \log 255 - 10 \log E_A) - (20 \log 255 - 10 \log E_B)$$

$$= 10(\log E_B - \log E_A)$$

$$= 10 \log \frac{E_B}{E_A}$$

$$= 10 \log \frac{100 E_A}{E_A}$$

$$= 10 \log 100 = \underline{20}$$

47 답 60°C

풀이 실내 온도가 20°C 인 실험실에 온도가 60°C 인 물체를 놓고 1시간이 지났을 때, 물체의 온도가 40°C 가 되었으므로

$$\log (40 - 20) = -k \times 1 + \log (60 - 20)$$

$$\log 20 = -k + \log 40$$

$$\therefore k = \log 40 - \log 20 = \log \frac{40}{20} = \log 2$$

한편, $\log (T - 20) = -\log 2 \times 1 + \log (100 - 20)$ 에서

$$\log (T - 20) = -\log 2 + \log 80 = \log \frac{80}{2} = \log 40$$

$$\therefore T = 60$$

따라서 이 실험실에 온도가 100°C 인 물체를 놓고 1시간이 지났을 때, 물체의 온도는 60°C 이다.

48 답 (1) 10자리

(2) 소수점 아래 8째 자리

(3) 소수점 아래 31째 자리

(4) 16자리

(5) 12자리

(6) 21자리

$$\text{풀이 } (1) \log 2^{30} = 30 \log 2 = 30 \times 0.3010 = 9.030$$

이때 정수 부분이 9이므로 10자리 정수이다.

$$(2) \log 3^{-15} = -15 \times 0.4771 = -7.1565 = -8 + 0.8435$$

이때 정수 부분이 -8이므로 소수점 아래 8째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

$$(3) \log \frac{1}{2^{100}} = \log 2^{-100} = -100 \times 0.3010$$

$$= -30.10 = -31 + 0.90$$

이때 정수 부분이 -31이므로 소수점 아래 31째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

$$(4) \log 6^{20} = 20 \log (2 \times 3)$$

$$= 20(\log 2 + \log 3)$$

$$= 20 \times (0.3010 + 0.4771)$$

$$= 20 \times 0.7781 = 15.562$$

이때 정수 부분이 15이므로 16자리 정수이다.

$$(5) \log (2^{16} \times 3^{13}) = \log 2^{16} + \log 3^{13}$$

$$= 16 \times 0.3010 + 13 \times 0.4771$$

$$= 4.8160 + 6.2023$$

$$= 11.0183$$

이때 정수 부분이 11이므로 12자리 정수이다.

$$\begin{aligned}
 (6) \log(3^{25} \times 5^{12}) &= \log 3^{25} + \log 5^{12} \\
 &= 25\log 3 + 12\log 5 \\
 &= 25\log 3 + 12\log \frac{10}{2} \\
 &= 25\log 3 + 12(\log 10 - \log 2) \\
 &= 25 \times 0.4771 + 12 \times (1 - 0.3010) \\
 &= 11.9275 + 8.3880 = 20.3155
 \end{aligned}$$

이때 정수 부분이 20이므로 21자리 정수이다.

49 답 (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 1 (5) 3 (6) 3

풀이 (1) $\log 4^{40} = \log (2^2)^{40} = 80\log 2$
 $= 80 \times 0.3010 = 24.080$

이때 소수 부분은 0.080이고, $\log 1.2 = 0.0792$,
 $\log 1.3 = 0.1139$ 이므로
 $\log 1.2 < (\text{소수 부분}) < \log 1.3$
따라서 4^{40} 의 최고 자리의 숫자는 1이다.

참고 $\log 1.2 < 0.080 < \log 1.3$ 에서

$$\begin{aligned}
 \log 1.2 + 24 &< 24.080 < \log 1.3 + 24 \\
 \log (1.2 \times 10^{24}) &< \log 4^{40} < \log (1.3 \times 10^{24}) \\
 \therefore 1.2 \times 10^{24} &< 4^{40} < 1.3 \times 10^{24}
 \end{aligned}$$

이때 4^{40} 은 25자리 정수이고, 최고 자리의 숫자는 1임을 알 수 있다.

(2) $\log 3^{24} = 24\log 3 = 24 \times 0.4771 = 11.4504$
이때 소수 부분은 0.4504이고, $\log 2.8 = 0.4472$,
 $\log 2.9 = 0.4624$ 이므로
 $\log 2.8 < (\text{소수 부분}) < \log 2.9$
따라서 3^{24} 의 최고 자리의 숫자는 2이다.

(3) $\log 6^{20} = 20\log (2 \times 3) = 20(\log 2 + \log 3)$
 $= 20 \times (0.3010 + 0.4771) = 20 \times 0.7781$
 $= 15.562$

이때 소수 부분은 0.562이고, $\log 3.6 = 0.5563$,
 $\log 3.7 = 0.5682$ 이므로
 $\log 3.6 < (\text{소수 부분}) < \log 3.7$
따라서 6^{20} 의 최고 자리의 숫자는 3이다.

(4) $\log 18^{20} = 20\log (2 \times 3^2) = 20(\log 2 + 2\log 3)$
 $= 20 \times (0.3010 + 2 \times 0.4771) = 20 \times 1.2552$
 $= 25.104$

이때 소수 부분은 0.104이고, $\log 1.2 = 0.0792$,
 $\log 1.3 = 0.1139$ 이므로
 $\log 1.2 < (\text{소수 부분}) < \log 1.3$
따라서 18^{20} 의 최고 자리의 숫자는 1이다.

(5) $\log \left(\frac{9}{2}\right)^{10} = 10\log \frac{9}{2} = 10(\log 3^2 - \log 2)$
 $= 10 \times (2 \times 0.4771 - 0.3010) = 10 \times 0.6532$
 $= 6.532$

이때 소수 부분은 0.532이고, $\log 3.4 = 0.5315$,
 $\log 3.5 = 0.5441$ 이므로
 $\log 3.4 < (\text{소수 부분}) < \log 3.5$
따라서 $\left(\frac{9}{2}\right)^{10}$ 의 최고 자리의 숫자는 3이다.

(6) $\log \left(\frac{8}{3}\right)^{20} = 20\log \frac{8}{3} = 20(\log 2^3 - \log 3)$
 $= 20 \times (3 \times 0.3010 - 0.4771) = 20 \times 0.4259$
 $= 8.518$

이때 소수 부분은 0.518이고, $\log 3.2 = 0.5051$,
 $\log 3.3 = 0.5185$ 이므로
 $\log 3.2 < (\text{소수 부분}) < \log 3.3$

따라서 $\left(\frac{8}{3}\right)^{20}$ 의 최고 자리의 숫자는 3이다.

50 답 (1) 10 또는 $10\sqrt{10}$ (2) 1 또는 $\sqrt{10}$

(3) 100 또는 $100\sqrt{10}$ (4) $\frac{1}{10}$ 또는 $\frac{\sqrt{10}}{10}$

풀이 (1) $\log x^2$ 과 $\log x^4$ 의 소수 부분이 같으므로

$$\log x^4 - \log x^2 = (\text{정수})$$

$$\therefore 2\log x = (\text{정수})$$

$10 \leq x < 100$ 의 각 변에 상용로그를 취하면

$$1 \leq \log x < 2 \quad \therefore 2 \leq 2\log x < 4$$

이때 $2\log x$ 는 정수이므로

$$2\log x = 2 \text{ 또는 } 2\log x = 3$$

$$2\log x = 2 \text{ 일 때, } \log x = 1 \text{ 에서 } x = 10$$

$$2\log x = 3 \text{ 일 때, } \log x = \frac{3}{2} \text{ 에서 } x = 10^{\frac{3}{2}} = 10\sqrt{10}$$

$$\therefore x = 10 \text{ 또는 } x = 10\sqrt{10}$$

(2) $\log x$ 와 $\log x^3$ 의 소수 부분이 같으므로

$$\log x^3 - \log x = (\text{정수})$$

$$\therefore 2\log x = (\text{정수})$$

$1 \leq x < 10$ 의 각 변에 상용로그를 취하면

$$0 \leq \log x < 1 \quad \therefore 0 \leq 2\log x < 2$$

이때 $2\log x$ 는 정수이므로

$$2\log x = 0 \text{ 또는 } 2\log x = 1$$

$$2\log x = 0 \text{ 일 때, } \log x = 0 \text{ 에서 } x = 1$$

$$2\log x = 1 \text{ 일 때, } \log x = \frac{1}{2} \text{ 에서 } x = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = \sqrt{10}$$

(3) $\log \frac{1}{x}$ 과 $\log \frac{1}{x^3}$ 의 소수 부분이 같으므로

$$\log x^{-1} - \log x^{-3} = (\text{정수})$$

$$\therefore 2\log x = (\text{정수})$$

$100 \leq x < 1000$ 의 각 변에 상용로그를 취하면

$$2 \leq \log x < 3 \quad \therefore 4 \leq 2\log x < 6$$

이때 $2\log x$ 는 정수이므로

$$2\log x = 4 \text{ 또는 } 2\log x = 5$$

$$2\log x = 4 \text{ 일 때, } \log x = 2 \text{ 에서 } x = 10^2 = 100$$

$$2\log x = 5 \text{ 일 때, } \log x = \frac{5}{2} \text{ 에서 } x = 10^{\frac{5}{2}} = 100\sqrt{10}$$

$$\therefore x = 100 \text{ 또는 } x = 100\sqrt{10}$$

(4) $\log x^{-2}$ 과 $\log x^{-4}$ 의 소수 부분이 같으므로

$$\log x^{-2} - \log x^{-4} = (\text{정수})$$

$$\therefore 2\log x = (\text{정수})$$

$$\frac{1}{10} \leq x < 1 \text{의 각 변에 상용로그를 취하면}$$

$$-1 \leq \log x < 0 \quad \therefore -2 \leq 2\log x < 0$$

이때 $2\log x$ 는 정수이므로

$$2\log x = -2 \text{ 또는 } 2\log x = -1$$

$2\log x = -2$ 일 때, $\log x = -1$ 에서

$$x = 10^{-1} = \frac{1}{10}$$

$2\log x = -1$ 일 때, $\log x = -\frac{1}{2}$ 에서

$$x = 10^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\therefore x = \frac{1}{10} \text{ 또는 } x = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

중단원 점검문제 | I-1 지수와 로그

032-033쪽

01 답 1

$$\text{풀이} \quad \sqrt[4]{\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{3}}} \times \sqrt{\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[6]{5}}} = \frac{\sqrt[12]{5}}{\sqrt[8]{3}} \times \frac{\sqrt[8]{3}}{\sqrt[12]{5}} = 1$$

02 답 23

$$\text{풀이} \quad \sqrt[4]{a} \times \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[12]{a^3} \times \sqrt[12]{a^8} = \sqrt[12]{a^3 \times a^8} = \sqrt[12]{a^{11}}$$

따라서 $\sqrt[12]{a^{11}} = \sqrt[m]{a^n}$ 이므로 $m=12, n=11$

$$\therefore m+n=23$$

03 답 $\pm\sqrt{14}$

$$\text{풀이} \quad (a-a^{-1})^2 = a^2 - 2 \times a \times a^{-1} + a^{-2} \\ = a^2 + a^{-2} - 2$$

이때 $a^2 + a^{-2} = 16$ 이므로

$$(a-a^{-1})^2 = 16 - 2 = 14$$

$$\therefore a-a^{-1} = \pm\sqrt{14}$$

04 답 $\frac{651}{25}$

$$\text{풀이} \quad a^{2x} = 5 \text{에서 } a^{-2x} = \frac{1}{5}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{a^{6x} - a^{-6x}}{a^{2x} - a^{-2x}} \\ &= \frac{(a^{2x} - a^{-2x})^3 + 3 \times a^{2x} \times a^{-2x} (a^{2x} - a^{-2x})}{a^{2x} - a^{-2x}} \\ &= (a^{2x} - a^{-2x})^2 + 3 \\ &= \left(5 - \frac{1}{5}\right)^2 + 3 = \left(\frac{24}{5}\right)^2 + 3 = \frac{651}{25} \end{aligned}$$

05 답 15

풀이 밑 조건에서 $x-2 > 0, x-2 \neq 1$

$$\therefore x > 2, x \neq 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

진수 조건에서 $-x^2 + 8x - 7 > 0$

$$x^2 - 8x + 7 < 0, (x-1)(x-7) < 0$$

$$\therefore 1 < x < 7 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②의 공통 범위를 구하면 $2 < x < 3$ 또는 $3 < x < 7$ 이다

로 정수 x 의 값은 4, 5, 6이다.

따라서 모든 정수 x 의 값의 합은 $4+5+6=15$

06 답 3

$$\begin{aligned} \text{풀이} \quad \log_2 3 - \log_2 \frac{9}{2} + \log_2 12 &= \log_2 \left(3 \div \frac{9}{2} \times 12\right) \\ &= \log_2 \left(3 \times \frac{2}{9} \times 12\right) \\ &= \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3 \end{aligned}$$

07 답 $3A-B-2C$

$$\begin{aligned} \text{풀이} \quad \log_a \frac{x^3}{yz^2} &= \log_a x^3 - \log_a yz^2 \\ &= 3\log_a x - (\log_a y + 2\log_a z) \\ &= 3\log_a x - \log_a y - 2\log_a z \\ &= 3A - B - 2C \end{aligned}$$

08 답 $\frac{5a+2b}{3}$

$$\begin{aligned} \text{풀이} \quad \log_3 10 = a \text{에서 } \log_3 (2 \times 5) &= a \\ \therefore \log_3 2 + \log_3 5 &= a \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_3 \frac{4}{5} = b \text{에서 } \log_3 4 - \log_3 5 &= b \\ \therefore 2\log_3 2 - \log_3 5 &= b \quad \dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \text{을 하면 } 3\log_3 2 = a + b$$

$$\therefore \log_3 2 = \frac{a+b}{3}$$

$$\textcircled{1} \times 2 - \textcircled{2} \text{을 하면 } 3\log_3 5 = 2a - b$$

$$\therefore \log_3 5 = \frac{2a-b}{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore \log_3 40 &= \log_3 (2^3 \times 5) = 3\log_3 2 + \log_3 5 \\ &= 3 \times \frac{(a+b)}{3} + \frac{2a-b}{3} = \frac{5a+2b}{3} \end{aligned}$$

09 답 12

$$\text{풀이} \quad 5^0 = 1 \text{이므로 } \log_3 6 + \log_3 2 - \log_3 a = 0$$

$$\therefore \log_3 a = \log_3 6 + \log_3 2$$

$$= \log_3 (6 \times 2) = \log_3 12$$

$$\therefore a = 12$$

10 답 3

$$\begin{aligned} \text{풀이} \quad \log_3 4 \times \log_4 5 \times \log_5 6 \times \dots \times \log_{26} 27 \\ &= \frac{\log 4}{\log 3} \times \frac{\log 5}{\log 4} \times \frac{\log 6}{\log 5} \times \dots \times \frac{\log 26}{\log 25} \times \frac{\log 27}{\log 26} \\ &= \frac{\log 27}{\log 3} = \frac{\log 3^3}{\log 3} \\ &= \frac{3\log 3}{\log 3} = 3 \end{aligned}$$

11 답 9

$$\text{풀이} \quad \frac{\log_3 4}{a} = \frac{\log_3 8}{b} = \frac{\log_3 16}{c} = \log_3 2 \text{에서}$$

$$a = \frac{\log_3 4}{\log_3 2} = \log_2 4 = 2\log_2 2 = 2$$

$$b = \frac{\log_3 8}{\log_3 2} = \log_2 8 = 3\log_2 2 = 3$$

$$c = \frac{\log_3 16}{\log_3 2} = \log_2 16 = 4\log_2 2 = 4$$

$$\therefore a+b+c = 2+3+4 = 9$$

12 답 -1

풀이 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $\log_2 3 + 1 = -a$, $\log_2 3 \times 1 = b$
 따라서 $a = -\log_2 3 - 1$, $b = \log_2 3$ 이므로
 $a + b = -\log_2 3 - 1 + \log_2 3 = -1$

13 답 3850

풀이 $3.5855 = 3 + 0.5855 = \log 10^3 + \log 3.85$
 $= \log (1000 \times 3.85) = \log 3850$
 따라서 $\log x = \log 3850$ 이므로 $x = 3850$

14 답 24자리

풀이 3^{100} 은 48자리 정수이므로 $47 \leq \log 3^{100} < 48$
 $47 \leq 100 \log 3 < 48 \quad \therefore 0.47 \leq \log 3 < 0.48$
 5^{100} 은 70자리 정수이므로 $69 \leq \log 5^{100} < 70$
 $69 \leq 100 \log 5 < 70 \quad \therefore 0.69 \leq \log 5 < 0.70$
 $\log 15^{20} = 20 \log 15 = 20(\log 3 + \log 5)$ 이고
 $1.16 \leq \log 3 + \log 5 < 1.18$ 이므로
 $23.2 \leq 20(\log 3 + \log 5) < 23.6$
 $\therefore 23.2 \leq \log 15^{20} < 23.6$
 따라서 $\log 15^{20}$ 의 정수 부분이 23이므로 15^{20} 은 24자리 정수이다.

15 답 1

풀이 $\log 3^{40} = 40 \log 3 = 40 \times 0.4771 = 19.084$
 이때 소수 부분은 0.084이고, $\log 1 = 0$, $\log 2 = 0.3010$
 이므로
 $\log 1 < (\text{소수 부분}) < \log 2$
 따라서 3^{40} 의 최고 자리의 숫자는 1이다.

16 답 -8

풀이 $\log a$ 의 정수 부분을 n , 소수 부분을 α 라고 하면
 n 은 정수이고 $0 \leq \alpha < 1$ 이다.
 n, α 가 이차방정식 $3x^2 + 10x + k = 0$ 의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $n + \alpha = -\frac{10}{3}$, $n\alpha = \frac{k}{3}$
 $-\frac{10}{3} = -4 + \frac{2}{3}$ 이므로
 $n = -4$, $\alpha = \frac{2}{3}$
 $\therefore k = 3n\alpha = 3 \times (-4) \times \frac{2}{3} = -8$

I-2 | 지수함수와 로그함수

034-062쪽

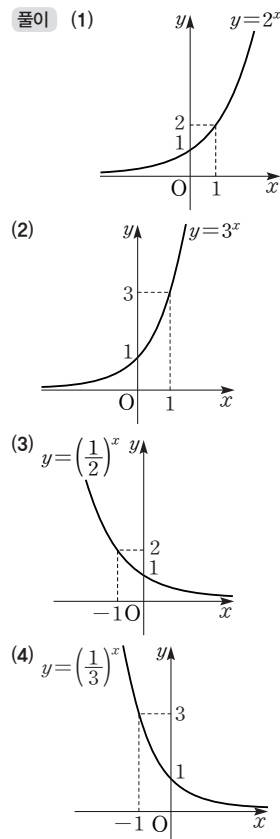
01 답 (1) 8 (2) $\sqrt{2}$ (3) $\frac{1}{2}$

풀이 (1) $f(3) = 2^3 = 8$
 (2) $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$
 (3) $f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

02 답 (1) 1 (2) $\frac{1}{27}$ (3) 9

풀이 (1) $f(0) = \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$
 (2) $f(3) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$
 (3) $f(-2) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2 = 9$

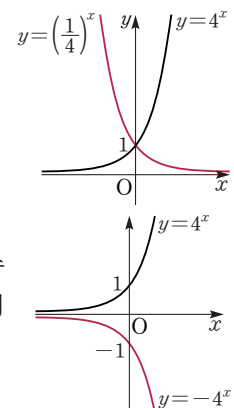
03 답 풀이 참조



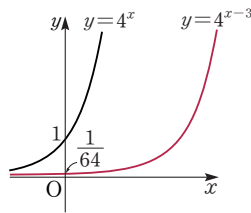
04 답 풀이 참조

풀이 (1) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x = 4^{-x}$ 이므로
 함수 $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ 의 그래프는
 함수 $y = 4^x$ 의 그래프를 y 축에
 대하여 대칭이동한 것이다.

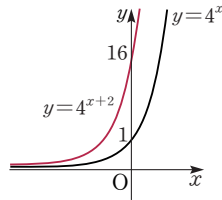
(2) $y = -4^x$ 에서 $-y = 4^x$ 이므로
 함수 $y = -4^x$ 의 그래프는 함수
 $y = 4^x$ 의 그래프를 x 축에 대하여
 대칭이동한 것이다.



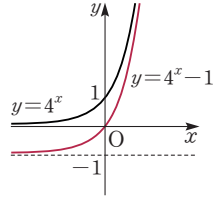
- (3) 함수 $y=4^{x-3}$ 의 그래프는
함수 $y=4^x$ 의 그래프를 x 축
의 방향으로 3만큼 평행이동
한 것이다.



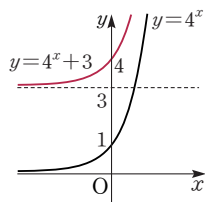
- (4) 함수 $y=4^{x+2}$ 의 그래프는
함수 $y=4^x$ 의 그래프를 x 축의
방향으로 -2만큼 평행이동한
것이다.



- (5) $y=4^x-1$ 에서 $y+1=4^x$ 이므로
함수 $y=4^x-1$ 의 그래프는 함수
 $y=4^x$ 의 그래프를 y 축의 방
향으로 -1만큼 평행이동한 것
이다.



- (6) $y=4^x+3$ 에서 $y-3=4^x$ 이므로
함수 $y=4^x+3$ 의 그래프는 함수
 $y=4^x$ 의 그래프를 y 축의 방
향으로 3만큼 평행이동한 것이다.



05 답 (1) 그래프는 풀이 참조.

치역: $\{y|y>1\}$, 점근선의 방정식: $y=1$

- (2) 그래프는 풀이 참조.

치역: $\{y|y>-2\}$, 점근선의 방정식: $y=-2$

- (3) 그래프는 풀이 참조.

치역: $\{y|y>2\}$, 점근선의 방정식: $y=2$

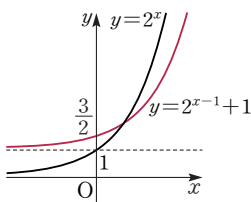
- (4) 그래프는 풀이 참조.

치역: $\{y|y>-1\}$, 점근선의 방정식: $y=-1$

- (5) 그래프는 풀이 참조.

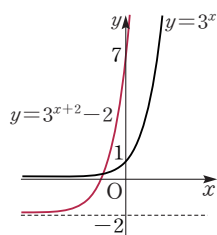
치역: $\{y|y>-3\}$, 점근선의 방정식: $y=-3$

- 풀이** (1) 함수 $y=2^{x-1}+1$ 의
그래프는 함수 $y=2^x$ 의 그
래프를 x 축의 방향으로 1만
큼, y 축의 방향으로 1만큼
평행이동한 것이므로 오른
쪽 그림과 같다.



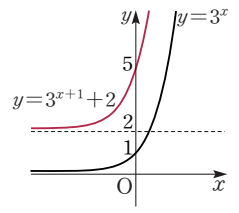
따라서 치역은 $\{y|y>3/2\}$ 이고, 점근선의 방정식은 $y=3/2$ 이다.

- (2) 함수 $y=3^{x+2}-2$ 의 그래프는
함수 $y=3^x$ 의 그래프를 x 축의
방향으로 -2만큼, y 축의 방
향으로 -2만큼 평행이동한 것이
므로 오른쪽 그림과 같다.

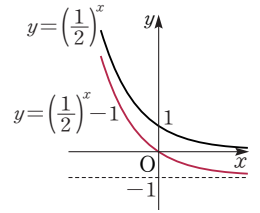


따라서 치역은 $\{y|y>-2\}$ 이
고, 점근선의 방정식은 $y=-2$ 이다.

- (3) 함수 $y=3^{x+1}+2$ 의 그래프는
함수 $y=3^x$ 의 그래프를 x 축의
방향으로 -1만큼, y 축의 방
향으로 2만큼 평행이동한 것
이므로 오른쪽 그림과 같다.
따라서 치역은 $\{y|y>2\}$ 이고,
점근선의 방정식은 $y=2$ 이다.



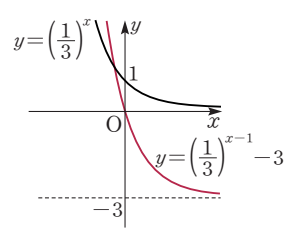
- (4) 함수 $y=(\frac{1}{2})^x-1$ 의 그래
프는 함수 $y=(\frac{1}{2})^x$ 의 그래
프를 y 축의 방향으로 -1만
큼 평행이동한 것이므로 오
른쪽 그림과 같다.



따라서 치역은 $\{y|y>-1\}$ 이고, 점근선의 방정식은
 $y=-1$ 이다.

- (5) 함수 $y=(\frac{1}{3})^{x-1}-3$ 의

그래프는 함수 $y=(\frac{1}{3})^x$
의 그래프를 x 축의 방
향으로 1만큼, y 축의 방
향으로 -3만큼 평행이동
한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 치역은 $\{y|y>-3\}$ 이고, 점근선의 방정식은
 $y=-3$ 이다.

06 답 $y=-2^{x+2}-1$

풀이 함수 $y=2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2만큼, y
축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프의 식은
 $y-1=2^{x+2} \quad \therefore y=2^{x+2}+1$

함수 $y=2^{x+2}+1$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 그
래프의 식은 $-y=2^{x+2}+1$
 $\therefore y=-2^{x+2}-1$

07 답 $y=-3^{x-1}-1$

풀이 함수 $y=3^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의
방향으로 1만큼 평행이동한 그래프의 식은
 $y-1=3^{x-1} \quad \therefore y=3^{x-1}+1$

함수 $y=3^{x-1}+1$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 그
래프의 식은 $-y=3^{x-1}+1$
 $\therefore y=-3^{x-1}-1$

08 답 $y=4^{x+1}-2$

풀이 어떤 함수의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의
방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식이 $y=4^x$ 이므로 함수
 $y=4^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1만큼, y 축의 방
향으로 -2만큼 평행이동하면 원래 함수의 그래프와 일치한
다.

따라서 원래 함수의 식은 $y+2=4^{x+1}$
 $\therefore y=4^{x+1}-2$

09 답 ㄱ, ㄷ

풀이 ㄱ. a 의 값에 관계없이 항상 점 $(1, a)$ 를 지난다.

(거짓)

ㄴ. 점근선의 방정식은 $y=0$, 즉 x 축이다. (참)

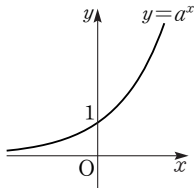
ㄷ. 치역이 양의 실수 전체의 집합이므로 제3사분면과 제4사분면을 지나지 않는다. (거짓)

따라서 옳지 않은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

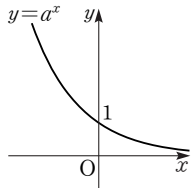
10 답 ㄴ, ㄷ

풀이 $y=a^x$ 의 그래프를 그려 보면

(i) $a>1$ 일 때



(ii) $0<a<1$ 일 때



ㄱ. $0<a<1$ 인 경우에는 $x>0$ 일 때 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다. (거짓)

ㄴ. 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 양의 실수 전체의 집합이다. (참)

ㄷ. 제1사분면과 제2사분면을 지난다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

11 답 (1) $\frac{1}{8}<\sqrt[4]{32}<4^{\frac{3}{2}}$

(2) $\sqrt[3]{4}<8^7<4^{11}$

(3) $4^{0.5}<\sqrt[3]{16}<\sqrt{8}$

(4) $\sqrt[3]{0.01}<\sqrt[5]{0.001}<\sqrt{0.1}$

(5) $\sqrt{\frac{1}{8}}<\sqrt[3]{\frac{1}{16}}<\sqrt[6]{\frac{1}{32}}$

(6) $\sqrt[3]{\frac{1}{9}}<\sqrt[4]{27}<\sqrt[5]{81}$

풀이 (1) $\frac{1}{8}, 4^{\frac{3}{2}}, \sqrt[4]{32}$ 를 밑이 2인 거듭제곱 꼴로 나타내면

$$\frac{1}{8}=2^{-3}, 4^{\frac{3}{2}}=(2^2)^{\frac{3}{2}}=2^3, \sqrt[4]{32}=\sqrt[4]{2^5}=2^{\frac{5}{4}}$$

$-3<\frac{5}{4}<3$ 이고, 함수 $y=2^x$ 은 x 의 값이 증가할 때 y 의 값도 증가하므로

$$2^{-3}<2^{\frac{5}{4}}<2^3 \quad \therefore \frac{1}{8}<\sqrt[4]{32}<4^{\frac{3}{2}}$$

(2) $4^{11}, 8^7, \sqrt[3]{4}$ 를 밑이 2인 거듭제곱 꼴로 나타내면

$$4^{11}=(2^2)^{11}=2^{22}, 8^7=(2^3)^7=2^{21}, \sqrt[3]{4}=(2^2)^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{2}{3}}$$

$\frac{2}{3}<21<22$ 이고, 함수 $y=2^x$ 은 x 의 값이 증가할 때 y 의 값도 증가하므로

$$2^{\frac{2}{3}}<2^{21}<2^{22} \quad \therefore \sqrt[3]{4}<8^7<4^{11}$$

(3) $\sqrt{8}, \sqrt[3]{16}, 4^{0.5}$ 을 밑이 2인 거듭제곱 꼴로 나타내면

$$\sqrt{8}=(2^3)^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{3}{2}}, \sqrt[3]{16}=(2^4)^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{4}{3}}, 4^{0.5}=(2^2)^{\frac{1}{2}}=2$$

$1<\frac{4}{3}<\frac{3}{2}$ 이고, 함수 $y=2^x$ 은 x 의 값이 증가할 때 y 의 값도 증가하므로

$$2<2^{\frac{4}{3}}<2^{\frac{3}{2}} \quad \therefore 4^{0.5}<\sqrt[3]{16}<\sqrt{8}$$

(4) $\sqrt{0.1}, \sqrt[3]{0.01}, \sqrt[5]{0.001}$ 을 밑이 $\frac{1}{10}$ 인 거듭제곱 꼴로 나타

내면

$$\sqrt{0.1}=\left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\sqrt[3]{0.01}=\left(\frac{1}{100}\right)^{\frac{1}{3}}=\left[\left(\frac{1}{10}\right)^2\right]^{\frac{1}{3}}=\left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{2}{3}},$$

$$\sqrt[5]{0.001}=\left(\frac{1}{1000}\right)^{\frac{1}{5}}=\left[\left(\frac{1}{10}\right)^3\right]^{\frac{1}{5}}=\left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{3}{5}}$$

$\frac{1}{2}<\frac{3}{5}<\frac{2}{3}$ 이고, 함수 $y=\left(\frac{1}{10}\right)^x$ 은 x 의 값이 증가할 때

y 의 값은 감소하므로

$$\left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{2}{3}}<\left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{3}{5}}<\left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \sqrt[3]{0.01}<\sqrt[5]{0.001}<\sqrt{0.1}$$

(5) $\sqrt{\frac{1}{8}}, \sqrt[3]{\frac{1}{16}}, \sqrt[6]{\frac{1}{32}}$ 을 밑이 $\frac{1}{2}$ 인 거듭제곱 꼴로 나타내면

$$\sqrt{\frac{1}{8}}=\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{2}}=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}},$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{16}}=\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{3}}=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^4\right]^{\frac{1}{3}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{3}},$$

$$\sqrt[6]{\frac{1}{32}}=\left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{6}}=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^5\right]^{\frac{1}{6}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{6}}$$

$\frac{5}{6}<\frac{4}{3}<\frac{3}{2}$ 이고, 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 은 x 의 값이 증가할 때

y 의 값은 감소하므로

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{3}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{6}}$$

$$\therefore \sqrt{\frac{1}{8}}<\sqrt[3]{\frac{1}{16}}<\sqrt[6]{\frac{1}{32}}$$

(6) $\sqrt[4]{27}, \sqrt[5]{81}, \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$ 을 밑이 3인 거듭제곱 꼴로 나타내면

$$\sqrt[4]{27}=(27)^{\frac{1}{4}}=(3^3)^{\frac{1}{4}}=3^{\frac{3}{4}},$$

$$\sqrt[5]{81}=(81)^{\frac{1}{5}}=(3^4)^{\frac{1}{5}}=3^{\frac{4}{5}},$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{9}}=\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{3}}=(3^{-2})^{\frac{1}{3}}=3^{-\frac{2}{3}}$$

$-\frac{2}{3}<\frac{3}{4}<\frac{4}{5}$ 이고, 함수 $y=3^x$ 은 x 의 값이 증가할 때

y 의 값도 증가하므로

$$3^{-\frac{2}{3}}<3^{\frac{3}{4}}<3^{\frac{4}{5}}$$

$$\therefore \sqrt[3]{\frac{1}{9}}<\sqrt[4]{27}<\sqrt[5]{81}$$

12 답 (1) 최댓값: 5, 최솟값: -2

(2) 최댓값: 6, 최솟값: $\frac{5}{2}$

(3) 최댓값: 79, 최솟값: $-\frac{5}{3}$

풀이 (1) $y=2^{x+1}-3$ 에서 밑이 2이고 $2>1$ 이므로

$-1\leq x\leq 2$ 에서 함수 $y=2^{x+1}-3$ 은

$x=2$ 일 때 최대이고, 최댓값은 $2^{2+1}-3=5$

$x=-1$ 일 때 최소이고, 최솟값은 $2^{-1+1}-3=-2$

(2) $y=2^{x-2}+2$ 에서 밑이 2이고 $2>1$ 이므로

$1\leq x\leq 4$ 에서 함수 $y=2^{x-2}+2$ 는

$x=4$ 일 때 최대이고, 최댓값은 $2^{4-2}+2=6$

$x=1$ 일 때 최소이고, 최솟값은 $2^{1-2}+2=\frac{5}{2}$

(3) $y=3^{x+1}-2$ 에서 밑이 3이고 $3>1$ 이므로
 $-2 \leq x \leq 3$ 에서 함수 $y=3^{x+1}-2$ 는
 $x=3$ 일 때 최대이고, 최댓값은 $3^{3+1}-2=79$
 $x=-2$ 일 때 최소이고, 최솟값은 $3^{-2+1}-2=-\frac{5}{3}$

13 답 (1) 최댓값: $-\frac{1}{2}$, 최솟값: $-\frac{31}{32}$

(2) 최댓값: -3 , 최솟값: $-\frac{96}{25}$

풀이 (1) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}-1$ 에서 밑이 $\frac{1}{2}$ 이고 $0<\frac{1}{2}<1$ 이므로

$-1 \leq x \leq 3$ 에서 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}-1$ 은

$x=-1$ 일 때 최대이고, 최댓값은 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1+2}-1=-\frac{1}{2}$

$x=3$ 일 때 최소이고, 최솟값은 $\left(\frac{1}{2}\right)^{3+2}-1=-\frac{31}{32}$

(2) $y=5^{-x} \times 2^x - 4$ 에서 $y=\left(\frac{2}{5}\right)^x - 4$

이때 밑이 $\frac{2}{5}$ 이고 $0<\frac{2}{5}<1$ 이므로

$0 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $y=5^{-x} \times 2^x - 4$ 는

$x=0$ 일 때 최대이고, 최댓값은 $\left(\frac{2}{5}\right)^0 - 4 = -3$

$x=2$ 일 때 최소이고, 최솟값은 $\left(\frac{2}{5}\right)^2 - 4 = -\frac{96}{25}$

14 답 (1) 최댓값: 5, 최솟값: $\frac{11}{4}$

(2) 최댓값: 40, 최솟값: -9

(3) 최댓값: -5 , 최솟값: -21

(4) 최댓값: 13, 최솟값: 2

풀이 (1) $y=4^x - 2^x + 3 = (2^x)^2 - 2^x + 3$ 이므로

$2^x = t$ ($t>0$)로 놓으면

$y=t^2-t+3=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}$

이때 $-1 \leq x \leq 1$ 에서 $2^{-1} \leq 2^x \leq 2 \quad \therefore \frac{1}{2} \leq t \leq 2$

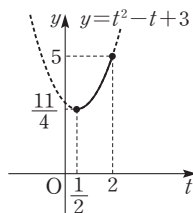
따라서 $\frac{1}{2} \leq t \leq 2$ 에서 함수 $y=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}$ 은

$t=2$ 일 때 최대이고, 최댓값은

$\left(2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}=5$

$t=\frac{1}{2}$ 일 때 최소이고, 최솟값은

$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}=\frac{11}{4}$



(2) $y=9^x - 4 \times 3^x - 5$

$= (3^x)^2 - 4 \times 3^x - 5$

이므로 $3^x = t$ ($t>0$)로 놓으면

$y=t^2-4t-5$

$= (t-2)^2-9$

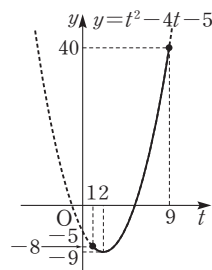
이때 $0 \leq x \leq 2$ 에서

$3^0 \leq 3^x \leq 3^2 \quad \therefore 1 \leq t \leq 9$

따라서 $1 \leq t \leq 9$ 에서 함수 $y=(t-2)^2-9$ 는

$t=9$ 일 때 최대이고, 최댓값은 $(9-2)^2-9=40$

$t=2$ 일 때 최소이고, 최솟값은 $(2-2)^2-9=-9$



(3) $y=4^x - 2^{x+3} - 5$

$= (2^x)^2 - 8 \times 2^x - 5$

이므로 $2^x = t$ ($t>0$)로 놓으면

$y=t^2-8t-5$

$= (t-4)^2-21$

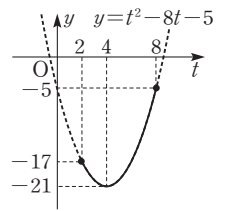
이때 $1 \leq x \leq 3$ 에서

$2 \leq 2^x \leq 2^3 \quad \therefore 2 \leq t \leq 8$

따라서 $2 \leq t \leq 8$ 에서 함수 $y=(t-4)^2-21$ 은

$t=8$ 일 때 최대이고, 최댓값은 $(8-4)^2-21=-5$

$t=4$ 일 때 최소이고, 최솟값은 $(4-4)^2-21=-21$



(4) $y=4^{-x} - \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 1$

$= \left[\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]^2 - \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$

이므로 $\left(\frac{1}{2}\right)^x = t$ ($t>0$)로 놓

으면

$y=t^2-\frac{1}{2}t-1$

$= \left(t-\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{17}{16}$

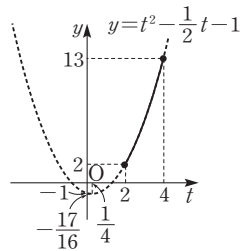
이때 $-2 \leq x \leq -1$ 에서

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \quad \therefore 2 \leq t \leq 4$

따라서 $2 \leq t \leq 4$ 에서 함수 $y=\left(t-\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{17}{16}$ 은

$t=4$ 일 때 최대이고, 최댓값은 $\left(4-\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{17}{16}=13$

$t=2$ 일 때 최소이고, 최솟값은 $\left(2-\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{17}{16}=2$



15 답 (1) 최댓값: 없다., 최솟값: $\frac{1}{9}$

(2) 최댓값: 4, 최솟값: 없다.

(3) 최댓값: 32, 최솟값: 2

풀이 (1) 함수 $y=3^{x^2-2x-1}$ 에서 밑이 3이고 $3>1$ 이므로

x^2-2x-1 이 최대일 때 y 도 최대, x^2-2x-1 이 최소일 때 y 도 최소가 된다.

$x^2-2x-1=(x-1)^2-2$ 이므로 x^2-2x-1 의 최댓값은 없고, $x=1$ 일 때 최솟값은 -2 이다.

따라서 함수 $y=3^{x^2-2x-1}$ 의 최댓값은 없고, 최솟값은 $3^{-2}=\frac{1}{9}$ 이다.

(2) 함수 $y=2^{-x^2+2x+1}$ 에서 밑이 2이고 $2>1$ 이므로

$-x^2+2x+1$ 이 최대일 때 y 도 최대, $-x^2+2x+1$ 이 최소일 때 y 도 최소가 된다.

$-x^2+2x+1=-(x-1)^2+2$ 이므로 $-x^2+2x+1$ 의 최솟값은 없고, $x=1$ 일 때 최댓값은 2이다.

따라서 함수 $y=2^{-x^2+2x+1}$ 의 최댓값은 $2^2=4$ 이고, 최솟값은 없다.

(3) 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+4x-5}$ 에서 밑이 $\frac{1}{2}$ 이고 $0<\frac{1}{2}<1$ 이므로

$-x^2+4x-5$ 가 최대일 때 y 는 최소, $-x^2+4x-5$ 가 최소일 때 y 는 최대가 된다.

$$-x^2+4x-5=-(x-2)^2-1$$

이므로 $1 \leq x \leq 4$ 에서

$x=2$ 일 때 최댓값은

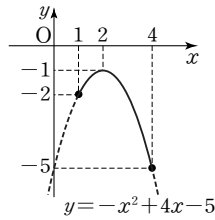
$$-(2-2)^2-1=-1,$$

$x=4$ 일 때 최솟값은

$$-(4-2)^2-1=-5이다.$$

따라서 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+4x-5}$ 의 최댓값은 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}=32$,

최솟값은 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2$ 이다.



16 답 (1) 4 (2) 32 (3) 16 (4) 18 (5) 54

풀이 (1) $2^x > 0$, $2^y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2^x + 2^y \geq 2\sqrt{2^x \times 2^y} = 2\sqrt{2^{x+y}} = 2\sqrt{2^2} = 4$$

(단, 등호는 $2^x = 2^y$, 즉 $x=y$ 일 때 성립한다.)

따라서 $2^x + 2^y$ 의 최솟값은 4이다.

(2) $2^x > 0$, $4^y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2^x + 4^y \geq 2\sqrt{2^x \times 4^y} = 2\sqrt{2^x \times 2^{2y}} = 2\sqrt{2^{x+2y}} \\ = 2\sqrt{2^8} = 32$$

(단, 등호는 $2^x = 4^y$, 즉 $x=2y$ 일 때 성립한다.)

따라서 $2^x + 4^y$ 의 최솟값은 32이다.

(3) $8^x > 0$, $2^y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$8^x + 2^y \geq 2\sqrt{8^x \times 2^y} = 2\sqrt{2^{3x} \times 2^y} = 2\sqrt{2^{3x+y}} \\ = 2\sqrt{2^6} = 16$$

(단, 등호는 $8^x = 2^y$, 즉 $3x=y$ 일 때 성립한다.)

따라서 $8^x + 2^y$ 의 최솟값은 16이다.

(4) $3^x > 0$, $81^y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$3^x + 81^y \geq 2\sqrt{3^x \times 81^y} = 2\sqrt{3^x \times 3^{4y}} = 2\sqrt{3^{x+4y}} \\ = 2\sqrt{3^4} = 18$$

(단, 등호는 $3^x = 81^y$, 즉 $x=4y$ 일 때 성립한다.)

따라서 $3^x + 81^y$ 의 최솟값은 18이다.

(5) $9^x > 0$, $3^y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$9^x + 3^y \geq 2\sqrt{9^x \times 3^y} = 2\sqrt{3^{2x} \times 3^y} = 2\sqrt{3^{2x+y}} \\ = 2\sqrt{3^6} = 54$$

(단, 등호는 $9^x = 3^y$, 즉 $2x=y$ 일 때 성립한다.)

따라서 $9^x + 3^y$ 의 최솟값은 54이다.

17 답 (1) 8 (2) 6 (3) 250

풀이 (1) $2^{2+x} > 0$, $2^{2-x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2^{2+x} + 2^{2-x} \geq 2\sqrt{2^{2+x} \times 2^{2-x}} = 2\sqrt{2^4} = 8$$

(단, 등호는 $2^{2+x} = 2^{2-x}$, 즉 $x=0$ 일 때 성립한다.)

따라서 함수 $y=2^{2+x} + 2^{2-x}$ 의 최솟값은 8이다.

(2) $3^{1+x} > 0$, $3^{1-x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$3^{1+x} + 3^{1-x} \geq 2\sqrt{3^{1+x} \times 3^{1-x}} = 2\sqrt{3^2} = 6$$

(단, 등호는 $3^{1+x} = 3^{1-x}$, 즉 $x=0$ 일 때 성립한다.)

따라서 함수 $y=3^{1+x} + 3^{1-x}$ 의 최솟값은 6이다.

(3) $5^{3+x} > 0$, $5^{3-x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$5^{3+x} + 5^{3-x} \geq 2\sqrt{5^{3+x} \times 5^{3-x}} = 2\sqrt{5^6} = 250$$

(단, 등호는 $5^{3+x} = 5^{3-x}$, 즉 $x=0$ 일 때 성립한다.)

따라서 함수 $y=5^{3+x} + 5^{3-x}$ 의 최솟값은 250이다.

18 답 (1) 3 (2) 4

풀이 (1) $3^{a+x} > 0$, $3^{a-x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$3^{a+x} + 3^{a-x} \geq 2\sqrt{3^{a+x} \times 3^{a-x}} = 2\sqrt{3^{2a}}$$

(단, 등호는 $3^{a+x} = 3^{a-x}$, 즉 $x=0$ 일 때 성립한다.)

따라서 $2\sqrt{3^{2a}} = 54$ 이므로 $\sqrt{3^{2a}} = 27$, $3^{2a} = 27^2$

$$3^{2a} = 3^6, 2a = 6 \quad \therefore a = 3$$

(2) $2^{a+x} > 0$, $2^{a-x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2^{a+x} + 2^{a-x} \geq 2\sqrt{2^{a+x} \times 2^{a-x}} = 2\sqrt{2^{2a}}$$

(단, 등호는 $2^{a+x} = 2^{a-x}$, 즉 $x=0$ 일 때 성립한다.)

따라서 $2\sqrt{2^{2a}} = 32$ 이므로 $\sqrt{2^{2a}} = 16$, $2^{2a} = 16^2$

$$2^{2a} = 2^8, 2a = 8 \quad \therefore a = 4$$

19 답 (1) $x=-5$ (2) $x=3$ (3) $x=4$

$$(4) x=-2 \quad (5) x=-\frac{5}{4} \quad (6) x=0 \text{ 또는 } x=5$$

풀이 (1) $2^{x+1} = \frac{1}{16}$ 에서 밑을 2로 통일하면

$$2^{x+1} = 2^{-4} \text{이므로}$$

$$x+1 = -4 \quad \therefore x = -5$$

(2) $2^{5-x} = 4^{x-2}$ 에서 밑을 2로 통일하면

$$2^{5-x} = 2^{2(x-2)} \text{이므로}$$

$$5-x = 2x-4, -3x = -9 \quad \therefore x = 3$$

(3) $\frac{4^x}{2} = 2^{x+3}$ 에서 밑을 2로 통일하면

$$2^{2x} \times 2^{-1} = 2^{x+3}, \text{ 즉 } 2^{2x-1} = 2^{x+3} \text{이므로}$$

$$2x-1 = x+3 \quad \therefore x = 4$$

(4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x+2} = 3^{2x}$ 에서 밑을 3으로 통일하면

$$(3^{-1})^{-x+2} = 3^{2x}, \text{ 즉 } 3^{x-2} = 3^{2x} \text{이므로}$$

$$x-2 = 2x \quad \therefore x = -2$$

(5) $2^{2x} = \frac{1}{4\sqrt{2}}$ 에서 밑을 2로 통일하면

$$2^{2x} = \frac{1}{2^{\frac{5}{2}}}, \text{ 즉 } 2^{2x} = 2^{-\frac{5}{2}} \text{이므로}$$

$$2x = -\frac{5}{2} \quad \therefore x = -\frac{5}{4}$$

(6) $25^x = 5^{x^2-3x}$ 에서 밑을 5로 통일하면

$$5^{2x} = 5^{x^2-3x} \text{이므로}$$

$$2x = x^2 - 3x, x^2 - 5x = 0$$

$$x(x-5) = 0 \quad \therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 5$$

- 20** **답** (1) $x=1$ 또는 $x=10$ (2) $x=1$ 또는 $x=2$
 (3) $x=1$ 또는 $x=5$ (4) $x=1$ 또는 $x=2$
 (5) $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$ (6) $x=2$ 또는 $x=3$
 (7) $x=0$ 또는 $x=4$ (8) $x=0$ 또는 $x=6$
 (9) $x=3$ 또는 $x=5$ (10) $x=5$ 또는 $x=30$

풀이 (1) $x^{x-5}=x^{15-x}$ 에서 $x-5=15-x$, $2x=20$

$$\therefore x=10$$

또, $x=1$ 이면 주어진 방정식은 $1^{-4}=1^{14}=1$ 로 등식이 성립한다.

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=10$$

(2) $x^{2x+3}=x^{9-x}$ 에서 $2x+3=9-x$

$$3x=6 \quad \therefore x=2$$

또, $x=1$ 이면 주어진 방정식은 $1^5=1^8=1$ 로 등식이 성립한다.

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=2$$

(3) $x^{3x-2}=x^{23-2x}$ 에서 $3x-2=23-2x$

$$5x=25 \quad \therefore x=5$$

또, $x=1$ 이면 주어진 방정식은 $1^1=1^{21}=1$ 로 등식이 성립한다.

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=5$$

(4) $(x^x)^x=x^{2x}$ 에서 $x^x=x^{2x}$

$$x^2=2x \text{에서 } x^2-2x=0, x(x-2)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=2$$

그런데 $x>0$ 이므로 $x=2$

또, $x=1$ 이면 주어진 방정식은

$$(1^1)^1=1^2=1 \text{로 등식이 성립한다.}$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=2$$

(5) $x^{x^2}=x^{5x-6}$ 에서 $x^2=5x-6$

$$x^2-5x+6=0, (x-2)(x-3)=0$$

$$\therefore x=2 \text{ 또는 } x=3$$

또, $x=1$ 이면 주어진 방정식은

$$1^1=1^{-1}=1 \text{로 등식이 성립한다.}$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=2 \text{ 또는 } x=3$$

(6) $(x-1)^{2x+3}=(x-1)^{x^2}$ 에서 $2x+3=x^2$

$$x^2-2x-3=0, (x+1)(x-3)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=3$$

그런데 $x>1$ 이므로 $x=3$

또, $x-1=1$, 즉 $x=2$ 이면 주어진 방정식은

$$1^7=1^4=1 \text{로 등식이 성립한다.}$$

$$\therefore x=2 \text{ 또는 } x=3$$

(7) $(x+4)^x=8^x$ 에서 $x+4=8 \quad \therefore x=4$

또, $x=0$ 이면 주어진 방정식은 $4^0=8^0=1$ 로 등식이 성립한다.

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=4$$

(8) $(x+1)^x=7^x$ 에서 $x+1=7 \quad \therefore x=6$

또, $x=0$ 이면 주어진 방정식은 $1^0=7^0=1$ 로 등식이 성립한다.

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=6$$

(9) $(x-2)^{x-3}=3^{x-3}$ 에서 $x-2=3 \quad \therefore x=5$

또, $x-3=0$, 즉 $x=3$ 이면 주어진 방정식은

$$1^0=3^0=1 \text{로 등식이 성립한다.}$$

$$\therefore x=3 \text{ 또는 } x=5$$

(10) $(x-3)^{x-5}=27^{x-5}$ 에서 $x-3=27 \quad \therefore x=30$

또, $x-5=0$, 즉 $x=5$ 이면 주어진 방정식은

$$2^0=27^0=1 \text{로 등식이 성립한다.}$$

$$\therefore x=5 \text{ 또는 } x=30$$

21 **답** (1) $x=0$ 또는 $x=1$ (2) $x=1$ 또는 $x=2$

$$(3) x=2 \quad (4) x=3 \quad (5) x=2$$

$$(6) x=2 \quad (7) x=1 \quad (8) x=-3 \text{ 또는 } x=-1$$

$$(9) x=2 \text{ 또는 } x=3 \quad (10) x=0$$

풀이 (1) $4^x-3 \times 2^x+2=0$ 에서 $(2^x)^2-3 \times 2^x+2=0$

$$2^x=t \ (t>0) \text{로 놓으면 } t^2-3t+2=0$$

$$(t-1)(t-2)=0 \quad \therefore t=1 \text{ 또는 } t=2$$

따라서 $2^x=1$ 에서 $x=0$, $2^x=2$ 에서 $x=1$

(2) $4^x-6 \times 2^x+8=0$ 에서 $(2^x)^2-6 \times 2^x+8=0$

$$2^x=t \ (t>0) \text{로 놓으면 } t^2-6t+8=0$$

$$(t-2)(t-4)=0 \quad \therefore t=2 \text{ 또는 } t=4$$

따라서 $2^x=2$ 에서 $x=1$, $2^x=4$ 에서 $x=2$

(3) $9^x-3^{x+1}=54$ 에서 $(3^x)^2-3 \times 3^x-54=0$

$$3^x=t \ (t>0) \text{로 놓으면 } t^2-3t-54=0$$

$$(t+6)(t-9)=0 \quad \therefore t=-6 \text{ 또는 } t=9$$

그런데 $t>0$ 이므로 $t=9$

따라서 $3^x=9$ 에서 $x=2$

(4) $4^x-3 \times 2^{x+1}-16=0$ 에서 $(2^x)^2-6 \times 2^x-16=0$

$$2^x=t \ (t>0) \text{로 놓으면 } t^2-6t-16=0$$

$$(t+2)(t-8)=0 \quad \therefore t=-2 \text{ 또는 } t=8$$

그런데 $t>0$ 이므로 $t=8$

따라서 $2^x=8$ 에서 $x=3$

(5) $4^x-2^{x+3}+16=0$ 에서 $(2^x)^2-8 \times 2^x+16=0$

$$2^x=t \ (t>0) \text{로 놓으면 } t^2-8t+16=0$$

$$(t-4)^2=0 \quad \therefore t=4$$

따라서 $2^x=4$ 에서 $x=2$

(6) $3^{2x}-2 \times 3^{x+1}-27=0$ 에서 $(3^x)^2-6 \times 3^x-27=0$

$$3^x=t \ (t>0) \text{로 놓으면 } t^2-6t-27=0$$

$$(t+3)(t-9)=0 \quad \therefore t=-3 \text{ 또는 } t=9$$

그런데 $t>0$ 이므로 $t=9$

따라서 $3^x=9$ 에서 $x=2$

(7) $25^x-3 \times 5^x-10=0$ 에서 $(5^x)^2-3 \times 5^x-10=0$

$$5^x=t \ (t>0) \text{로 놓으면 } t^2-3t-10=0$$

$$(t+2)(t-5)=0 \quad \therefore t=-2 \text{ 또는 } t=5$$

그런데 $t>0$ 이므로 $t=5$

따라서 $5^x=5$ 에서 $x=1$

(8) $4^{-x}-5 \times 2^{-x+1}+16=0$ 에서

$$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2-10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x+16=0$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t \ (t>0) \text{로 놓으면 } t^2-10t+16=0$$

$$(t-2)(t-8)=0 \quad \therefore t=2 \text{ 또는 } t=8$$

$$\text{따라서 } \left(\frac{1}{2}\right)^x=2 \text{에서 } x=-1, \left(\frac{1}{2}\right)^x=8 \text{에서 } x=-3$$

$$(9) 2^x+32 \times 2^{-x}=12 \text{에서}$$

$$2^x=t \ (t>0) \text{로 놓으면 } 2^{-x}=\frac{1}{t}$$

$$\text{따라서 주어진 방정식은 } t+32 \times \frac{1}{t}-12=0$$

$$t^2-12t+32=0, (t-4)(t-8)=0$$

$$\therefore t=4 \text{ 또는 } t=8$$

$$\text{따라서 } 2^x=4 \text{에서 } x=2, 2^x=8 \text{에서 } x=3$$

$$(10) 2^{3x+2}+5 \times 4^x-2^{x+2}-5=0 \text{에서}$$

$$4 \times (2^x)^3+5 \times (2^x)^2-4 \times 2^x-5=0$$

$$2^x=t \ (t>0) \text{로 놓으면}$$

$$4t^3+5t^2-4t-5=0$$

$$(t-1)(4t^2+9t+5)=0$$

$$(t-1)(t+1)(4t+5)=0$$

$$\therefore t=-\frac{5}{4} \text{ 또는 } t=-1 \text{ 또는 } t=1$$

$$\text{그런데 } t>0 \text{이므로 } t=1$$

$$\text{따라서 } 2^x=1 \text{에서 } x=0$$

22 답 (1) 1 (2) 1 (3) 9 (4) 25

$$\text{풀이 (1) } 9^x-4 \times 3^x+3=0 \text{에서 } (3^x)^2-4 \times 3^x+3=0$$

$$3^x=t \ (t>0) \text{로 놓으면 } t^2-4t+3=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{방정식 } 9^x-4 \times 3^x+3=0 \text{의 두 근이 } \alpha, \beta \text{이므로}$$

$$\textcircled{1} \text{의 두 근은 } 3^\alpha, 3^\beta \text{이다.}$$

$$\text{이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여}$$

$$3^\alpha \times 3^\beta = 3^{\alpha+\beta} = 3 \quad \therefore \alpha+\beta=1$$

$$(2) 16^x-5 \times 4^x+4=0 \text{에서 } (4^x)^2-5 \times 4^x+4=0$$

$$4^x=t \ (t>0) \text{로 놓으면 } t^2-5t+4=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{방정식 } 16^x-5 \times 4^x+4=0 \text{의 두 근이 } \alpha, \beta \text{이므로}$$

$$\textcircled{1} \text{의 두 근은 } 4^\alpha, 4^\beta \text{이다.}$$

$$\text{이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여}$$

$$4^\alpha \times 4^\beta = 4^{\alpha+\beta} = 4 \quad \therefore \alpha+\beta=1$$

$$(3) 4^x-2^{x+2}+4=0 \text{에서 } (2^x)^2-4 \times 2^x+4=0$$

$$2^x=t \ (t>0) \text{로 놓으면 } t^2-4t+4=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{방정식 } 4^x-2^{x+2}+4=0 \text{의 두 근이 } \alpha, \beta \text{이므로}$$

$$\textcircled{1} \text{의 두 근은 } 2^\alpha, 2^\beta \text{이다.}$$

$$\text{이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여}$$

$$2^\alpha \times 2^\beta = 2^{\alpha+\beta} = 4 = 2^2 \quad \therefore \alpha+\beta=2$$

$$\therefore 3^{\alpha+\beta} = 3^2 = 9$$

$$(4) 4^x-7 \times 2^x+12=0 \text{에서 } (2^x)^2-7 \times 2^x+12=0$$

$$2^x=t \ (t>0) \text{로 놓으면 } t^2-7t+12=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{방정식 } 4^x-7 \times 2^x+12=0 \text{의 두 근이 } \alpha, \beta \text{이므로}$$

$$\textcircled{1} \text{의 두 근은 } 2^\alpha, 2^\beta \text{이다.}$$

$$\text{이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여}$$

$$2^\alpha+2^\beta=7, 2^\alpha \times 2^\beta=12$$

$$\therefore 2^{2\alpha}+2^{2\beta}=(2^\alpha)^2+(2^\beta)^2=(2^\alpha+2^\beta)^2-2 \times 2^\alpha \times 2^\beta \\ =7^2-2 \times 12=49-24=25$$

23 답 11시간 후

$$\text{풀이 } 100 \text{마리의 박테리아가 } 6 \text{시간 후 } 6400 \text{마리가 되므로}$$

$$100a^6=6400, a^6=64$$

$$\therefore a=2$$

$$\text{따라서 } 1 \text{마리의 박테리아가 } x \text{시간 후 } 2^x \text{마리가 되므로}$$

$$100 \text{마리였던 박테리아가 } 204800 \text{마리가 되려면}$$

$$100 \times 2^x=204800, 2^x=2048$$

$$\therefore x=11$$

$$\text{즉, } 11 \text{시간 후에 } 204800 \text{마리가 된다.}$$

24 답 $\frac{25}{2}$ m

$$\text{풀이 물속 어느 지점의 깊이를 } d \text{ m라고 하면}$$

$$\text{표면의 밝기는 } I, \text{ 물속 } d \text{ m 지점의 밝기는 } \frac{1}{32}I \text{이므로}$$

$$\frac{1}{32}I = I \times 4^{-0.2d}, \frac{1}{2^5} = (2^2)^{-0.2d}$$

$$2^{-5} = 2^{-0.4d}, -5 = -0.4d$$

$$\therefore d = \frac{25}{2}$$

$$\text{따라서 이 지점의 깊이는 } \frac{25}{2} \text{ m이다.}$$

25 답 (1) $x > \frac{1}{2}$ (2) $x > -4$ (3) $x \leq 4$

$$(4) x > \frac{5}{4} \quad (5) -3 < x < 4 \quad (6) -5 < x < 4$$

$$\text{풀이 (1) } 8^x > 2^{x+1} \text{에서 } 2^{3x} > 2^{x+1}$$

$$\text{밑이 } 2 \text{이고 } 2 > 1 \text{이므로 } 3x > x+1$$

$$\therefore x > \frac{1}{2}$$

$$(2) 9^x > \left(\frac{1}{3}\right)^{4-x} \text{에서 } 3^{2x} > 3^{x-4}$$

$$\text{밑이 } 3 \text{이고 } 3 > 1 \text{이므로 } 2x > x-4$$

$$\therefore x > -4$$

$$(3) \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq \left(\frac{1}{16}\right)^{x-3} \text{에서 } \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{4x-12}$$

$$\text{밑이 } \frac{1}{2} \text{이고 } 0 < \frac{1}{2} < 1 \text{이므로 } x \geq 4x-12$$

$$-3x \geq -12 \quad \therefore x \leq 4$$

$$(4) 0.2^{x+1} < 0.008^{-x+2} \text{에서 } 0.2^{x+1} < 0.2^{-3x+6}$$

$$\text{밑이 } 0.2 \text{이고 } 0 < 0.2 < 1 \text{이므로 } x+1 > -3x+6$$

$$4x > 5 \quad \therefore x > \frac{5}{4}$$

$$(5) \frac{1}{27} < 3^x < 81 \text{에서 } 3^{-3} < 3^x < 3^4$$

$$\text{밑이 } 3 \text{이고 } 3 > 1 \text{이므로 } -3 < x < 4$$

$$(6) \frac{1}{16} < \left(\frac{1}{2}\right)^x < 32 \text{에서 } \left(\frac{1}{2}\right)^4 < \left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$$

$$\text{밑이 } \frac{1}{2} \text{이고 } 0 < \frac{1}{2} < 1 \text{이므로 } -5 < x < 4$$

$$\text{다른 풀이 } \frac{1}{16} < \left(\frac{1}{2}\right)^x < 32 \text{에서 밑을 } 2 \text{로 통일하면}$$

$$2^{-4} < 2^{-x} < 2^5$$

$$\text{밑이 } 2 \text{이고 } 2 > 1 \text{이므로 } -4 < -x < 5$$

$$\text{각 변에 } -1 \text{을 곱하면 } -5 < x < 4$$

- 26** **답** (1) (i) $0 < x \leq 1$ 또는 $x \geq 3$ (2) $1 < x < 3$
 (3) $1 \leq x \leq 2$ (4) $1 < x < 4$
 (5) $0 < x \leq 1$ 또는 $x \geq 3$ (6) $0 < x < 1$ 또는 $x > 3$
 (7) $1 \leq x \leq 5$ (8) $x > 1$
 (9) $0 \leq x \leq 1$ (10) $1 < x \leq 4$
- 풀이** (1) (i) $x > 1$ 일 때, 부등호의 방향이 그대로이므로
 $x-3 \geq 6-2x, 3x \geq 9 \quad \therefore x \geq 3$
 그런데 $x > 1$ 이므로 $x \geq 3$
 (ii) $0 < x < 1$ 일 때, 부등호의 방향이 바뀌므로
 $x-3 \leq 6-2x, 3x \leq 9 \quad \therefore x \leq 3$
 그런데 $0 < x < 1$ 이므로 $0 < x < 1$
 (iii) $x = 1$ 일 때, (좌변) $= 1^{-2} = 1$, (우변) $= 1^4 = 1$ 이므로
 주어진 부등식은 성립한다.
 (i), (ii), (iii)에서 $0 < x \leq 1$ 또는 $x \geq 3$
 (2) (i) $x > 1$ 일 때, 부등호의 방향이 그대로이므로
 $3x-1 < x+5, 2x < 6 \quad \therefore x < 3$
 그런데 $x > 1$ 이므로 $1 < x < 3$
 (ii) $0 < x < 1$ 일 때, 부등호의 방향이 바뀌므로
 $3x-1 > x+5, 2x > 6 \quad \therefore x > 3$
 그런데 $0 < x < 1$ 이므로 해가 없다.
 (iii) $x = 1$ 일 때, (좌변) $= 1^2 = 1$, (우변) $= 1^6 = 1$ 이므로
 주어진 부등식이 성립하지 않는다.
 (i), (ii), (iii)에서 $1 < x < 3$
 (3) (i) $x > 1$ 일 때, 부등호의 방향이 그대로이므로
 $2x \leq x+2 \quad \therefore x \leq 2$
 그런데 $x > 1$ 이므로 $1 < x \leq 2$
 (ii) $0 < x < 1$ 일 때, 부등호의 방향이 바뀌므로
 $2x \geq x+2 \quad \therefore x \geq 2$
 그런데 $0 < x < 1$ 이므로 해가 없다.
 (iii) $x = 1$ 일 때, (좌변) $= 1^2 = 1$, (우변) $= 1^3 = 1$ 이므로
 주어진 부등식은 성립한다.
 (i), (ii), (iii)에서 $1 \leq x \leq 2$
 (4) (i) $x > 1$ 일 때, 부등호의 방향이 그대로이므로
 $2x-1 < x+3 \quad \therefore x < 4$
 그런데 $x > 1$ 이므로 $1 < x < 4$
 (ii) $0 < x < 1$ 일 때, 부등호의 방향이 바뀌므로
 $2x-1 > x+3 \quad \therefore x > 4$
 그런데 $0 < x < 1$ 이므로 해가 없다.
 (iii) $x = 1$ 일 때, (좌변) $= 1^1 = 1$, (우변) $= 1^4 = 1$ 이므로
 주어진 부등식이 성립하지 않는다.
 (i), (ii), (iii)에서 $1 < x < 4$
 (5) (i) $x > 1$ 일 때, 부등호의 방향이 그대로이므로
 $x-1 \geq -x+5, 2x \geq 6 \quad \therefore x \geq 3$
 그런데 $x > 1$ 이므로 $x \geq 3$
 (ii) $0 < x < 1$ 일 때, 부등호의 방향이 바뀌므로
 $x-1 \leq -x+5, 2x \leq 6 \quad \therefore x \leq 3$
 그런데 $0 < x < 1$ 이므로 $0 < x < 1$
 (iii) $x = 1$ 일 때, (좌변) $= 1^0 = 1$, (우변) $= 1^4 = 1$ 이므로

- 주어진 부등식은 성립한다.
 (i), (ii), (iii)에서 $0 < x \leq 1$ 또는 $x \geq 3$
 (6) (i) $x > 1$ 일 때, 부등호의 방향이 그대로이므로
 $x^2 > 2x+3, x^2-2x-3 > 0$
 $(x+1)(x-3) > 0 \quad \therefore x < -1$ 또는 $x > 3$
 그런데 $x > 1$ 이므로 $x > 3$
 (ii) $0 < x < 1$ 일 때, 부등호의 방향이 바뀌므로
 $x^2 < 2x+3, x^2-2x-3 < 0$
 $(x+1)(x-3) < 0 \quad \therefore -1 < x < 3$
 그런데 $0 < x < 1$ 이므로 $0 < x < 1$
 (iii) $x = 1$ 일 때, (좌변) $= 1^1 = 1$, (우변) $= 1^5 = 1$ 이므로
 주어진 부등식은 성립하지 않는다.
 (i), (ii), (iii)에서 $0 < x < 1$ 또는 $x > 3$
 (7) (i) $x > 1$ 일 때, 부등호의 방향이 그대로이므로
 $x^2-2 \leq 3x+8, x^2-3x-10 \leq 0$
 $(x+2)(x-5) \leq 0 \quad \therefore -2 \leq x \leq 5$
 그런데 $x > 1$ 이므로 $1 < x \leq 5$
 (ii) $0 < x < 1$ 일 때, 부등호의 방향이 바뀌므로
 $x^2-2 \geq 3x+8, x^2-3x-10 \geq 0$
 $(x+2)(x-5) \geq 0 \quad \therefore x \leq -2$ 또는 $x \geq 5$
 그런데 $0 < x < 1$ 이므로 해가 없다.
 (iii) $x = 1$ 일 때, (좌변) $= 1^{-1} = 1$, (우변) $= 1^{11} = 1$ 이므로
 주어진 부등식은 성립한다.
 (i), (ii), (iii)에서 $1 \leq x \leq 5$
 (8) (i) $x > 1$ 일 때, 부등호의 방향이 그대로이므로
 $x(x+4) > -2(x+4), x^2+4x > -2x-8$
 $x^2+6x+8 > 0, (x+4)(x+2) > 0$
 $\therefore x < -4$ 또는 $x > -2$
 그런데 $x > 1$ 이므로 $x > 1$
 (ii) $0 < x < 1$ 일 때, 부등호의 방향이 바뀌므로
 $x(x+4) < -2(x+4), x^2+4x < -2x-8$
 $x^2+6x+8 < 0, (x+4)(x+2) < 0$
 $\therefore -4 < x < -2$
 그런데 $0 < x < 1$ 이므로 해가 없다.
 (iii) $x = 1$ 일 때, (좌변) $= 1^5 = 1$, (우변) $= 1^{-10} = 1$ 이므로
 주어진 부등식은 성립하지 않는다.
 (i), (ii), (iii)에서 $x > 1$
 (9) (i) $x+1 > 1$, 즉 $x > 0$ 일 때, 부등호의 방향이 그대로
 이므로
 $2x+3 \leq 6-x^2, x^2+2x-3 \leq 0$
 $(x+3)(x-1) \leq 0 \quad \therefore -3 \leq x \leq 1$
 그런데 $x > 0$ 이므로 $0 < x \leq 1$
 (ii) $0 < x+1 < 1$, 즉 $-1 < x < 0$ 일 때, 부등호의 방향이
 바뀌므로
 $2x+3 \geq 6-x^2, x^2+2x-3 \geq 0$
 $(x+3)(x-1) \geq 0 \quad \therefore x \leq -3$ 또는 $x \geq 1$
 그런데 $-1 < x < 0$ 이므로 해가 없다.
 (iii) $x+1 = 1$, 즉 $x = 0$ 일 때, (좌변) $= 1^3 = 1$,

(우변) $= 1^6 = 1$ 이므로 주어진 부등식은 성립한다.

(i), (ii), (iii)에서 $0 \leq x \leq 1$

(10) (i) $x-1 > 1$, 즉 $x > 2$ 일 때, 부등호의 방향이 그대로

$$\text{이므로 } x^2 + 8 \leq 6x, x^2 - 6x + 8 \leq 0$$

$$(x-2)(x-4) \leq 0 \quad \therefore 2 \leq x \leq 4$$

그런데 $x > 2$ 이므로 $2 < x \leq 4$

(ii) $0 < x-1 < 1$, 즉 $1 < x < 2$ 일 때, 부등호의 방향이 바

$$\text{뀌므로 } x^2 + 8 \geq 6x, x^2 - 6x + 8 \geq 0$$

$$(x-2)(x-4) \geq 0 \quad \therefore x \leq 2 \text{ 또는 } x \geq 4$$

그런데 $1 < x < 2$ 이므로 $1 < x < 2$

(iii) $x-1 = 1$, 즉 $x = 2$ 일 때, (좌변) $= 1^{12} = 1$,

(우변) $= 1^{12} = 1$ 이므로 주어진 부등식은 성립한다.

(i), (ii), (iii)에서 $1 < x \leq 4$

- 27** **답** (1) $1 \leq x \leq 2$ (2) $x \geq 1$ (3) $x \leq 2$ (4) $x > 1$
 (5) $x \geq -1$ (6) $x \leq -3$ (7) $x \leq -2$ 또는 $x \geq -1$
 (8) $x > 1$ (9) $x < 2$ (10) $x \leq 1$

풀이 (1) $4^x - 6 \times 2^x + 8 \leq 0$ 에서 $(2^x)^2 - 6 \times 2^x + 8 \leq 0$

$2^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - 6t + 8 \leq 0, (t-2)(t-4) \leq 0$$

$$\therefore 2 \leq t \leq 4$$

$$\text{즉, } 2 \leq 2^x \leq 4 \text{이므로 } 2^1 \leq 2^x \leq 2^2$$

이때 밑이 2이고 $2 > 1$ 이므로 $1 \leq x \leq 2$

(2) $25^x - 3 \times 5^x - 10 \geq 0$ 에서 $(5^x)^2 - 3 \times 5^x - 10 \geq 0$

$5^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - 3t - 10 \geq 0, (t+2)(t-5) \geq 0$$

$$\therefore t \leq -2 \text{ 또는 } t \geq 5$$

그런데 $t > 0$ 이므로 $t \geq 5$

$$\therefore 5^x \geq 5^1$$

이때 밑이 5이고 $5 > 1$ 이므로 $x \geq 1$

(3) $16^x - 15 \times 4^x - 16 \leq 0$ 에서 $(4^x)^2 - 15 \times 4^x - 16 \leq 0$

$4^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - 15t - 16 \leq 0, (t+1)(t-16) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq t \leq 16$$

그런데 $t > 0$ 이므로 $0 < t \leq 16$

$$\text{즉, } 0 < 4^x \leq 16 \text{이므로 } 0 < 4^x \leq 4^2$$

이때 밑이 4이고 $4 > 1$ 이므로 $x \leq 2$

(4) $9^x + 3^{x+1} - 18 > 0$ 에서 $(3^x)^2 + 3 \times 3^x - 18 > 0$

$3^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 + 3t - 18 > 0, (t+6)(t-3) > 0$$

$$\therefore t < -6 \text{ 또는 } t > 3$$

그런데 $t > 0$ 이므로 $t > 3$

$$\therefore 3^x > 3^1$$

이때 밑이 3이고 $3 > 1$ 이므로 $x > 1$

(5) $\left(\frac{1}{9}\right)^x - 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^x - 3 \leq 0$ 에서 $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2 - 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^x - 3 \leq 0$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - 2t - 3 \leq 0, (t+1)(t-3) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq t \leq 3$$

그런데 $t > 0$ 이므로 $0 < t \leq 3$

$$\text{즉, } 0 < \left(\frac{1}{3}\right)^x \leq 3 \text{이므로 } 0 < \left(\frac{1}{3}\right)^x \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$$

이때 밑이 $\frac{1}{3}$ 이고 $0 < \frac{1}{3} < 1$ 이므로 $x \geq -1$

(6) $\left(\frac{1}{4}\right)^x - \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} - 32 \geq 0$ 에서

$$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2 - 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x - 32 \geq 0$$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - 4t - 32 \geq 0, (t+4)(t-8) \geq 0$$

$$\therefore t \leq -4 \text{ 또는 } t \geq 8$$

그런데 $t > 0$ 이므로 $t \geq 8$

$$\text{즉, } \left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 8 \text{이므로 } \left(\frac{1}{2}\right)^x \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$$

이때 밑이 $\frac{1}{2}$ 이고 $0 < \frac{1}{2} < 1$ 이므로 $x \leq -3$

(7) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} - 12 \times \left(\frac{1}{3}\right)^x + 27 \geq 0$ 에서

$\left(\frac{1}{3}\right)^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - 12t + 27 \geq 0, (t-3)(t-9) \geq 0$$

$$\therefore t \leq 3 \text{ 또는 } t \geq 9$$

그런데 $t > 0$ 이므로 $0 < t \leq 3$ 또는 $t \geq 9$

$$\text{즉, } 0 < \left(\frac{1}{3}\right)^x \leq 3 \text{이므로 } 0 < \left(\frac{1}{3}\right)^x \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$$

이때 밑이 $\frac{1}{3}$ 이고 $0 < \frac{1}{3} < 1$ 이므로 $x \geq -1$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq 9 \text{이므로 } \left(\frac{1}{3}\right)^x \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$$

이때 밑이 $\frac{1}{3}$ 이고 $0 < \frac{1}{3} < 1$ 이므로 $x \leq -2$

$$\therefore x \leq -2 \text{ 또는 } x \geq -1$$

(8) $0.25^x + 0.5^{x+1} - 0.5 < 0$ 에서

$$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^x - \frac{1}{2} < 0$$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2} < 0, 2t^2 + t - 1 < 0$$

$$(t+1)(2t-1) < 0 \quad \therefore -1 < t < \frac{1}{2}$$

그런데 $t > 0$ 이므로 $0 < t < \frac{1}{2}$

$$\therefore 0 < \left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^1$$

이때 밑이 $\frac{1}{2}$ 이고 $0 < \frac{1}{2} < 1$ 이므로 $x > 1$

(9) $3^{2x} - 1 < 9 \times 3^x - 3^{x-2}$ 에서

$$(3^x)^2 - 1 < 9 \times 3^x - \frac{1}{9} \times 3^x, (3^x)^2 - \frac{80}{9} \times 3^x - 1 < 0$$

$3^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - \frac{80}{9}t - 1 < 0, 9t^2 - 80t - 9 < 0$$

$$(9t+1)(t-9) < 0 \quad \therefore -\frac{1}{9} < t < 9$$

그런데 $t > 0$ 이므로 $0 < t < 9$

즉, $0 < 3^x < 9$ 이므로 $0 < 3^x < 3^2$

이때 밑이 3이고 $3 > 1$ 이므로 $x < 2$

(10) $2^{2x} + 2^{x-3} - 2^{x+1} - 2^{-2} \leq 0$ 에서

$$(2^x)^2 + \frac{1}{8} \times 2^x - 2 \times 2^x - \frac{1}{4} \leq 0, (2^x)^2 - \frac{15}{8} \times 2^x - \frac{1}{4} \leq 0$$

$2^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - \frac{15}{8}t - \frac{1}{4} \leq 0, 8t^2 - 15t - 2 \leq 0$$

$$(8t+1)(t-2) \leq 0 \quad \therefore -\frac{1}{8} \leq t \leq 2$$

그런데 $t > 0$ 이므로 $0 < t \leq 2$

$$\therefore 0 < 2^x \leq 2^1$$

이때 밑이 2이고 $2 > 1$ 이므로 $x \leq 1$

28 답 (1) 0 (2) 4 (3) -1

풀이 (1) $f(1) = \log_2 1 = 0$

(2) $f(16) = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$

(3) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1$

29 답 (1) 0 (2) -3 (3) 2

풀이 (1) $f(1) = \log_{\frac{1}{3}} 1 = 0$

(2) $f(27) = \log_{\frac{1}{3}} 27 = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = -3$

(3) $f\left(\frac{1}{9}\right) = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 2$

30 답 (1) $y = \log_2 (x-5) + 3$ (2) $y = \log_4 (x+3) - 1$

(3) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$ (4) $y = 3^{x-2} - 3$

풀이 (1) $y = 2^{x-3} + 5$ 에서 x 와 y 를 서로 바꾸면

$$x = 2^{y-3} + 5, 2^{y-3} = x - 5$$

$$y - 3 = \log_2 (x - 5) \quad \therefore y = \log_2 (x - 5) + 3$$

(2) $y = 4^{x+1} - 3$ 에서 x 와 y 를 서로 바꾸면

$$x = 4^{y+1} - 3, 4^{y+1} = x + 3$$

$$y + 1 = \log_4 (x + 3) \quad \therefore y = \log_4 (x + 3) - 1$$

(3) $y = \log_{\frac{1}{3}} x + 1$ 에서 x 와 y 를 서로 바꾸면

$$x = \log_{\frac{1}{3}} y + 1, \log_{\frac{1}{3}} y = x - 1$$

$$\therefore y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$$

(4) $y = \log_3 (x+3) + 2$ 에서 x 와 y 를 서로 바꾸면

$$x = \log_3 (y+3) + 2, \log_3 (y+3) = x - 2$$

$$y + 3 = 3^{x-2} \quad \therefore y = 3^{x-2} - 3$$

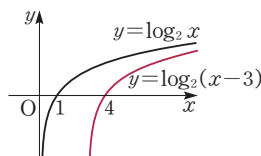
31 답 풀이 참조

풀이 (1) 함수 $y = \log_2 (x-3)$ 의 그래프는 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수 $y = \log_2 (x-3)$

의 그래프는 오른쪽 그림과

같다.



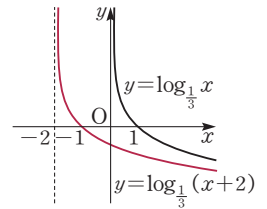
(2) 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}} (x+2)$ 의 그래프는 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ 의 그

래프를 x 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}} (x+2)$

의 그래프는 오른쪽 그림과

같다.



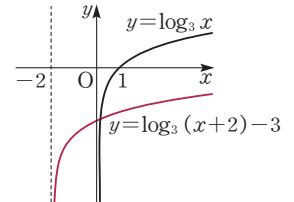
(3) 함수 $y = \log_3 (x+2) - 3$ 의 그래프는 함수 $y = \log_3 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2만큼, y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수

$y = \log_3 (x+2) - 3$ 의

그래프는 오른쪽 그림과

같다.

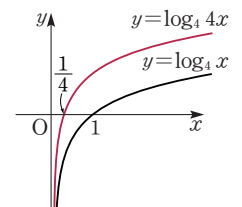


(4) $y = \log_4 4x = \log_4 4 + \log_4 x = \log_4 x + 1$

즉, 함수 $y = \log_4 4x$ 의 그래프는 함수 $y = \log_4 x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수 $y = \log_4 4x$ 의 그

래프는 오른쪽 그림과 같다.

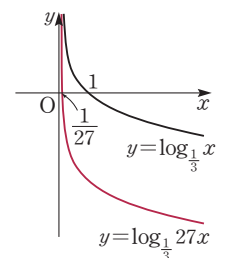


(5) $y = \log_{\frac{1}{3}} 27x = \log_{\frac{1}{3}} 27 + \log_{\frac{1}{3}} x = \log_{\frac{1}{3}} x - 3$

즉, 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}} 27x$ 의 그래프는 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}} 27x$ 의 그래

프는 오른쪽 그림과 같다.



32 답 풀이 참조

풀이 (1) 함수 $y = \log_4 (-x)$

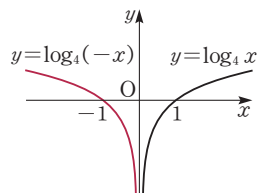
의 그래프는 함수 $y = \log_4 x$

의 그래프를 y 축에 대하여

대칭이동한 것이다.

따라서 $y = \log_4 (-x)$ 의 그

래프는 오른쪽 그림과 같다.



(2) $y = -\log_4 x$ 에서

$$-y = \log_4 x$$

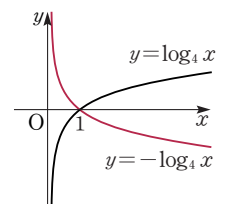
즉, 함수 $y = -\log_4 x$ 의 그래프

는 함수 $y = \log_4 x$ 의 그래프를 x

축에 대하여 대칭이동한 것이다.

따라서 함수 $y = -\log_4 x$ 의 그래

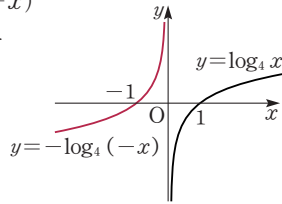
프는 오른쪽 그림과 같다.



(3) $y = -\log_4(-x)$ 에서 $-y = \log_4(-x)$

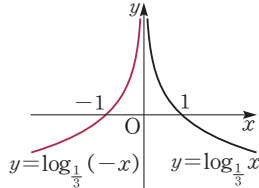
즉, 함수 $y = -\log_4(-x)$ 의 그래프는 함수 $y = \log_4 x$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것이다.

따라서 함수 $y = -\log_4(-x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



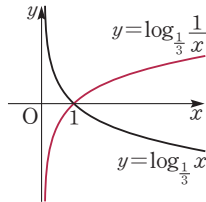
(4) 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}}(-x)$ 의 그래프는 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 것이다.

따라서 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}}(-x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(5) $y = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{x} = \log_{\frac{1}{3}} x^{-1} = -\log_{\frac{1}{3}} x$ 에서 $-y = \log_{\frac{1}{3}} x$ 즉, 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{x}$ 의 그래프는 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 것이다.

따라서 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{x}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



33 답 (1) 그래프는 풀이 참조,

정의역: $\{x | x > -1\}$, 점근선의 방정식: $x = -1$

(2) 그래프는 풀이 참조,

정의역: $\{x | x > 2\}$, 점근선의 방정식: $x = 2$

(3) 그래프는 풀이 참조,

정의역: $\{x | x > -2\}$, 점근선의 방정식: $x = -2$

(4) 그래프는 풀이 참조,

정의역: $\{x | x > -3\}$, 점근선의 방정식: $x = -3$

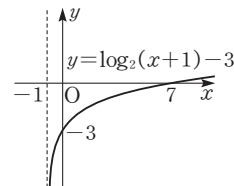
(5) 그래프는 풀이 참조,

정의역: $\{x | x > 4\}$, 점근선의 방정식: $x = 4$

풀이 (1) 함수 $y = \log_2(x+1) - 3$ 의 그래프는 함수

$y = \log_2 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

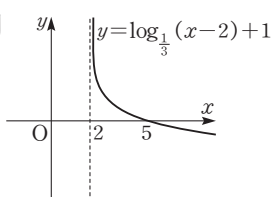
따라서 정의역은 $\{x | x > -1\}$ 이고, 점근선의 방정식은 $x = -1$ 이다.



(2) 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}}(x-2) + 1$ 의

그래프는 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ 의

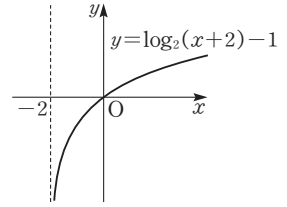
그래프를 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 정의역은 $\{x | x > 2\}$ 이고, 점근선의 방정식은 $x = 2$ 이다.

(3) 함수 $y = \log_2(x+2) - 1$ 의 그래프는 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 정의역은 $\{x | x > -2\}$ 이고, 점근선의 방정식은 $x = -2$ 이다.

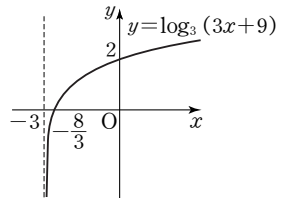


(4) $y = \log_3(3x+9) = \log_3 3(x+3)$

$$= \log_3 3 + \log_3(x+3) = \log_3(x+3) + 1$$

즉, 함수 $y = \log_3(3x+9)$ 의 그래프는 함수 $y = \log_3 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 정의역은 $\{x | x > -3\}$ 이고, 점근선의 방정식은 $x = -3$ 이다.

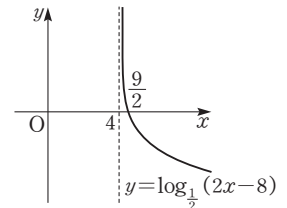


(5) $y = \log_{\frac{1}{2}}(2x-8) = \log_{\frac{1}{2}} 2(x-4)$

$$= \log_{\frac{1}{2}} 2 + \log_{\frac{1}{2}}(x-4) = \log_{\frac{1}{2}}(x-4) - 1$$

즉, 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}}(2x-8)$ 의 그래프는 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 4 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 정의역은 $\{x | x > 4\}$ 이고, 점근선의 방정식은 $x = 4$ 이다.



34 답 $y = -\log_2(x+1) + 2$

풀이 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$-y = \log_2 x \quad \therefore y = -\log_2 x$$

함수 $y = -\log_2 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y - 2 = -\log_2(x+1) \quad \therefore y = -\log_2(x+1) + 2$$

35 답 $y = \log_{\frac{1}{3}}(-x+3) - 1$

풀이 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $y = \log_{\frac{1}{3}}(-x)$

함수 $y = \log_{\frac{1}{3}}(-x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 그래프의 식은

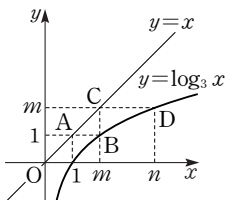
$$y + 1 = \log_{\frac{1}{3}}\{-(x-3)\} \quad \therefore y = \log_{\frac{1}{3}}(-x+3) - 1$$

36 답 $m=-2, n=3$

풀이 함수 $y=\log_2 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼,
 y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 그래프의 식은
 $y-n=\log_2(x-m) \quad \therefore y=\log_2(x-m)+n \cdots \cdots \textcircled{1}$
 한편,
 $y=\log_2(8x+16)=\log_2 8(x+2)$
 $=\log_2 8+\log_2(x+2)=\log_2(x+2)+3 \cdots \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 이 같은 식이므로 $m=-2, n=3$

37 답 30

풀이 오른쪽 그림에서
 점 A(1, 1)이므로 점 B의 좌표
 는 $(m, 1)$
 점 B는 함수 $y=\log_3 x$ 의 그래프
 위의 점이므로
 $1=\log_3 m \quad \therefore m=3$
 따라서 점 C(3, 3)이므로 점 D의 좌표는 $(n, 3)$
 점 D는 함수 $y=\log_3 x$ 의 그래프 위의 점이므로
 $3=\log_3 n \quad \therefore n=27$
 $\therefore m+n=30$

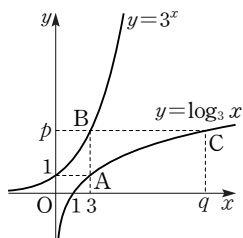


38 답 16

풀이 주어진 그래프에서 A(0, $\log_2 a$), B(0, $\log_2 b$)이므로
 $\overline{AB}=4$ 에서 $\log_2 b - \log_2 a = 4$
 $\log_2 \frac{b}{a} = 4 \quad \therefore \frac{b}{a} = 2^4 = 16$

39 답 24

풀이 오른쪽 그림에서 함수
 $y=\log_3 x$ 의 그래프 위의 점 A
 의 y 좌표가 1이므로
 $\log_3 x = 1 \quad \therefore x = 3$
 즉, 점 A(3, 1)이므로 점 B의
 좌표는 $(3, p)$
 점 B는 함수 $y=3^x$ 의 그래프 위의 점이므로 $p=3^3=27$
 따라서 점 C(q, 27)이고 점 C는 함수 $y=\log_3 x$ 의 그래프
 위의 점이므로
 $27=\log_3 q \quad \therefore q=3^{27}$
 따라서 $\frac{q}{p} = \frac{3^{27}}{3^3} = 3^{24}$ 이므로 $a=24$



40 답 (1) $\log_2 3 < \log_2 5 < 3$

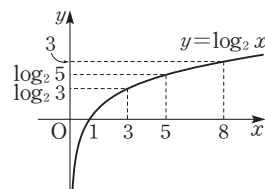
- (2) $\log_{\frac{1}{3}} 2 < \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{4} < 2$
 (3) $2 < \log_3 10 < 4\log_3 2$
 (4) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{10} < \log_{\frac{1}{2}} 3 < 1$
 (5) $\log_4 16 < 2\log_2 3 < 4$
 (6) $\log_3 \sqrt{5} < \log_3 4 < 2$
 (7) $\log_2 \frac{1}{3} < \log_2 3 < \log_4 10$
 (8) $1 < \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{4} < \log_3 5$

풀이 (1) $3=\log_2 2^3=\log_2 8$

이때 $3 < 5 < 8$ 이고, 함수
 $y=\log_2 x$ 는 x 의 값이 증
 가할 때 y 의 값도 증가하
 므로

$$\log_2 3 < \log_2 5 < \log_2 8$$

$$\therefore \log_2 3 < \log_2 5 < 3$$

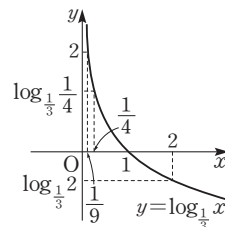


(2) $2=\log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^2=\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}$

이때 $\frac{1}{9} < \frac{1}{4} < 2$ 이고, 함수
 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ 는 x 의 값이 증가
 할 때 y 의 값은 감소하므로

$$\log_{\frac{1}{3}} 2 < \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{4} < \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}$$

$$\therefore \log_{\frac{1}{3}} 2 < \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{4} < 2$$



(3) $2=\log_3 3^2=\log_3 9$

$$4\log_3 2=\log_3 2^4=\log_3 16$$

이때 $9 < 10 < 16$ 이고, 함수 $y=\log_3 x$ 는 x 의 값이 증가
 할 때 y 의 값도 증가하므로

$$\log_3 9 < \log_3 10 < \log_3 16$$

$$\therefore 2 < \log_3 10 < 4\log_3 2$$

(4) $1=\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}, \sqrt{10}=3.1\cdots$

이때 $\frac{1}{2} < 3 < \sqrt{10}$ 이고, 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 는 x 의 값이 증가
 할 때 y 의 값은 감소하므로

$$\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{10} < \log_{\frac{1}{2}} 3 < \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$$

$$\therefore \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{10} < \log_{\frac{1}{2}} 3 < 1$$

(5) $4=\log_2 2^4=\log_2 16$

$$2\log_2 3=\log_2 3^2=\log_2 9$$

$$\log_4 16=2=\log_2 2^2=\log_2 4$$

이때 $4 < 9 < 16$ 이고, 함수 $y=\log_2 x$ 는 x 의 값이 증가할
 때 y 의 값도 증가하므로

$$\log_2 4 < \log_2 9 < \log_2 16$$

$$\therefore \log_4 16 < 2\log_2 3 < 4$$

(6) $2=\log_3 3^2=\log_3 9, \sqrt{5}=2.2\cdots$

이때 $\sqrt{5} < 4 < 9$ 이고, 함수 $y=\log_3 x$ 는 x 의 값이 증가
 할 때 y 의 값도 증가하므로

$$\log_3 \sqrt{5} < \log_3 4 < \log_3 9$$

$$\therefore \log_3 \sqrt{5} < \log_3 4 < 2$$

(7) $\log_4 10 = \frac{1}{2}\log_2 10 = \log_2 \sqrt{10}$

$$\sqrt{10}=3.1\cdots$$

이때 $\frac{1}{3} < 3 < \sqrt{10}$ 이고, 함수 $y=\log_2 x$ 는 x 의 값이 증
 가할 때 y 의 값도 증가하므로

$$\log_2 \frac{1}{3} < \log_2 3 < \log_2 \sqrt{10}$$

$$\therefore \log_2 \frac{1}{3} < \log_2 3 < \log_4 10$$

(8) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{4} = \log_{3^{-1}} 4^{-1} = \log_3 4, 1 = \log_3 3$

이때 $3 < 4 < 5$ 이고, 함수 $y = \log_3 x$ 는 x 의 값이 증가할 때 y 의 값도 증가하므로
 $\log_3 3 < \log_3 4 < \log_3 5$
 $\therefore 1 < \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{4} < \log_3 5$

- 41** **답** (1) 최댓값: 4, 최솟값: 2
 (2) 최댓값: -3, 최솟값: -4
 (3) 최댓값: 5, 최솟값: 3

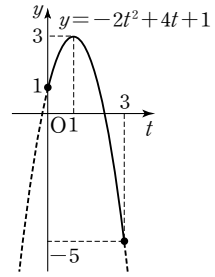
풀이 (1) $y = \log_2 (x+3) + 1$ 에서 밑이 2이고 $2 > 1$ 이므로
 $-1 \leq x \leq 5$ 에서 함수 $y = \log_2 (x+3) + 1$ 은
 $x=5$ 일 때 최대이고, 최댓값은
 $\log_2 (5+3) + 1 = \log_2 2^3 + 1 = 4$
 $x=-1$ 일 때 최소이고, 최솟값은
 $\log_2 (-1+3) + 1 = \log_2 2 + 1 = 2$
 (2) $y = \log_3 (x+3) - 5$ 에서 밑이 3이고 $3 > 1$ 이므로
 $0 \leq x \leq 6$ 에서 함수 $y = \log_3 (x+3) - 5$ 는
 $x=6$ 일 때 최대이고, 최댓값은
 $\log_3 (6+3) - 5 = \log_3 3^2 - 5 = -3$
 $x=0$ 일 때 최소이고, 최솟값은
 $\log_3 3 - 5 = -4$
 (3) $y = \log_2 (x+1) + 3$ 에서 밑이 2이고 $2 > 1$ 이므로
 $0 \leq x \leq 3$ 에서 함수 $y = \log_2 (x+1) + 3$ 은
 $x=3$ 일 때 최대이고, 최댓값은
 $\log_2 (3+1) + 3 = \log_2 2^2 + 3 = 5$
 $x=0$ 일 때 최소이고, 최솟값은
 $\log_2 1 + 3 = 3$

- 42** **답** (1) 최댓값: -2, 최솟값: -5
 (2) 최댓값: -3, 최솟값: -4

풀이 (1) $y = \log_{\frac{1}{2}} (x+5) - 1$ 에서 밑이 $\frac{1}{2}$ 이고 $0 < \frac{1}{2} < 1$ 이므로
 $-3 \leq x \leq 11$ 에서 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}} (x+5) - 1$ 은
 $x=-3$ 일 때 최대이고, 최댓값은
 $\log_{\frac{1}{2}} (-3+5) - 1 = \log_{\frac{1}{2}} 2 - 1 = -2$
 $x=11$ 일 때 최소이고, 최솟값은
 $\log_{\frac{1}{2}} (11+5) - 1 = \log_{\frac{1}{2}} 2^4 - 1 = -5$
 (2) $y = \log_{\frac{1}{3}} (x-1) - 2$ 에서 밑이 $\frac{1}{3}$ 이고 $0 < \frac{1}{3} < 1$ 이므로
 $4 \leq x \leq 10$ 에서 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}} (x-1) - 2$ 는
 $x=4$ 일 때 최대이고, 최댓값은
 $\log_{\frac{1}{3}} (4-1) - 2 = \log_{\frac{1}{3}} 3 - 2 = -3$
 $x=10$ 일 때 최소이고, 최솟값은
 $\log_{\frac{1}{3}} (10-1) - 2 = \log_{\frac{1}{3}} 3^2 - 2 = -4$

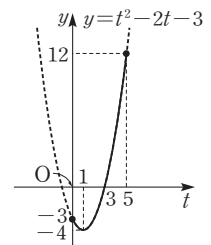
- 43** **답** (1) 최댓값: 3, 최솟값: -5
 (2) 최댓값: 12, 최솟값: -4
 (3) 최댓값: 2, 최솟값: -2

풀이 (1) $y = -2(\log_2 x)^2 + 4\log_2 x + 1$
 에서 $\log_2 x = t$ 로 놓으면
 $y = -2t^2 + 4t + 1$
 $= -2(t-1)^2 + 3$
 이때 $1 \leq x \leq 8$ 이고, $2 > 1$ 이므로
 로

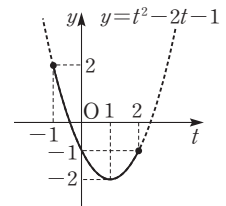


$\log_2 1 \leq \log_2 x \leq \log_2 8$
 $\therefore 0 \leq t \leq 3$
 따라서 $0 \leq t \leq 3$ 에서 함수 $y = -2(t-1)^2 + 3$ 은
 $t=1$ 일 때 최대이고, 최댓값은
 $-2(1-1)^2 + 3 = 3$,
 $t=3$ 일 때 최소이고, 최솟값은
 $-2(3-1)^2 + 3 = -5$

(2) $y = (\log_2 x)^2 - \log_2 x^2 - 3$ 에서
 $\log_2 x = t$ 로 놓으면
 $y = t^2 - 2t - 3 = (t-1)^2 - 4$
 이때 $1 \leq x \leq 32$ 이고, $2 > 1$ 이므로
 $\log_2 1 \leq \log_2 x \leq \log_2 32$
 $\therefore 0 \leq t \leq 5$
 따라서 $0 \leq t \leq 5$ 에서 함수
 $y = (t-1)^2 - 4$ 는
 $t=5$ 일 때 최대이고, 최댓값은
 $(5-1)^2 - 4 = 12$
 $t=1$ 일 때 최소이고, 최솟값은
 $(1-1)^2 - 4 = -4$



(3) $y = (\log_{\frac{1}{2}} x)^2 - \log_{\frac{1}{2}} x^2 - 1$ 에서
 $\log_{\frac{1}{2}} x = t$ 로 놓으면
 $y = t^2 - 2t - 1 = (t-1)^2 - 2$
 이때 $\frac{1}{4} \leq x \leq 2$ 이고,
 $0 < \frac{1}{2} < 1$ 이므로
 $\log_{\frac{1}{2}} 2 \leq \log_{\frac{1}{2}} x \leq \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$ $\therefore -1 \leq t \leq 2$
 따라서 $-1 \leq t \leq 2$ 에서 함수 $y = (t-1)^2 - 2$ 는
 $t=-1$ 일 때 최대이고, 최댓값은
 $(-1-1)^2 - 2 = 2$
 $t=1$ 일 때 최소이고, 최솟값은
 $(1-1)^2 - 2 = -2$



- 44** **답** (1) 최댓값: 2, 최솟값: $\log_3 5$
 (2) 최댓값: 3, 최솟값: 2
 (3) 최댓값: 0, 최솟값: -1

풀이 (1) 함수 $y = \log_3 (x^2 - 2x + 6)$ 에서 밑이 3이고 $3 > 1$ 이므로 $x^2 - 2x + 6$ 이 최대일 때 y 도 최대, $x^2 - 2x + 6$ 이 최소일 때 y 도 최소가 된다.
 $x^2 - 2x + 6 = (x-1)^2 + 5$ 이므로 $-1 \leq x \leq 1$ 에서
 $x=-1$ 일 때 최댓값은 9, $x=1$ 일 때 최솟값은 5이다.

따라서 함수 $y = \log_3(x^2 - 2x + 6)$ 의 최댓값은

$\log_3 9 = 2$, 최솟값은 $\log_3 5$ 이다.

- (2) 함수 $y = \log_2(x^2 - 2x + 5)$ 에서 밑이 2이고 $2 > 1$ 이므로 $x^2 - 2x + 5$ 가 최대일 때 y 도 최대, $x^2 - 2x + 5$ 가 최소일 때 y 도 최소가 된다.

$$x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 4 \text{ 이므로 } 0 \leq x \leq 3 \text{ 에서}$$

$x=3$ 일 때 최댓값은 8, $x=1$ 일 때 최솟값은 4이다.

따라서 함수 $y = \log_2(x^2 - 2x + 5)$ 의 최댓값은

$$\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3, \text{ 최솟값은 } \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2 \text{ 이다.}$$

- (3) 함수 $y = \log_{0.1}(-x^2 + 4x + 6)$ 에서 밑이 0.1이고 $0 < 0.1 < 1$ 이므로 $-x^2 + 4x + 6$ 이 최소일 때 y 는 최대, $-x^2 + 4x + 6$ 이 최대일 때 y 는 최소가 된다.

$$-x^2 + 4x + 6 = -(x-2)^2 + 10 \text{ 이므로 } 0 \leq x \leq 5 \text{ 에서}$$

$x=5$ 일 때 최솟값은 1, $x=2$ 일 때 최댓값은 10이다.

따라서 함수 $y = \log_{0.1}(-x^2 + 4x + 6)$ 의 최댓값은

$$\log_{0.1} 1 = 0, \text{ 최솟값은 } \log_{0.1} 10 = \log_{\frac{1}{10}} 10 = -1 \text{ 이다.}$$

45 답 10000

풀이 $y = 100x^{4-\log x}$ 의 양변에 상용로그를 취하면

$$\log y = \log 100x^{4-\log x} = \log 100 + \log x^{4-\log x}$$

$$= 2 + (4 - \log x) \log x = -(\log x)^2 + 4 \log x + 2$$

$\log x = t$ 로 놓으면

$$\log y = -t^2 + 4t + 2 = -(t-2)^2 + 6$$

따라서 $t=2$ 일 때, $\log y$ 의 최댓값은 6이다.

즉, $x=100$ 일 때, y 의 최댓값은 $10^6 = 1000000$ 이므로

$$a=100, b=1000000$$

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{1000000}{100} = 10000$$

46 답 1

풀이 $y = \frac{1}{10} x^{4-2\log x}$ 의 양변에 상용로그를 취하면

$$\log y = \log \frac{1}{10} x^{4-2\log x} = \log \frac{1}{10} + \log x^{4-2\log x}$$

$$= -1 + (4 - 2\log x) \log x$$

$$= -2(\log x)^2 + 4\log x - 1$$

$\log x = t$ 로 놓으면

$$\log y = -2t^2 + 4t - 1 = -2(t-1)^2 + 1$$

따라서 $t=1$ 일 때, $\log y$ 의 최댓값은 1이다.

즉, $x=10$ 일 때, y 의 최댓값은 10이므로

$$a=10, b=10$$

$$\therefore \log_a b = 1$$

47 답 100

풀이 $y = 100x^2 \div x^{\log x}$ 의 양변에 상용로그를 취하면

$$\log y = \log (100x^2 \div x^{\log x}) = \log 100x^2 - \log x^{\log x}$$

$$= \log 100 + \log x^2 - (\log x)^2$$

$$= -(\log x)^2 + 2\log x + 2$$

$\log x = t$ 로 놓으면

$$\log y = -t^2 + 2t + 2 = -(t-1)^2 + 3$$

따라서 $t=1$ 일 때, $\log y$ 의 최댓값은 3이다.

즉, $x=10$ 일 때, y 의 최댓값은 $10^3 = 1000$ 이므로

$$a=10, b=1000$$

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{1000}{10} = 100$$

48 답 3

$$\text{풀이 } \log_2 \left(\frac{2}{a} + b \right) + \log_2 \left(\frac{2}{b} + a \right)$$

$$= \log_2 \left(\frac{2}{a} + b \right) \left(\frac{2}{b} + a \right)$$

$a > 0, b > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\left(\frac{2}{a} + b \right) \left(\frac{2}{b} + a \right) = ab + \frac{4}{ab} + 4$$

$$\geq 2\sqrt{ab \times \frac{4}{ab}} + 4 = 4 + 4 = 8$$

(단, 등호는 $ab = \frac{4}{ab}$, 즉 $ab = 2$ 일 때 성립한다.)

이때 $2 > 1$ 이므로

$$\log_2 \left(\frac{2}{a} + b \right) \left(\frac{2}{b} + a \right) \geq \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$$

따라서 $\log_2 \left(\frac{2}{a} + b \right) + \log_2 \left(\frac{2}{b} + a \right)$ 의 최솟값은 3이다.

49 답 $4\sqrt{2}$

풀이 $a > 1, b > 1$ 에서 $\log_a b > 0, \log_b a > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\log_a b^4 + \log_{\sqrt{b}} a = 4\log_a b + 2\log_b a$$

$$\geq 2\sqrt{4\log_a b \times 2\log_b a} = 2\sqrt{8} = 4\sqrt{2}$$

(단, 등호는 $4\log_a b = 2\log_b a$, 즉 $\log_a b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 일 때 성립한다.)

따라서 $\log_a b^4 + \log_{\sqrt{b}} a$ 의 최솟값은 $4\sqrt{2}$ 이다.

50 답 -2

풀이 $x > 0, y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x + y \geq 2\sqrt{xy} \quad (\text{단, 등호는 } x=y \text{일 때 성립한다.})$$

그런데 $x + y = 10$ 이므로

$$10 \geq 2\sqrt{xy} \quad \therefore xy \leq 25$$

이때 밑이 $\frac{1}{5}$ 이고 $0 < \frac{1}{5} < 1$ 이므로

$$\log_{\frac{1}{5}} x + \log_{\frac{1}{5}} y = \log_{\frac{1}{5}} xy \geq \log_{\frac{1}{5}} 25 = -2$$

(단, 등호는 $x=y=5$ 일 때 성립한다.)

따라서 $\log_{\frac{1}{5}} x + \log_{\frac{1}{5}} y$ 의 최솟값은 -2이다.

51 답 (1) $x=1$ 또는 $x=2$ (2) $x=4$

$$(3) x=3 \text{ 또는 } x=6 \quad (4) x=2 \quad (5) x=0$$

풀이 (1) 로그의 진수 조건에서 $x > 0, 3x-2 > 0$

$$\therefore x > \frac{2}{3}$$

..... ㉠

$\log_2 x = \log_4 (3x-2)$ 에서 $\log_4 x^2 = \log_4 (3x-2)$
 따라서 $x^2 = 3x-2$ 이므로 $x^2 - 3x + 2 = 0$
 $(x-1)(x-2) = 0 \quad \therefore x=1$ 또는 $x=2$
 그런데 ㉠에서 $x > \frac{2}{3}$ 이므로 $x=1$ 또는 $x=2$

(2) 로그의 진수 조건에서 $x-2 > 0, x > 0$
 $\therefore x > 2$ ㉠

$\log_2 (x-2) = \log_4 x$ 에서 $\log_4 (x-2)^2 = \log_4 x$
 따라서 $(x-2)^2 = x$ 이므로 $x^2 - 5x + 4 = 0$
 $(x-1)(x-4) = 0 \quad \therefore x=1$ 또는 $x=4$
 그런데 ㉠에서 $x > 2$ 이므로 $x=4$

(3) 로그의 진수 조건에서 $x > 0, x-2 > 0$
 $\therefore x > 2$ ㉠

$\log_3 x = \log_9 (x-2) + 1$ 에서
 $\log_9 x^2 = \log_9 (x-2) + \log_9 9$
 $\log_9 x^2 = \log_9 9(x-2)$
 따라서 $x^2 = 9(x-2)$ 이므로 $x^2 - 9x + 18 = 0$
 $(x-3)(x-6) = 0 \quad \therefore x=3$ 또는 $x=6$
 그런데 ㉠에서 $x > 2$ 이므로 $x=3$ 또는 $x=6$

(4) 로그의 진수 조건에서 $8-x > 0, x+4 > 0$
 $\therefore -4 < x < 8$ ㉠

$\log_{\frac{1}{2}} (8-x) = -\log_2 (x+4)$ 에서
 $\log_{\frac{1}{2}} (8-x) = \log_{\frac{1}{2}} (x+4)$
 따라서 $8-x = x+4$ 이므로 $2x = 4$
 $\therefore x = 2$

그런데 ㉠에서 $-4 < x < 8$ 이므로 $x=2$

(5) 로그의 진수 조건에서 $x+2 > 0, x+1 > 0$
 $\therefore x > -1$ ㉠

$\log_{\sqrt{2}} (x+2) = \log_2 (x+1) + 2$ 에서
 $\log_{2^{\frac{1}{2}}} (x+2) = \log_2 (x+1) + \log_2 2^2$
 $2\log_2 (x+2) = \log_2 (x+1) + \log_2 4$
 $\log_2 (x+2)^2 = \log_2 4(x+1)$
 따라서 $(x+2)^2 = 4(x+1)$ 이므로 $x^2 = 0$
 $\therefore x = 0$

그런데 ㉠에서 $x > -1$ 이므로 $x=0$

52 답 (1) $x=3$ 또는 $x=243$ (2) $x=\frac{1}{32}$ 또는 $x=8$

(3) $x=\frac{1}{27}$ 또는 $x=3$ (4) $x=\frac{1}{4}$ 또는 $x=64$

(5) $x=\frac{1}{5}$ 또는 $x=25$ (6) $x=2$ 또는 $x=16$

(7) $x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=9$ (8) $x=\frac{1}{25}$ 또는 $x=5$

(9) $x=\frac{1}{64}$ 또는 $x=2$ (10) $x=\frac{1}{729}$ 또는 $x=3$

풀이 (1) 로그의 진수 조건에서 $x > 0, x^6 > 0$
 $\therefore x > 0$ ㉠

$(\log_3 x)^2 - 6\log_3 x + 5 = 0$ 에서 $\log_3 x = t$ 로 놓으면
 $t^2 - 6t + 5 = 0, (t-1)(t-5) = 0$
 $\therefore t=1$ 또는 $t=5$

따라서 $\log_3 x = 1$ 또는 $\log_3 x = 5$ 이므로

$x=3$ 또는 $x=243$

그런데 ㉠에서 $x > 0$ 이므로

$x=3$ 또는 $x=243$

(2) 로그의 진수 조건에서 $x > 0, x^2 > 0$
 $\therefore x > 0$ ㉠

$(\log_2 x)^2 + \log_2 x^2 - 15 = 0$ 에서 $\log_2 x = t$ 로 놓으면
 $t^2 + 2t - 15 = 0, (t+5)(t-3) = 0$
 $\therefore t = -5$ 또는 $t = 3$

따라서 $\log_2 x = -5$ 또는 $\log_2 x = 3$ 이므로

$x = \frac{1}{32}$ 또는 $x = 8$

그런데 ㉠에서 $x > 0$ 이므로

$x = \frac{1}{32}$ 또는 $x = 8$

(3) 로그의 진수 조건에서 $x > 0, x^2 > 0$
 $\therefore x > 0$ ㉠

$(\log_3 x)^2 + \log_3 x^2 - 3 = 0$ 에서 $\log_3 x = t$ 로 놓으면
 $t^2 + 2t - 3 = 0, (t+3)(t-1) = 0$
 $\therefore t = -3$ 또는 $t = 1$

따라서 $\log_3 x = -3$ 또는 $\log_3 x = 1$ 이므로

$x = \frac{1}{27}$ 또는 $x = 3$

그런데 ㉠에서 $x > 0$ 이므로

$x = \frac{1}{27}$ 또는 $x = 3$

(4) 로그의 진수 조건에서 $x > 0$ ㉠

$(\log_2 x)^2 - 12 = 4\log_2 x$ 에서 $\log_2 x = t$ 로 놓으면
 $t^2 - 4t - 12 = 0, (t+2)(t-6) = 0$
 $\therefore t = -2$ 또는 $t = 6$

따라서 $\log_2 x = -2$ 또는 $\log_2 x = 6$ 이므로

$x = \frac{1}{4}$ 또는 $x = 64$

그런데 ㉠에서 $x > 0$ 이므로

$x = \frac{1}{4}$ 또는 $x = 64$

(5) 로그의 진수 조건에서 $x > 0$ ㉠

$\log_5 x = (\log_5 x)^2 - 2$ 에서 $\log_5 x = t$ 로 놓으면
 $t^2 - t - 2 = 0, (t+1)(t-2) = 0$
 $\therefore t = -1$ 또는 $t = 2$

따라서 $\log_5 x = -1$ 또는 $\log_5 x = 2$ 이므로

$x = \frac{1}{5}$ 또는 $x = 25$

그런데 ㉠에서 $x > 0$ 이므로

$x = \frac{1}{5}$ 또는 $x = 25$

(6) 로그의 밑 조건에서 $x > 0, x \neq 1$, 진수 조건에서 $x > 0$

$\therefore x > 0, x \neq 1$ ㉠

$\log_2 x + \log_x 16 = 5$ 에서 $\log_2 x + 4\log_x 2 = 5$

$\log_2 x + \frac{4}{\log_2 x} = 5$ ㉡

㉠에서 $x \neq 1$ 이므로 $\log_2 x \neq 0$

따라서 ㉠의 양변에 $\log_2 x$ 를 곱하면

$$(\log_2 x)^2 - 5\log_2 x + 4 = 0$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 5t + 4 = 0, (t-1)(t-4) = 0$$

$$\therefore t=1 \text{ 또는 } t=4$$

따라서 $\log_2 x = 1$ 또는 $\log_2 x = 4$ 이므로

$$x=2 \text{ 또는 } x=16$$

그런데 ㉠에서 $x > 0, x \neq 1$ 이므로

$$x=2 \text{ 또는 } x=16$$

(7) 로그의 밑 조건에서 $x > 0, x \neq 1$, 진수 조건에서 $x > 0$

$$\therefore x > 0, x \neq 1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\log_3 x - \log_x 9 = 1 \text{에서 } \log_3 x - 2\log_x 3 = 1$$

$$\log_3 x - \frac{2}{\log_3 x} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

㉠에서 $x \neq 1$ 이므로 $\log_3 x \neq 0$

따라서 ㉠의 양변에 $\log_3 x$ 를 곱하면

$$(\log_3 x)^2 - \log_3 x - 2 = 0$$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - t - 2 = 0, (t+1)(t-2) = 0$$

$$\therefore t = -1 \text{ 또는 } t = 2$$

따라서 $\log_3 x = -1$ 또는 $\log_3 x = 2$ 이므로

$$x = \frac{1}{3} \text{ 또는 } x = 9$$

그런데 ㉠에서 $x > 0, x \neq 1$ 이므로

$$x = \frac{1}{3} \text{ 또는 } x = 9$$

(8) 로그의 밑 조건에서 $x > 0, x \neq 1$, 진수 조건에서 $x > 0$

$$\therefore x > 0, x \neq 1 \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

$$\log_5 x - \log_x 25 = -1 \text{에서 } \log_5 x - 2\log_x 5 = -1$$

$$\log_5 x - \frac{2}{\log_5 x} = -1 \quad \dots\dots \textcircled{10}$$

㉠에서 $x \neq 1$ 이므로 $\log_5 x \neq 0$

따라서 ㉠의 양변에 $\log_5 x$ 를 곱하면

$$(\log_5 x)^2 + \log_5 x - 2 = 0$$

$\log_5 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 + t - 2 = 0, (t+2)(t-1) = 0$$

$$\therefore t = -2 \text{ 또는 } t = 1$$

따라서 $\log_5 x = -2$ 또는 $\log_5 x = 1$ 이므로

$$x = \frac{1}{25} \text{ 또는 } x = 5$$

그런데 ㉠에서 $x > 0, x \neq 1$ 이므로

$$x = \frac{1}{25} \text{ 또는 } x = 5$$

(9) 로그의 진수 조건에서 $8x > 0, 4x > 0$

$$\therefore x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{11}$$

$$(\log_2 8x)(\log_2 4x) = 12 \text{에서}$$

$$(\log_2 8 + \log_2 x)(\log_2 4 + \log_2 x) = 12$$

$$(3 + \log_2 x)(2 + \log_2 x) = 12$$

$$6 + 5\log_2 x + (\log_2 x)^2 = 12$$

$$(\log_2 x)^2 + 5\log_2 x - 6 = 0$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 + 5t - 6 = 0, (t+6)(t-1) = 0$$

$$\therefore t = -6 \text{ 또는 } t = 1$$

따라서 $\log_2 x = -6$ 또는 $\log_2 x = 1$ 이므로

$$x = \frac{1}{64} \text{ 또는 } x = 2$$

그런데 ㉠에서 $x > 0$ 이므로

$$x = \frac{1}{64} \text{ 또는 } x = 2$$

(10) 로그의 진수 조건에서 $81x > 0, 3x > 0$

$$\therefore x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{12}$$

$$(\log_3 81x)(\log_3 3x) = 10 \text{에서}$$

$$(\log_3 81 + \log_3 x)(\log_3 3 + \log_3 x) = 10$$

$$(4 + \log_3 x)(1 + \log_3 x) = 10$$

$$4 + 5\log_3 x + (\log_3 x)^2 = 10$$

$$(\log_3 x)^2 + 5\log_3 x - 6 = 0$$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 + 5t - 6 = 0, (t+6)(t-1) = 0$$

$$\therefore t = -6 \text{ 또는 } t = 1$$

따라서 $\log_3 x = -6$ 또는 $\log_3 x = 1$ 이므로

$$x = \frac{1}{729} \text{ 또는 } x = 3$$

그런데 ㉠에서 $x > 0$ 이므로

$$x = \frac{1}{729} \text{ 또는 } x = 3$$

53 답 (1) $x = \frac{1}{2}$ 또는 $x = 4$ (2) $x = \frac{1}{2}$ 또는 $x = 8$

(3) $x = \frac{1}{3}$ 또는 $x = 27$ (4) $x = \frac{1}{1000}$ 또는 $x = 10$

(5) $x = \frac{1}{625}$ 또는 $x = 5$ (6) $x = \frac{1}{243}$ 또는 $x = 3$

(7) $x = 1$ 또는 $x = 10$ (8) $x = 100$

풀이 (1) 로그의 진수 조건에서 $x > 0$ $\dots\dots \textcircled{1}$

주어진 방정식의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$$\log_2 x^{\log_2 x} = \log_2 4x, (\log_2 x)^2 = \log_2 2^2 + \log_2 x$$

$$(\log_2 x)^2 - \log_2 x - 2 = 0$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - t - 2 = 0, (t+1)(t-2) = 0$$

$$\therefore t = -1 \text{ 또는 } t = 2$$

따라서 $\log_2 x = -1$ 또는 $\log_2 x = 2$ 이므로

$$x = \frac{1}{2} \text{ 또는 } x = 4$$

그런데 ㉠에서 $x > 0$ 이므로

$$x = \frac{1}{2} \text{ 또는 } x = 4$$

(2) 로그의 진수 조건에서 $x > 0$ $\dots\dots \textcircled{2}$

주어진 방정식의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$$\log_2 x^{\log_2 x} = \log_2 8x^2, (\log_2 x)^2 = \log_2 2^3 + \log_2 x^2$$

$$(\log_2 x)^2 - 2\log_2 x - 3 = 0$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 2t - 3 = 0, (t+1)(t-3) = 0$$

$$\therefore t = -1 \text{ 또는 } t = 3$$

따라서 $\log_2 x = -1$ 또는 $\log_2 x = 3$ 이므로

$$x = \frac{1}{2} \text{ 또는 } x = 8$$

그런데 ㉠에서 $x > 0$ 이므로

$$x = \frac{1}{2} \text{ 또는 } x = 8$$

(3) 로그의 진수 조건에서 $x > 0$ ㉠

주어진 방정식의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$$\log_3 x^{\log_3 x} = \log_3 27x^2, (\log_3 x)^2 = \log_3 3^3 + \log_3 x^2$$

$$(\log_3 x)^2 - 2\log_3 x - 3 = 0$$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 2t - 3 = 0, (t+1)(t-3) = 0$$

$$\therefore t = -1 \text{ 또는 } t = 3$$

따라서 $\log_3 x = -1$ 또는 $\log_3 x = 3$ 이므로

$$x = \frac{1}{3} \text{ 또는 } x = 27$$

그런데 ㉠에서 $x > 0$ 이므로

$$x = \frac{1}{3} \text{ 또는 } x = 27$$

(4) 로그의 진수 조건에서 $x > 0$ ㉠

주어진 방정식의 양변에 상용로그를 취하면

$$\log x^{\log x} = \log \frac{1000}{x^2}, (\log x)^2 = \log 10^3 - \log x^2$$

$$(\log x)^2 + 2\log x - 3 = 0$$

$\log x = t$ 로 놓으면

$$t^2 + 2t - 3 = 0, (t+3)(t-1) = 0$$

$$\therefore t = -3 \text{ 또는 } t = 1$$

따라서 $\log x = -3$ 또는 $\log x = 1$ 이므로

$$x = \frac{1}{1000} \text{ 또는 } x = 10$$

그런데 ㉠에서 $x > 0$ 이므로

$$x = \frac{1}{1000} \text{ 또는 } x = 10$$

(5) 로그의 진수 조건에서 $x > 0$ ㉠

주어진 방정식의 양변에 밑이 5인 로그를 취하면

$$\log_5 x^{\log_5 x} = \log_5 \frac{625}{x^3}$$

$$(\log_5 x)^2 = \log_5 5^4 - \log_5 x^3$$

$$(\log_5 x)^2 + 3\log_5 x - 4 = 0$$

$\log_5 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 + 3t - 4 = 0, (t+4)(t-1) = 0$$

$$\therefore t = -4 \text{ 또는 } t = 1$$

따라서 $\log_5 x = -4$ 또는 $\log_5 x = 1$ 이므로

$$x = \frac{1}{625} \text{ 또는 } x = 5$$

그런데 ㉠에서 $x > 0$ 이므로

$$x = \frac{1}{625} \text{ 또는 } x = 5$$

(6) 로그의 진수 조건에서 $x > 0$ ㉠

주어진 방정식의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$$\log_3 x^{\log_3 x} = \log_3 \frac{243}{x^4}$$

$$(\log_3 x)^2 = \log_3 3^5 - \log_3 x^4$$

$$(\log_3 x)^2 + 4\log_3 x - 5 = 0$$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 + 4t - 5 = 0, (t+5)(t-1) = 0$$

$$\therefore t = -5 \text{ 또는 } t = 1$$

따라서 $\log_3 x = -5$ 또는 $\log_3 x = 1$ 이므로

$$x = \frac{1}{243} \text{ 또는 } x = 3$$

그런데 ㉠에서 $x > 0$ 이므로

$$x = \frac{1}{243} \text{ 또는 } x = 3$$

(7) 로그의 진수 조건에서 $x > 0$ ㉠

$x^{\log 3} = 3^{\log x}$ 이므로 주어진 방정식은

$$3^{\log x} \times 3^{\log x} = 2(3^{\log x} + 3^{\log x}) - 3$$

$$(3^{\log x})^2 - 4 \times 3^{\log x} + 3 = 0$$

$3^{\log x} = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - 4t + 3 = 0, (t-1)(t-3) = 0$$

$$\therefore t = 1 \text{ 또는 } t = 3$$

따라서 $3^{\log x} = 1$ 또는 $3^{\log x} = 3$ 이므로

$$\log x = 0 \text{ 또는 } \log x = 1 \quad \therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 10$$

그런데 ㉠에서 $x > 0$ 이므로

$$x = 1 \text{ 또는 } x = 10$$

(8) 로그의 진수 조건에서 $x > 0$ ㉠

$x^{\log 2} = 2^{\log x}$ 이므로 주어진 방정식은

$$2^{\log x} \times 2^{\log x} = 2^{\log x} + 2^{\log x} + 8$$

$$(2^{\log x})^2 - 2 \times 2^{\log x} - 8 = 0$$

$2^{\log x} = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - 2t - 8 = 0, (t+2)(t-4) = 0$$

$$\therefore t = -2 \text{ 또는 } t = 4$$

이때 $t > 0$ 이므로 $t = 4$

$$\text{따라서 } 2^{\log x} = 4 \text{이므로 } \log x = 2 \quad \therefore x = 100$$

그런데 ㉠에서 $x > 0$ 이므로 $x = 100$

54 **답** (1) $a = \frac{1}{4}$ 또는 $a = 64$ (2) $a = 3$ 또는 $a = 27$

$$(3) a = 2 \text{ 또는 } a = 4$$

$$(4) a = \frac{1}{100000} \text{ 또는 } a = 10000000$$

풀이 (1) 이차방정식 $x^2 - x\log_2 a + \log_2 a + 3 = 0$ 이 중근을

을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$$D = (-\log_2 a)^2 - 4(\log_2 a + 3) = 0$$

$$(\log_2 a)^2 - 4\log_2 a - 12 = 0$$

$\log_2 a = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 4t - 12 = 0, (t+2)(t-6) = 0$$

$$\therefore t = -2 \text{ 또는 } t = 6$$

따라서 $\log_2 a = -2$ 또는 $\log_2 a = 6$ 이므로

$$a = \frac{1}{4} \text{ 또는 } a = 64$$

(2) 이차방정식 $x^2 - 2x\log_3 a + 4\log_3 a - 3 = 0$ 이 중근을 가

지므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (-\log_3 a)^2 - (4\log_3 a - 3) = 0$$

$$(\log_3 a)^2 - 4\log_3 a + 3 = 0$$

$\log_3 a = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 4t + 3 = 0, (t-1)(t-3) = 0$$

$$\therefore t=1 \text{ 또는 } t=3$$

따라서 $\log_3 a = 1$ 또는 $\log_3 a = 3$ 이므로

$$a=3 \text{ 또는 } a=27$$

- (3) 이차방정식 $25x^2 - 10x\log_2 a + 3\log_2 a - 2 = 0$ 이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (-5\log_2 a)^2 - 25(3\log_2 a - 2) = 0$$

$$25(\log_2 a)^2 - 75\log_2 a + 50 = 0$$

$$(\log_2 a)^2 - 3\log_2 a + 2 = 0$$

$$\log_2 a = t \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0, (t-1)(t-2) = 0$$

$$\therefore t=1 \text{ 또는 } t=2$$

따라서 $\log_2 a = 1$ 또는 $\log_2 a = 2$ 이므로

$$a=2 \text{ 또는 } a=4$$

- (4) 이차방정식 $x^2 - (\log a + 1)x + (\log a + 9) = 0$ 이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$$D = (\log a + 1)^2 - 4(\log a + 9) = 0$$

$$(\log a)^2 + 2\log a + 1 - 4\log a - 36 = 0$$

$$(\log a)^2 - 2\log a - 35 = 0$$

$$\log a = t \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 2t - 35 = 0, (t+5)(t-7) = 0$$

$$\therefore t = -5 \text{ 또는 } t = 7$$

따라서 $\log a = -5$ 또는 $\log a = 7$ 이므로

$$a = \frac{1}{100000} \text{ 또는 } a = 10000000$$

55 답 (1) 16 (2) 10 (3) 9 (4) 25

풀이 (1) $(\log_2 x)^2 - \log_2 x^4 - 3 = 0$ 에서

$$(\log_2 x)^2 - 4\log_2 x - 3 = 0$$

$$\log_2 x = t \text{로 놓으면 } t^2 - 4t - 3 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 방정식 $(\log_2 x)^2 - 4\log_2 x - 3 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 $\textcircled{1}$ 의 두 근은 $\log_2 \alpha, \log_2 \beta$ 이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_2 \alpha + \log_2 \beta = 4, \log_2 \alpha\beta = 4$$

$$\therefore \alpha\beta = 16$$

- (2) $(\log x)^2 - \log x - 6 = 0$ 에서

$$\log x = t \text{로 놓으면 } t^2 - t - 6 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 방정식 $(\log x)^2 - \log x - 6 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 $\textcircled{1}$ 의 두 근은 $\log \alpha, \log \beta$ 이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log \alpha + \log \beta = 1, \log \alpha\beta = 1$$

$$\therefore \alpha\beta = 10$$

- (3) $(\log_3 x)^2 - 2\log_3 x - 3 = 0$ 에서

$$\log_3 x = t \text{로 놓으면 } t^2 - 2t - 3 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 방정식 $(\log_3 x)^2 - 2\log_3 x - 3 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 $\textcircled{1}$ 의 두 근은 $\log_3 \alpha, \log_3 \beta$ 이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_3 \alpha + \log_3 \beta = 2, \log_3 \alpha\beta = 2$$

$$\therefore \alpha\beta = 9$$

- (4) $(\log_5 x)^2 - \log_5 x^2 - 6 = 0$ 에서

$$(\log_5 x)^2 - 2\log_5 x - 6 = 0$$

$$\log_5 x = t \text{로 놓으면 } t^2 - 2t - 6 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 방정식 $(\log_5 x)^2 - 2\log_5 x - 6 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 $\textcircled{1}$ 의 두 근은 $\log_5 \alpha, \log_5 \beta$ 이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_5 \alpha + \log_5 \beta = 2, \log_5 \alpha\beta = 2$$

$$\therefore \alpha\beta = 25$$

56 답 (1) $1 < x < 4$ (2) $3 < x < 5$

$$(3) x > -\frac{4}{3}$$

$$(4) 2 < x \leq 3$$

풀이 (1) 로그의 진수 조건에서 $x+5 > 0, x-1 > 0$

$$\therefore x > 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\log_{\frac{1}{4}}(x+5) < \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \text{에서}$$

$$\log_{\frac{1}{4}}(x+5) < \log_{\frac{1}{4}}(x-1)^2$$

이때 밑이 $\frac{1}{4}$ 이고 $0 < \frac{1}{4} < 1$ 이므로

$$x+5 > (x-1)^2, x^2 - 3x - 4 < 0$$

$$(x+1)(x-4) < 0$$

$$\therefore -1 < x < 4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 의 공통 범위를 구하면 $1 < x < 4$

- (2) 로그의 진수 조건에서 $x-1 > 0, x-3 > 0$

$$\therefore x > 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\log_2(x-1) + \log_2(x-3) - 3 < 0 \text{에서}$$

$$\log_2(x-1)(x-3) < \log_2 2^3$$

이때 밑이 2이고 $2 > 1$ 이므로

$$(x-1)(x-3) < 8, x^2 - 4x - 5 < 0$$

$$(x+1)(x-5) < 0$$

$$\therefore -1 < x < 5 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 의 공통 범위를 구하면 $3 < x < 5$

- (3) 로그의 진수 조건에서 $x+3 > 0, x^2+1 > 0$

$$x^2+1 \text{은 항상 } 0 \text{보다 크므로 } x > -3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\log_2(x+3) > \log_4(x^2+1) \text{에서}$$

$$\log_4(x+3)^2 > \log_4(x^2+1)$$

이때 밑이 4이고 $4 > 1$ 이므로

$$(x+3)^2 > x^2+1, 3x+4 > 0$$

$$\therefore x > -\frac{4}{3} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 의 공통 범위를 구하면 $x > -\frac{4}{3}$

- (4) 로그의 진수 조건에서 $x^2-4 > 0, x+2 > 0$

$$\therefore x > 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(x^2-4) \geq \log_{\frac{1}{3}}(x+2) \text{에서}$$

밑이 $\frac{1}{3}$ 이고 $0 < \frac{1}{3} < 1$ 이므로

$$x^2-4 \leq x+2, x^2-x-6 \leq 0$$

$$(x+2)(x-3) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq x \leq 3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 의 공통 범위를 구하면 $2 < x \leq 3$

57 답 (1) $2 < x < 8$ (2) $0 < x < 2$ 또는 $x > 4$

(3) $\frac{1}{243} < x < \frac{1}{3}$ (4) $\frac{1}{25} \leq x \leq 5$

풀이 (1) 로그의 진수 조건에서 $x > 0$ ㉠

$\log_2 x = t$ 로 놓으면 주어진 부등식은

$$t^2 - 4t + 3 < 0, (t-1)(t-3) < 0$$

$$\therefore 1 < t < 3$$

따라서 $1 < \log_2 x < 3$ 이므로 $\log_2 2 < \log_2 x < \log_2 2^3$

이때 밑이 2이고 $2 > 1$ 이므로 $2 < x < 2^3$

$$\therefore 2 < x < 8 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $2 < x < 8$

(2) 로그의 진수 조건에서 $x > 0$ ㉢

$\log_{\frac{1}{2}} x = t$ 로 놓으면 주어진 부등식은

$$t^2 + 3t + 2 > 0, (t+2)(t+1) > 0$$

$$\therefore t < -2 \text{ 또는 } t > -1$$

따라서 $\log_{\frac{1}{2}} x < -2$ 또는 $\log_{\frac{1}{2}} x > -1$ 이므로

$$\log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \text{ 또는 } \log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$$

이때 밑이 $\frac{1}{2}$ 이고 $0 < \frac{1}{2} < 1$ 이므로

$$x > \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \text{ 또는 } x < \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$$

$$\therefore x > 4 \text{ 또는 } x < 2 \quad \text{..... ㉣}$$

㉢, ㉣의 공통 범위를 구하면 $0 < x < 2$ 또는 $x > 4$

(3) 로그의 진수 조건에서 $x > 0, 243x^6 > 0$

$$\therefore x > 0 \quad \text{..... ㉤}$$

$$(\log_3 x)^2 + \log_3 243x^6 < 0 \text{에서}$$

$$(\log_3 x)^2 + \log_3 3^5 + \log_3 x^6 < 0$$

$$(\log_3 x)^2 + 6\log_3 x + 5 < 0$$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 + 6t + 5 < 0, (t+5)(t+1) < 0$$

$$\therefore -5 < t < -1$$

따라서 $-5 < \log_3 x < -1$ 이므로

$$\log_3 3^{-5} < \log_3 x < \log_3 3^{-1}$$

이때 밑이 3이고 $3 > 1$ 이므로 $3^{-5} < x < 3^{-1}$

$$\therefore \frac{1}{243} < x < \frac{1}{3} \quad \text{..... ㉥}$$

㉤, ㉥의 공통 범위를 구하면

$$\frac{1}{243} < x < \frac{1}{3}$$

(4) 로그의 진수 조건에서 $x > 0, 5x > 0$

$$\therefore x > 0 \quad \text{..... ㉦}$$

$$2 \geq \log_{\frac{1}{5}} x \times \log_{\frac{1}{5}} 5x \text{에서}$$

$$2 \geq \log_{\frac{1}{5}} x (\log_{\frac{1}{5}} 5 + \log_{\frac{1}{5}} x)$$

$$2 \geq -\log_{\frac{1}{5}} x + (\log_{\frac{1}{5}} x)^2$$

$$(\log_{\frac{1}{5}} x)^2 - \log_{\frac{1}{5}} x - 2 \leq 0$$

$\log_{\frac{1}{5}} x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - t - 2 \leq 0, (t+1)(t-2) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq t \leq 2$$

따라서 $-1 \leq \log_{\frac{1}{5}} x \leq 2$ 이므로

$$\log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} \leq \log_{\frac{1}{5}} x \leq \log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{1}{5}\right)^2$$

이때 밑이 $\frac{1}{5}$ 이고 $0 < \frac{1}{5} < 1$ 이므로 $\left(\frac{1}{5}\right)^2 \leq x \leq \left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$

$$\therefore \frac{1}{25} \leq x \leq 5 \quad \text{..... ㉧}$$

㉦, ㉧의 공통 범위를 구하면

$$\frac{1}{25} \leq x \leq 5$$

58 답 (1) $\frac{1}{5} < x < 25$ (2) $0 < x < \frac{1}{2}$ 또는 $x > 16$

(3) $0 < x < \frac{1}{625}$ 또는 $x > 5$ (4) $\frac{1}{1000} < x < 10$

풀이 (1) 로그의 진수 조건에서 $x > 0$ ㉨

$x^{\log_5 x} < 25x$ 의 양변에 밑이 5인 로그를 취하면

$5 > 1$ 이므로

$$\log_5 x^{\log_5 x} < \log_5 25x$$

$$(\log_5 x)^2 < \log_5 25 + \log_5 x$$

$$(\log_5 x)^2 - \log_5 x - 2 < 0$$

$\log_5 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - t - 2 < 0, (t+1)(t-2) < 0$$

$$\therefore -1 < t < 2$$

따라서 $-1 < \log_5 x < 2$ 이므로

$$\log_5 5^{-1} < \log_5 x < \log_5 5^2$$

이때 밑이 5이고 $5 > 1$ 이므로 $5^{-1} < x < 5^2$

$$\therefore \frac{1}{5} < x < 25 \quad \text{..... ㉩}$$

㉨, ㉩의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{5} < x < 25$

(2) 로그의 진수 조건에서 $x > 0$ ㉪

$x^{\log_2 x} > 16x^3$ 의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$2 > 1$ 이므로

$$\log_2 x^{\log_2 x} > \log_2 16x^3$$

$$(\log_2 x)^2 > \log_2 2^4 + \log_2 x^3$$

$$(\log_2 x)^2 - 3\log_2 x - 4 > 0$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 3t - 4 > 0, (t+1)(t-4) > 0$$

$$\therefore t < -1 \text{ 또는 } t > 4$$

따라서 $\log_2 x < -1$ 또는 $\log_2 x > 4$ 이므로

$$\log_2 x < \log_2 2^{-1} \text{ 또는 } \log_2 x > \log_2 2^4$$

이때 밑이 2이고 $2 > 1$ 이므로

$$x < 2^{-1} \text{ 또는 } x > 2^4$$

$$\therefore x < \frac{1}{2} \text{ 또는 } x > 16 \quad \text{..... ㉫}$$

㉪, ㉫의 공통 범위를 구하면

$$0 < x < \frac{1}{2} \text{ 또는 } x > 16$$

(3) 로그의 진수 조건에서 $x > 0$ ㉬

$x^{\log_{\frac{1}{5}} x} < \frac{x^3}{625}$ 의 양변에 밑이 $\frac{1}{5}$ 인 로그를 취하면

$$0 < \frac{1}{5} < 1 \text{이므로}$$

$$\log_{\frac{1}{5}} x^{\log_{\frac{1}{5}} x} > \log_{\frac{1}{5}} \frac{x^3}{625}$$

$$(\log_{\frac{1}{5}} x)^2 > \log_{\frac{1}{5}} x^3 + \log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{1}{5}\right)^4$$

$$(\log_{\frac{1}{5}} x)^2 - 3\log_{\frac{1}{5}} x - 4 > 0$$

$$\log_{\frac{1}{5}} x = t \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 3t - 4 > 0, (t+1)(t-4) > 0$$

$$\therefore t < -1 \text{ 또는 } t > 4$$

$$\text{따라서 } \log_{\frac{1}{5}} x < -1 \text{ 또는 } \log_{\frac{1}{5}} x > 4 \text{이므로}$$

$$\log_{\frac{1}{5}} x < \log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} \text{ 또는 } \log_{\frac{1}{5}} x > \log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{1}{5}\right)^4$$

$$\text{이때 밑이 } \frac{1}{5} \text{이고 } 0 < \frac{1}{5} < 1 \text{이므로}$$

$$x > \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} \text{ 또는 } x < \left(\frac{1}{5}\right)^4$$

$$\therefore x < \frac{1}{625} \text{ 또는 } x > 5 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$$0 < x < \frac{1}{625} \text{ 또는 } x > 5$$

(4) 로그의 진수 조건에서 $x > 0$ ㉢

$$x^{\log_{\frac{1}{10}} x} > \frac{x^2}{1000} \text{의 양변에 밑이 } \frac{1}{10} \text{인 로그를 취하면}$$

$$0 < \frac{1}{10} < 1 \text{이므로}$$

$$\log_{\frac{1}{10}} x^{\log_{\frac{1}{10}} x} < \log_{\frac{1}{10}} \frac{x^2}{1000}$$

$$(\log_{\frac{1}{10}} x)^2 < \log_{\frac{1}{10}} x^2 + \log_{\frac{1}{10}} \left(\frac{1}{10}\right)^3$$

$$(\log_{\frac{1}{10}} x)^2 - 2\log_{\frac{1}{10}} x - 3 < 0$$

$$\log_{\frac{1}{10}} x = t \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 2t - 3 < 0, (t+1)(t-3) < 0$$

$$\therefore -1 < t < 3$$

$$\text{따라서 } -1 < \log_{\frac{1}{10}} x < 3 \text{이므로}$$

$$\log_{\frac{1}{10}} \left(\frac{1}{10}\right)^{-1} < \log_{\frac{1}{10}} x < \log_{\frac{1}{10}} \left(\frac{1}{10}\right)^3$$

$$\text{이때 밑이 } \frac{1}{10} \text{이고 } 0 < \frac{1}{10} < 1 \text{이므로}$$

$$\left(\frac{1}{10}\right)^3 < x < \left(\frac{1}{10}\right)^{-1}$$

$$\therefore \frac{1}{1000} < x < 10 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$$\frac{1}{1000} < x < 10$$

59 답 (1) $2 \leq x < 16$ (2) $1 < x < 10000$

풀이 (1) 로그의 진수 조건에서 $\log_2 x > 0, x > 0$ 이므로

$$x > 1 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$0 \leq \log_4 (\log_2 x) < 1 \text{에서}$$

$$\log_4 1 \leq \log_4 (\log_2 x) < \log_4 4$$

$$\text{밑이 } 4 \text{이고 } 4 > 1 \text{이므로}$$

$$1 \leq \log_2 x < 4 \quad \therefore \log_2 2 \leq \log_2 x < \log_2 2^4$$

$$\text{밑이 } 2 \text{이고 } 2 > 1 \text{이므로}$$

$$2 \leq x < 16 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A}, \textcircled{B} \text{의 공통 범위를 구하면 } 2 \leq x < 16$$

$$\text{다른 풀이 } 0 \leq \log_4 (\log_2 x) < 1 \text{에서}$$

$$4^0 \leq \log_2 x < 4^1 \quad \therefore 1 \leq \log_2 x < 4$$

$$\text{이때 밑이 } 2 \text{이고 } 2 > 1 \text{이므로}$$

$$2^1 \leq x < 2^4 \quad \therefore 2 \leq x < 16$$

(2) 로그의 진수 조건에서 $\log x > 0, x > 0$ 이므로

$$x > 1 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$\log_{\frac{1}{2}} (\log x) > -2 \text{에서}$$

$$\log_{\frac{1}{2}} (\log x) > \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

$$\text{밑이 } \frac{1}{2} \text{이고 } 0 < \frac{1}{2} < 1 \text{이므로}$$

$$\log x < 4 \quad \therefore \log x < \log 10^4$$

$$\text{밑이 } 10 \text{이고 } 10 > 1 \text{이므로}$$

$$x < 10^4 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A}, \textcircled{B} \text{의 공통 범위를 구하면 } 1 < x < 10000$$

60 답 5년 후

풀이 현재 돼지의 수를 a 마리라고 하면 n 년 후의 돼지의 수는 $a(1+0.55)^n$, 즉 $1.55^n a$ 마리이므로 조건에 맞게 부등식을 세우면

$$1.55^n a \geq 6a$$

$$1.55^n \geq 6$$

이므로 양변에 상용로그를 취하면 밑이 10이고 $10 > 1$ 이므로

$$\log 1.55^n \geq \log 6$$

$$n \log 1.55 \geq \log 2 + \log 3$$

$$\text{이때 } \log 1.55 = 0.19 > 0 \text{이므로}$$

$$n \geq \frac{\log 2 + \log 3}{\log 1.55} = \frac{0.30 + 0.48}{0.19} = \frac{0.78}{0.19} = 4.1 \dots$$

따라서 돼지의 수가 처음으로 현재의 6배 이상이 되는 것은 5년 후이다.

61 답 7장

풀이 현재 자외선의 양을 a 라고 하면 이 빛이 유리를 n 장 통과하였을 때 자외선의 양은 $a(1-0.1)^n$, 즉 $0.9^n a$ 이므로 조건에 맞게 부등식을 세우면

$$0.9^n a \leq \frac{1}{2} a$$

$$0.9^n \leq \frac{1}{2}$$

양변에 상용로그를 취하면 밑이 10이고 $10 > 1$ 이므로

$$\log 0.9^n \leq \log \frac{1}{2}$$

$$n \log \frac{9}{10} \leq \log 1 - \log 2$$

$$n(\log 3^2 - \log 10) \leq -\log 2$$

$$n(2\log 3 - 1) \leq -\log 2$$

$$\text{이때 } \log 3 = 0.4771 \text{이고 } 2\log 3 = 0.9542 \text{이므로}$$

$$2\log 3 - 1 = -0.0458 < 0$$

$$\therefore n \geq \frac{-\log 2}{2\log 3 - 1} = \frac{-0.3010}{-0.0458} = 6.5 \dots$$

따라서 자외선의 양이 처음의 50 % 이하가 되게 하려면 유리를 최소한 7장 통과시켜야 한다.

01 답 5

풀이 함수 $y=a^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y-3=a^{x-1} \quad \therefore y=a^{x-1}+3$$

함수 $y=a^{x-1}+3$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$-y=a^{x-1}+3 \quad \therefore y=-a^{x-1}-3$$

이 그래프가 점 $(2, -8)$ 을 지나므로

$$-8=-a^{2-1}-3 \quad \therefore a=5$$

02 답 $\left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{1}{4}}, \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{5}}, \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$

$$\text{풀이 } \left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{1}{4}} = \left\{\left(\frac{1}{3}\right)^4\right\}^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{5}} = \left\{\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}^{\frac{1}{5}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{5}}$$

이때 $\frac{1}{3} < \frac{2}{5} < 1$ 이고 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 은 x 의 값이 증가할 때 y 의 값은 감소하므로

$$\frac{1}{3} < \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{5}} < \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\therefore \left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{1}{4}} < \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{5}} < \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

03 답 $\frac{17}{4}$

풀이 함수 $y=2^{-x^2+6x-7}$ 에서 밑이 2이고 $2>1$ 이므로

$-x^2+6x-7$ 이 최대일 때 y 도 최대, $-x^2+6x-7$ 이 최소일 때 y 도 최소가 된다.

$$-x^2+6x-7=-(x-3)^2+2 \text{이므로 } 1 \leq x \leq 4 \text{에서}$$

$-x^2+6x-7$ 의 최댓값은 $x=3$ 일 때 2, 최솟값은 $x=1$ 일 때 -2 이다.

$$\text{따라서 } M=2^2=4, m=2^{-2}=\frac{1}{4} \text{이므로}$$

$$M+m=\frac{17}{4}$$

04 답 $\frac{19}{4}$

$$\text{풀이 } y=4^{-x}-6 \times 2^{-x}+a$$

$$=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2-6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x+a$$

이므로 $\left(\frac{1}{2}\right)^x=t$ ($t>0$)로 놓으면

$$y=t^2-6t+a=(t-3)^2-9+a$$

이때 $1 \leq x \leq 2$ 에서

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^1 \quad \therefore \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}$$

따라서 $\frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}$ 에서 함수 $y=(t-3)^2-9+a$ 의 최솟값

은 $t=\frac{1}{2}$ 일 때 2이므로

$$\left(\frac{1}{2}-3\right)^2-9+a=2$$

$$\therefore a=\frac{19}{4}$$

05 답 -3

$$\text{풀이 } \left(\frac{1}{4}\right)^x-3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+8=0 \text{에서}$$

$$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}^x-3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}+8=0$$

$$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2-6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x+8=0$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t \text{ } (t>0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2-6t+8=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

방정식 $\left(\frac{1}{4}\right)^x-3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+8=0$ 의 두 근을 α, β 라고 하면

①의 두 근은 $\left(\frac{1}{2}\right)^\alpha, \left(\frac{1}{2}\right)^\beta$ 이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\left(\frac{1}{2}\right)^\alpha \times \left(\frac{1}{2}\right)^\beta = \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+\beta} = 8 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \quad \therefore \alpha+\beta=-3$$

따라서 두 근의 합은 -3 이다.

06 답 4

$$\text{풀이 } (x^2)^4=x^x \times x^5 \text{에서 } x^8=x^{x+5} \text{이므로}$$

$$8=x+5 \quad \therefore x=3$$

또, $x=1$ 이면 주어진 방정식은 $1^8=1^1 \times 1^5=1$ 로 등식이 성립한다.

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=3$$

따라서 모든 근의 합은

$$1+3=4$$

07 답 -4

$$\text{풀이 } 64^x \geq (0.25)^{4-x^2} \text{에서 } 64^x \geq \left(\frac{1}{4}\right)^{4-x^2}$$

밑을 2로 같게 하면

$$(2^6)^x \geq (2^{-2})^{4-x^2}, 2^{6x} \geq 2^{2x^2-8}$$

밑이 2이고 $2>1$ 이므로

$$6x \geq 2x^2-8, 2x^2-6x-8 \leq 0$$

$$x^2-3x-4 \leq 0, (x+1)(x-4) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq x \leq 4$$

따라서 $M=4, m=-1$ 이므로

$$Mm=-4$$

08 답 0

$$\text{풀이 } 7^{2x+1}-50 \times 7^x+7 \leq 0 \text{에서}$$

$$7 \times (7^x)^2-50 \times 7^x+7 \leq 0$$

$$7^x=t \text{ } (t>0) \text{로 놓으면}$$

$$7t^2-50t+7 \leq 0, (7t-1)(t-7) \leq 0$$

$$\therefore \frac{1}{7} \leq t \leq 7$$

$$\text{즉, } \frac{1}{7} \leq 7^x \leq 7 \text{이므로 } 7^{-1} \leq 7^x \leq 7^1$$

이때 밑이 7이고 $7>1$ 이므로 $-1 \leq x \leq 1$

따라서 정수 x 는 $-1, 0, 1$ 이므로 모든 정수 x 의 값의 합은 $-1+0+1=0$

09 답 5

풀이 함수 $y=\log_2 x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$-y=\log_2 x \quad \therefore y=-\log_2 x$$

함수 $y=-\log_2 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y-3=-\log_2 (x+2)$$

$$\therefore y=-\log_2 (x+2)+3$$

이 식과 $y=-\log_2 (x+a)+b$ 가 일치하므로

$$a=2, b=3$$

$$\therefore a+b=5$$

10 답 50

풀이 $A(0, \log_5 2)$, $B(0, \log_5 a)$ 이고 $\overline{AB}=2$ 이므로

$$\log_5 a - \log_5 2 = 2$$

$$\log_5 a = 2 + \log_5 2, \log_5 a = \log_5 5^2 + \log_5 2$$

$$\log_5 a = \log_5 50 \quad \therefore a=50$$

11 답 2

풀이 $y=\log_2 (x+a)$ 에서 밑이 2 이고 $2>1$ 이므로

x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

따라서 $x=33$ 일 때, 함수 $y=\log_2 (x+a)$ 가 최댓값 5 를 가지므로

$$5=\log_2 (33+a)$$

$$\text{즉, } 33+a=2^5 \text{이므로 } a=-1$$

따라서 함수 $y=\log_2 (x-1)$ 의 최솟값은 $x=5$ 일 때

$$\log_2 (5-1)=\log_2 4=2$$

12 답 10

$$\begin{aligned} \text{풀이 } y &= \log x \times \log \frac{100}{x} = \log x \times (\log 100 - \log x) \\ &= -(\log x)^2 + 2\log x \end{aligned}$$

$\log x=t$ 로 놓으면

$$y=-t^2+2t=-(t-1)^2+1$$

이때 $1 \leq x \leq 100$ 이고, $10>1$ 이므로

$$\log 1 \leq \log x \leq \log 100$$

$$\therefore 0 \leq t \leq 2$$

따라서 $0 \leq t \leq 2$ 에서 함수

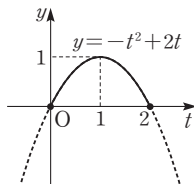
$$y=-(t-1)^2+1 \text{은 } t=1 \text{일 때 최댓}$$

값 1 을 갖는다.

$t=\log x=1$ 일 때, 즉 $x=10$ 일 때 최댓값 1 을 가지므로

$$a=10, m=1$$

$$\therefore \frac{a}{m}=10$$



13 답 -12

풀이 로그의 밑 조건에서

$$x^2-1>0, x^2-1 \neq 1, x+11>0, x+11 \neq 1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\log_{(x^2-1)} 2 = \log_{(x+11)} 2 \text{에서}$$

$$x^2-1=x+11, x^2-x-12=0$$

$$(x+3)(x-4)=0 \quad \therefore x=-3 \text{ 또는 } x=4$$

$$\textcircled{7} \text{에서 } x=-3 \text{ 또는 } x=4$$

따라서 모든 근의 곱은

$$-3 \times 4 = -12$$

14 답 $x=8$

풀이 $x=2$ 를 주어진 방정식에 대입하면

$$(a+1)^2-3 \times 2+2=0, a^2+2a-3=0$$

$$(a+3)(a-1)=0$$

이때 $a>0$ 이므로 $a=1$

따라서 주어진 방정식은

$$(1+\log_2 x)^2-3\log_2 x^2+2=0$$

$$1+2\log_2 x+(\log_2 x)^2-6\log_2 x+2=0$$

$$(\log_2 x)^2-4\log_2 x+3=0$$

$\log_2 x=t$ 로 놓으면

$$t^2-4t+3=0, (t-1)(t-3)=0$$

$$t=1 \text{ 또는 } t=3$$

$$\log_2 x=1 \text{에서 } x=2$$

$$\log_2 x=3 \text{에서 } x=2^3=8$$

따라서 나머지 한 근은 $x=8$

15 답 2

풀이 $(\log x)^2-k\log x+3-k \geq 0$ 에서

$\log x=t$ 로 놓으면

$$t^2-kt+3-k \geq 0$$

이 부등식이 항상 성립하기 위해서는 이차방정식

$t^2-kt+3-k=0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$D=(-k)^2-4 \times 1 \times (3-k) \leq 0$$

$$k^2+4k-12 \leq 0, (k+6)(k-2) \leq 0$$

$$\therefore -6 \leq k \leq 2$$

따라서 실수 k 의 최댓값은 2 이다.

16 답 $\frac{\sqrt{10}}{10}$ 배

풀이 투과도를 x , 처음 쏘인 빛의 양을 I_0 , 투과된 빛의 양을 I 라고 하면

$$\frac{I}{I_0}=x \quad (x>0)$$

이때 사진 농도가 $\frac{1}{2}$ 이상이므로

$$-\log x \geq \frac{1}{2}, \log x \leq -\frac{1}{2}$$

$$\log x \leq \log 10^{-\frac{1}{2}} \quad \therefore 0 < x \leq 10^{-\frac{1}{2}}$$

따라서 투과된 빛의 양은 처음 쏘인 빛의 양의 최대 $10^{-\frac{1}{2}}$

배, 즉 $\frac{\sqrt{10}}{10}$ 배이다.

II

삼각함수

II-1 삼각함수의 뜻

068-081쪽

01 답 (1) $360^\circ \times n + 30^\circ$ (단, n 은 정수)

(2) $360^\circ \times n + 120^\circ$ (단, n 은 정수)

(3) $360^\circ \times n + 250^\circ$ (단, n 은 정수)

풀이 (1) 동경 OP가 나타내는 한 각이

$\alpha^\circ = 30^\circ$ ($0^\circ \leq \alpha^\circ < 360^\circ$)이므로 일반각은

$360^\circ \times n + 30^\circ$ (단, n 은 정수)

(2) 동경 OP가 나타내는 한 각이

$\alpha^\circ = 120^\circ$ ($0^\circ \leq \alpha^\circ < 360^\circ$)이므로 일반각은

$360^\circ \times n + 120^\circ$ (단, n 은 정수)

(3) 동경 OP가 나타내는 한 각이

$\alpha^\circ = 360^\circ - 110^\circ = 250^\circ$ ($0^\circ \leq \alpha^\circ < 360^\circ$)이므로 일반각은

$360^\circ \times n + 250^\circ$ (단, n 은 정수)

02 답 ㄷ, ㄹ

풀이 ㄷ. $405^\circ = 360^\circ + 45^\circ$

ㄹ. $585^\circ = 360^\circ + 225^\circ$

ㄴ. $765^\circ = 360^\circ \times 2 + 45^\circ$

따라서 45° 를 나타내는 동경과 일치하는 것은 ㄷ, ㄹ이다.

03 답 ㄱ, ㄴ

풀이 $375^\circ = 360^\circ + 15^\circ$

ㄷ. $555^\circ = 360^\circ + 195^\circ$

ㄹ. $735^\circ = 360^\circ \times 2 + 15^\circ$

ㄴ. $915^\circ = 360^\circ \times 2 + 195^\circ$

따라서 375° 를 나타내는 동경과 일치하는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

04 답 (1) 제1사분면 (2) 제2사분면 (3) 제3사분면

(4) 제2사분면 (5) 제4사분면 (6) 제4사분면

풀이 (1) $420^\circ = 360^\circ + 60^\circ$

따라서 420° 는 제1사분면의 각이다.

(2) $840^\circ = 360^\circ \times 2 + 120^\circ$

따라서 840° 는 제2사분면의 각이다.

(3) $1320^\circ = 360^\circ \times 3 + 240^\circ$

따라서 1320° 는 제3사분면의 각이다.

(4) $-625^\circ = 360^\circ \times (-2) + 95^\circ$

따라서 -625° 는 제2사분면의 각이다.

(5) $-1500^\circ = 360^\circ \times (-5) + 300^\circ$

따라서 -1500° 는 제4사분면의 각이다.

(6) $-1830^\circ = 360^\circ \times (-6) + 330^\circ$

따라서 -1830° 는 제4사분면의 각이다.

05 답 (1) 제1사분면, 제3사분면

(2) 제1사분면, 제2사분면, 제4사분면

(3) 제1사분면, 제3사분면, 제4사분면

풀이 (1) θ 가 제2사분면의 각이므로

$360^\circ \times n + 90^\circ < \theta < 360^\circ \times n + 180^\circ$ (n 은 정수)

$\therefore 180^\circ \times n + 45^\circ < \frac{\theta}{2} < 180^\circ \times n + 90^\circ$

(i) $n=2k$ (k 는 정수)일 때

$180^\circ \times 2k + 45^\circ < \frac{\theta}{2} < 180^\circ \times 2k + 90^\circ$

$\therefore 360^\circ \times k + 45^\circ < \frac{\theta}{2} < 360^\circ \times k + 90^\circ$

따라서 $\frac{\theta}{2}$ 는 제1사분면의 각이다.

(ii) $n=2k+1$ (k 는 정수)일 때

$180^\circ \times (2k+1) + 45^\circ < \frac{\theta}{2} < 180^\circ \times (2k+1) + 90^\circ$

$\therefore 360^\circ \times k + 225^\circ < \frac{\theta}{2} < 360^\circ \times k + 270^\circ$

따라서 $\frac{\theta}{2}$ 는 제3사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 $\frac{\theta}{2}$ 를 나타내는 동경이 존재하는 사분면은 제1사분면, 제3사분면이다.

(2) θ 가 제2사분면의 각이므로

$360^\circ \times n + 90^\circ < \theta < 360^\circ \times n + 180^\circ$ (n 은 정수)

$\therefore 120^\circ \times n + 30^\circ < \frac{\theta}{3} < 120^\circ \times n + 60^\circ$

(i) $n=3k$ (k 는 정수)일 때

$120^\circ \times 3k + 30^\circ < \frac{\theta}{3} < 120^\circ \times 3k + 60^\circ$

$\therefore 360^\circ \times k + 30^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 60^\circ$

따라서 $\frac{\theta}{3}$ 는 제1사분면의 각이다.

(ii) $n=3k+1$ (k 는 정수)일 때

$120^\circ \times (3k+1) + 30^\circ < \frac{\theta}{3} < 120^\circ \times (3k+1) + 60^\circ$

$\therefore 360^\circ \times k + 150^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 180^\circ$

따라서 $\frac{\theta}{3}$ 는 제2사분면의 각이다.

(iii) $n=3k+2$ (k 는 정수)일 때

$120^\circ \times (3k+2) + 30^\circ < \frac{\theta}{3} < 120^\circ \times (3k+2) + 60^\circ$

$\therefore 360^\circ \times k + 270^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 300^\circ$

따라서 $\frac{\theta}{3}$ 는 제4사분면의 각이다.

(i), (ii), (iii)에서 $\frac{\theta}{3}$ 를 나타내는 동경이 존재하는 사분면은 제1사분면, 제2사분면, 제4사분면이다.

(3) θ 가 제3사분면의 각이므로

$360^\circ \times n + 180^\circ < \theta < 360^\circ \times n + 270^\circ$ (n 은 정수)

$\therefore 120^\circ \times n + 60^\circ < \frac{\theta}{3} < 120^\circ \times n + 90^\circ$

(i) $n=3k$ (k 는 정수)일 때

$$120^\circ \times 3k + 60^\circ < \frac{\theta}{3} < 120^\circ \times 3k + 90^\circ$$

$$\therefore 360^\circ \times k + 60^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 90^\circ$$

따라서 $\frac{\theta}{3}$ 는 제1사분면의 각이다.

(ii) $n=3k+1$ (k 는 정수)일 때

$$120^\circ \times (3k+1) + 60^\circ < \frac{\theta}{3} < 120^\circ \times (3k+1) + 90^\circ$$

$$\therefore 360^\circ \times k + 180^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 210^\circ$$

따라서 $\frac{\theta}{3}$ 는 제3사분면의 각이다.

(iii) $n=3k+2$ (k 는 정수)일 때

$$120^\circ \times (3k+2) + 60^\circ < \frac{\theta}{3} < 120^\circ \times (3k+2) + 90^\circ$$

$$\therefore 360^\circ \times k + 300^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 330^\circ$$

따라서 $\frac{\theta}{3}$ 는 제4사분면의 각이다.

(i), (ii), (iii)에서 $\frac{\theta}{3}$ 를 나타내는 동경이 존재하는 사분면은 제1사분면, 제3사분면, 제4사분면이다.

06 답 (1) $15^\circ, 45^\circ, 75^\circ$ (2) 135° (3) 60° (4) 162°

풀이 (1) 각 θ 를 나타내는 동경과 각 13θ 를 나타내는 동경

이 원점에 대하여 대칭이므로

$$13\theta - \theta = 360^\circ \times n + 180^\circ \quad (n \text{은 정수})$$

$$12\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ$$

$$\theta = 30^\circ \times n + 15^\circ$$

$$\therefore \theta = 15^\circ, 45^\circ, 75^\circ, 105^\circ, \dots$$

이 중에서 예각의 크기는 $15^\circ, 45^\circ, 75^\circ$ 이다.

(2) 각 θ 를 나타내는 동경과 각 3θ 를 나타내는 동경이 y 축에 대하여 대칭이므로

$$\theta + 3\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ \quad (n \text{은 정수})$$

$$4\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ$$

$$\theta = 90^\circ \times n + 45^\circ$$

$$\therefore \theta = 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, \dots$$

이 중에서 둔각의 크기는 135° 이다.

(3) 각 θ 를 나타내는 동경과 각 5θ 를 나타내는 동경이 x 축에 대하여 대칭이므로

$$\theta + 5\theta = 360^\circ \times n \quad (n \text{은 정수})$$

$$6\theta = 360^\circ \times n$$

$$\theta = 60^\circ \times n$$

$$\therefore \theta = 60^\circ, 120^\circ, \dots$$

이 중에서 예각의 크기는 60° 이다.

(4) 각 θ 를 나타내는 동경과 각 4θ 를 나타내는 동경이 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로

$$\theta + 4\theta = 360^\circ \times n + 90^\circ \quad (n \text{은 정수})$$

$$5\theta = 360^\circ \times n + 90^\circ$$

$$\theta = 72^\circ \times n + 18^\circ$$

$$\therefore \theta = 18^\circ, 90^\circ, 162^\circ, 234^\circ, \dots$$

이 중에서 둔각의 크기는 162° 이다.

07 답 (1) 18° (2) 72° (3) $\frac{2}{3}\pi$ (4) $\frac{5}{6}\pi$ (5) $\frac{5}{4}\pi$

풀이 (1) $\frac{\pi}{10} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 18^\circ$

(2) $\frac{2}{5}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 72^\circ$

(3) $120 \times \frac{\pi}{180} = \frac{2}{3}\pi$

(4) $150 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5}{6}\pi$

(5) $225 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5}{4}\pi$

08 답 (1) $\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{4}$ (단, n 은 정수)

(2) $\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{3}$ (단, n 은 정수)

(3) $\theta = 2n\pi + \frac{7}{5}\pi$ (단, n 은 정수)

(4) $\theta = 2n\pi + \frac{7}{4}\pi$ (단, n 은 정수)

(5) $\theta = 2n\pi + \pi$ (단, n 은 정수)

풀이 (1) $\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{4}$ (단, n 은 정수)

(2) $\frac{13}{3}\pi = 2\pi \times 2 + \frac{\pi}{3}$

$\therefore \theta = 2n\pi + \frac{\pi}{3}$ (단, n 은 정수)

(3) $\frac{27}{5}\pi = 2\pi \times 2 + \frac{7}{5}\pi$

$\therefore \theta = 2n\pi + \frac{7}{5}\pi$ (단, n 은 정수)

(4) $-\frac{17}{4}\pi = 2\pi \times (-3) + \frac{7}{4}\pi$

$\therefore \theta = 2n\pi + \frac{7}{4}\pi$ (단, n 은 정수)

(5) $-5\pi = 2\pi \times (-3) + \pi$

$\therefore \theta = 2n\pi + \pi$ (단, n 은 정수)

09 답 (1) 호의 길이: $\frac{20}{3}\pi$, 넓이: $\frac{40}{3}\pi$

(2) 호의 길이: 15π , 넓이: 75π

풀이 (1) 부채꼴의 반지름의 길이를 r , 중심각의 크기를 θ , 호의 길이를 l , 넓이를 S 라고 하면

$$r=4, \theta=\frac{5}{3}\pi \text{이므로}$$

$$l=r\theta=4 \times \frac{5}{3}\pi=\frac{20}{3}\pi$$

$$S=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2} \times 4^2 \times \frac{5}{3}\pi=\frac{40}{3}\pi$$

(2) 부채꼴의 반지름의 길이를 r , 중심각의 크기를 θ , 호의

길이를 l , 넓이를 S 라고 하면 $r=10, \theta=\frac{3}{2}\pi$ 이므로

$$l=r\theta=10 \times \frac{3}{2}\pi=15\pi$$

$$S=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2} \times 10^2 \times \frac{3}{2}\pi=75\pi$$

10 답 (1) 중심각의 크기: $\frac{\pi}{6}$, 넓이: 3π

(2) 중심각의 크기: $\frac{\pi}{8}$, 넓이: π

풀이 (1) 부채꼴의 반지름의 길이를 r , 중심각의 크기를 θ , 호의 길이를 l , 넓이를 S 라고 하면 $r=6$, $l=\pi$ 이므로

$$l=r\theta \text{에서 } \pi=6\theta \quad \therefore \theta=\frac{\pi}{6}$$

$$\therefore S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}\times 6\times \pi=3\pi$$

(2) 부채꼴의 반지름의 길이를 r , 중심각의 크기를 θ , 호의 길이를 l , 넓이를 S 라고 하면 $r=4$, $l=\frac{\pi}{2}$ 이므로

$$l=r\theta \text{에서 } \frac{\pi}{2}=4\theta \quad \therefore \theta=\frac{\pi}{8}$$

$$\therefore S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}\times 4\times \frac{\pi}{2}=\pi$$

11 **답** (1) 반지름의 길이: 4, 호의 길이: π

(2) 반지름의 길이: 6, 호의 길이: π

풀이 (1) 부채꼴의 반지름의 길이를 r , 중심각의 크기를 θ , 호의 길이를 l , 넓이를 S 라고 하면

$$\theta=45^\circ=\frac{\pi}{4}, S=2\pi \text{이므로}$$

$$S=\frac{1}{2}r^2\theta \text{에서 } 2\pi=\frac{1}{2}\times r^2\times \frac{\pi}{4}, 2\pi=\frac{\pi}{8}r^2$$

$$2=\frac{1}{8}r^2, r^2=16 \quad \therefore r=4 (\because r>0)$$

$$\therefore l=r\theta=4\times \frac{\pi}{4}=\pi$$

(2) 부채꼴의 반지름의 길이를 r , 중심각의 크기를 θ , 호의 길이를 l , 넓이를 S 라고 하면

$$\theta=30^\circ=\frac{\pi}{6}, S=3\pi \text{이므로}$$

$$S=\frac{1}{2}r^2\theta \text{에서 } 3\pi=\frac{1}{2}\times r^2\times \frac{\pi}{6}, 3\pi=\frac{\pi}{12}r^2$$

$$3=\frac{1}{12}r^2, r^2=36 \quad \therefore r=6 (\because r>0)$$

$$\therefore l=r\theta=6\times \frac{\pi}{6}=\pi$$

12 **답** (1) 중심각의 크기: $\frac{\pi}{2}$, 반지름의 길이: 2

(2) 중심각의 크기: $\frac{2}{9}\pi$, 반지름의 길이: 6

풀이 (1) 부채꼴의 반지름의 길이를 r , 중심각의 크기를 θ , 호의 길이를 l , 넓이를 S 라고 하면 $l=\pi$, $S=\pi$ 이므로

$$S=\frac{1}{2}rl \text{에서 } \pi=\frac{1}{2}\times r\times \pi \quad \therefore r=2$$

$$l=r\theta \text{에서 } \pi=2\times \theta \quad \therefore \theta=\frac{\pi}{2}$$

(2) 부채꼴의 반지름의 길이를 r , 중심각의 크기를 θ , 호의 길이를 l , 넓이를 S 라고 하면 $l=\frac{4}{3}\pi$, $S=4\pi$ 이므로

$$S=\frac{1}{2}rl \text{에서 } 4\pi=\frac{1}{2}\times r\times \frac{4}{3}\pi \quad \therefore r=6$$

$$l=r\theta \text{에서 } \frac{4}{3}\pi=6\times \theta \quad \therefore \theta=\frac{2}{9}\pi$$

13 **답** (1) 중심각의 크기: π , 호의 길이: 6π

(2) 중심각의 크기: $\frac{3}{4}\pi$, 호의 길이: 15π

풀이 (1) 부채꼴의 반지름의 길이를 r , 중심각의 크기를 θ , 호의 길이를 l , 넓이를 S 라고 하면 $r=6$, $S=18\pi$ 이므로

$$S=\frac{1}{2}rl \text{에서 } 18\pi=\frac{1}{2}\times 6\times l \quad \therefore l=6\pi$$

$$l=r\theta \text{에서 } 6\pi=6\times \theta \quad \therefore \theta=\pi$$

(2) 부채꼴의 반지름의 길이를 r , 중심각의 크기를 θ , 호의 길이를 l , 넓이를 S 라고 하면 $r=20$, $S=150\pi$ 이므로

$$S=\frac{1}{2}rl \text{에서 } 150\pi=\frac{1}{2}\times 20\times l \quad \therefore l=15\pi$$

$$l=r\theta \text{에서 } 15\pi=20\times \theta \quad \therefore \theta=\frac{3}{4}\pi$$

14 **답** (1) 최댓값: $\frac{25}{4}$, 반지름의 길이: $\frac{5}{2}$

(2) 최댓값: 9, 반지름의 길이: 3

(3) 최댓값: 16, 반지름의 길이: 4

(4) 최댓값: $\frac{81}{4}$, 반지름의 길이: $\frac{9}{2}$

(5) 최댓값: 36, 반지름의 길이: 6

풀이 (1) 부채꼴의 반지름의 길이를 r , 호의 길이를 l 이라고 하면 부채꼴의 둘레의 길이가 10이므로

$$2r+l=10 \quad \therefore l=10-2r$$

이때 $10-2r>0$, $r>0$ 이므로 $0<r<5$

부채꼴의 넓이를 S 라고 하면

$$S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r(10-2r)=-r^2+5r$$

$$=-\left(r-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{25}{4}$$

따라서 $r=\frac{5}{2}$, 즉 반지름의 길이가 $\frac{5}{2}$ 일 때 부채꼴의 넓이는 $\frac{25}{4}$ 로 최대이다.

(2) 부채꼴의 반지름의 길이를 r , 호의 길이를 l 이라고 하면 부채꼴의 둘레의 길이가 12이므로

$$2r+l=12 \quad \therefore l=12-2r$$

이때 $12-2r>0$, $r>0$ 이므로 $0<r<6$

부채꼴의 넓이를 S 라고 하면

$$S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r(12-2r)=-r^2+6r$$

$$=-(r-3)^2+9$$

따라서 $r=3$, 즉 반지름의 길이가 3일 때 부채꼴의 넓이는 9로 최대이다.

(3) 부채꼴의 반지름의 길이를 r , 호의 길이를 l 이라고 하면 부채꼴의 둘레의 길이가 16이므로

$$2r+l=16 \quad \therefore l=16-2r$$

이때 $16-2r>0$, $r>0$ 이므로 $0<r<8$

부채꼴의 넓이를 S 라고 하면

$$S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r(16-2r)=-r^2+8r$$

$$=-(r-4)^2+16$$

따라서 $r=4$, 즉 반지름의 길이가 4일 때 부채꼴의 넓이는 16으로 최대이다.

- (4) 부채꼴의 반지름의 길이를 r , 호의 길이를 l 이라고 하면
부채꼴의 둘레의 길이가 18이므로

$$2r + l = 18 \quad \therefore l = 18 - 2r$$

이때 $18 - 2r > 0$, $r > 0$ 이므로 $0 < r < 9$

부채꼴의 넓이를 S 라고 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}rl = \frac{1}{2}r(18 - 2r) = -r^2 + 9r \\ &= -\left(r - \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{81}{4} \end{aligned}$$

따라서 $r = \frac{9}{2}$, 즉 반지름의 길이가 $\frac{9}{2}$ 일 때 부채꼴의 넓이는 $\frac{81}{4}$ 로 최대이다.

- (5) 부채꼴의 반지름의 길이를 r , 호의 길이를 l 이라고 하면
부채꼴의 둘레의 길이가 24이므로

$$2r + l = 24 \quad \therefore l = 24 - 2r$$

이때 $24 - 2r > 0$, $r > 0$ 이므로 $0 < r < 12$

부채꼴의 넓이를 S 라고 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}rl = \frac{1}{2}r(24 - 2r) = -r^2 + 12r \\ &= -(r - 6)^2 + 36 \end{aligned}$$

따라서 $r = 6$, 즉 반지름의 길이가 6일 때 부채꼴의 넓이는 36으로 최대이다.

- 15 답 (1) $\frac{3}{5}$ (2) $\frac{4}{5}$ (3) $\frac{3}{4}$

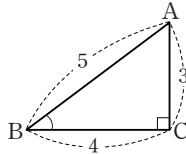
풀이 (1) 피타고라스 정리에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 &= \overline{AB}^2 \\ \overline{AC}^2 + 4^2 &= 5^2, \overline{AC}^2 = 9 \\ \therefore \overline{AC} &= 3 (\because \overline{AC} > 0) \end{aligned}$$

$$\therefore \sin B = \frac{3}{5}$$

$$(2) \cos B = \frac{4}{5}$$

$$(3) \tan B = \frac{3}{4}$$



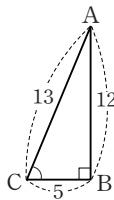
- 16 답 (1) $\frac{12}{13}$ (2) $\frac{5}{13}$ (3) $\frac{12}{5}$

풀이 (1) 피타고라스 정리에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 &= \overline{AC}^2 \\ 12^2 + \overline{BC}^2 &= 13^2, \overline{BC}^2 = 25 \\ \therefore \overline{BC} &= 5 (\because \overline{BC} > 0) \\ \therefore \sin C &= \frac{12}{13} \end{aligned}$$

$$(2) \cos C = \frac{5}{13}$$

$$(3) \tan C = \frac{12}{5}$$



- 17 답 (1) $\sin 390^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 390^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan 390^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$(2) \sin 480^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 480^\circ = -\frac{1}{2}, \tan 480^\circ = -\sqrt{3}$$

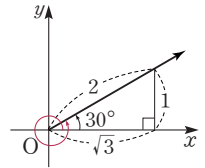
$$(3) \sin 585^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos 585^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \tan 585^\circ = 1$$

풀이 (1) $390^\circ = 360^\circ + 30^\circ$ 이므로 주어진 각의 동경을 그리면 한 바퀴 돌린 후 30° 만큼 더 돌리면 된다. 오른쪽 그림과 같이 동경에서 x 축에 수선을 그어 직각삼각형을 만들면

$$\sin 390^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 390^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 390^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

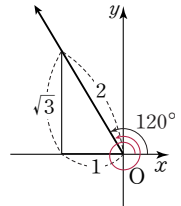


- (2) $480^\circ = 360^\circ + 120^\circ$ 이므로 주어진 각의 동경을 그리면 한 바퀴 돌린 후 120° 만큼 더 돌리면 된다. 오른쪽 그림과 같이 동경에서 x 축에 수선을 그어 직각삼각형을 만들면

$$\sin 480^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 480^\circ = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 480^\circ = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$$

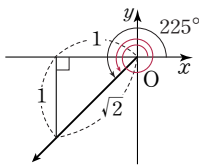


- (3) $585^\circ = 360^\circ + 225^\circ$ 이므로 주어진 각의 동경을 그리면 한 바퀴 돌린 후 225° 만큼 더 돌리면 된다. 오른쪽 그림과 같이 동경에서 x 축에 수선을 그어 직각삼각형을 만들면

$$\sin 585^\circ = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 585^\circ = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 585^\circ = \frac{-1}{-1} = 1$$



- 18 답 (1) $\sin \frac{7}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \frac{7}{3}\pi = \frac{1}{2}$, $\tan \frac{7}{3}\pi = \sqrt{3}$

$$(2) \sin \frac{17}{6}\pi = \frac{1}{2}, \cos \frac{17}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

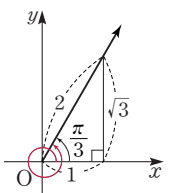
$$\tan \frac{17}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$(3) \sin \frac{13}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \frac{13}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \tan \frac{13}{4}\pi = 1$$

풀이 (1) $\frac{7}{3}\pi = 2\pi + \frac{\pi}{3}$ 이므로 주어진 각의 동경을 그리면 한 바퀴 돌린 후 $\frac{\pi}{3}$ 만큼 더 돌리면 된다.

오른쪽 그림과 같이 동경에서 x 축에 수선을 그어 직각삼각형을 만들면

$$\sin \frac{7}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \frac{7}{3}\pi = \frac{1}{2}, \tan \frac{7}{3}\pi = \sqrt{3}$$



- (2) $\frac{17}{6}\pi = 2\pi + \frac{5}{6}\pi$ 이므로 주어진 각의 동경을 그리면 한 바퀴 돌린 후 $\frac{5}{6}\pi$ 만큼 더 돌리면 된다.

오른쪽 그림과 같이 동경에서 x 축에 수선을 그어 직각삼각형을 만들면

$$\sin \frac{17}{6}\pi = \frac{1}{2}, \cos \frac{17}{6}\pi = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

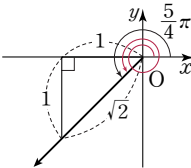
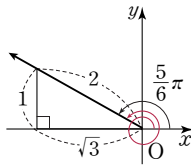
$$\tan \frac{17}{6}\pi = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

- (3) $\frac{13}{4}\pi = 2\pi + \frac{5}{4}\pi$ 이므로 주어진 각의 동경을 그리면 한 바퀴 돌린 후 $\frac{5}{4}\pi$ 만큼 더 돌리면 된다.

오른쪽 그림과 같이 동경에서 x 축에 수선을 그어 직각삼각형을 만들면

$$\sin \frac{13}{4}\pi = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \frac{13}{4}\pi = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\tan \frac{13}{4}\pi = \frac{-1}{-1} = 1$$



- 19 **예** (1) $\sin \theta = \frac{3}{5}, \cos \theta = \frac{4}{5}, \tan \theta = \frac{3}{4}$

$$(2) \sin \theta = -\frac{3}{5}, \cos \theta = -\frac{4}{5}, \tan \theta = \frac{3}{4}$$

$$(3) \sin \theta = -\frac{3}{5}, \cos \theta = \frac{4}{5}, \tan \theta = -\frac{3}{4}$$

$$(4) \sin \theta = \frac{8}{17}, \cos \theta = -\frac{15}{17}, \tan \theta = -\frac{8}{15}$$

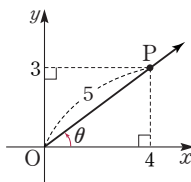
$$(5) \sin \theta = -\frac{8}{17}, \cos \theta = -\frac{15}{17}, \tan \theta = \frac{8}{15}$$

풀이 (1) $\overline{OP} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ 이므로

$$\sin \theta = \frac{3}{5}$$

$$\cos \theta = \frac{4}{5}$$

$$\tan \theta = \frac{3}{4}$$



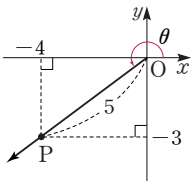
(2) $\overline{OP} = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = 5$

이므로

$$\sin \theta = \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5}$$

$$\cos \theta = \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5}$$

$$\tan \theta = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$$



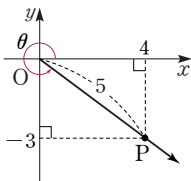
(3) $\overline{OP} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$

이므로

$$\sin \theta = \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5}$$

$$\cos \theta = \frac{4}{5}$$

$$\tan \theta = \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}$$



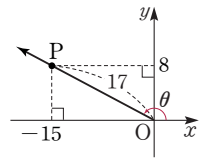
(4) $\overline{OP} = \sqrt{(-15)^2 + 8^2} = 17$

이므로

$$\sin \theta = \frac{8}{17}$$

$$\cos \theta = \frac{-15}{17} = -\frac{15}{17}$$

$$\tan \theta = \frac{8}{-15} = -\frac{8}{15}$$



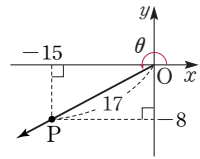
(5) $\overline{OP} = \sqrt{(-15)^2 + (-8)^2} = 17$

이므로

$$\sin \theta = \frac{-8}{17} = -\frac{8}{17}$$

$$\cos \theta = \frac{-15}{17} = -\frac{15}{17}$$

$$\tan \theta = \frac{-8}{-15} = \frac{8}{15}$$



- 20 **예** (1) $\sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \tan \theta = -1$

$$(2) \sin \theta = -\frac{1}{2}, \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tan \theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$(3) \sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \theta = -\frac{1}{2}, \tan \theta = \sqrt{3}$$

$$(4) \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \theta = \frac{1}{2}, \tan \theta = \sqrt{3}$$

풀이 (1) 오른쪽 그림과 같이 반지

름의 길이가 1인 원과 $\theta = \frac{3}{4}\pi$

의 동경의 교점을 P, 점 P에서 x 축에 내린 수선의 발을 H라고 하면 직각삼각형 POH에서

$\angle POH = \frac{\pi}{4}$ 이므로 점 P의 좌표는 $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 이다.

$$\therefore \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \tan \theta = -1$$

(2) 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길

이가 1인 원과 $\theta = -\frac{\pi}{6}$ 의 동경

의 교점을 P, 점 P에서 x 축에 내린 수선의 발을 H라고 하면 직각

삼각형 POH에서 $\angle POH = \frac{\pi}{6}$

이므로 점 P의 좌표는 $(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ 이다.

$$\therefore \sin \theta = -\frac{1}{2}, \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tan \theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

(3) 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길

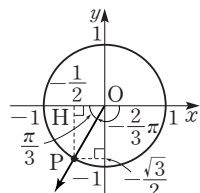
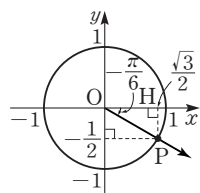
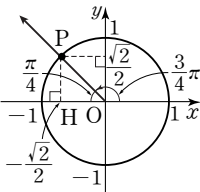
이가 1인 원과 $\theta = -\frac{2}{3}\pi$ 의 동경

의 교점을 P, 점 P에서 x 축에 내린 수선의 발을 H라고 하면 직각

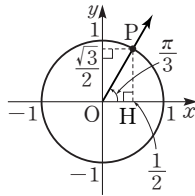
삼각형 POH에서 $\angle POH = \frac{\pi}{3}$

이므로 점 P의 좌표는 $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ 이다.

$$\therefore \sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \theta = -\frac{1}{2}, \tan \theta = \sqrt{3}$$



- (4) 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원과 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 의 동경의 교점을 P, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라고 하면 직각삼각형 POH에서 $\angle POH = \frac{\pi}{3}$ 이



므로 점 P의 좌표는 $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 이다.

$$\therefore \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \theta = \frac{1}{2}, \tan \theta = \sqrt{3}$$

21 답 (1) 제2사분면 (2) 제3사분면
(3) 제3사분면

풀이 (1) (i) $\sin \theta \tan \theta < 0$ 에서

$$\sin \theta > 0, \tan \theta < 0 \text{ 또는 } \sin \theta < 0, \tan \theta > 0$$

따라서 θ 는 제2사분면 또는 제3사분면의 각이다.

(ii) $\sin \theta \cos \theta < 0$ 에서

$$\sin \theta > 0, \cos \theta < 0 \text{ 또는 } \sin \theta < 0, \cos \theta > 0$$

따라서 θ 는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 θ 는 제2사분면의 각이다.

(2) (i) $\sin \theta \cos \theta > 0$ 에서

$$\sin \theta > 0, \cos \theta > 0 \text{ 또는 } \sin \theta < 0, \cos \theta < 0$$

따라서 θ 는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.

(ii) $\cos \theta \tan \theta < 0$ 에서

$$\cos \theta > 0, \tan \theta < 0 \text{ 또는 } \cos \theta < 0, \tan \theta > 0$$

따라서 θ 는 제4사분면 또는 제3사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 θ 는 제3사분면의 각이다.

(3) (i) $\frac{\sin \theta}{\tan \theta} < 0$ 에서

$$\sin \theta > 0, \tan \theta < 0 \text{ 또는 } \sin \theta < 0, \tan \theta > 0$$

따라서 θ 는 제2사분면 또는 제3사분면의 각이다.

(ii) $\frac{\cos \theta}{\tan \theta} < 0$ 에서

$$\cos \theta > 0, \tan \theta < 0 \text{ 또는 } \cos \theta < 0, \tan \theta > 0$$

따라서 θ 는 제4사분면 또는 제3사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 θ 는 제3사분면의 각이다.

22 답 (1) $\tan \theta$ (2) $\tan \theta$

풀이 (1) θ 는 제2사분면의 각이므로

$$\sin \theta > 0, \tan \theta < 0$$

따라서 $\tan \theta - \sin \theta < 0$ 이므로

$$|\sin \theta| - |\tan \theta - \sin \theta|$$

$$= \sin \theta + (\tan \theta - \sin \theta)$$

$$= \sin \theta + \tan \theta - \sin \theta$$

$$= \tan \theta$$

(2) θ 는 제2사분면의 각이므로

$$\cos \theta < 0, \tan \theta < 0$$

따라서 $\cos \theta + \tan \theta < 0$ 이므로

$$\sqrt{\cos^2 \theta} - \sqrt{(\cos \theta + \tan \theta)^2}$$

$$= -\cos \theta + (\cos \theta + \tan \theta)$$

$$= \tan \theta$$

23 답 (1) $\sin \theta$ (2) $-\tan \theta$

풀이 (1) θ 는 제3사분면의 각이므로

$$\sin \theta < 0, \cos \theta < 0$$

따라서 $\cos \theta + \sin \theta < 0$ 이므로

$$\sqrt{\sin^2 \theta} - |\cos \theta + \sin \theta| - \sqrt{(\cos \theta - \sin \theta)^3}$$

$$= -\sin \theta + (\cos \theta + \sin \theta) - (\cos \theta - \sin \theta)$$

$$= -\sin \theta + \cos \theta + \sin \theta - \cos \theta + \sin \theta$$

$$= \sin \theta$$

(2) θ 는 제3사분면의 각이므로

$$\cos \theta < 0, \tan \theta > 0$$

따라서 $\cos \theta - \tan \theta < 0$ 이므로

$$\sqrt{\cos^2 \theta} - \sqrt{(\cos \theta - \tan \theta)^2}$$

$$= -\cos \theta + (\cos \theta - \tan \theta)$$

$$= -\tan \theta$$

24 답 (1) $-\cos \theta$ (2) $-\sin \theta$ (3) $-\cos \theta$

풀이 (1) θ 는 제4사분면의 각이므로

$$\sin \theta < 0, \cos \theta > 0$$

따라서 $\sin \theta - \cos \theta < 0$ 이므로

$$|\sin \theta| - \sqrt{(\sin \theta - \cos \theta)^2}$$

$$= -\sin \theta + (\sin \theta - \cos \theta)$$

$$= -\cos \theta$$

(2) θ 는 제4사분면의 각이므로

$$\sin \theta < 0, \tan \theta < 0$$

따라서 $\sin \theta + \tan \theta < 0$ 이므로

$$\sqrt{(\sin \theta + \tan \theta)^2} - |\tan \theta|$$

$$= -(\sin \theta + \tan \theta) + \tan \theta$$

$$= -\sin \theta - \tan \theta + \tan \theta$$

$$= -\sin \theta$$

(3) θ 는 제4사분면의 각이므로

$$\sin \theta < 0, \cos \theta > 0, \tan \theta < 0$$

따라서 $\cos \theta - \sin \theta > 0$ 이므로

$$\sqrt{\tan^2 \theta} - \sqrt{(\cos \theta - \sin \theta)^2} + \sqrt{(\tan \theta - \sin \theta)^3}$$

$$= -\tan \theta - (\cos \theta - \sin \theta) + (\tan \theta - \sin \theta)$$

$$= -\tan \theta - \cos \theta + \sin \theta + \tan \theta - \sin \theta$$

$$= -\cos \theta$$

25 답 (1) 2 (2) $\frac{2}{\cos \theta}$ (3) 1 (4) 2

풀이 (1) $(\sin \theta + \cos \theta)^2 + (\sin \theta - \cos \theta)^2$

$$= (\sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta)$$

$$+ (\sin^2 \theta - 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta)$$

$$= (1 + 2\sin \theta \cos \theta) + (1 - 2\sin \theta \cos \theta)$$

$$= 2$$

(2) $\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} + \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta}$

$$= \frac{\cos \theta(1 - \sin \theta) + \cos \theta(1 + \sin \theta)}{(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)}$$

$$= \frac{\cos \theta - \cos \theta \sin \theta + \cos \theta + \cos \theta \sin \theta}{1 - \sin^2 \theta}$$

$$= \frac{2\cos \theta}{1 - \sin^2 \theta} = \frac{2\cos \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{2}{\cos \theta}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & \frac{\cos^2 \theta}{1+\sin \theta} + \cos \theta \tan \theta \\
 &= \frac{1-\sin^2 \theta}{1+\sin \theta} + \cos \theta \times \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\
 &= \frac{(1+\sin \theta)(1-\sin \theta)}{1+\sin \theta} + \sin \theta \\
 &= 1 - \sin \theta + \sin \theta = 1 \\
 (4) \quad & \frac{1-\sin^4 \theta}{\cos^2 \theta} + \cos^2 \theta \\
 &= \frac{(1+\sin^2 \theta)(1-\sin^2 \theta)}{1-\sin^2 \theta} + \cos^2 \theta \\
 &= 1 + \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 2
 \end{aligned}$$

26 답 (1) $\sin \theta = -\frac{5}{13}$, $\tan \theta = -\frac{5}{12}$

(2) $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan \theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

(3) $\cos \theta = -\frac{1}{2}$, $\tan \theta = \sqrt{3}$

(4) $\sin \theta = -\frac{4}{5}$, $\tan \theta = -\frac{4}{3}$

풀이 (1) $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(-\frac{12}{13}\right)^2 = \frac{25}{169}$

그런데 θ 는 제2사분면의 각이므로 $\sin \theta > 0$

$$\therefore \sin \theta = \frac{5}{13}$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}} = -\frac{5}{12}$$

(2) $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$

그런데 θ 는 제4사분면의 각이므로 $\cos \theta > 0$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

(3) $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

그런데 θ 는 제3사분면의 각이므로 $\cos \theta < 0$

$$\therefore \cos \theta = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

(4) $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$

그런데 θ 는 제4사분면의 각이므로 $\sin \theta < 0$

$$\therefore \sin \theta = -\frac{4}{5}$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

27 답 (1) $-\frac{3}{8}$ (2) $\pm \frac{\sqrt{7}}{2}$ (3) $\pm \frac{\sqrt{7}}{4}$

(4) $\frac{11}{16}$ (5) $-\frac{8}{3}$

풀이 (1) $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{4}$$

$$1 + 2\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}, \quad 2\sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{4}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & (\sin \theta - \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta - 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\
 &= 1 - 2\sin \theta \cos \theta \\
 &= 1 - 2 \times \left(-\frac{3}{8}\right) \quad (\because (1)) \\
 &= \frac{7}{4}
 \end{aligned}$$

$$\therefore \sin \theta - \cos \theta = \pm \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & \sin^2 \theta - \cos^2 \theta = (\sin \theta + \cos \theta)(\sin \theta - \cos \theta) \\
 &= \frac{1}{2} \times \left(\pm \frac{\sqrt{7}}{2}\right) \quad (\because (2)) \\
 &= \pm \frac{\sqrt{7}}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad & \sin^3 \theta + \cos^3 \theta \\
 &= (\sin \theta + \cos \theta)(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) \\
 &= (\sin \theta + \cos \theta)(1 - \sin \theta \cos \theta) \\
 &= \frac{1}{2} \times \left[1 - \left(-\frac{3}{8}\right)\right] \quad (\because (1)) \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{11}{8} = \frac{11}{16}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5) \quad & \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} \\
 &= \frac{1}{-\frac{3}{8}} \quad (\because (1)) \\
 &= -\frac{8}{3}
 \end{aligned}$$

28 답 (1) $-\frac{\sqrt{35}}{5}$ (2) $-\frac{\sqrt{6}}{2}$

(3) $\frac{\sqrt{21}}{3}$ (4) $-\sqrt{2}$

풀이 (1) $(\cos \theta - \sin \theta)^2 = \cos^2 \theta - 2\sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta$

$$\begin{aligned}
 &= 1 - 2\sin \theta \cos \theta \\
 &= 1 - 2 \times \left(-\frac{1}{5}\right) \\
 &= \frac{7}{5}
 \end{aligned}$$

이때 θ 는 제2사분면의 각이므로

$$\sin \theta > 0, \cos \theta < 0$$

$$\therefore \cos \theta - \sin \theta < 0$$

$$\therefore \cos \theta - \sin \theta = -\sqrt{\frac{7}{5}} = -\frac{\sqrt{35}}{5}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & (\sin \theta + \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\
 &= 1 + 2\sin \theta \cos \theta \\
 &= 1 + 2 \times \frac{1}{4} \\
 &= \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

이때 θ 는 제3사분면의 각이므로

$$\sin \theta < 0, \cos \theta < 0$$

$$\therefore \sin \theta + \cos \theta < 0$$

$$\therefore \sin \theta + \cos \theta = -\sqrt{\frac{3}{2}} = -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\begin{aligned}
 (3) (\cos \theta - \sin \theta)^2 &= \cos^2 \theta - 2\sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta \\
 &= 1 - 2\sin \theta \cos \theta \\
 &= 1 - 2 \times \left(-\frac{2}{3}\right) \\
 &= \frac{7}{3}
 \end{aligned}$$

이때 θ 는 제4사분면의 각이므로

$$\sin \theta < 0, \cos \theta > 0$$

$$\therefore \cos \theta - \sin \theta > 0$$

$$\therefore \cos \theta - \sin \theta = \sqrt{\frac{7}{3}} = \frac{\sqrt{21}}{3}$$

$$\begin{aligned}
 (4) (\cos \theta - \sin \theta)^2 &= \cos^2 \theta - 2\sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta \\
 &= 1 - 2\sin \theta \cos \theta \\
 &= 1 - 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

이때 θ 는 제2사분면의 각이므로

$$\sin \theta > 0, \cos \theta < 0$$

$$\therefore \cos \theta - \sin \theta < 0$$

$$\therefore \cos \theta - \sin \theta = -\sqrt{2}$$

29 **답** (1) $\frac{3}{4}$ (2) $-\frac{5}{6}$ (3) $-\frac{15}{8}$ (4) $2\sqrt{2}$

풀이 (1) 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\sin \theta \cos \theta = -\frac{a}{2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{4}$$

$$1 + 2\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{3}$ 에 대입하면

$$1 + 2 \times \left(-\frac{a}{2}\right) = \frac{1}{4} \quad \therefore a = \frac{3}{4}$$

(2) 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin \theta + \cos \theta = -\frac{2}{3} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{a}{3} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{4}{9}$$

$$1 + 2\sin \theta \cos \theta = \frac{4}{9} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{3}$ 에 대입하면

$$1 + 2 \times \frac{a}{3} = \frac{4}{9} \quad \therefore a = -\frac{5}{6}$$

(3) 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{4} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{a}{4} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{16}$$

$$1 + 2\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{16} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{3}$ 에 대입하면

$$1 + 2 \times \frac{a}{4} = \frac{1}{16} \quad \therefore a = -\frac{15}{8}$$

(4) 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin \theta + \cos \theta = -\frac{a}{4} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{4} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{a^2}{16}$$

$$1 + 2\sin \theta \cos \theta = \frac{a^2}{16} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{3}$ 에 대입하면

$$1 + 2 \times \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{a^2}{16}, a^2 = 8$$

이때 $a > 0$ 이므로

$$a = 2\sqrt{2}$$

중단원 점검문제 | II-1 삼각함수의 뜻

082-083쪽

01 **답** $\theta = 360^\circ \times n + 285^\circ$ (단, n 은 정수)

풀이 동경 OP가 나타내는 한 각이

$$\alpha = 360^\circ - 75^\circ = 285^\circ \quad (0^\circ \leq \alpha < 360^\circ) \text{이므로 일반각은}$$

$$\theta = 360^\circ \times n + 285^\circ \quad (\text{단, } n \text{은 정수})$$

02 **답** ㄴ, ㄷ

$$\text{풀이 } \textcircled{1}, -50^\circ = 360^\circ \times (-1) + 310^\circ$$

$$\textcircled{2}, 410^\circ = 360^\circ + 50^\circ$$

$$\textcircled{3}, -270^\circ = 360^\circ \times (-1) + 90^\circ$$

$$\textcircled{4}, 770^\circ = 360^\circ \times 2 + 50^\circ$$

따라서 50° 를 나타내는 동경과 일치하는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

03 **답** 120°

풀이 두 각 $\theta, 7\theta$ 를 나타내는 동경이 일치하므로

$$7\theta - \theta = 360^\circ \times n \quad (n \text{은 정수})$$

$$6\theta = 360^\circ \times n, \theta = 60^\circ \times n$$

$$\therefore \theta = 60^\circ, 120^\circ, 180^\circ, \dots$$

이때 $90^\circ < \theta < 180^\circ$ 이므로

$$\theta = 120^\circ$$

04 답 120°

풀이 각 3θ 를 나타내는 동경과 각 6θ 를 나타내는 동경이 x 축에 대하여 대칭이므로

$$3\theta + 6\theta = 360^\circ \times n \quad (n \text{은 정수})$$

$$9\theta = 360^\circ \times n, \theta = 40^\circ \times n$$

$$\therefore \theta = 40^\circ, 80^\circ, 120^\circ, \dots$$

따라서 예상인 각 θ 의 크기의 합은

$$40^\circ + 80^\circ = 120^\circ$$

05 답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

풀이 ㄱ. $60^\circ = 60 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$ (○)

ㄴ. $\frac{5}{8}\pi = \frac{5}{8}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 112.5^\circ$ (×)

ㄷ. $135^\circ = 135 \times \frac{\pi}{180} = \frac{3}{4}\pi$ (×)

ㄹ. $\frac{2}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 120^\circ$ (○)

ㅁ. $\frac{5}{6}\pi = \frac{5}{6}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 150^\circ$ (○)

ㅂ. $270^\circ = 270 \times \frac{\pi}{180} = \frac{3}{2}\pi$ (×)

따라서 옳게 표현한 것은 ㄱ, ㄹ, ㅁ이다.

06 답 $117\pi \text{ cm}^2$

풀이 (색칠한 부분의 넓이)

$$= (\text{부채꼴 COD의 넓이}) - (\text{부채꼴 AOB의 넓이})$$

$$= \left(\frac{1}{2} \times 20^2 \times \frac{2}{3}\pi\right) - \left(\frac{1}{2} \times 7^2 \times \frac{2}{3}\pi\right)$$

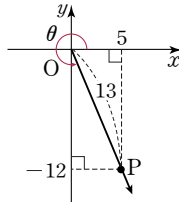
$$= \frac{400}{3}\pi - \frac{49}{3}\pi = 117\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

07 답 $-\frac{7}{13}$

풀이 $OP = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = 13$ 이므로

$$\sin \theta = -\frac{12}{13}, \cos \theta = \frac{5}{13}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin \theta + \cos \theta &= -\frac{12}{13} + \frac{5}{13} \\ &= -\frac{7}{13} \end{aligned}$$



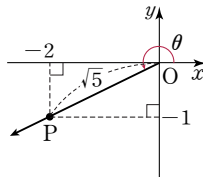
08 답 1

풀이 $OP = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$

이므로

$$\sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \cos \theta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt{5}\sin \theta - \sqrt{5}\cos \theta &= \sqrt{5} \times \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) - \sqrt{5} \times \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \\ &= -1 + 2 = 1 \end{aligned}$$



09 답 제2사분면

풀이 (i) $\sin \theta \cos \theta < 0$ 에서

$$\sin \theta > 0, \cos \theta < 0 \text{ 또는 } \sin \theta < 0, \cos \theta > 0$$

따라서 θ 는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(ii) $\cos \theta \tan \theta > 0$ 에서

$$\cos \theta > 0, \tan \theta > 0 \text{ 또는 } \cos \theta < 0, \tan \theta < 0$$

따라서 θ 는 제1사분면 또는 제2사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 θ 의 동경이 존재하는 사분면은 제2사분면이다.

10 답 $2\tan \theta$

풀이 θ 는 제3사분면의 각이므로

$$\sin \theta < 0, \cos \theta < 0, \tan \theta > 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin \theta + \cos \theta + \tan \theta + |\sin \theta| + |\cos \theta| + |\tan \theta| \\ = \sin \theta + \cos \theta + \tan \theta - \sin \theta - \cos \theta + \tan \theta \\ = 2\tan \theta \end{aligned}$$

11 답 $2(\sin \theta - \cos \theta)$

풀이 θ 는 제2사분면의 각이므로

$$\sin \theta > 0, \cos \theta < 0$$

따라서 $\sin \theta - \cos \theta > 0, \cos \theta - \sin \theta < 0$ 이므로

$$\begin{aligned} &\sqrt{(\sin \theta - \cos \theta)^2} + \sqrt{(\cos \theta - \sin \theta)^2} \\ &= \sin \theta - \cos \theta - (\cos \theta - \sin \theta) \\ &= \sin \theta - \cos \theta - \cos \theta + \sin \theta \\ &= 2(\sin \theta - \cos \theta) \end{aligned}$$

12 답 $\frac{2}{1-2\cos^2 \theta}$ (또는 $\frac{2}{2\sin^2 \theta - 1}$)

$$\begin{aligned} \text{풀이 } &\frac{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{1 + 2\sin \theta \cos \theta} + \frac{\tan \theta + 1}{\tan \theta - 1} \\ &= \frac{(\sin \theta + \cos \theta)(\sin \theta - \cos \theta)}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta} + \frac{\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + 1}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta} - 1} \\ &= \frac{(\sin \theta + \cos \theta)(\sin \theta - \cos \theta)}{(\sin \theta + \cos \theta)^2} + \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta - \cos \theta} \\ &= \frac{\sin \theta - \cos \theta}{\sin \theta + \cos \theta} + \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta - \cos \theta} \\ &= \frac{(\sin \theta - \cos \theta)^2 + (\sin \theta + \cos \theta)^2}{(\sin \theta + \cos \theta)(\sin \theta - \cos \theta)} \\ &= \frac{1 - 2\sin \theta \cos \theta + 1 + 2\sin \theta \cos \theta}{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta} \\ &= \frac{2}{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta} \\ &= \frac{2}{(1 - \cos^2 \theta) - \cos^2 \theta} \\ &= \frac{2}{1 - 2\cos^2 \theta} \quad \left(\text{또는 } \frac{2}{2\sin^2 \theta - 1}\right) \end{aligned}$$

13 답 $\frac{12}{5}$

풀이 $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$

$$= 1 - \left(-\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144}{169}$$

그런데 θ 는 제3사분면의 각이므로 $\sin \theta < 0$

$$\therefore \sin \theta = -\frac{12}{13}$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{12}{13}}{-\frac{5}{13}} = \frac{12}{5}$$

14 답 $\frac{8}{3}$

풀이 $\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta - 2\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$$

$$1 - 2\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}, \quad 2\sin \theta \cos \theta = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{3}{8}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} &= \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{1}{\frac{3}{8}} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

15 답 $\frac{\sqrt{3}}{4}$

$$\begin{aligned} \text{풀이 } \cos^4 \theta - \sin^4 \theta &= (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ &= (1 - \sin^2 \theta) - \sin^2 \theta \\ &= 1 - 2\sin^2 \theta = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \sin^2 \theta = \frac{1}{4}$$

그런데 θ 는 제1사분면의 각이므로 $\sin \theta > 0$

$$\therefore \sin \theta = \frac{1}{2}$$

$\sin \theta = \frac{1}{2}$ 을 $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$ 에 대입하면

$$\cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

그런데 θ 는 제1사분면의 각이므로 $\cos \theta > 0$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

16 답 $-\frac{1}{2}$

풀이 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin \theta + \cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{a}{2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{2}$$

$$1 + 2\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

②을 ③에 대입하면

$$1 + 2 \times \frac{a}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a = -\frac{1}{2}$$

II-2 삼각함수의 그래프

084-111쪽

01 답 (1) 2 (2) -1 (3) 3

풀이 (1) 함수 $f(x)$ 의 주기가 2이므로 $f(x+2)=f(x)$

$$\therefore f(5)=f(3+2)=f(3)=2$$

(2) 함수 $f(x)$ 의 주기가 3이므로 $f(x+3)=f(x)$

$$\begin{aligned} \therefore f(-2) &= f(-2+3) = f(1) = f(1+3) \\ &= f(4) = -1 \end{aligned}$$

(3) 함수 $f(x)$ 의 주기가 7이므로 $f(x+7)=f(x)$

$$\begin{aligned} \therefore f(30) &= f(23+7) = f(23) = f(16+7) = f(16) \\ &= f(9+7) = f(9) = f(2+7) = f(2) = 3 \end{aligned}$$

02 답 (1) 기 (2) 우 (3) 기 (4) 우

풀이 (1) $f(x)=x$ 에서 $f(-x)=-x=-f(x)$

따라서 $f(x)$ 는 기함수이다.

(2) $f(x)=x^2$ 에서 $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$

따라서 $f(x)$ 는 우함수이다.

(3) $f(x)=x^3+x$ 에서

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x \\ &= -(x^3 + x) = -f(x) \end{aligned}$$

따라서 $f(x)$ 는 기함수이다.

(4) $f(x)=x^4+x^2$ 에서

$$f(-x) = (-x)^4 + (-x)^2 = x^4 + x^2 = f(x)$$

따라서 $f(x)$ 는 우함수이다.

03 답 (1) 최댓값: 2, 최솟값: -2, 주기: 2π , 풀이 참조

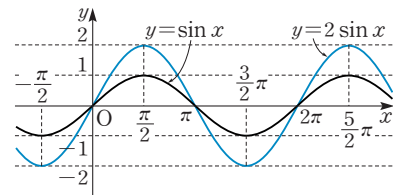
(2) 최댓값: 1, 최솟값: -1, 주기: π , 풀이 참조

(3) 최댓값: 2, 최솟값: -2, 주기: π , 풀이 참조

(4) 최댓값: 2, 최솟값: -2, 주기: 4π , 풀이 참조

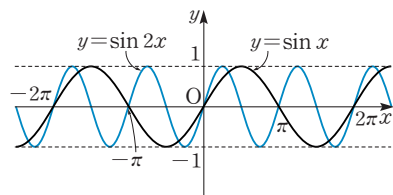
풀이 (1) 최댓값: 2, 최솟값: -2, 주기: $\frac{2\pi}{1}=2\pi$

함수 $y=2\sin x$ 의 그래프는 함수 $y=\sin x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 2배 한 것이므로 다음 그림과 같다.



(2) 최댓값: 1, 최솟값: -1, 주기: $\frac{2\pi}{2}=\pi$

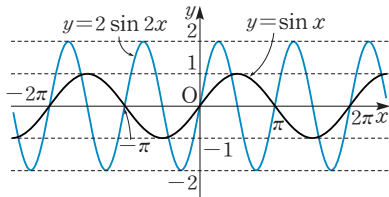
함수 $y=\sin 2x$ 의 그래프는 함수 $y=\sin x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 배 한 것이므로 다음 그림과 같다.



(3) 최댓값: 2, 최솟값: -2, 주기: $\frac{2\pi}{2}=\pi$

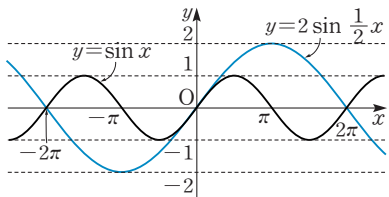
함수 $y=2\sin 2x$ 의 그래프는 함수 $y=\sin x$ 의 그래프를

y 축의 방향으로 2배, x 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 배 한 것이므로 다음 그림과 같다.



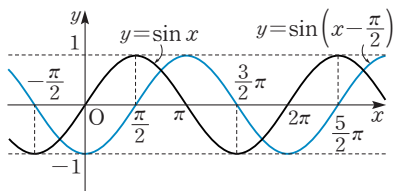
- (4) 최댓값: 2, 최솟값: -2 , 주기: $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$

함수 $y = 2\sin \frac{1}{2}x$ 의 그래프는 함수 $y = \sin x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 2배, x 축의 방향으로 2배 한 것이므로 다음 그림과 같다.



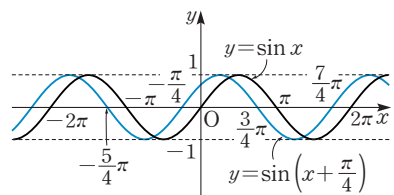
- 04** **답** (1) 풀이 참조, 최댓값: 1, 최솟값: -1 , 주기: 2π
 (2) 풀이 참조, 최댓값: 1, 최솟값: -1 , 주기: 2π
 (3) 풀이 참조, 최댓값: 2, 최솟값: 0, 주기: 2π
 (4) 풀이 참조, 최댓값: -1 , 최솟값: -3 , 주기: 2π
 (5) 풀이 참조, 최댓값: 2, 최솟값: -2 , 주기: 2π
 (6) 풀이 참조, 최댓값: $\frac{1}{2}$, 최솟값: $-\frac{1}{2}$, 주기: 2π
 (7) 풀이 참조, 최댓값: 5, 최솟값: 1, 주기: 2π
 (8) 풀이 참조, 최댓값: $-\frac{3}{2}$, 최솟값: $-\frac{5}{2}$, 주기: 2π

풀이 (1) 함수 $y = \sin(x - \frac{\pi}{2})$ 의 그래프는 함수 $y = \sin x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$ 만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



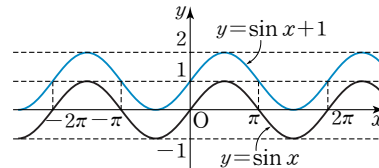
그래프에서 최댓값은 1, 최솟값은 -1 , 주기는 2π 이다.

- (2) 함수 $y = \sin(x + \frac{\pi}{4})$ 의 그래프는 함수 $y = \sin x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{\pi}{4}$ 만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



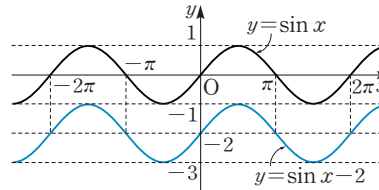
그래프에서 최댓값은 1, 최솟값은 -1 , 주기는 2π 이다.

- (3) 함수 $y = \sin x + 1$ 의 그래프는 함수 $y = \sin x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



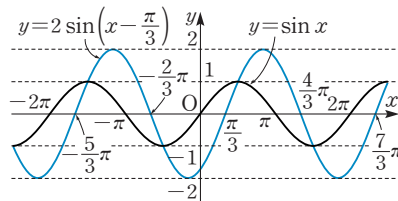
그래프에서 최댓값은 2, 최솟값은 0, 주기는 2π 이다.

- (4) 함수 $y = \sin x - 2$ 의 그래프는 함수 $y = \sin x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



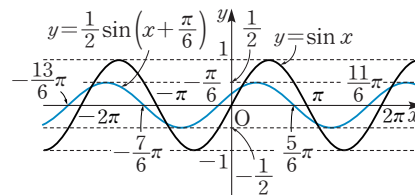
그래프에서 최댓값은 -1 , 최솟값은 -3 , 주기는 2π 이다.

- (5) 함수 $y = 2\sin(x - \frac{\pi}{3})$ 의 그래프는 함수 $y = \sin x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 2배 한 후, x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{3}$ 만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



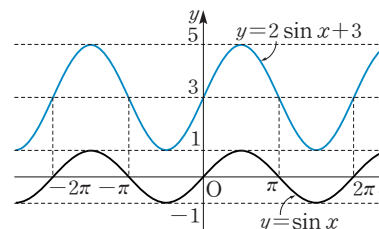
그래프에서 최댓값은 2, 최솟값은 -2 , 주기는 2π 이다.

- (6) 함수 $y = \frac{1}{2}\sin(x + \frac{\pi}{6})$ 의 그래프는 함수 $y = \sin x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 배 한 후, x 축의 방향으로 $-\frac{\pi}{6}$ 만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



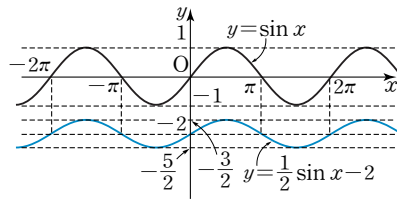
그래프에서 최댓값은 $\frac{1}{2}$, 최솟값은 $-\frac{1}{2}$, 주기는 2π 이다.

- (7) 함수 $y = 2\sin x + 3$ 의 그래프는 함수 $y = \sin x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 2배 한 후, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



그래프에서 최댓값은 5, 최솟값은 1, 주기는 2π 이다.

- (8) 함수 $y = \frac{1}{2} \sin x - 2$ 의 그래프는 함수 $y = \sin x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 배 한 후, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



그래프에서 최댓값은 $-\frac{3}{2}$, 최솟값은 $-\frac{5}{2}$, 주기는 2π 이다.

05 답 (1) $a=6, b=2, c=2$

(2) $a=4, b=2, c=2$

(3) $a=4, b=1, c=1$

(4) $a=3, b=1, c=1$

풀이 (1) 최솟값이 -4 이고 $a > 0$ 이므로

$$-a + c = -4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{주기가 } \pi \text{이고 } b > 0 \text{이므로 } \frac{2\pi}{b} = \pi \quad \therefore b = 2$$

$$\therefore f(x) = a \sin 2x + c$$

$$f(0) = 2 \text{이므로 } a \sin 0 + c = 2 \quad \therefore c = 2$$

①에 $c=2$ 를 대입하면 $a=6$

$$(2) f(x) = a \sin b \left(x + \frac{\pi}{3b} \right) - c$$

$$\text{최댓값이 } 2 \text{이고 } a > 0 \text{이므로 } a - c = 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{주기가 } \pi \text{이고 } b > 0 \text{이므로 } \frac{2\pi}{b} = \pi \quad \therefore b = 2$$

$$\therefore f(x) = a \sin 2 \left(x + \frac{\pi}{6} \right) - c$$

$$f \left(-\frac{\pi}{6} \right) = -2 \text{이므로 } a \sin 0 - c = -2 \quad \therefore c = 2$$

①에 $c=2$ 를 대입하면 $a=4$

$$(3) f(x) = a \sin \frac{1}{b} \left(x - \frac{b}{4} \pi \right) - c$$

$$\text{최댓값이 } 3 \text{이고 } a > 0 \text{이므로 } a - c = 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{주기가 } 2\pi \text{이고 } b > 0 \text{이므로 } \frac{2\pi}{\frac{1}{b}} = 2\pi \quad \therefore b = 1$$

$$\therefore f(x) = a \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) - c$$

$$f \left(\frac{\pi}{4} \right) = -1 \text{이므로 } a \sin 0 - c = -1 \quad \therefore c = 1$$

①에 $c=1$ 을 대입하면 $a=4$

$$(4) f(x) = a \sin b \left(x + \frac{\pi}{4b} \right) + c$$

$$\text{최솟값이 } -2 \text{이고 } a > 0 \text{이므로}$$

$$-a + c = -2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{주기가 } 2\pi \text{이고 } b > 0 \text{이므로 } \frac{2\pi}{b} = 2\pi \quad \therefore b = 1$$

$$\therefore f(x) = a \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + c$$

$$f \left(-\frac{\pi}{4} \right) = 1 \text{이므로 } a \sin 0 + c = 1 \quad \therefore c = 1$$

①에 $c=1$ 을 대입하면 $a=3$

06 답 $a=3, b=2, c=\frac{\pi}{2}$

풀이 최댓값이 3, 최솟값이 -3 이고 $a > 0$ 이므로 $a=3$

$$\text{주기가 } \frac{5}{4}\pi - \frac{\pi}{4} = \pi \text{이고 } b > 0 \text{이므로}$$

$$\frac{2\pi}{b} = \pi \quad \therefore b = 2$$

$$\text{따라서 } y = 3 \sin (2x - c) = 3 \sin 2 \left(x - \frac{c}{2} \right) \text{이고 주어진 그}$$

래프는 $y = 3 \sin 2x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$ 만큼 평

$$\text{행이동한 것이므로 } \frac{c}{2} = \frac{\pi}{4} \quad \therefore c = \frac{\pi}{2}$$

07 답 $a=2, b=1, c=\frac{\pi}{6}$

풀이 최댓값이 2, 최솟값이 -2 이고 $a > 0$ 이므로 $a=2$

$$\text{주기가 } \frac{13}{6}\pi - \frac{\pi}{6} = 2\pi \text{이고 } b > 0 \text{이므로}$$

$$\frac{2\pi}{b} = 2\pi \quad \therefore b = 1$$

따라서 $y = 2 \sin (x - c)$ 이고 주어진 그래프는 $y = 2 \sin x$

의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{6}$ 만큼 평행이동한 것이므로

$$c = \frac{\pi}{6}$$

08 답 (1) 최댓값: 3, 최솟값: -3 , 주기: 2π , 풀이 참조

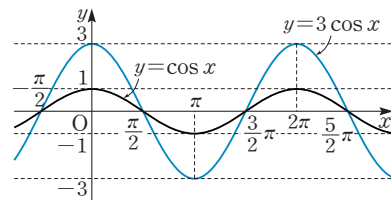
(2) 최댓값: 1, 최솟값: -1 , 주기: 8π , 풀이 참조

(3) 최댓값: 3, 최솟값: -3 , 주기: π , 풀이 참조

(4) 최댓값: $\frac{1}{2}$, 최솟값: $-\frac{1}{2}$, 주기: 4π , 풀이 참조

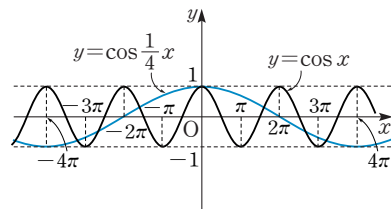
풀이 (1) 최댓값: 3, 최솟값: -3 , 주기: $\frac{2\pi}{1} = 2\pi$

함수 $y = 3 \cos x$ 의 그래프는 함수 $y = \cos x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 3배 한 것이므로 다음 그림과 같다.



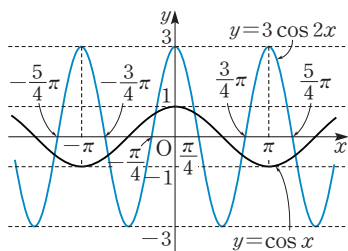
(2) 최댓값: 1, 최솟값: -1 , 주기: $\frac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi$

함수 $y = \cos \frac{1}{4}x$ 의 그래프는 함수 $y = \cos x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 4배 한 것이므로 다음 그림과 같다.



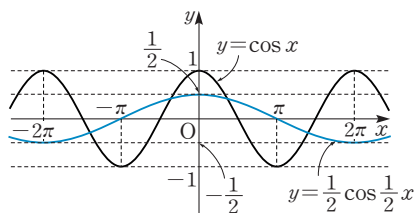
(3) 최댓값: 3, 최솟값: -3 , 주기: $\frac{2\pi}{2} = \pi$

함수 $y = 3 \cos 2x$ 의 그래프는 함수 $y = \cos x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 3배, x 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 배 한 것이므로 다음 그림과 같다.



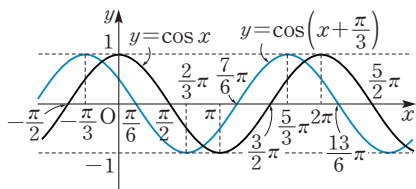
- (4) 최댓값: $\frac{1}{2}$, 최솟값: $-\frac{1}{2}$, 주기: $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$

함수 $y = \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2}x$ 의 그래프는 함수 $y = \cos x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 배, x 축의 방향으로 2배 한 것이므로 다음 그림과 같다.



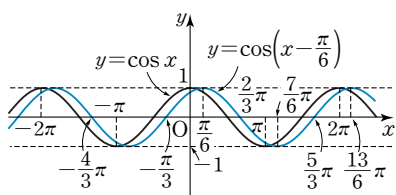
- 09 답** (1) 풀이 참조, 최댓값: 1, 최솟값: -1, 주기: 2π
 (2) 풀이 참조, 최댓값: 1, 최솟값: -1, 주기: 2π
 (3) 풀이 참조, 최댓값: 3, 최솟값: 1, 주기: 2π
 (4) 풀이 참조, 최댓값: -2, 최솟값: -4, 주기: 2π
 (5) 풀이 참조, 최댓값: 2, 최솟값: -2, 주기: 2π
 (6) 풀이 참조, 최댓값: $\frac{1}{2}$, 최솟값: $-\frac{1}{2}$, 주기: 2π
 (7) 풀이 참조, 최댓값: 2, 최솟값: -4, 주기: 2π
 (8) 풀이 참조, 최댓값: $\frac{7}{2}$, 최솟값: $\frac{5}{2}$, 주기: 2π

풀이 (1) 함수 $y = \cos(x + \frac{\pi}{3})$ 의 그래프는 함수 $y = \cos x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{\pi}{3}$ 만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



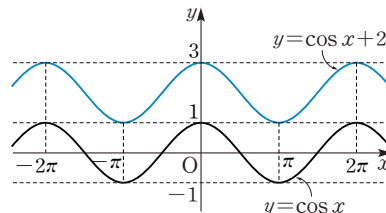
그래프에서 최댓값은 1, 최솟값은 -1, 주기는 2π 이다.

- (2) 함수 $y = \cos(x - \frac{\pi}{6})$ 의 그래프는 함수 $y = \cos x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{6}$ 만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



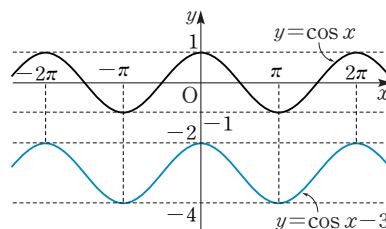
그래프에서 최댓값은 1, 최솟값은 -1, 주기는 2π 이다.

- (3) 함수 $y = \cos x + 2$ 의 그래프는 함수 $y = \cos x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



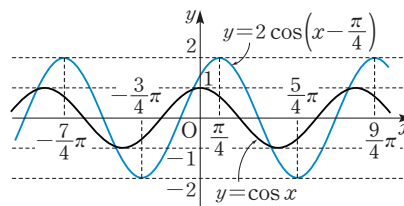
그래프에서 최댓값은 3, 최솟값은 1, 주기는 2π 이다.

- (4) 함수 $y = \cos x - 3$ 의 그래프는 함수 $y = \cos x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



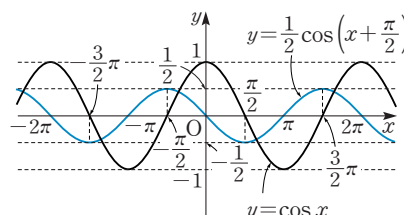
그래프에서 최댓값은 -2, 최솟값은 -4, 주기는 2π 이다.

- (5) 함수 $y = 2 \cos(x - \frac{\pi}{4})$ 의 그래프는 함수 $y = \cos x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 2배 한 후, x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$ 만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



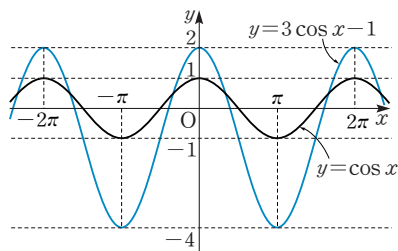
그래프에서 최댓값은 2, 최솟값은 -2, 주기는 2π 이다.

- (6) 함수 $y = \frac{1}{2} \cos(x + \frac{\pi}{2})$ 의 그래프는 함수 $y = \cos x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 배 한 후, x 축의 방향으로 $-\frac{\pi}{2}$ 만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



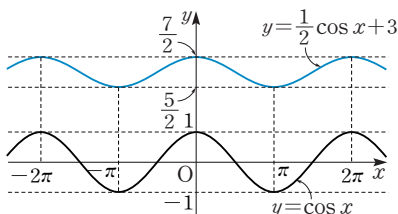
그래프에서 최댓값은 $\frac{1}{2}$, 최솟값은 $-\frac{1}{2}$, 주기는 2π 이다.

- (7) 함수 $y = 3 \cos x - 1$ 의 그래프는 함수 $y = \cos x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 3배 한 후, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



그래프에서 최댓값은 2, 최솟값은 -4, 주기는 2π 이다.

- (8) 함수 $y = \frac{1}{2} \cos x + 3$ 의 그래프는 함수 $y = \cos x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 배 한 후, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



그래프에서 최댓값은 $\frac{7}{2}$, 최솟값은 $\frac{5}{2}$, 주기는 2π 이다.

- 10 답 (1) $a=2, b=2, c=1$ (2) $a=1, b=1, c=2$
(3) $a=1, b=1, c=-2$ (4) $a=2, b=2, c=3$

풀이 (1) $f(x) = a \cos b\left(x + \frac{\pi}{2b}\right) + c$

최솟값이 -1이고 $a > 0$ 이므로 $-a + c = -1$ ㉠

주기가 π 이고 $b > 0$ 이므로 $\frac{2\pi}{b} = \pi \quad \therefore b = 2$

$$\therefore f(x) = a \cos 2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + c$$

$$f(-\pi) = 1 \text{ 이므로 } a \cos 2\left(-\pi + \frac{\pi}{4}\right) + c = 1$$

$$a \cos\left(-\frac{3}{2}\pi\right) + c = 1 \quad \therefore c = 1$$

㉠에 $c = 1$ 을 대입하면 $a = 2$

(2) $f(x) = a \cos b\left(x + \frac{\pi}{b}\right) - c$

최댓값이 -1이고 $a > 0$ 이므로 $a - c = -1$ ㉡

주기가 2π 이고 $b > 0$ 이므로 $\frac{2\pi}{b} = 2\pi \quad \therefore b = 1$

$$\therefore f(x) = a \cos(x + \pi) - c$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \text{ 이므로 } a \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) - c = -2$$

$$a \cos \frac{3}{2}\pi - c = -2 \quad \therefore c = 2$$

㉡에 $c = 2$ 를 대입하면 $a = 1$

(3) $f(x) = a \cos b\left(x - \frac{\pi}{b}\right) - c$

최솟값이 1이고 $a > 0$ 이므로 $-a - c = 1$ ㉢

주기가 2π 이고 $b > 0$ 이므로 $\frac{2\pi}{b} = 2\pi \quad \therefore b = 1$

$$\therefore f(x) = a \cos(x - \pi) - c$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \text{ 이므로 } a \cos\left(\frac{\pi}{2} - \pi\right) - c = 2$$

$$a \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - c = 2 \quad \therefore c = -2$$

㉢에 $c = -2$ 를 대입하면 $a = 1$

(4) $f(x) = a \cos b\left(x + \frac{\pi}{b}\right) + c$

최댓값이 5이고 $a > 0$ 이므로 $a + c = 5$ ㉣

주기가 π 이고 $b > 0$ 이므로 $\frac{2\pi}{b} = \pi \quad \therefore b = 2$

$$\therefore f(x) = a \cos 2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + c$$

$$f(\pi) = 1 \text{ 이므로 } a \cos 2\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) + c = 1$$

$$a \cos 3\pi + c = 1 \quad \therefore -a + c = 1 \quad \dots\dots ㉤$$

㉣, ㉤을 연립하여 풀면 $a = 2, c = 3$

- 11 답 $a=1, b=2, c=1$

풀이 주기가 π 이므로 $\frac{2\pi}{b} = \pi \quad \therefore b = 2$

$a > 0$ 이고 최댓값이 2, 최솟값이 0이므로

$$a + c = 2, -a + c = 0$$

두 식을 연립하여 풀면 $a = 1, c = 1$

- 12 답 $a=3, b=1, c=\frac{\pi}{6}$

풀이 주기가 $\frac{13}{6}\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{12}{6}\pi = 2\pi$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = 2\pi \quad \therefore b = 1$$

최댓값이 3, 최솟값이 -3이므로 $a = 3$

$$\therefore y = 3 \cos(x - c)$$

이때 그래프에서 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3$ 이므로

$$3 \cos\left(\frac{\pi}{6} - c\right) = 3$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6} - c\right) = 1$$

따라서 $\frac{\pi}{6} - c = \dots, -4\pi, -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi, \dots$ 이고

$$0 \leq c \leq \frac{\pi}{2} \text{ 이므로 } c = \frac{\pi}{6}$$

- 13 답 (1) 최댓값, 최솟값: 없다., 주기: π , 풀이 참조

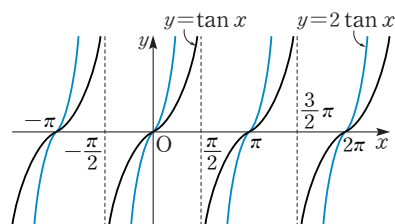
(2) 최댓값, 최솟값: 없다., 주기: π , 풀이 참조

(3) 최댓값, 최솟값: 없다., 주기: 4π , 풀이 참조

(4) 최댓값, 최솟값: 없다., 주기: $\frac{\pi}{4}$, 풀이 참조

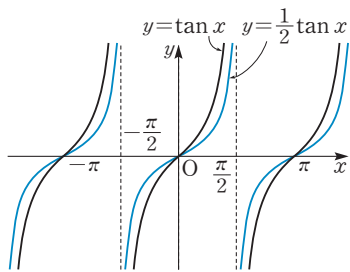
풀이 (1) 최댓값, 최솟값: 없다., 주기: π

함수 $y = 2 \tan x$ 의 그래프는 함수 $y = \tan x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 2배 한 것이므로 다음 그림과 같다.



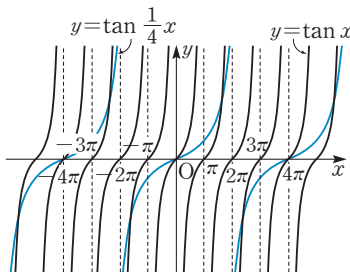
- (2) 최댓값, 최솟값: 없다., 주기: π

함수 $y = \frac{1}{2} \tan x$ 의 그래프는 함수 $y = \tan x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 배 한 것이므로 다음 그림과 같다.



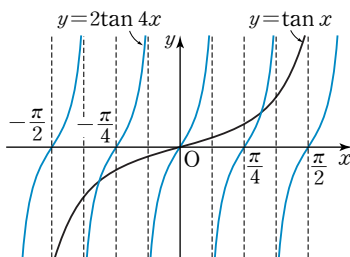
- (3) 최댓값, 최솟값: 없다., 주기: $\frac{\pi}{4}$

함수 $y = \tan \frac{1}{4}x$ 의 그래프는 함수 $y = \tan x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 4배 한 것이므로 다음 그림과 같다.



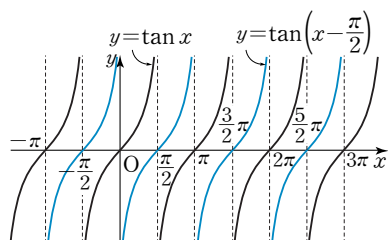
- (4) 최댓값, 최솟값: 없다., 주기: $\frac{\pi}{4}$

함수 $y = 2 \tan 4x$ 의 그래프는 함수 $y = \tan x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 2배 하고, x 축의 방향으로 $\frac{1}{4}$ 배 한 것이므로 다음 그림과 같다.



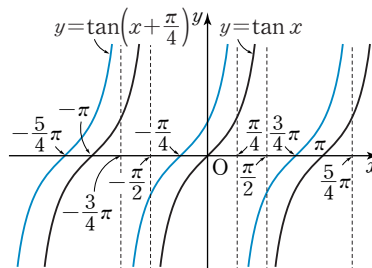
- 14** **답** (1) 풀이 참조, 최댓값, 최솟값: 없다., 주기: π
 (2) 풀이 참조, 최댓값, 최솟값: 없다., 주기: π
 (3) 풀이 참조, 최댓값, 최솟값: 없다., 주기: π
 (4) 풀이 참조, 최댓값, 최솟값: 없다., 주기: π
 (5) 풀이 참조, 최댓값, 최솟값: 없다., 주기: π
 (6) 풀이 참조, 최댓값, 최솟값: 없다., 주기: π
 (7) 풀이 참조, 최댓값, 최솟값: 없다., 주기: π
 (8) 풀이 참조, 최댓값, 최솟값: 없다., 주기: π

풀이 (1) 함수 $y = \tan \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ 의 그래프는 함수 $y = \tan x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$ 만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



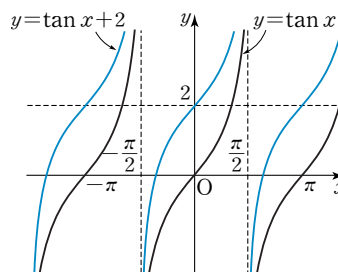
그래프에서 최댓값, 최솟값은 없고, 주기는 π 이다.

- (2) 함수 $y = \tan \left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ 의 그래프는 함수 $y = \tan x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{\pi}{4}$ 만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



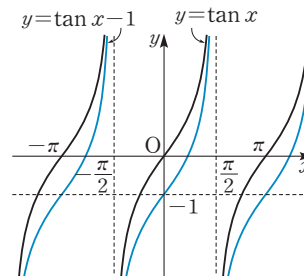
그래프에서 최댓값, 최솟값은 없고, 주기는 π 이다.

- (3) 함수 $y = \tan x + 2$ 의 그래프는 함수 $y = \tan x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



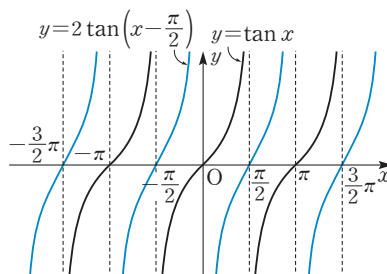
그래프에서 최댓값, 최솟값은 없고, 주기는 π 이다.

- (4) 함수 $y = \tan x - 1$ 의 그래프는 함수 $y = \tan x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



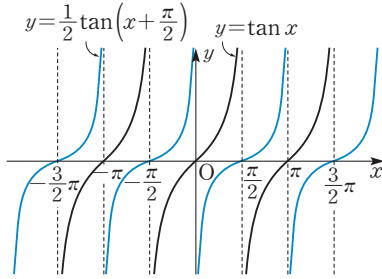
그래프에서 최댓값, 최솟값은 없고, 주기는 π 이다.

- (5) 함수 $y = 2 \tan \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ 의 그래프는 함수 $y = \tan x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 2배 한 후, x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$ 만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



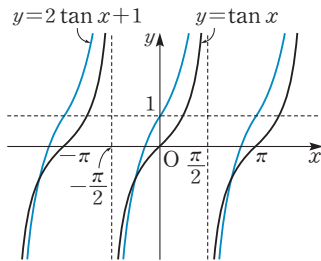
그래프에서 최댓값, 최솟값은 없고, 주기는 π 이다.

- (6) 함수 $y = \frac{1}{2} \tan \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$ 의 그래프는 함수 $y = \tan x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 배 한 후, x 축의 방향으로 $-\frac{\pi}{2}$ 만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



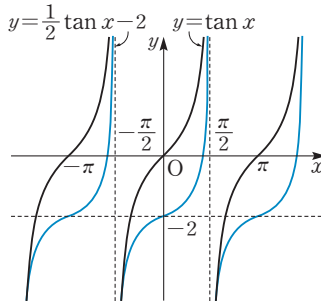
그래프에서 최댓값, 최솟값은 없고, 주기는 π 이다.

- (7) 함수 $y = 2 \tan x + 1$ 의 그래프는 함수 $y = \tan x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 2배 한 후, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



그래프에서 최댓값, 최솟값은 없고, 주기는 π 이다.

- (8) 함수 $y = \frac{1}{2} \tan x - 2$ 의 그래프는 함수 $y = \tan x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 배 한 후, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



그래프에서 최댓값, 최솟값은 없고, 주기는 π 이다.

- 15** **답** (1) $x = 2n\pi + \pi$ (단, n 은 정수)
 (2) $x = \frac{n}{3}\pi + \frac{\pi}{6}$ (단, n 은 정수)
 (3) $x = \frac{n}{4}\pi + \frac{\pi}{8}$ (단, n 은 정수)
 (4) $x = n\pi + \frac{\pi}{3}$ (단, n 은 정수)
 (5) $x = n\pi + \frac{5}{6}\pi$ (단, n 은 정수)
 (6) $x = n\pi + \frac{3}{4}\pi$ (단, n 은 정수)
 (7) $x = n\pi$ (단, n 은 정수)
 (8) $x = \frac{n}{2}\pi + \frac{3}{8}\pi$ (단, n 은 정수)
 (9) $x = \frac{n}{3}\pi + \frac{\pi}{9}$ (단, n 은 정수)
 (10) $x = \frac{n}{2}\pi + \frac{3}{4}\pi$ (단, n 은 정수)

풀이 (1) 점근선의 방정식은 $\frac{1}{2}x = n\pi + \frac{\pi}{2}$ 에서

$$x = 2n\pi + \pi \quad (\text{단, } n \text{은 정수})$$

(2) 점근선의 방정식은 $3x = n\pi + \frac{\pi}{2}$ 에서

$$x = \frac{n}{3}\pi + \frac{\pi}{6} \quad (\text{단, } n \text{은 정수})$$

(3) 점근선의 방정식은 $4x = n\pi + \frac{\pi}{2}$ 에서

$$x = \frac{n}{4}\pi + \frac{\pi}{8} \quad (\text{단, } n \text{은 정수})$$

(4) 점근선의 방정식은 $x + \frac{\pi}{6} = n\pi + \frac{\pi}{2}$ 에서

$$x = n\pi + \frac{\pi}{3} \quad (\text{단, } n \text{은 정수})$$

(5) 점근선의 방정식은 $x - \frac{\pi}{3} = n\pi + \frac{\pi}{2}$ 에서

$$x = n\pi + \frac{5}{6}\pi \quad (\text{단, } n \text{은 정수})$$

(6) 점근선의 방정식은 $x - \frac{\pi}{4} = n\pi + \frac{\pi}{2}$ 에서

$$x = n\pi + \frac{3}{4}\pi \quad (\text{단, } n \text{은 정수})$$

(7) 점근선의 방정식은 $x + \frac{\pi}{2} = n\pi + \frac{\pi}{2}$ 에서

$$x = n\pi \quad (\text{단, } n \text{은 정수})$$

(8) 점근선의 방정식은 $2x - \frac{\pi}{4} = n\pi + \frac{\pi}{2}$ 에서

$$2x = n\pi + \frac{3}{4}\pi$$

$$\therefore x = \frac{n}{2}\pi + \frac{3}{8}\pi \quad (\text{단, } n \text{은 정수})$$

(9) 점근선의 방정식은 $3x + \frac{\pi}{6} = n\pi + \frac{\pi}{2}$ 에서

$$3x = n\pi + \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore x = \frac{n}{3}\pi + \frac{\pi}{9} \quad (\text{단, } n \text{은 정수})$$

(10) 점근선의 방정식은 $2x - \pi = n\pi + \frac{\pi}{2}$ 에서

$$2x = n\pi + \frac{3}{2}\pi$$

$$\therefore x = \frac{n}{2}\pi + \frac{3}{4}\pi \quad (\text{단, } n \text{은 정수})$$

16 **답** (1) 풀이 참조, 최댓값: 1, 최솟값: 0, 주기: π

(2) 풀이 참조, 최댓값: 1, 최솟값: 0, 주기: $\frac{\pi}{2}$

(3) 풀이 참조, 최댓값: 1, 최솟값: 0, 주기: 2π

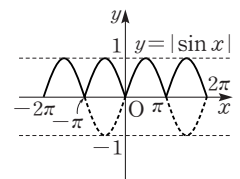
(4) 풀이 참조, 최댓값: 2, 최솟값: 0, 주기: π

(5) 풀이 참조, 최댓값: $\frac{1}{2}$, 최솟값: 0, 주기: π

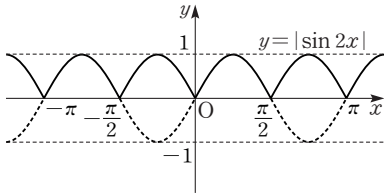
(6) 풀이 참조, 최댓값: 2, 최솟값: 0, 주기: $\frac{\pi}{2}$

풀이 (1) 함수 $y = |\sin x|$ 의 그래프는 함수 $y = \sin x$ 의 그래프를 그린 후 x 축의 아랫부분을 x 축에 대하여 대칭이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 최댓값은 1, 최솟값은 0, 주기는 π 이다.

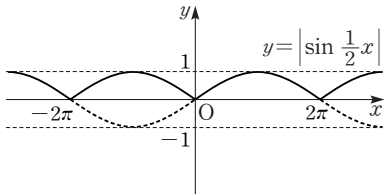


- (2) 함수 $y = |\sin 2x|$ 의 그래프는 함수 $y = \sin 2x$ 의 그래프를 그린 후 x 축의 아랫부분을 x 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



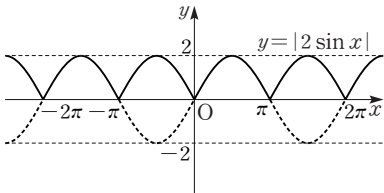
그래프에서 최댓값은 1, 최솟값은 0, 주기는 $\frac{\pi}{2}$ 이다.

- (3) 함수 $y = \left| \sin \frac{1}{2}x \right|$ 의 그래프는 함수 $y = \sin \frac{1}{2}x$ 의 그래프를 그린 후 x 축의 아랫부분을 x 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



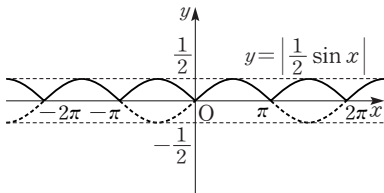
그래프에서 최댓값은 1, 최솟값은 0, 주기는 2π 이다.

- (4) 함수 $y = |2\sin x|$ 의 그래프는 함수 $y = 2\sin x$ 의 그래프를 그린 후 x 축의 아랫부분을 x 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



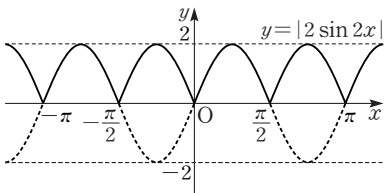
그래프에서 최댓값은 2, 최솟값은 0, 주기는 π 이다.

- (5) 함수 $y = \left| \frac{1}{2}\sin x \right|$ 의 그래프는 함수 $y = \frac{1}{2}\sin x$ 의 그래프를 그린 후 x 축의 아랫부분을 x 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



그래프에서 최댓값은 $\frac{1}{2}$, 최솟값은 0, 주기는 π 이다.

- (6) 함수 $y = |2\sin 2x|$ 의 그래프는 함수 $y = 2\sin 2x$ 의 그래프를 그린 후 x 축의 아랫부분을 x 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 그래프는 다음 그림과 같다.

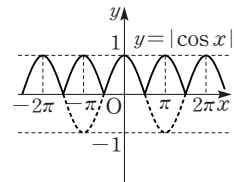


그래프에서 최댓값은 2, 최솟값은 0, 주기는 $\frac{\pi}{2}$ 이다.

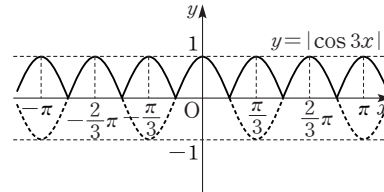
- 17** (1) 풀이 참조, 최댓값: 1, 최솟값: 0, 주기: π
 (2) 풀이 참조, 최댓값: 1, 최솟값: 0, 주기: $\frac{\pi}{3}$
 (3) 풀이 참조, 최댓값: 3, 최솟값: 0, 주기: π
 (4) 풀이 참조, 최댓값: $\frac{1}{3}$, 최솟값: 0, 주기: π
 (5) 풀이 참조, 최댓값: 3, 최솟값: 0, 주기: $\frac{\pi}{2}$
 (6) 풀이 참조, 최댓값: $\frac{1}{2}$, 최솟값: 0, 주기: $\frac{\pi}{4}$

풀이 (1) 함수 $y = |\cos x|$ 의 그래프는 함수 $y = \cos x$ 의 그래프를 그린 후 x 축의 아랫부분을 x 축에 대하여 대칭이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 최댓값은 1, 최솟값은 0, 주기는 π 이다.

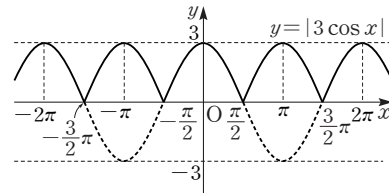


- (2) 함수 $y = |\cos 3x|$ 의 그래프는 함수 $y = \cos 3x$ 의 그래프를 그린 후 x 축의 아랫부분을 x 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



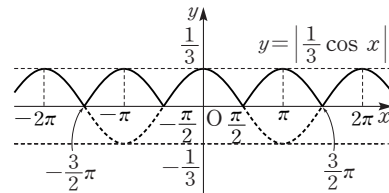
그래프에서 최댓값은 1, 최솟값은 0, 주기는 $\frac{\pi}{3}$ 이다.

- (3) 함수 $y = |3\cos x|$ 의 그래프는 함수 $y = 3\cos x$ 의 그래프를 그린 후 x 축의 아랫부분을 x 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



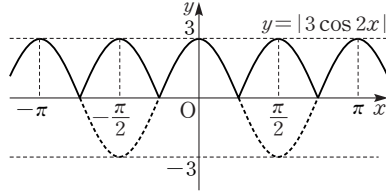
그래프에서 최댓값은 3, 최솟값은 0, 주기는 π 이다.

- (4) 함수 $y = \left| \frac{1}{3}\cos x \right|$ 의 그래프는 함수 $y = \frac{1}{3}\cos x$ 의 그래프를 그린 후 x 축의 아랫부분을 x 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



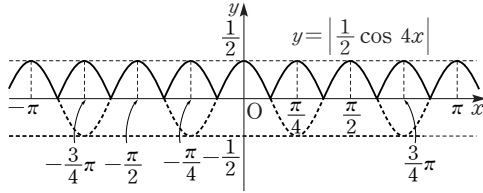
그래프에서 최댓값은 $\frac{1}{3}$, 최솟값은 0, 주기는 π 이다.

- (5) 함수 $y = |3\cos 2x|$ 의 그래프는 함수 $y = 3\cos 2x$ 의 그래프를 그린 후 x 축의 아랫부분을 x 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



그래프에서 최댓값은 3, 최솟값은 0, 주기는 $\frac{\pi}{2}$ 이다.

- (6) 함수 $y = \left|\frac{1}{2}\cos 4x\right|$ 의 그래프는 함수 $y = \frac{1}{2}\cos 4x$ 의 그래프를 그린 후 x 축의 아랫부분을 x 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 그래프는 다음 그림과 같다.

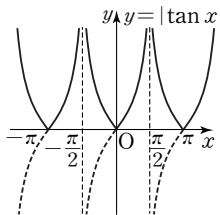


그래프에서 최댓값은 $\frac{1}{2}$, 최솟값은 0, 주기는 $\frac{\pi}{4}$ 이다.

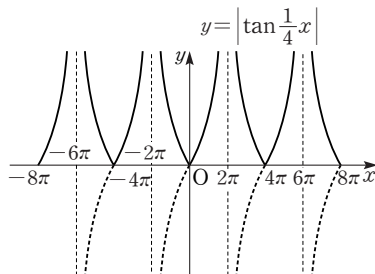
- 18 답** (1) 풀이 참조, 최댓값: 없다., 최솟값: 0, 주기: π
 (2) 풀이 참조, 최댓값: 없다., 최솟값: 0, 주기: 4π
 (3) 풀이 참조, 최댓값: 없다., 최솟값: 0, 주기: π
 (4) 풀이 참조, 최댓값: 없다., 최솟값: 0, 주기: π
 (5) 풀이 참조, 최댓값: 없다., 최솟값: 0, 주기: 2π
 (6) 풀이 참조, 최댓값: 없다., 최솟값: 0, 주기: $\frac{\pi}{2}$

풀이 (1) 함수 $y = |\tan x|$ 의 그래프는 함수 $y = \tan x$ 의 그래프를 그린 후 x 축의 아랫부분을 x 축에 대하여 대칭이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 최댓값은 없고, 최솟값은 0, 주기는 π 이다.

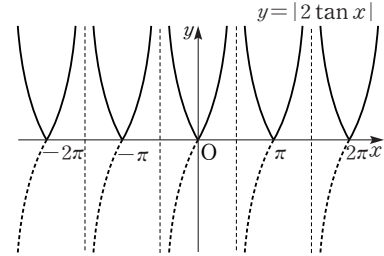


- (2) 함수 $y = \left|\tan \frac{1}{4}x\right|$ 의 그래프는 함수 $y = \tan \frac{1}{4}x$ 의 그래프를 그린 후 x 축의 아랫부분을 x 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



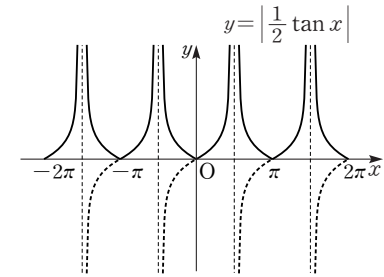
그래프에서 최댓값은 없고, 최솟값은 0, 주기는 4π 이다.

- (3) 함수 $y = |2\tan x|$ 의 그래프는 함수 $y = 2\tan x$ 의 그래프를 그린 후 x 축의 아랫부분을 x 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



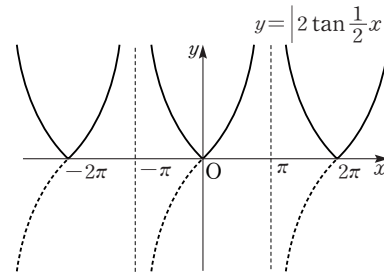
그래프에서 최댓값은 없고, 최솟값은 0, 주기는 π 이다.

- (4) 함수 $y = \left|\frac{1}{2}\tan x\right|$ 의 그래프는 함수 $y = \frac{1}{2}\tan x$ 의 그래프를 그린 후 x 축의 아랫부분을 x 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



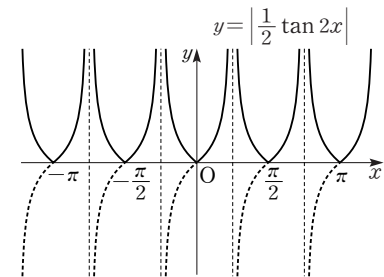
그래프에서 최댓값은 없고, 최솟값은 0, 주기는 π 이다.

- (5) 함수 $y = \left|2\tan \frac{1}{2}x\right|$ 의 그래프는 함수 $y = 2\tan \frac{1}{2}x$ 의 그래프를 그린 후 x 축의 아랫부분을 x 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



그래프에서 최댓값은 없고, 최솟값은 0, 주기는 2π 이다.

- (6) 함수 $y = \left|\frac{1}{2}\tan 2x\right|$ 의 그래프는 함수 $y = \frac{1}{2}\tan 2x$ 의 그래프를 그린 후 x 축의 아랫부분을 x 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



그래프에서 최댓값은 없고, 최솟값은 0, 주기는 $\frac{\pi}{2}$ 이다.

19 답 (1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 (4) $\frac{1}{2}$ (5) $\sqrt{3}$ (6) 1

풀이 (1) $\sin \frac{7}{3}\pi = \sin \left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\sin 390^\circ = \sin (360^\circ + 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

(3) $\cos \frac{13}{6}\pi = \cos \left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(4) $\cos 420^\circ = \cos (360^\circ + 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

(5) $\tan \frac{13}{3}\pi = \tan \left(4\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

(6) $\tan 405^\circ = \tan (360^\circ + 45^\circ) = \tan 45^\circ = 1$

20 답 (1) $-\frac{1}{2}$ (2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3) $\frac{1}{2}$
 (4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (5) -1 (6) $-\sqrt{3}$

풀이 (1) $\sin \left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

(2) $\sin (-405^\circ) = -\sin 405^\circ = -\sin (360^\circ + 45^\circ)$
 $= -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

(3) $\cos \left(-\frac{13}{3}\pi\right) = \cos \frac{13}{3}\pi = \cos \left(4\pi + \frac{\pi}{3}\right)$
 $= \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

(4) $\cos (-750^\circ) = \cos 750^\circ = \cos (720^\circ + 30^\circ)$
 $= \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(5) $\tan \left(-\frac{9}{4}\pi\right) = -\tan \frac{9}{4}\pi = -\tan \left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right)$
 $= -\tan \frac{\pi}{4} = -1$

(6) $\tan (-1140^\circ) = -\tan 1140^\circ = -\tan (1080^\circ + 60^\circ)$
 $= -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$

21 답 (1) $-\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
 (4) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (5) $\sqrt{3}$ (6) $-\sqrt{3}$

풀이 (1) $\sin \frac{7}{6}\pi = \sin \left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6}$
 $= -\frac{1}{2}$

(2) $\sin 150^\circ = \sin (180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

(3) $\cos \frac{5}{4}\pi = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

(4) $\cos 135^\circ = \cos (180^\circ - 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

(5) $\tan \frac{4}{3}\pi = \tan \left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

(6) $\tan 120^\circ = \tan (180^\circ - 60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$

22 답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (3) $-\frac{1}{2}$
 (4) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (5) -1 (6) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

풀이 (1) $\sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

(2) $\sin 120^\circ = \sin (90^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

(4) $\cos 150^\circ = \cos (90^\circ + 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(5) $\tan \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\tan \frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{1} = -1$

(6) $\tan 150^\circ = \tan (90^\circ + 60^\circ) = -\frac{1}{\tan 60^\circ}$
 $= -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

23 답 (1) $-1-\sqrt{3}$ (2) $-\sqrt{3}-3$ (3) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

풀이 (1) $\sin \left(-\frac{17}{6}\pi\right) = -\sin \frac{17}{6}\pi = -\sin \left(\frac{\pi}{2} \times 6 - \frac{\pi}{6}\right)$
 $= -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

$\tan \frac{2}{3}\pi = \tan \left(\frac{\pi}{2} \times 2 - \frac{\pi}{3}\right) = -\tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$

$\cos \left(-\frac{10}{3}\pi\right) = \cos \frac{10}{3}\pi = \cos \left(\frac{\pi}{2} \times 6 + \frac{\pi}{3}\right)$
 $= -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ (주어진 식) $= -\frac{1}{2} - \sqrt{3} - \frac{1}{2} = -1 - \sqrt{3}$

(2) $\cos 750^\circ = \cos (90^\circ \times 8 + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin 390^\circ = \sin (90^\circ \times 4 + 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

$\sin 225^\circ = \sin (90^\circ \times 2 + 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin 1140^\circ = \sin (90^\circ \times 12 + 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 330^\circ = \cos (90^\circ \times 4 - 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 135^\circ = \cos (90^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore$ (주어진 식) $= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}} - \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}$
 $= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1-\sqrt{2}}{2}} - \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}}$
 $= \frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$
 $= -\sqrt{3}(1+\sqrt{2}) - \sqrt{3}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$
 $= -\sqrt{3}-\sqrt{6}-3+\sqrt{6}$
 $= -\sqrt{3}-3$

참고 $\cos 135^\circ = \cos (90^\circ \times 2 - 45^\circ)$
 $= -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

(3) $\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$\sin \left(\frac{3}{2}\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} \times 3 + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos \left(3\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} \times 6 + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\therefore (\text{주어진 식}) &= \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}-1}{2}-\frac{1}{2}} = \frac{1}{-\sqrt{3}-1} \\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{-(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{1-\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

- 24** 답 (1) 1 (2) 1 (3) 0
(4) $2\sin \theta$ (5) $\frac{1}{\cos \theta}$ (6) -1
(7) 0 (8) $1-\tan \theta$ (9) $\frac{1}{\cos \theta}-1$

풀이 (1) (주어진 식) $= \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$
(2) (주어진 식) $= \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$
(3) (주어진 식) $= \cos \theta - \cos \theta = 0$
(4) (주어진 식) $= \sin \theta + \sin \theta = 2\sin \theta$
(5) (주어진 식) $= \frac{\cos \theta}{1+\sin \theta} + \tan \theta$
 $= \frac{\cos \theta}{1+\sin \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$
 $= \frac{\cos^2 \theta + \sin \theta(1+\sin \theta)}{(1+\sin \theta)\cos \theta}$
 $= \frac{\cos^2 \theta + \sin \theta + \sin^2 \theta}{(1+\sin \theta)\cos \theta}$
 $= \frac{1+\sin \theta}{(1+\sin \theta)\cos \theta} = \frac{1}{\cos \theta}$
(6) (주어진 식) $= \cos \theta(-\cos \theta) + (-\sin \theta)\sin \theta$
 $= -(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = -1$
(7) (주어진 식) $= \frac{\sin \theta}{1-\cos \theta} + \frac{-\sin \theta}{1-\cos \theta}$
 $= \frac{\sin \theta - \sin \theta}{1-\cos \theta} = 0$
(8) (주어진 식) $= \frac{\cos \theta \tan \theta}{-\cos \theta} - \frac{-\sin \theta \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta}$
 $= 1 - \tan \theta$
(9) (주어진 식)
 $= \frac{-\cos \theta}{\cos \theta \times (-\cos \theta)} + \frac{(-\cos \theta) \times (-\tan \theta)}{-\sin \theta}$
 $= \frac{1}{\cos \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \times \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{\cos \theta} - 1$

- 25** 답 (1) 0.5446 (2) 0.7314 (3) 0.6157
(4) 0.9511 (5) 3.0777 (6) 57.2900

풀이 (1) 각의 가로줄과 삼각비의 세로줄이 만나는 곳을 읽으면 $\sin 33^\circ = 0.5446$
(2) 각의 가로줄과 삼각비의 세로줄이 만나는 곳을 읽으면 $\sin 47^\circ = 0.7314$
(3) 각의 가로줄과 삼각비의 세로줄이 만나는 곳을 읽으면 $\cos 52^\circ = 0.6157$
(4) 각의 가로줄과 삼각비의 세로줄이 만나는 곳을 읽으면 $\cos 18^\circ = 0.9511$
(5) 각의 가로줄과 삼각비의 세로줄이 만나는 곳을 읽으면 $\tan 72^\circ = 3.0777$
(6) 각의 가로줄과 삼각비의 세로줄이 만나는 곳을 읽으면 $\tan 89^\circ = 57.2900$

- 26** 답 (1) 1.4388 (2) 5.5152 (3) 1.3660 (4) 0.4040

풀이 (1) $\sin 27^\circ = 0.4540$, $\cos 10^\circ = 0.9848$ 이므로
 $\sin 27^\circ + \cos 10^\circ = 0.4540 + 0.9848 = 1.4388$
(2) $\tan 81^\circ = 6.3138$, $\cos 37^\circ = 0.7986$ 이므로
 $\tan 81^\circ - \cos 37^\circ = 6.3138 - 0.7986 = 5.5152$
(3) $\sin 30^\circ = 0.5000$, $\cos 30^\circ = 0.8660$ 이므로
 $\sin 30^\circ + \cos 30^\circ = 0.5000 + 0.8660 = 1.3660$
(4) $\sin 22^\circ = 0.3746$, $\cos 22^\circ = 0.9272$ 이므로
 $\frac{\sin 22^\circ}{\cos 22^\circ} = \frac{0.3746}{0.9272} = 0.4040 \dots$

참고 $\tan 22^\circ = 0.4040$ 이므로 $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ 임을 확인할 수 있다.

- 27** 답 (1) 최댓값: 1, 최솟값: -3
(2) 최댓값: 6, 최솟값: -2
(3) 최댓값: 1, 최솟값: -5
(4) 최댓값: 2, 최솟값: -6
(5) 최댓값: 2, 최솟값: 0
(6) 최댓값: 6, 최솟값: 4

풀이 (1) $y = \sin x - \cos\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) - 1$
 $= \sin x + \sin x - 1 = 2\sin x - 1$
이때 $-1 \leq \sin x \leq 1$ 이므로
 $-2 \leq 2\sin x \leq 2 \quad \therefore -3 \leq 2\sin x - 1 \leq 1$
따라서 최댓값은 1, 최솟값은 -3 이다.
(2) $y = 3\cos x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2$
 $= 3\cos x + \cos x + 2$
 $= 4\cos x + 2$
이때 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로
 $-4 \leq 4\cos x \leq 4 \quad \therefore -2 \leq 4\cos x + 2 \leq 6$
따라서 최댓값은 6, 최솟값은 -2 이다.
(3) $y = 2\sin x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 2$
 $= 2\sin x + \sin x - 2$
 $= 3\sin x - 2$
이때 $-1 \leq \sin x \leq 1$ 이므로
 $-3 \leq 3\sin x \leq 3 \quad \therefore -5 \leq 3\sin x - 2 \leq 1$
따라서 최댓값은 1, 최솟값은 -5 이다.
(4) $y = \cos x - 3\sin\left(\frac{3}{2}\pi + x\right) - 2$
 $= \cos x + 3\cos x - 2$
 $= 4\cos x - 2$
이때 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로
 $-4 \leq 4\cos x \leq 4 \quad \therefore -6 \leq 4\cos x - 2 \leq 2$
따라서 최댓값은 2, 최솟값은 -6 이다.
(5) $y = \sin\left(\frac{5}{2}\pi - x\right) + 2\cos(\pi - x) + 1$
 $= \cos x - 2\cos x + 1$
 $= -\cos x + 1$

이때 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로

$$-1 \leq -\cos x \leq 1$$

$$\therefore 0 \leq -\cos x + 1 \leq 2$$

따라서 최댓값은 2, 최솟값은 0이다.

$$(6) y = \cos(\pi + x) - 2\sin\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) + 5$$

$$= -\cos x + 2\cos x + 5$$

$$= \cos x + 5$$

이때 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로

$$4 \leq \cos x + 5 \leq 6$$

따라서 최댓값은 6, 최솟값은 4이다.

28 답 (1) 최댓값: 5, 최솟값: 3

(2) 최댓값: 0, 최솟값: -2

(3) 최댓값: 5, 최솟값: 3

(4) 최댓값: -6, 최솟값: -8

(5) 최댓값: 4, 최솟값: 2

(6) 최댓값: 1, 최솟값: -1

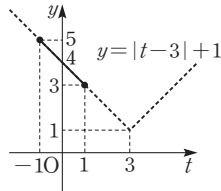
풀이 (1) $y = |\sin x - 3| + 1$ 에서 $\sin x = t$ 로 놓으면

$$y = |t - 3| + 1 \quad (\text{단, } -1 \leq t \leq 1)$$

따라서 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$t = -1$ 일 때 최댓값은 5,

$t = 1$ 일 때 최솟값은 3이다.



(2) $y = -|\cos x - 2| + 1$ 에서 $\cos x = t$ 로 놓으면

$$y = -|t - 2| + 1 \quad (\text{단, } -1 \leq t \leq 1)$$

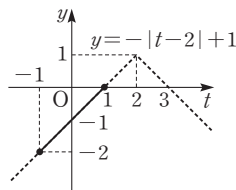
따라서 함수의 그래프는 오른쪽

쪽 그림과 같으므로

$t = 1$ 일 때 최댓값은 0,

$t = -1$ 일 때 최솟값은 -2

이다.



(3) $y = |\cos x - 1| + 3$ 에서 $\cos x = t$ 로 놓으면

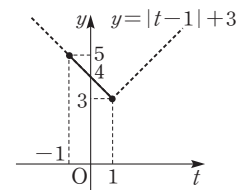
$$y = |t - 1| + 3 \quad (\text{단, } -1 \leq t \leq 1)$$

따라서 함수의 그래프는 오른쪽

쪽 그림과 같으므로

$t = -1$ 일 때 최댓값은 5,

$t = 1$ 일 때 최솟값은 3이다.



(4) $y = -|\sin x + 2| - 5$ 에서 $\sin x = t$ 로 놓으면

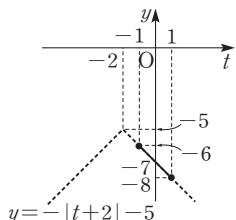
$$y = -|t + 2| - 5 \quad (\text{단, } -1 \leq t \leq 1)$$

따라서 함수의 그래프는 오른쪽

쪽 그림과 같으므로

$t = -1$ 일 때 최댓값은 -6,

$t = 1$ 일 때 최솟값은 -8이다.



(5) $y = |1 - \sin x| + 2$ 에서 $\sin x = t$ 로 놓으면

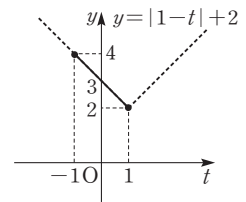
$$y = |1 - t| + 2 \quad (\text{단, } -1 \leq t \leq 1)$$

따라서 함수의 그래프는 오른쪽

쪽 그림과 같으므로

$t = -1$ 일 때 최댓값은 4,

$t = 1$ 일 때 최솟값은 2이다.



(6) $y = |2 + \cos x| - 2$ 에서 $\cos x = t$ 로 놓으면

$$y = |2 + t| - 2 \quad (\text{단, } -1 \leq t \leq 1)$$

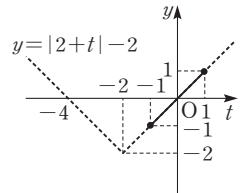
따라서 함수의 그래프는 오른쪽

쪽 그림과 같으므로

$t = 1$ 일 때 최댓값은 1,

$t = -1$ 일 때 최솟값은 -1이

다.



29 답 (1) 최댓값: 2, 최솟값: -2

(2) 최댓값: 6, 최솟값: -2

(3) 최댓값: 4, 최솟값: $\frac{7}{4}$

(4) 최댓값: 3, 최솟값: -1

(5) 최댓값: 4, 최솟값: $\frac{7}{4}$

(6) 최댓값: 2, 최솟값: -2

풀이 (1) $y = \cos^2 x + 2\sin x$

$$= (1 - \sin^2 x) + 2\sin x$$

$$= -\sin^2 x + 2\sin x + 1$$

$\sin x = t$ 로 놓으면

$$y = -t^2 + 2t + 1 = -(t - 1)^2 + 2 \quad (\text{단, } -1 \leq t \leq 1)$$

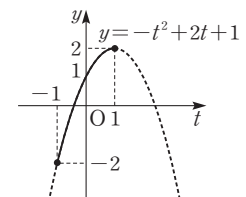
따라서 함수의 그래프는 오른쪽

쪽 그림과 같으므로

$t = 1$ 일 때 최댓값은 2,

$t = -1$ 일 때 최솟값은 -2이

다.



(2) $y = 2\cos^2 x + 4\sin x + 2$

$$= 2(1 - \sin^2 x) + 4\sin x + 2$$

$$= -2\sin^2 x + 4\sin x + 4$$

$\sin x = t$ 로 놓으면

$$y = -2t^2 + 4t + 4 = -2(t - 1)^2 + 6 \quad (\text{단, } -1 \leq t \leq 1)$$

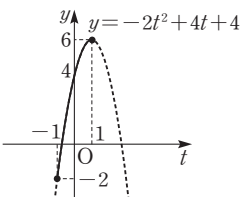
따라서 함수의 그래프는 오

른쪽 그림과 같으므로

$t = 1$ 일 때 최댓값은 6,

$t = -1$ 일 때 최솟값은 -2

이다.



(3) $y = -\sin^2 x + \cos x + 3$

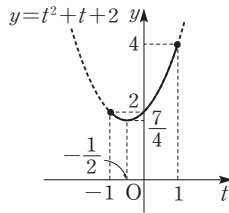
$$= -(1 - \cos^2 x) + \cos x + 3$$

$$= \cos^2 x + \cos x + 2$$

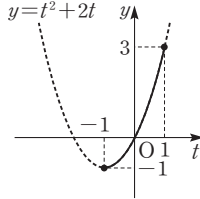
$\cos x = t$ 로 놓으면

$$y = t^2 + t + 2 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \quad (\text{단, } -1 \leq t \leq 1)$$

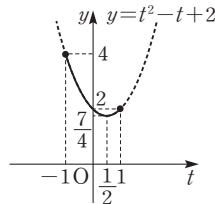
따라서 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로
 $t=1$ 일 때 최댓값은 4,
 $t=-\frac{1}{2}$ 일 때 최솟값은 $\frac{7}{4}$ 이다.



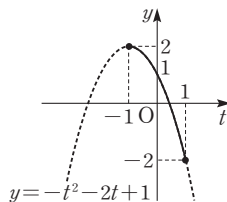
- (4) $y = -\cos^2 x + 2\sin x + 1$
 $= -(1 - \sin^2 x) + 2\sin x + 1$
 $= \sin^2 x + 2\sin x$
 $\sin x = t$ 로 놓으면
 $y = t^2 + 2t = (t+1)^2 - 1$ (단, $-1 \leq t \leq 1$)
 따라서 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로
 $t=1$ 일 때 최댓값은 3,
 $t=-1$ 일 때 최솟값은 -1 이다.



- (5) $y = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 3$
 $= -\sin x - \cos^2 x + 3$
 $= -\sin x - (1 - \sin^2 x) + 3$
 $= \sin^2 x - \sin x + 2$
 $\sin x = t$ 로 놓으면
 $y = t^2 - t + 2 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$ (단, $-1 \leq t \leq 1$)
 따라서 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로
 $t=-1$ 일 때 최댓값은 4,
 $t=\frac{1}{2}$ 일 때 최솟값은 $\frac{7}{4}$ 이다.



- (6) $y = \cos^2(\pi + x) + 2\cos\left(\frac{3}{2}\pi - x\right)$
 $= \cos^2 x - 2\sin x = (1 - \sin^2 x) - 2\sin x$
 $= -\sin^2 x - 2\sin x + 1$
 $\sin x = t$ 로 놓으면
 $y = -t^2 - 2t + 1 = -(t+1)^2 + 2$ (단, $-1 \leq t \leq 1$)
 따라서 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로
 $t=-1$ 일 때 최댓값은 2,
 $t=1$ 일 때 최솟값은 -2 이다.

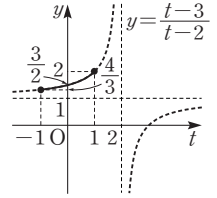


- 30** (1) 최댓값: 2, 최솟값: $\frac{4}{3}$
 (2) 최댓값: $\frac{3}{4}$, 최솟값: $\frac{1}{6}$
 (3) 최댓값: 1, 최솟값: $-\frac{1}{2}$
 (4) 최댓값: $\frac{3}{5}$, 최솟값: -1
 (5) 최댓값: 7, 최솟값: 1
 (6) 최댓값: $\frac{7}{4}$, 최솟값: $\frac{1}{2}$

풀이 (1) $y = \frac{\cos x - 3}{\cos x - 2}$ 에서 $\cos x = t$ 로 놓으면

$$y = \frac{t-3}{t-2} = \frac{(t-2)-1}{t-2} = 1 - \frac{1}{t-2} \quad (\text{단, } -1 \leq t \leq 1)$$

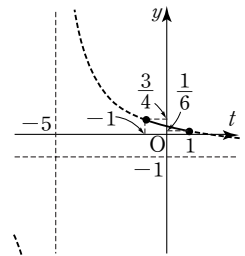
따라서 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로
 $t=1$ 일 때 최댓값은 2,
 $t=-1$ 일 때 최솟값은 $\frac{4}{3}$ 이다.



(2) $y = -\frac{\sin x - 2}{\sin x + 5}$ 에서 $\sin x = t$ 로 놓으면

$$y = -\frac{t-2}{t+5} = -\frac{(t+5)-7}{t+5} = -1 + \frac{7}{t+5} \quad (\text{단, } -1 \leq t \leq 1)$$

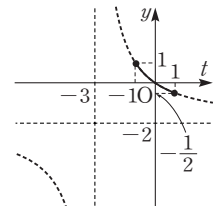
따라서 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로
 $t=-1$ 일 때 최댓값은 $\frac{3}{4}$,
 $t=1$ 일 때 최솟값은 $\frac{1}{6}$ 이다.



(3) $y = \frac{-2\sin x}{\sin x + 3}$ 에서 $\sin x = t$ 로 놓으면

$$y = \frac{-2t}{t+3} = \frac{-2(t+3)+6}{t+3} = -2 + \frac{6}{t+3} \quad (\text{단, } -1 \leq t \leq 1)$$

따라서 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로
 $t=-1$ 일 때 최댓값은 1,
 $t=1$ 일 때 최솟값은 $-\frac{1}{2}$ 이다.

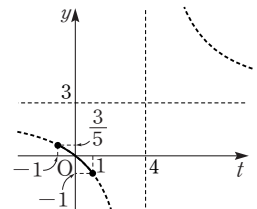


(4) $y = \frac{3\cos x}{\cos x - 4}$ 에서

$$\cos x = t \text{로 놓으면}$$

$$y = \frac{3t}{t-4} = \frac{3(t-4)+12}{t-4} = 3 + \frac{12}{t-4} \quad (\text{단, } -1 \leq t \leq 1)$$

따라서 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로
 $t=-1$ 일 때 최댓값은 $\frac{3}{5}$,
 $t=1$ 일 때 최솟값은 -1 이다.

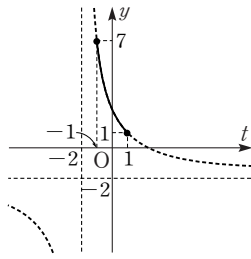


(5) $y = \frac{-2\cos x + 5}{\cos x + 2}$ 에서

$$\cos x = t \text{로 놓으면}$$

$$y = \frac{-2t+5}{t+2} = \frac{-2(t+2)+9}{t+2} = -2 + \frac{9}{t+2} \quad (\text{단, } -1 \leq t \leq 1)$$

따라서 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로
 $t = -1$ 일 때 최댓값은 7,
 $t = 1$ 일 때 최솟값은 1이다.



(6) $y = \frac{3\sin x - 4}{\sin x - 3}$ 에서

$\sin x = t$ 로 놓으면

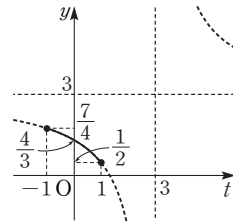
$$y = \frac{3t - 4}{t - 3} = \frac{3(t - 3) + 5}{t - 3}$$

$$= 3 + \frac{5}{t - 3} \quad (\text{단, } -1 \leq t \leq 1)$$

따라서 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$t = -1$ 일 때 최댓값은 $\frac{7}{4}$,

$t = 1$ 일 때 최솟값은 $\frac{1}{2}$ 이다.



31 답 (1) $x = \frac{5}{4}\pi$ 또는 $x = \frac{7}{4}\pi$ (2) $x = \frac{\pi}{3}$ 또는 $x = \frac{5}{3}\pi$

(3) $x = \frac{\pi}{4}$

(4) $x = \frac{\pi}{6}$ 또는 $x = \frac{11}{6}\pi$

풀이 (1) $0 \leq x < 2\pi$ 에서

함수 $y = \sin x$ 의 그래프와 직선

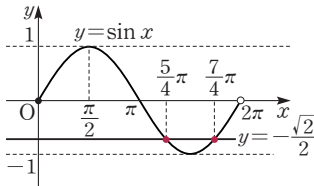
$y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 의 교점의

x 좌표는

$$\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{4}\pi \quad \text{또는} \quad 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7}{4}\pi$$

따라서 주어진 방정식의 해는 두 그래프의 교점의 x 좌표

와 같으므로 $x = \frac{5}{4}\pi$ 또는 $x = \frac{7}{4}\pi$



(2) $0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수

$y = \cos x$ 의 그래프

와 직선 $y = \frac{1}{2}$ 의 교

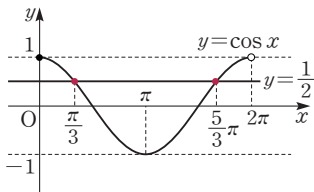
점의 x 좌표는

$$\frac{\pi}{3} \quad \text{또는}$$

$$2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi$$

따라서 주어진 방정식의 해는 두 그래프의 교점의 x 좌표

와 같으므로 $x = \frac{\pi}{3}$ 또는 $x = \frac{5}{3}\pi$



(3) $0 \leq x < \pi$ 에서 함수 $y = \tan x$ 의

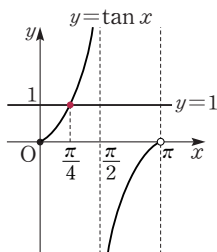
그래프와 직선 $y = 1$ 의 교점의

x 좌표는 $\frac{\pi}{4}$

따라서 주어진 방정식의 해는

두 그래프의 교점의 x 좌표와 같

으므로 $x = \frac{\pi}{4}$



(4) $2\cos x = \sqrt{3}$ 에서

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수

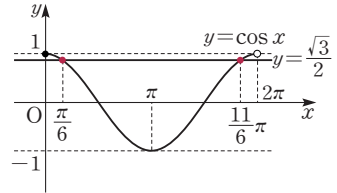
$y = \cos x$ 와 직선

$y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 교점의

$$x\text{좌표는 } \frac{\pi}{6} \quad \text{또는} \quad 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11}{6}\pi$$

따라서 주어진 방정식의 해는 두 그래프의 교점의 x 좌표

와 같으므로 $x = \frac{\pi}{6}$ 또는 $x = \frac{11}{6}\pi$



32 답 (1) $x = \frac{\pi}{4}$ 또는 $x = \frac{\pi}{2}$ (2) $x = \frac{\pi}{6}$ 또는 $x = \frac{5}{6}\pi$

(3) $x = \frac{\pi}{3}$ 또는 $x = \pi$

(4) $x = \frac{\pi}{2}$ 또는 $x = \pi$

(5) $x = \frac{\pi}{12}$

(6) $x = \frac{\pi}{4}$

풀이 (1) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 에서 $2x - \frac{\pi}{4} = \theta$ 로 놓으면

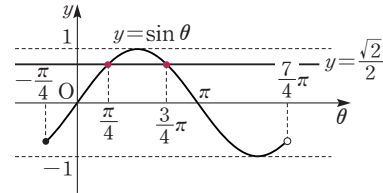
$$\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$0 \leq x < \pi$ 에서 $0 \leq 2x < 2\pi$

$$\therefore -\frac{\pi}{4} \leq 2x - \frac{\pi}{4} < \frac{7}{4}\pi$$

즉, $-\frac{\pi}{4} \leq \theta < \frac{7}{4}\pi$ 에서 $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 의 해는

$$\theta = \frac{\pi}{4} \quad \text{또는} \quad \theta = \frac{3}{4}\pi$$



따라서 $2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ 또는 $2x - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$ 이므로

$$x = \frac{\pi}{4} \quad \text{또는} \quad x = \frac{\pi}{2}$$

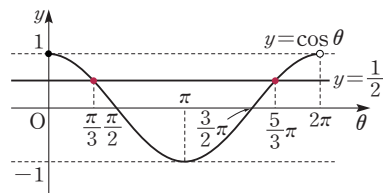
(2) $2\cos 2x = 1$ 에서 $\cos 2x = \frac{1}{2}$

$$2x = \theta \text{로 놓으면 } \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$0 \leq x < \pi$ 에서 $0 \leq 2x < 2\pi$

즉, $0 \leq \theta < 2\pi$ 에서 $\cos \theta = \frac{1}{2}$ 의 해는

$$\theta = \frac{\pi}{3} \quad \text{또는} \quad \theta = \frac{5}{3}\pi$$



따라서 $2x = \frac{\pi}{3}$ 또는 $2x = \frac{5}{3}\pi$ 이므로

$$x = \frac{\pi}{6} \quad \text{또는} \quad x = \frac{5}{6}\pi$$

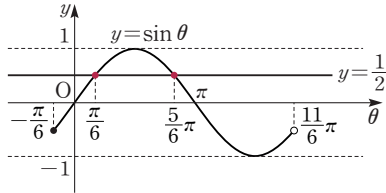
(3) $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ 에서 $x - \frac{\pi}{6} = \theta$ 로 놓으면

$$\sin \theta = \frac{1}{2}$$

$$0 \leq x < 2\pi \text{에서 } -\frac{\pi}{6} \leq x - \frac{\pi}{6} < \frac{11}{6}\pi$$

$$\text{즉, } -\frac{\pi}{6} \leq \theta < \frac{11}{6}\pi \text{에서 } \sin \theta = \frac{1}{2} \text{의 해는}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } \theta = \frac{5}{6}\pi$$



$$\text{따라서 } x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi \text{이므로}$$

$$x = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = \pi$$

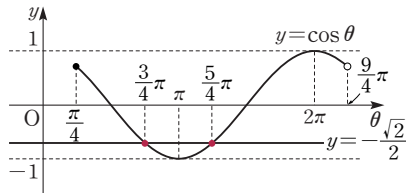
(4) $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 에서 $x + \frac{\pi}{4} = \theta$ 로 놓으면

$$\cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$0 \leq x < 2\pi \text{에서 } \frac{\pi}{4} \leq x + \frac{\pi}{4} < \frac{9}{4}\pi$$

$$\text{즉, } \frac{\pi}{4} \leq \theta < \frac{9}{4}\pi \text{에서 } \cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{의 해는}$$

$$\theta = \frac{3}{4}\pi \text{ 또는 } \theta = \frac{5}{4}\pi$$



$$\text{따라서 } x + \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi \text{ 또는 } x + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{4}\pi \text{이므로}$$

$$x = \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x = \pi$$

(5) $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$ 에서 $x + \frac{\pi}{4} = \theta$ 로 놓으면

$$\tan \theta = \sqrt{3}$$

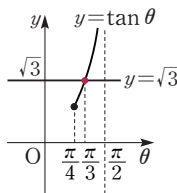
$$0 \leq x < \frac{\pi}{4} \text{에서 } \frac{\pi}{4} \leq x + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{즉, } \frac{\pi}{4} \leq \theta < \frac{\pi}{2} \text{에서 } \tan \theta = \sqrt{3}$$

$$\text{의 해는 } \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{따라서 } x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} \text{이므로}$$

$$x = \frac{\pi}{12}$$



(6) $\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -1$ 에서

$$x + \frac{\pi}{2} = \theta \text{로 놓으면}$$

$$\tan \theta = -1$$

$$0 < x < \pi \text{에서 } \frac{\pi}{2} < x + \frac{\pi}{2} < \frac{3}{2}\pi$$

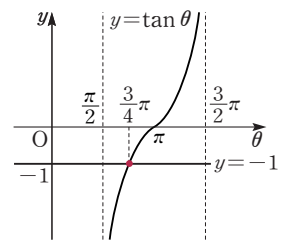
$$\text{즉, } \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3}{2}\pi \text{에서}$$

$$\tan \theta = -1 \text{의 해는}$$

$$\theta = \frac{3}{4}\pi$$

$$\text{따라서 } x + \frac{\pi}{2} = \frac{3}{4}\pi \text{이}$$

$$\text{므로 } x = \frac{\pi}{4}$$



33 (1) $x = \frac{\pi}{6}$ 또는 $x = \frac{\pi}{2}$ 또는 $x = \frac{5}{6}\pi$

(2) $x = 0$ 또는 $x = \frac{\pi}{6}$ 또는 $x = \frac{5}{6}\pi$ 또는 $x = \pi$

(3) $x = \frac{\pi}{4}$ 또는 $x = \frac{2}{3}\pi$ 또는 $x = \frac{5}{4}\pi$ 또는 $x = \frac{5}{3}\pi$

풀이 (1) $2\cos^2 x + 3\sin x - 3 = 0$ 에서

$$2(1 - \sin^2 x) + 3\sin x - 3 = 0$$

$$2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0, (2\sin x - 1)(\sin x - 1) = 0$$

$$\therefore \sin x = \frac{1}{2} \text{ 또는 } \sin x = 1$$

$$\text{따라서 } 0 \leq x < 2\pi \text{에서}$$

(i) $\sin x = \frac{1}{2}$ 의 해는

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{5}{6}\pi$$

(ii) $\sin x = 1$ 의 해는

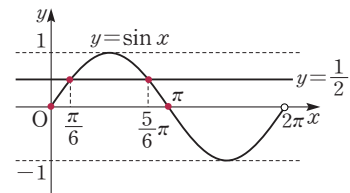
$$x = \frac{\pi}{2}$$

(i), (ii)에서 $x = \frac{\pi}{6}$ 또는 $x = \frac{\pi}{2}$ 또는 $x = \frac{5}{6}\pi$

(2) $\sin(\pi - x) = \sin x$ 이므로 $2\sin^2(\pi - x) - \sin x = 0$ 에

$$\text{서 } 2\sin^2 x - \sin x = 0, \sin x(2\sin x - 1) = 0$$

$$\therefore \sin x = 0 \text{ 또는 } \sin x = \frac{1}{2}$$



$$\text{따라서 } 0 \leq x < 2\pi \text{에서}$$

(i) $\sin x = 0$ 의 해는 $x = 0$ 또는 $x = \pi$

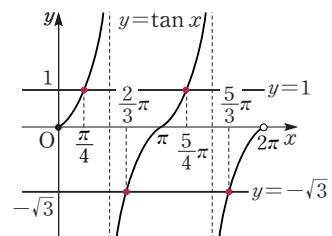
(ii) $\sin x = \frac{1}{2}$ 의 해는 $x = \frac{\pi}{6}$ 또는 $x = \frac{5}{6}\pi$

(i), (ii)에서 $x = 0$ 또는 $x = \frac{\pi}{6}$ 또는 $x = \frac{5}{6}\pi$ 또는 $x = \pi$

(3) $\tan^2 x - (1 - \sqrt{3})\tan x - \sqrt{3} = 0$ 에서

$$(\tan x + \sqrt{3})(\tan x - 1) = 0$$

$$\therefore \tan x = -\sqrt{3} \text{ 또는 } \tan x = 1$$



따라서 $0 \leq x < 2\pi$ 에서

(i) $\tan x = -\sqrt{3}$ 의 해는 $x = \frac{2}{3}\pi$ 또는 $x = \frac{5}{3}\pi$

(ii) $\tan x = 1$ 의 해는 $x = \frac{\pi}{4}$ 또는 $x = \frac{5}{4}\pi$

(i), (ii)에서 $x = \frac{\pi}{4}$ 또는 $x = \frac{2}{3}\pi$ 또는 $x = \frac{5}{4}\pi$ 또는 $x = \frac{5}{3}\pi$

34 답 (1) $\theta = \frac{\pi}{4}$ 또는 $\theta = \frac{3}{4}\pi$

(2) $\theta = \frac{\pi}{6}$ 또는 $\theta = \frac{5}{6}\pi$

(3) $\theta = \frac{\pi}{3}$ 또는 $\theta = \frac{5}{3}\pi$

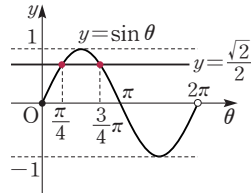
풀이 (1) 이차함수 $f(x) = \sqrt{2}x^2 + x + \frac{1}{4}\sin\theta$ 의 그래프가 x 축과 접하므로 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$D = 1^2 - 4 \times \sqrt{2} \times \frac{1}{4}\sin\theta = 0$$

$$\therefore \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서 $0 \leq \theta < 2\pi$ 에서 구하는 θ 의 값은

$$\theta = \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } \theta = \frac{3}{4}\pi$$



(2) 이차함수 $f(x) = x^2 + x + \frac{1}{2}\sin\theta$ 의 그래프가 x 축과 접

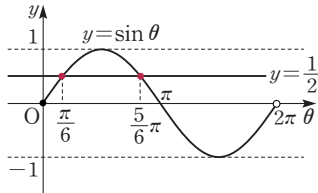
하므로 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$D = 1^2 - 4 \times 1 \times \frac{1}{2}\sin\theta = 0 \quad \therefore \sin\theta = \frac{1}{2}$$

따라서 $0 \leq \theta < 2\pi$ 에

서 구하는 θ 의 값은

$$\theta = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } \theta = \frac{5}{6}\pi$$



(3) 이차함수 $f(x) = 2x^2 + 2x + \cos\theta$ 의 그래프가 x 축과 접

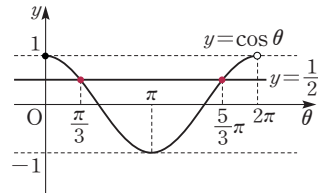
하므로 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = 1^2 - 2 \times \cos\theta = 0 \quad \therefore \cos\theta = \frac{1}{2}$$

따라서 $0 \leq \theta < 2\pi$ 에

서 구하는 θ 의 값은

$$\theta = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } \theta = \frac{5}{3}\pi$$



35 답 (1) $0 \leq x < \frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{11}{6}\pi < x < 2\pi$ (2) $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$

(3) $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5}{3}\pi$

(4) $0 \leq x < \frac{\pi}{4}$

풀이 (1) $0 \leq x < 2\pi$ 에서

함수 $y = \cos x$ 의 그래프

프와 직선 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 의

교점의 x 좌표는

$$\frac{\pi}{6} \text{ 또는 } 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11}{6}\pi$$

주어진 부등식의 해는 함수 $y = \cos x$ 의 그래프가 직선 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 보다 위쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위이므로

$$0 \leq x < \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } \frac{11}{6}\pi < x < 2\pi$$

(2) $0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수

$y = \sin x$ 의 그래프

와 직선 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 의

교점의 x 좌표는

$$\frac{\pi}{3} \text{ 또는 } \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$$

따라서 주어진 부등식의 해는 함수 $y = \sin x$ 의 그래프가 직선 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 보다 위쪽에 있거나 만나는 부분의 x 의

$$\text{값의 범위이므로 } \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$$

(3) $0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수

$y = \cos x$ 의 그래프

와 직선 $y = \frac{1}{2}$ 의 교

점의 x 좌표는

$$\frac{\pi}{3} \text{ 또는 } 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi$$

따라서 주어진 부등식의 해는 함수 $y = \cos x$ 의 그래프가 직선 $y = \frac{1}{2}$ 보다 아래쪽에 있거나 만나는 부분의 x 의

$$\text{값의 범위이므로 } \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5}{3}\pi$$

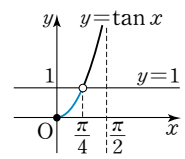
(4) $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ 에서 함수 $y = \tan x$ 의

그래프와 직선 $y = 1$ 의 교점의 x 좌

$$\text{표는 } \frac{\pi}{4}$$

따라서 주어진 부등식의 해는 함수

$y = \tan x$ 의 그래프가 직선 $y = 1$ 보다 아래쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위이므로 $0 \leq x < \frac{\pi}{4}$



36 답 (1) $\pi \leq x \leq \frac{5}{3}\pi$

(2) $0 \leq x < \frac{7}{12}\pi$ 또는 $\frac{23}{12}\pi < x < 2\pi$

(3) $0 \leq x \leq \frac{5}{4}\pi$ 또는 $\frac{7}{4}\pi \leq x < 2\pi$

(4) $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{11}{6}\pi$

(5) $\frac{5}{12}\pi \leq x < \frac{2}{3}\pi$

(6) $\frac{\pi}{6} < x < \frac{11}{12}\pi$ 또는 $\frac{7}{6}\pi < x < \frac{23}{12}\pi$

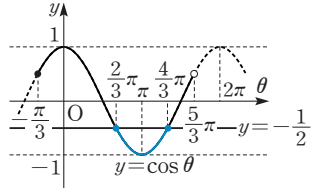
풀이 (1) $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \leq -\frac{1}{2}$ 에서 $x - \frac{\pi}{3} = \theta$ 로 놓으면

$$\cos \theta \leq -\frac{1}{2}$$

$$0 \leq x < 2\pi \text{에서 } -\frac{\pi}{3} \leq x - \frac{\pi}{3} < \frac{5}{3}\pi$$

$$\text{즉, } -\frac{\pi}{3} \leq \theta < \frac{5}{3}\pi \text{에서 } \cos \theta \leq -\frac{1}{2} \text{의 해는}$$

$$\frac{2}{3}\pi \leq \theta \leq \frac{4}{3}\pi$$



$$\text{따라서 } \frac{2}{3}\pi \leq x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{4}{3}\pi \text{에서 } \pi \leq x \leq \frac{5}{3}\pi$$

(2) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > \frac{1}{2}$ 에서 $x - \frac{\pi}{4} = \theta$ 로 놓으면

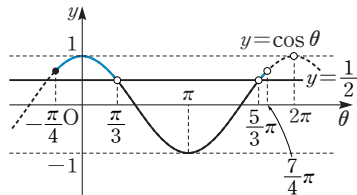
$$\cos \theta > \frac{1}{2}$$

$$0 \leq x < 2\pi \text{에서}$$

$$-\frac{\pi}{4} \leq x - \frac{\pi}{4} < \frac{7}{4}\pi$$

$$\text{즉, } -\frac{\pi}{4} \leq \theta < \frac{7}{4}\pi \text{에서 } \cos \theta > \frac{1}{2} \text{의 해는}$$

$$-\frac{\pi}{4} \leq \theta < \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } \frac{5}{3}\pi < \theta < \frac{7}{4}\pi$$



$$\text{따라서 } -\frac{\pi}{4} \leq x - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } \frac{5}{3}\pi < x - \frac{\pi}{4} < \frac{7}{4}\pi \text{에서}$$

$$0 \leq x < \frac{7}{12}\pi \text{ 또는 } \frac{23}{12}\pi < x < 2\pi$$

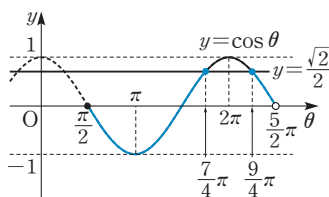
(3) $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ 에서 $x + \frac{\pi}{2} = \theta$ 로 놓으면

$$\cos \theta \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$0 \leq x < 2\pi \text{에서 } \frac{\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} < \frac{5}{2}\pi$$

$$\text{즉, } \frac{\pi}{2} \leq \theta < \frac{5}{2}\pi \text{에서 } \cos \theta \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \text{의 해는}$$

$$\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{7}{4}\pi \text{ 또는 } \frac{9}{4}\pi \leq \theta < \frac{5}{2}\pi$$



$$\text{따라서 } \frac{\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{7}{4}\pi \text{ 또는 } \frac{9}{4}\pi \leq x + \frac{\pi}{2} < \frac{5}{2}\pi \text{에서}$$

$$0 \leq x \leq \frac{5}{4}\pi \text{ 또는 } \frac{7}{4}\pi \leq x < 2\pi$$

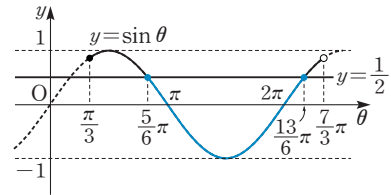
(4) $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leq \frac{1}{2}$ 에서 $x + \frac{\pi}{3} = \theta$ 로 놓으면

$$\sin \theta \leq \frac{1}{2}$$

$$0 \leq x < 2\pi \text{에서 } \frac{\pi}{3} \leq x + \frac{\pi}{3} < \frac{7}{3}\pi$$

$$\text{즉, } \frac{\pi}{3} \leq \theta < \frac{7}{3}\pi \text{에서 } \sin \theta \leq \frac{1}{2} \text{의 해는}$$

$$\frac{5}{6}\pi \leq \theta \leq \frac{13}{6}\pi$$



$$\text{따라서 } \frac{5}{6}\pi \leq x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{13}{6}\pi \text{에서 } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{11}{6}\pi$$

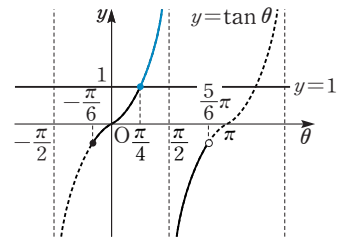
(5) $\tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \geq 1$ 에서 $x - \frac{\pi}{6} = \theta$ 로 놓으면

$$\tan \theta \geq 1$$

$$0 \leq x < \pi \text{에서 } -\frac{\pi}{6} \leq x - \frac{\pi}{6} < \frac{5}{6}\pi$$

$$\text{즉, } -\frac{\pi}{6} \leq \theta < \frac{5}{6}\pi \text{에서 } \tan \theta \geq 1 \text{의 해는}$$

$$\frac{\pi}{4} \leq \theta < \frac{\pi}{2}$$



$$\text{따라서 } \frac{\pi}{4} \leq x - \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2} \text{에서 } \frac{5}{12}\pi \leq x < \frac{2}{3}\pi$$

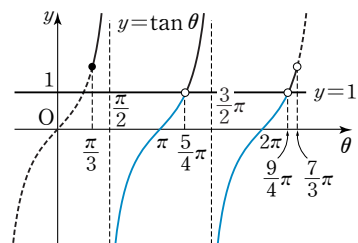
(6) $\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) < 1$ 에서 $x + \frac{\pi}{3} = \theta$ 로 놓으면

$$\tan \theta < 1$$

$$0 \leq x < 2\pi \text{에서 } \frac{\pi}{3} \leq x + \frac{\pi}{3} < \frac{7}{3}\pi$$

$$\text{즉, } \frac{\pi}{3} \leq \theta < \frac{7}{3}\pi \text{에서 } \tan \theta < 1 \text{의 해는}$$

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{5}{4}\pi \text{ 또는 } \frac{3}{2}\pi < \theta < \frac{9}{4}\pi$$



$$\text{따라서 } \frac{\pi}{2} < x + \frac{\pi}{3} < \frac{5}{4}\pi \text{ 또는 } \frac{3}{2}\pi < x + \frac{\pi}{3} < \frac{9}{4}\pi \text{에서}$$

$$\frac{\pi}{6} < x < \frac{11}{12}\pi \text{ 또는 } \frac{7}{6}\pi < x < \frac{23}{12}\pi$$

37 답 (1) $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi$ (2) $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5}{3}\pi$

(3) $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5}{3}\pi$

풀이 (1) $5\sin x + 2\cos^2 x - 4 > 0$ 에서

$$5\sin x + 2(1 - \sin^2 x) - 4 > 0, 2\sin^2 x - 5\sin x + 2 < 0$$

$$(2\sin x - 1)(\sin x - 2) < 0$$

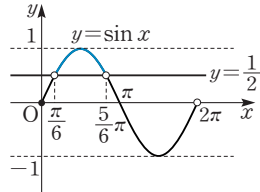
그런데 $-1 \leq \sin x \leq 1$ 에서 $\sin x - 2 < 0$ 이므로

$$2\sin x - 1 > 0 \quad \therefore \sin x > \frac{1}{2}$$

따라서 주어진 부등식의

해는

$$\frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi$$



(2) $2\cos^2 x + 5\cos x - 3 \leq 0$ 에서

$$(2\cos x - 1)(\cos x + 3) \leq 0$$

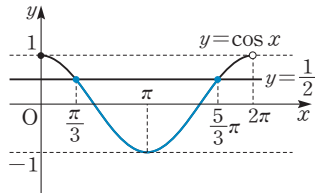
그런데 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 에서 $\cos x + 3 > 0$ 이므로

$$2\cos x - 1 \leq 0 \quad \therefore \cos x \leq \frac{1}{2}$$

따라서 주어진 부등

식의 해는

$$\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5}{3}\pi$$



(3) $2\sin^2 x - 7\cos x + 2 > 0$ 에서

$$2(1 - \cos^2 x) - 7\cos x + 2 > 0, 2\cos^2 x + 7\cos x - 4 < 0$$

$$(2\cos x - 1)(\cos x + 4) < 0$$

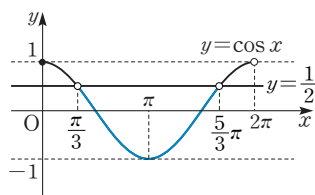
그런데 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 에서 $\cos x + 4 > 0$ 이므로

$$2\cos x - 1 < 0 \quad \therefore \cos x < \frac{1}{2}$$

따라서 주어진 부등

식의 해는

$$\frac{\pi}{3} < x < \frac{5}{3}\pi$$



38 답 (1) $\pi < \theta < 2\pi$ (2) $\frac{2}{3}\pi < \theta < \frac{4}{3}\pi$

풀이 (1) 모든 실수 x 에 대하여 부등식

$$x^2 - 2(\sin \theta + 1)x + 1 > 0$$
이 항상 성립해야 하므로

이차방정식 $x^2 - 2(\sin \theta + 1)x + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = \{-(\sin \theta + 1)\}^2 - 1 < 0$$

$$\sin^2 \theta + 2\sin \theta < 0, \sin \theta(\sin \theta + 2) < 0$$

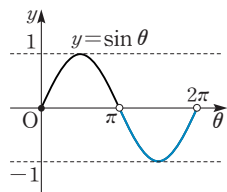
그런데 $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ 에서 $\sin \theta + 2 > 0$ 이므로

$$\sin \theta < 0$$

따라서 구하는 θ 의 값의 범위

는

$$\pi < \theta < 2\pi$$



(2) 모든 실수 x 에 대하여 부등식

$$x^2 + 2\sqrt{2}x\sin \theta - 3\cos \theta > 0$$
이 항상 성립해야 하므로

이차방정식 $x^2 + 2\sqrt{2}x\sin \theta - 3\cos \theta = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (\sqrt{2}\sin \theta)^2 + 3\cos \theta < 0$$

$$2\sin^2 \theta + 3\cos \theta < 0$$

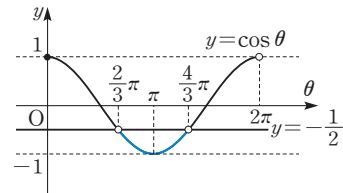
$$2(1 - \cos^2 \theta) + 3\cos \theta < 0$$

$$2\cos^2 \theta - 3\cos \theta - 2 > 0$$

$$(2\cos \theta + 1)(\cos \theta - 2) > 0$$

그런데 $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ 에서 $\cos \theta - 2 < 0$ 이므로

$$2\cos \theta + 1 < 0 \quad \therefore \cos \theta < -\frac{1}{2}$$



따라서 구하는 θ 의 값의 범위는 $\frac{2}{3}\pi < \theta < \frac{4}{3}\pi$

중단원 점검문제 | II-2 삼각함수의 그래프

112-113쪽

01 답 4

풀이 함수 $f(x)$ 의 주기가 2이므로

$$f(x+2) = f(x)$$

$$\therefore f(20) = f(18+2) = f(18) = f(16+2) = f(16)$$

$$= \dots = f(4) = f(2+2) = f(2) = 4$$

02 답 $y = \cos x$

풀이 함수 $y = \sin x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$ 만큼

평행이동한 그래프의 식은 $y = \sin(x - \frac{\pi}{2})$

함수 $y = \sin(x - \frac{\pi}{2})$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한

그래프의 식은 $-y = \sin(x - \frac{\pi}{2})$

$$\therefore y = -\sin(x - \frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$$

03 답 $\sqrt{3}$

풀이 함수 $y = \tan \frac{\pi}{2}x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 만큼

평행이동한 그래프의 식은 $y = \tan \frac{\pi}{2}(x - \frac{1}{2})$

이 그래프가 점 $(\frac{7}{6}, a)$ 를 지나므로

$$a = \tan \frac{\pi}{2}(\frac{7}{6} - \frac{1}{2}) = \tan(\frac{\pi}{2} \times \frac{2}{3}) = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

04 답 -1

풀이 함수 $f(x) = a \sin \frac{1}{2}x + b$ 의 최댓값이 5이고 $a > 0$ 이므로 $a + b = 5$ ㉠

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{7}{2} \text{이므로 } a \sin \frac{\pi}{6} + b = \frac{7}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{2}a + b = \frac{7}{2} \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = 3, b = 2$
따라서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $-a + b = -3 + 2 = -1$

05 답 -4

풀이 최댓값이 1이고 $a > 0$ 이므로 $a + c = 1$ ㉠

$$\text{주기가 } 4\pi \text{이고 } b > 0 \text{이므로 } \frac{2\pi}{b} = 4\pi \quad \therefore b = 2$$

$$\therefore f(x) = a \cos\left(\pi - \frac{x}{2}\right) + c$$

$$f(\pi) = -1 \text{이므로 } a \cos \frac{\pi}{2} + c = -1 \quad \therefore c = -1$$

㉠에 $c = -1$ 을 대입하면 $a = 2$
 $\therefore abc = 2 \times 2 \times (-1) = -4$

06 답 -2π

풀이 최댓값이 2, 최솟값이 -2 이고 $a > 0$ 이므로 $a = 2$

$$\text{주기가 } 2 \times \left(\frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \pi \text{이고 } b > 0 \text{이므로}$$

$$\frac{2\pi}{b} = \pi \quad \therefore b = 2$$

$$\therefore y = 2 \cos(2x + c)$$

이때 그래프에서 $f(0) = 0$ 이므로 $2 \cos c = 0$

따라서 $c = \dots, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \dots$ 이고 $-\frac{\pi}{2} \leq c \leq 0$ 이므로

$$c = -\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore abc = 2 \times 2 \times \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2\pi$$

07 답 1

풀이 최댓값이 3이고 $a > 0$ 이므로 $a = 3$

$y = |a \sin bx|$ 의 주기는 $y = a \sin bx$ 의 주기의 $\frac{1}{2}$ 이고

$b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \therefore b = 2$$

$$\therefore a - b = 3 - 2 = 1$$

08 답 3

풀이 최댓값이 4이고 $a > 0$ 이므로 $a + c = 4$ ㉠

$$\text{주기가 } \frac{\pi}{3} \text{이고 } b > 0 \text{이므로 } \frac{2\pi}{b} \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} \quad \therefore b = 3$$

$$\therefore f(x) = a |\sin 3x| + c$$

$$f\left(\frac{\pi}{18}\right) = 3 \text{이므로 } a \left|\sin \frac{\pi}{6}\right| + c = 3$$

$$\therefore \frac{1}{2}a + c = 3 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = 2, c = 2$

$$\therefore \frac{ab}{c} = \frac{2 \times 3}{2} = 3$$

09 답 $\frac{3\sqrt{3}-1}{2}$

$$\text{풀이 } \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + \tan\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{3} + \tan \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}-1}{2}$$

10 답 -1

$$\text{풀이 } \sin 25^\circ = \sin(90^\circ - 65^\circ) = \cos 65^\circ,$$

$$\cos 25^\circ = \cos(90^\circ - 65^\circ) = \sin 65^\circ \text{이므로}$$

$$\left(\frac{1}{\sin 25^\circ} - 1\right)\left(\frac{1}{\cos 65^\circ} + 1\right)\left(1 - \frac{1}{\sin 65^\circ}\right)\left(1 + \frac{1}{\cos 25^\circ}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\cos 65^\circ} - 1\right)\left(\frac{1}{\cos 65^\circ} + 1\right)\left(1 - \frac{1}{\sin 65^\circ}\right)\left(1 + \frac{1}{\sin 65^\circ}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\cos^2 65^\circ} - 1\right)\left(1 - \frac{1}{\sin^2 65^\circ}\right)$$

$$= \frac{1}{\cos^2 65^\circ} - \frac{1}{\sin^2 65^\circ \cos^2 65^\circ} - 1 + \frac{1}{\sin^2 65^\circ}$$

$$= \frac{\sin^2 65^\circ + \cos^2 65^\circ - 1}{\sin^2 65^\circ \cos^2 65^\circ} - 1 = 0 - 1 = -1$$

11 답 -16

$$\text{풀이 } y = \cos^2 x + 4 \sin x = (1 - \sin^2 x) + 4 \sin x$$

$$= -\sin^2 x + 4 \sin x + 1$$

$\sin x = t$ 로 놓으면

$$y = -t^2 + 4t + 1 = -(t-2)^2 + 5 \quad (\text{단, } -1 \leq t \leq 1)$$

따라서 함수의 그래프는 오른쪽

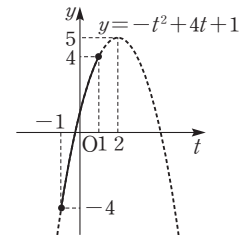
그림과 같으므로

$t = 1$ 일 때 최댓값 4, $t = -1$ 일 때

최솟값 -4 를 갖는다.

따라서 $M = 4, m = -4$ 이므로

$$Mm = 4 \times (-4) = -16$$



12 답 $\frac{5}{3}$

풀이 $|\sin x| = t$ 로 놓으면 $0 \leq t \leq 1$ 이고

$$y = \frac{t+1}{2t+1} = \frac{\left(t+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}}{2\left(t+\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{2\left(t+\frac{1}{2}\right)} + \frac{1}{2}$$

오른쪽 그림에서 $t = 0$ 일 때 최댓

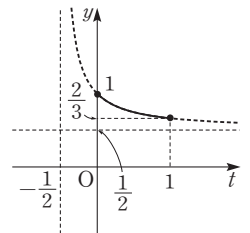
값은 1, $t = 1$ 일 때 최솟값은 $\frac{2}{3}$ 이

므로 주어진 함수의 치역은

$$\left\{y \mid \frac{2}{3} \leq y \leq 1\right\}$$

따라서 $\alpha = \frac{2}{3}, \beta = 1$ 이므로

$$\alpha + \beta = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}$$



13 답 $\frac{2}{3}\pi$

풀이 $4 \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}$ 에서 $\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3} = t$ 로 놓으면

$$4 \sin t = 2\sqrt{3} \text{에서 } \sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$0 \leq x < 2\pi \text{에서 } 0 \leq \frac{1}{2}x < \pi, \frac{\pi}{3} \leq \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3} < \frac{4}{3}\pi$$

$$\text{즉, } \frac{\pi}{3} \leq t < \frac{4}{3}\pi \text{에서 } \sin t = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{의 해는}$$

$$t = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } t = \frac{2}{3}\pi$$

$$\text{따라서 } \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi \text{이므로}$$

$$x = 0 \text{ 또는 } x = \frac{2}{3}\pi$$

$$\text{즉, 모든 근의 합은 } \frac{2}{3}\pi$$

14 답 $\frac{9}{2}\pi$

$$\text{풀이 } 2\cos^2 x - 3\sin x - 3 = 0 \text{에서}$$

$$2(1 - \sin^2 x) - 3\sin x - 3 = 0, 2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$$

$$(2\sin x + 1)(\sin x + 1) = 0$$

$$\therefore \sin x = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } \sin x = -1$$

$$\text{따라서 } 0 \leq x < 2\pi \text{에서}$$

$$(i) \sin x = -\frac{1}{2} \text{의 해는 } x = \frac{7}{6}\pi \text{ 또는 } x = \frac{11}{6}\pi$$

$$(ii) \sin x = -1 \text{의 해는 } x = \frac{3}{2}\pi$$

$$(i), (ii) \text{에서 모든 근의 합은}$$

$$\frac{7}{6}\pi + \frac{11}{6}\pi + \frac{3}{2}\pi = \frac{9}{2}\pi$$

15 답 π

$$\text{풀이 } 2\cos^2 x + 3\sin x - 3 \geq 0 \text{에서}$$

$$2(1 - \sin^2 x) + 3\sin x - 3 \geq 0, 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 \leq 0$$

$$(2\sin x - 1)(\sin x - 1) \leq 0$$

$$\text{그런데 } -1 \leq \sin x \leq 1 \text{에서 } \sin x - 1 \leq 0 \text{이므로}$$

$$2\sin x - 1 \geq 0 \quad \therefore \sin x \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{따라서 주어진 부등식의 해는 } \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5}{6}\pi \text{이므로}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6}, \beta = \frac{5}{6}\pi \quad \therefore \alpha + \beta = \pi$$

16 답 $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5}{6}\pi$

$$\text{풀이 모든 실수 } x \text{에 대하여 부등식}$$

$$x^2 - 2\sqrt{2}(\sin \theta - 1)x + \sin \theta > 0 \text{이 항상 성립해야 하므로}$$

$$\text{이차방정식 } x^2 - 2\sqrt{2}(\sin \theta - 1)x + \sin \theta = 0 \text{의 판별식을}$$

$$D \text{라고 하면}$$

$$\frac{D}{4} = \{-\sqrt{2}(\sin \theta - 1)\}^2 - \sin \theta < 0$$

$$2(\sin \theta - 1)^2 - \sin \theta < 0, 2\sin^2 \theta - 5\sin \theta + 2 < 0$$

$$(2\sin \theta - 1)(\sin \theta - 2) < 0$$

$$\text{그런데 } -1 \leq \sin \theta \leq 1 \text{에서 } \sin \theta - 2 < 0 \text{이므로}$$

$$2\sin \theta - 1 > 0$$

$$\text{따라서 } 2\sin \theta - 1 > 0, \text{ 즉 } \sin \theta > \frac{1}{2} \text{을 만족시키는 } \theta \text{의 값}$$

$$\text{의 범위는 } \frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5}{6}\pi$$

II-3 삼각함수의 활용

114-126쪽

01 답 (1) $8\sqrt{2}$

$$(3) 3\sqrt{6}$$

$$(5) 45^\circ$$

$$(7) 90^\circ$$

$$(2) 3\sqrt{2}$$

$$(4) 4\sqrt{3}$$

$$(6) 45^\circ \text{ 또는 } 135^\circ$$

$$(8) 15^\circ$$

풀이 (1) 주어진 조건을 나타내면

오른쪽 그림과 같다.

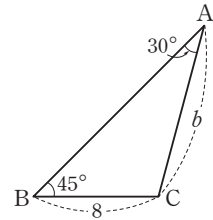
사인법칙에 의하여

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

$$\frac{8}{\sin 30^\circ} = \frac{b}{\sin 45^\circ}$$

$$8\sin 45^\circ = b\sin 30^\circ, 8 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = b \times \frac{1}{2}$$

$$\therefore b = 8\sqrt{2}$$



(2) 주어진 조건을 나타내면 오른쪽

그림과 같다.

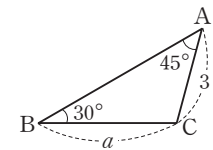
사인법칙에 의하여

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

$$\frac{a}{\sin 45^\circ} = \frac{3}{\sin 30^\circ}$$

$$a\sin 30^\circ = 3\sin 45^\circ, a \times \frac{1}{2} = 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore a = 3\sqrt{2}$$



(3) 주어진 조건을 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

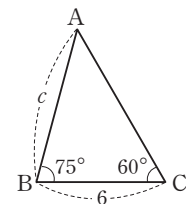
$$\text{이때 } A = 180^\circ - (75^\circ + 60^\circ) = 45^\circ$$

이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{6}{\sin 45^\circ} = \frac{c}{\sin 60^\circ}, 6\sin 60^\circ = c\sin 45^\circ$$

$$6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = c \times \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \therefore c = 3\sqrt{6}$$



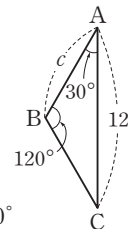
(4) 주어진 조건을 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

$$\text{이때 } C = 180^\circ - (30^\circ + 120^\circ) = 30^\circ \text{이므로}$$

$$\text{사인법칙에 의하여 } \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{12}{\sin 120^\circ} = \frac{c}{\sin 30^\circ}, 12\sin 30^\circ = c\sin 120^\circ$$

$$12 \times \frac{1}{2} = c \times \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore c = 4\sqrt{3}$$



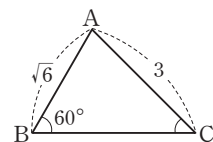
(5) 주어진 조건을 나타내면 오른쪽 그림과 같다. 사인법칙에 의하여

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{3}{\sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{6}}{\sin C}$$

$$3\sin C = \sqrt{6}\sin 60^\circ, 3\sin C = \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \sin C = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \therefore C = 45^\circ$$



- (6) 주어진 조건을 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

사인법칙에 의하여

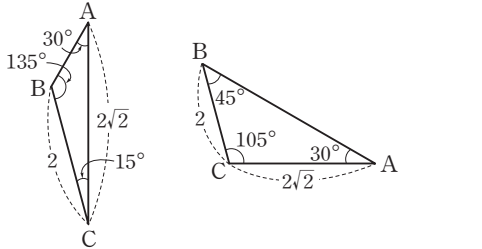
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

$$\frac{2}{\sin 30^\circ} = \frac{2\sqrt{2}}{\sin B}, 2\sin B = 2\sqrt{2}\sin 30^\circ$$

$$2\sin B = 2\sqrt{2} \times \frac{1}{2} \quad \therefore \sin B = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore B = 45^\circ \text{ 또는 } B = 135^\circ$$

참고



- (7) 주어진 조건을 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

사인법칙에 의하여

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{1}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{\sin C}$$

$$\sin C = \sqrt{2}\sin 45^\circ = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 \quad \therefore C = 90^\circ$$

- (8) 주어진 조건을 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

사인법칙에 의하여

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sin 135^\circ} = \frac{2}{\sin B}$$

$$2\sqrt{2}\sin B = 2\sin 135^\circ$$

$$2\sqrt{2}\sin B = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \therefore \sin B = \frac{1}{2}$$

따라서 $B = 30^\circ$ 이므로

$$A = 180^\circ - (135^\circ + 30^\circ) = 15^\circ$$

- 02 답 (1) 1 (2) $4\sqrt{3}$ (3) 8 (4) $5\sqrt{3}$
(5) 8 (6) $5\sqrt{2}$ (7) 1 (8) 12
(9) 6 (10) 2

풀이 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라고 하자.

- (1) 사인법칙에 의하여

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ} = 2R$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2R, 2 = 2R \quad \therefore R = 1$$

- (2) 사인법칙에 의하여

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{12}{\sin 120^\circ} = 2R, \frac{12}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R$$

$$8\sqrt{3} = 2R \quad \therefore R = 4\sqrt{3}$$

- (3) 사인법칙에 의하여

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{8}{\sin 150^\circ} = 2R, \frac{8}{\frac{1}{2}} = 2R$$

$$16 = 2R \quad \therefore R = 8$$

- (4) $B = 180^\circ - (45^\circ + 75^\circ) = 60^\circ$ 이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{15}{\sin 60^\circ} = 2R, \frac{15}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R$$

$$10\sqrt{3} = 2R \quad \therefore R = 5\sqrt{3}$$

- (5) $B = 180^\circ - (60^\circ + 75^\circ) = 45^\circ$ 이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{8\sqrt{2}}{\sin 45^\circ} = 2R, \frac{8\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2R$$

$$16 = 2R \quad \therefore R = 8$$

- (6) $C = 180^\circ - (60^\circ + 75^\circ) = 45^\circ$ 이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{10}{\sin 45^\circ} = 2R, \frac{10}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2R$$

$$10\sqrt{2} = 2R \quad \therefore R = 5\sqrt{2}$$

- (7) $C = 180^\circ - (60^\circ + 60^\circ) = 60^\circ$ 이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = 2R, \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R$$

$$2 = 2R \quad \therefore R = 1$$

- (8) $A = 180^\circ - (55^\circ + 95^\circ) = 30^\circ$ 이므로

사인법칙에 의하여

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{12}{\sin 30^\circ} = 2R, \frac{12}{\frac{1}{2}} = 2R$$

$$24 = 2R \quad \therefore R = 12$$

- (9) $A = 180^\circ - (90^\circ + 60^\circ) = 30^\circ$ 이므로

사인법칙에 의하여

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{6}{\sin 30^\circ} = 2R, \frac{6}{\frac{1}{2}} = 2R$$

$$12 = 2R \quad \therefore R = 6$$

- (10) $b = c$ 이므로

$$B = C = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 120^\circ) = 30^\circ$$

사인법칙에 의하여

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{2}{\sin 30^\circ} = 2R, \frac{2}{\frac{1}{2}} = 2R$$

$$4 = 2R \quad \therefore R = 2$$

- 03 답 (1) 5 : 6 : 7 (2) 2 : 5 : 6 (3) 3 : 4 : 5
(4) 3 : 2 : 2 (5) 2 : 5 : 4

풀이 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라고 하자.

- (1) $a = 5k, b = 6k, c = 7k$ ($k > 0$)라고 하면 사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \sin A : \sin B : \sin C &= \frac{a}{2R} : \frac{b}{2R} : \frac{c}{2R} \\ &= \frac{5k}{2R} : \frac{6k}{2R} : \frac{7k}{2R} \\ &= 5 : 6 : 7 \end{aligned}$$

(2) $a=2k, b=5k, c=6k$ ($k>0$)라고 하면 사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\sin A : \sin B : \sin C &= \frac{a}{2R} : \frac{b}{2R} : \frac{c}{2R} \\ &= \frac{2k}{2R} : \frac{5k}{2R} : \frac{6k}{2R} \\ &= 2 : 5 : 6\end{aligned}$$

(3) $a+b=7k, b+c=9k, c+a=8k$ ($k>0$)라고 하면

$$2(a+b+c)=24k \quad \therefore a+b+c=12k$$

$$\therefore a=3k, b=4k, c=5k$$

사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\sin A : \sin B : \sin C &= \frac{a}{2R} : \frac{b}{2R} : \frac{c}{2R} \\ &= \frac{3k}{2R} : \frac{4k}{2R} : \frac{5k}{2R} \\ &= 3 : 4 : 5\end{aligned}$$

(4) $a+b=5k, b+c=4k, c+a=5k$ ($k>0$)라고 하면

$$2(a+b+c)=14k \quad \therefore a+b+c=7k$$

$$\therefore a=3k, b=2k, c=2k$$

사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\sin A : \sin B : \sin C &= \frac{a}{2R} : \frac{b}{2R} : \frac{c}{2R} \\ &= \frac{3k}{2R} : \frac{2k}{2R} : \frac{2k}{2R} \\ &= 3 : 2 : 2\end{aligned}$$

(5) $ab=5k, bc=10k, ca=4k$ ($k>0$)라고 하면

$$(abc)^2=200k^3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\textcircled{1} \text{에 } ab=5k \text{를 대입하면 } 25k^2c^2=200k^3$$

$$c^2=8k \quad \therefore c=\sqrt{8k}$$

$$\textcircled{1} \text{에 } bc=10k \text{를 대입하면 } 100k^2a^2=200k^3$$

$$a^2=2k \quad \therefore a=\sqrt{2k}$$

$$\textcircled{1} \text{에 } ca=4k \text{를 대입하면 } 16k^2b^2=200k^3$$

$$b^2=\frac{25}{2}k \quad \therefore b=\sqrt{\frac{25}{2}k}$$

사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\sin A : \sin B : \sin C &= \frac{a}{2R} : \frac{b}{2R} : \frac{c}{2R} \\ &= \frac{\sqrt{2k}}{2R} : \frac{\sqrt{\frac{25}{2}k}}{2R} : \frac{\sqrt{8k}}{2R} \\ &= 2 : 5 : 4\end{aligned}$$

04 답 (1) $1 : \sqrt{3} : 2$ (2) $1 : 1 : \sqrt{3}$

풀이 (1) $A+B+C=180^\circ$ 이므로

$$A=180^\circ \times \frac{1}{6}=30^\circ, B=180^\circ \times \frac{2}{6}=60^\circ,$$

$$C=180^\circ \times \frac{3}{6}=90^\circ$$

사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}a : b : c &= 2R \sin A : 2R \sin B : 2R \sin C \\ &= \sin A : \sin B : \sin C \\ &= \sin 30^\circ : \sin 60^\circ : \sin 90^\circ \\ &= \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} : 1 = 1 : \sqrt{3} : 2\end{aligned}$$

(2) $A+B+C=180^\circ$ 이므로

$$A=180^\circ \times \frac{1}{6}=30^\circ, B=180^\circ \times \frac{1}{6}=30^\circ,$$

$$C=180^\circ \times \frac{4}{6}=120^\circ$$

사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}a : b : c &= 2R \sin A : 2R \sin B : 2R \sin C \\ &= \sin A : \sin B : \sin C \\ &= \sin 30^\circ : \sin 30^\circ : \sin 120^\circ \\ &= \frac{1}{2} : \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 1 : 1 : \sqrt{3}\end{aligned}$$

05 답 (1) $4 : 3 : 5$ (2) $\sqrt{2} : \sqrt{3} : 1$ (3) $5 : 6 : 2$

풀이 (1) 사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\sin A : \sin B : \sin C &= \frac{a}{2R} : \frac{b}{2R} : \frac{c}{2R} \\ &= a : b : c\end{aligned}$$

이때 $\sin A : \sin B : \sin C = 4 : 3 : 5$ 이므로

$$a : b : c = 4 : 3 : 5$$

(2) 사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\sin A : \sin B : \sin C &= \frac{a}{2R} : \frac{b}{2R} : \frac{c}{2R} \\ &= a : b : c\end{aligned}$$

이때 $\sin A : \sin B : \sin C = \sqrt{2} : \sqrt{3} : 1$ 이므로

$$a : b : c = \sqrt{2} : \sqrt{3} : 1$$

(3) $A+B+C=180^\circ$ 이므로

$$A+B=180^\circ-C, B+C=180^\circ-A,$$

$$C+A=180^\circ-B$$

$$\begin{aligned}\therefore \sin(A+B) : \sin(B+C) : \sin(C+A) \\ &= \sin(180^\circ-C) : \sin(180^\circ-A) : \sin(180^\circ-B) \\ &= \sin C : \sin A : \sin B \\ &= \frac{c}{2R} : \frac{a}{2R} : \frac{b}{2R} \\ &= c : a : b\end{aligned}$$

이때

$$\sin(A+B) : \sin(B+C) : \sin(C+A) = 2 : 5 : 6$$

이므로

$$c : a : b = 2 : 5 : 6$$

$$\therefore a : b : c = 5 : 6 : 2$$

06 답 (1) 7 (2) $\sqrt{7}$ (3) $2\sqrt{7}$ (4) $\sqrt{29}$

$$(5) \sqrt{39}$$

$$(6) 3\sqrt{3}$$

$$(7) \sqrt{93}$$

$$(8) 6\sqrt{7}$$

풀이 (1) $a^2=b^2+c^2-2bccos A$

$$= 3^2 + 5^2 - 2 \times 3 \times 5 \times \cos 120^\circ$$

$$= 9 + 25 - 2 \times 3 \times 5 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= 49$$

$$a > 0 \text{이므로 } a = \underline{7}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad a^2 &= b^2 + c^2 - 2bcc \cos A \\
 &= 2^2 + 3^2 - 2 \times 2 \times 3 \times \cos 60^\circ \\
 &= 4 + 9 - 2 \times 2 \times 3 \times \frac{1}{2} \\
 &= 7 \\
 a > 0 \text{ 이므로 } a &= \sqrt{7} \\
 (3) \quad c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \\
 &= 2^2 + 4^2 - 2 \times 2 \times 4 \times \cos 120^\circ \\
 &= 4 + 16 - 2 \times 2 \times 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\
 &= 28 \\
 c > 0 \text{ 이므로 } c &= 2\sqrt{7} \\
 (4) \quad b^2 &= c^2 + a^2 - 2cac \cos B \\
 &= (2\sqrt{2})^2 + 3^2 - 2 \times 2\sqrt{2} \times 3 \times \cos 135^\circ \\
 &= 8 + 9 - 2 \times 2\sqrt{2} \times 3 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
 &= 29 \\
 b > 0 \text{ 이므로 } b &= \sqrt{29} \\
 (5) \quad c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \\
 &= 5^2 + 7^2 - 2 \times 5 \times 7 \times \cos 60^\circ \\
 &= 25 + 49 - 2 \times 5 \times 7 \times \frac{1}{2} \\
 &= 39 \\
 c > 0 \text{ 이므로 } c &= \sqrt{39} \\
 (6) \quad b^2 &= c^2 + a^2 - 2cac \cos B \\
 &= 3^2 + 6^2 - 2 \times 3 \times 6 \times \cos 60^\circ \\
 &= 9 + 36 - 2 \times 3 \times 6 \times \frac{1}{2} \\
 &= 27 \\
 b > 0 \text{ 이므로 } b &= 3\sqrt{3} \\
 (7) \quad c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \\
 &= 4^2 + 7^2 - 2 \times 4 \times 7 \times \cos 120^\circ \\
 &= 16 + 49 - 2 \times 4 \times 7 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\
 &= 93 \\
 c > 0 \text{ 이므로 } c &= \sqrt{93} \\
 (8) \quad a^2 &= b^2 + c^2 - 2bcc \cos A \\
 &= 12^2 + 6^2 - 2 \times 12 \times 6 \times \cos 120^\circ \\
 &= 144 + 36 - 2 \times 12 \times 6 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\
 &= 252 \\
 a > 0 \text{ 이므로 } a &= 6\sqrt{7}
 \end{aligned}$$

- 07** 답 (1) 60° (2) 120° (3) 30° (4) 30°
 (5) 60° (6) 45° (7) 45° (8) 120°
 (9) 45° (10) 45°

풀이 (1) $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{3^2 + 8^2 - 7^2}{2 \times 3 \times 8}$

$$= \frac{9 + 64 - 49}{48} = \frac{1}{2}$$

 이때 $0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로 $A = 60^\circ$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{8^2 + 7^2 - 13^2}{2 \times 8 \times 7} \\
 &= \frac{64 + 49 - 169}{112} = -\frac{1}{2} \\
 \text{이때 } 0^\circ < A < 180^\circ \text{ 이므로 } A &= 120^\circ \\
 (3) \quad \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(\sqrt{3})^2 + 2^2 - 1^2}{2 \times \sqrt{3} \times 2} \\
 &= \frac{3 + 4 - 1}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 \text{이때 } 0^\circ < A < 180^\circ \text{ 이므로 } A &= 30^\circ \\
 (4) \quad \cos B &= \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{2^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2^2}{2 \times 2 \times 2\sqrt{3}} \\
 &= \frac{4 + 12 - 4}{8\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 \text{이때 } 0^\circ < B < 180^\circ \text{ 이므로 } B &= 30^\circ \\
 (5) \quad \cos B &= \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{5^2 + 8^2 - 7^2}{2 \times 5 \times 8} \\
 &= \frac{25 + 64 - 49}{80} = \frac{1}{2} \\
 \text{이때 } 0^\circ < B < 180^\circ \text{ 이므로 } B &= 60^\circ \\
 (6) \quad \cos B &= \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{(\sqrt{6})^2 + (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2}{2 \times \sqrt{6} \times \sqrt{3}} \\
 &= \frac{6 + 3 - 3}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 \text{이때 } 0^\circ < B < 180^\circ \text{ 이므로 } B &= 45^\circ \\
 (7) \quad \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{3^2 + (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{5})^2}{2 \times 3 \times \sqrt{2}} \\
 &= \frac{9 + 2 - 5}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 \text{이때 } 0^\circ < C < 180^\circ \text{ 이므로 } C &= 45^\circ \\
 (8) \quad \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{2^2 + 1^2 - (\sqrt{7})^2}{2 \times 2 \times 1} \\
 &= \frac{4 + 1 - 7}{4} = -\frac{1}{2} \\
 \text{이때 } 0^\circ < C < 180^\circ \text{ 이므로 } C &= 120^\circ \\
 (9) \quad \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2 + (\sqrt{6})^2 - 2^2}{2 \times (\sqrt{3} + 1) \times \sqrt{6}} \\
 &= \frac{6 + 2\sqrt{3}}{6\sqrt{2} + 2\sqrt{6}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3\sqrt{2} + \sqrt{6}} \\
 &= \frac{(3 + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{6})}{(3\sqrt{2} + \sqrt{6})(\sqrt{2} - \sqrt{6})} = \frac{6\sqrt{2}}{12} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 \text{이때 } 0^\circ < C < 180^\circ \text{ 이므로 } C &= 45^\circ \\
 (10) \quad \cos B &= \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{2^2 + (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 - (2\sqrt{2})^2}{2 \times 2 \times (\sqrt{6} + \sqrt{2})} \\
 &= \frac{4 + 4\sqrt{3}}{4(\sqrt{6} + \sqrt{2})} = \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \\
 &= \frac{(1 + \sqrt{3})(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2})} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 \text{이때 } 0^\circ < B < 180^\circ \text{ 이므로 } B &= 45^\circ
 \end{aligned}$$

- 08** 답 (1) $A = 105^\circ, B = 45^\circ, C = 30^\circ$
 (2) $A = 90^\circ, B = 30^\circ, C = 60^\circ$
 (3) $A = 45^\circ, B = 120^\circ, C = 15^\circ$

풀이 (1) $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(2\sqrt{2})^2 + 2^2 - (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2}{2 \times 2\sqrt{2} \times 2}$

$$= \frac{4 - 4\sqrt{3}}{8\sqrt{2}} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{(1 - \sqrt{3}) \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

$$\begin{aligned}\cos B &= \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{2^2 + (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 - (2\sqrt{2})^2}{2 \times 2 \times (\sqrt{6} + \sqrt{2})} \\ &= \frac{4 + 4\sqrt{3}}{4\sqrt{6} + 4\sqrt{2}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \\ &= \frac{(1 + \sqrt{3})(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2})} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2^2}{2 \times (\sqrt{6} + \sqrt{2}) \times 2\sqrt{2}} \\ &= \frac{12 + 4\sqrt{3}}{8\sqrt{3} + 8} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3} + 2} \\ &= \frac{(3 + \sqrt{3})(\sqrt{3} - 1)}{2(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

이때 $B = 45^\circ$, $C = 30^\circ$ 이므로 $A = 105^\circ$

$$(2) \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 - (\sqrt{6})^2}{2 \times \frac{\sqrt{6}}{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{2}} = 0$$

$$\begin{aligned}\cos B &= \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (\sqrt{6})^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}{2 \times \frac{3\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{6}} \\ &= \frac{9}{6\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(\sqrt{6})^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2 \times \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{6}}{2}} \\ &= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$\therefore A = 90^\circ$, $B = 30^\circ$, $C = 60^\circ$

$$\begin{aligned}(3) \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(3\sqrt{2})^2 + (3 - \sqrt{3})^2 - (2\sqrt{3})^2}{2 \times 3\sqrt{2} \times (3 - \sqrt{3})} \\ &= \frac{18 - 6\sqrt{3}}{18\sqrt{2} - 6\sqrt{6}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3\sqrt{2} - \sqrt{6}} \\ &= \frac{(3 - \sqrt{3})(3\sqrt{2} + \sqrt{6})}{(3\sqrt{2} - \sqrt{6})(3\sqrt{2} + \sqrt{6})} = \frac{6\sqrt{2}}{12} = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos B &= \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{(3 - \sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2 - (3\sqrt{2})^2}{2 \times (3 - \sqrt{3}) \times 2\sqrt{3}} \\ &= \frac{6 - 6\sqrt{3}}{12\sqrt{3} - 12} = \frac{6(1 - \sqrt{3})}{12(\sqrt{3} - 1)} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(2\sqrt{3})^2 + (3\sqrt{2})^2 - (3 - \sqrt{3})^2}{2 \times 2\sqrt{3} \times 3\sqrt{2}} \\ &= \frac{18 + 6\sqrt{3}}{12\sqrt{6}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2\sqrt{6}} \\ &= \frac{(3 + \sqrt{3}) \times \sqrt{6}}{2\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

이때 $A = 45^\circ$, $B = 120^\circ$ 이므로 $C = 15^\circ$

09 답 (1) $\sqrt{37}$ (2) $\sqrt{31}$ (3) $\sqrt{2}$

풀이 (1) $a = 4$, $c = 7$, $B = 60^\circ$ 이므로

$$\begin{aligned}b^2 &= c^2 + a^2 - 2cac \cos B \\ &= 7^2 + 4^2 - 2 \times 7 \times 4 \times \cos 60^\circ \\ &= 49 + 16 - 2 \times 7 \times 4 \times \frac{1}{2} \\ &= 37 \\ b > 0 \text{이므로 } b &= \sqrt{37}\end{aligned}$$

(2) $a = 5$, $c = 6$, $B = 60^\circ$ 이므로

$$\begin{aligned}b^2 &= c^2 + a^2 - 2cac \cos B \\ &= 6^2 + 5^2 - 2 \times 6 \times 5 \times \cos 60^\circ \\ &= 36 + 25 - 2 \times 6 \times 5 \times \frac{1}{2} \\ &= 31\end{aligned}$$

$b > 0$ 이므로 $b = \sqrt{31}$

(3) $a = \sqrt{2}$, $c = \sqrt{6}$, $B = 30^\circ$ 이므로

$$\begin{aligned}b^2 &= c^2 + a^2 - 2cac \cos B \\ &= (\sqrt{6})^2 + (\sqrt{2})^2 - 2 \times \sqrt{6} \times \sqrt{2} \times \cos 30^\circ \\ &= 6 + 2 - 2 \times \sqrt{6} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 2\end{aligned}$$

$b > 0$ 이므로 $b = \sqrt{2}$

10 답 (1) 120° (2) 60° (3) 90° (4) 30°

풀이 (1) $\sin A : \sin B : \sin C = 3 : 5 : 7$ 이므로 사인법칙에 의하여

$$a : b : c = 3 : 5 : 7$$

$$a = 3k, b = 5k, c = 7k$$

($k > 0$)라고 하면 오른쪽 그림에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \\ &= \frac{(3k)^2 + (5k)^2 - (7k)^2}{2 \times 3k \times 5k} \\ &= -\frac{15k^2}{30k^2} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

따라서 $0^\circ < C < 180^\circ$ 이므로 $C = 120^\circ$

(2) $\sin A : \sin B : \sin C = 8 : 7 : 5$ 이므로 사인법칙에 의하여

$$a : b : c = 8 : 7 : 5$$

$$a = 8k, b = 7k, c = 5k \quad (k > 0)$$

라고 하면 오른쪽 그림에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\cos B &= \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{(5k)^2 + (8k)^2 - (7k)^2}{2 \times 5k \times 8k} \\ &= \frac{40k^2}{80k^2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

따라서 $0^\circ < B < 180^\circ$ 이므로 $B = 60^\circ$

(3) $\sin A : \sin B : \sin C = 1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$ 이므로 사인법칙에 의하여

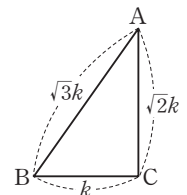
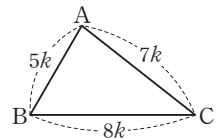
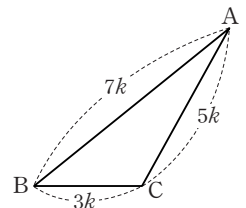
$$a : b : c = 1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$$

$$a = k, b = \sqrt{2}k, c = \sqrt{3}k \quad (k > 0)$$

라고 하면 오른쪽 그림에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \\ &= \frac{k^2 + (\sqrt{2}k)^2 - (\sqrt{3}k)^2}{2 \times k \times \sqrt{2}k} = 0\end{aligned}$$

따라서 $0^\circ < C < 180^\circ$ 이므로 $C = 90^\circ$



- (4) $\sin A : \sin B : \sin C = 1 : \sqrt{3} : 2$ 이므로 사인법칙에 의하여

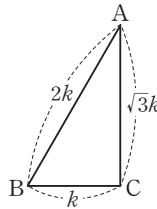
$$a : b : c = 1 : \sqrt{3} : 2$$

$a = k, b = \sqrt{3}k, c = 2k$ ($k > 0$)라고

하면 오른쪽 그림에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ &= \frac{(\sqrt{3}k)^2 + (2k)^2 - k^2}{2 \times \sqrt{3}k \times 2k} \\ &= \frac{6k^2}{4\sqrt{3}k^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

따라서 $0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로 $A = 30^\circ$



- 11 답 (1) 120° (2) 90° (3) 135° (4) 30°

풀이 (1) $a = 7, b = 8, c = 13$

이라고 하면 가장 큰 각은

$c = 13$ 인 변의 대각이다.

코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \\ &= \frac{7^2 + 8^2 - 13^2}{2 \times 7 \times 8} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$0^\circ < C < 180^\circ$ 이므로 $C = 120^\circ$

- (2) $a = 3, b = 4, c = 5$ 라고 하면 가장 큰

각은 $c = 5$ 인 변의 대각이다.

코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \\ &= \frac{3^2 + 4^2 - 5^2}{2 \times 3 \times 4} = 0\end{aligned}$$

$0^\circ < C < 180^\circ$ 이므로 $C = 90^\circ$

- (3) $a = \sqrt{2}, b = 2, c = \sqrt{10}$ 이라

고 하면 가장 큰 각은

$c = \sqrt{10}$ 인 변의 대각이다.

코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \\ &= \frac{(\sqrt{2})^2 + 2^2 - (\sqrt{10})^2}{2 \times \sqrt{2} \times 2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

$0^\circ < C < 180^\circ$ 이므로 $C = 135^\circ$

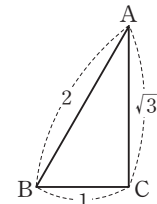
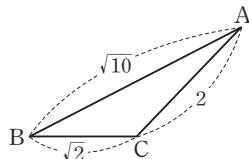
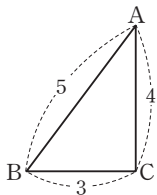
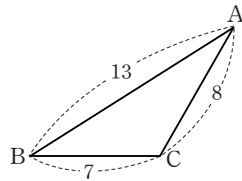
- (4) $a = 1, b = \sqrt{3}, c = 2$ 라고 하면 가장 작

은 각은 $a = 1$ 인 변의 대각이다.

코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ &= \frac{(\sqrt{3})^2 + 2^2 - 1}{2 \times \sqrt{3} \times 2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

$0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로 $A = 30^\circ$



풀이 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라고 하자.

- (1) 사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}$$

이 식을 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned}\frac{a}{2R} : \frac{b}{2R} &= b : a, a \times \frac{a}{2R} = b \times \frac{b}{2R} \\ \therefore a^2 &= b^2\end{aligned}$$

$a > 0, b > 0$ 이므로 $a = b$

따라서 삼각형 ABC는 $a = b$ 인 이등변삼각형이다.

- (2) 코사인법칙에 의하여

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}, \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

이 식을 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned}a \times \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} &= c \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b} &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}\end{aligned}$$

$$a^2 + b^2 - c^2 = b^2 + c^2 - a^2$$

$$2a^2 = 2c^2, a^2 = c^2$$

$a > 0, c > 0$ 이므로 $a = c$

따라서 삼각형 ABC는 $a = c$ 인 이등변삼각형이다.

- (3) 코사인법칙에 의하여

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

이 식을 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned}a \times \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} &= b \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = c \\ \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c} &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} = c\end{aligned}$$

$$\frac{c^2 + a^2 - b^2 - b^2 - c^2 + a^2}{2c} = c, \frac{2(a^2 - b^2)}{2c} = c$$

$$\frac{a^2 - b^2}{c} = c, a^2 - b^2 = c^2 \quad \therefore a^2 = b^2 + c^2$$

따라서 삼각형 ABC는 $A = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

- (4) 사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}$$

코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

이 식을 주어진 식에 대입하면

$$\frac{a}{2R} : \frac{b}{2R} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} : \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

$$a : b = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{b} : \frac{c^2 + a^2 - b^2}{a}$$

$$c^2 + a^2 - b^2 = b^2 + c^2 - a^2, 2a^2 = 2b^2, a^2 = b^2$$

$a > 0, b > 0$ 이므로 $a = b$

따라서 삼각형 ABC는 $a = b$ 인 이등변삼각형이다.

- (5) 사인법칙에 의하여

$$\sin B = \frac{b}{2R}, \sin A = \frac{a}{2R}$$

$$\text{코사인법칙에 의하여 } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

- 12 답 (1) $a = b$ 인 이등변삼각형 (2) $a = c$ 인 이등변삼각형
(3) $A = 90^\circ$ 인 직각삼각형 (4) $a = b$ 인 이등변삼각형
(5) $a = c$ 인 이등변삼각형 (6) $b = c$ 인 이등변삼각형

이 식을 주어진 식에 대입하면

$$\frac{b}{2R} = 2 \times \frac{a}{2R} \times \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}, \quad \frac{b}{2R} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2Rb}$$

$$b^2 = a^2 + b^2 - c^2, \quad a^2 = c^2$$

$$a > 0, c > 0 \text{ 이므로 } a = c$$

따라서 삼각형 ABC는 $a = c$ 인 이등변삼각형이다.

(6) 사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \quad \sin B = \frac{b}{2R}$$

$$\text{코사인법칙에 의하여 } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

이 식을 주어진 식에 대입하면

$$\frac{a}{2R} = 2 \times \frac{b}{2R} \times \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}, \quad \frac{a}{2R} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2Ra}$$

$$a^2 = a^2 + b^2 - c^2, \quad b^2 = c^2$$

$$b > 0, c > 0 \text{ 이므로 } b = c$$

따라서 삼각형 ABC는 $b = c$ 인 이등변삼각형이다.

13 답 3.8 km

풀이 삼각형 ABC에서

$$\angle A = 180^\circ - (72^\circ + 78^\circ) = 30^\circ$$

$$\frac{\overline{AC}}{\sin B} = \frac{\overline{BC}}{\sin A} \text{ 에서 } \frac{\overline{AC}}{\sin 72^\circ} = \frac{2}{\sin 30^\circ}$$

$$\therefore \overline{AC} = \frac{2}{\sin 30^\circ} \times \sin 72^\circ = \frac{2}{1} \times 0.95$$

$$= 3.8 \text{ (km)}$$

따라서 A 지점과 C 지점 사이의 거리는 3.8 km이다.

14 답 $2\sqrt{6}$ m

풀이 삼각형 ABC에서

$$\angle C = 180^\circ - (60^\circ + 75^\circ) = 45^\circ$$

$$\frac{\overline{BC}}{\sin A} = \frac{\overline{AB}}{\sin C} \text{ 에서 } \frac{\overline{BC}}{\sin 60^\circ} = \frac{4}{\sin 45^\circ}$$

$$\therefore \overline{BC} = \frac{4}{\sin 45^\circ} \times \sin 60^\circ = \frac{4}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 2\sqrt{6} \text{ (m)}$$

따라서 B 지점에서 목표물 C까지의 거리는 $2\sqrt{6}$ m이다.

15 답 65.31 m

$$\text{풀이 } \frac{\overline{AB}}{\sin (\angle BCA)} = \frac{\overline{AC}}{\sin (\angle CBA)} \text{ 에서}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\sin 40^\circ} = \frac{100}{\sin 80^\circ}$$

$$\therefore \overline{AB} = \frac{100}{\sin 80^\circ} \times \sin 40^\circ = \frac{100}{0.98} \times 0.64$$

$$= 65.306 \dots \text{ (m)}$$

따라서 정문과 후문 사이의 거리는 65.31 m이다.

16 답 820.75 m

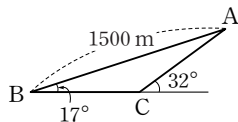
풀이 150 m/s의 속력으로 10

초 동안 갔으므로 오른쪽 그림

에서 $\overline{AB} = 1500$ m이다.

삼각형 ABC에서 사인법칙에

의하여



$$\frac{\overline{AC}}{\sin (\angle ABC)} = \frac{\overline{AB}}{\sin (\angle ACB)}$$

$$\text{즉, } \frac{\overline{AC}}{\sin 17^\circ} = \frac{1500}{\sin (180^\circ - 32^\circ)}$$

$$\frac{\overline{AC}}{\sin 17^\circ} = \frac{1500}{\sin 32^\circ}$$

$$\therefore \overline{AC} = \frac{1500}{\sin 32^\circ} \times \sin 17^\circ = \frac{1500}{0.53} \times 0.29$$

$$= 820.754 \dots \text{ (m)}$$

따라서 관제탑에서 비행기까지의 거리는 820.75 m이다.

17 답 $\frac{\sqrt{21}}{6}$ m

풀이 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos A$$

$$= 1^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \times 1 \times \frac{3}{2} \times \cos 60^\circ$$

$$= 1 + \frac{9}{4} - 2 \times 1 \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{7}{4}$$

$$\overline{BC} > 0 \text{ 이므로 } \overline{BC} = \frac{\sqrt{7}}{2} \text{ (m)}$$

원탁의 반지름의 길이를 R m라고 하면 사인법칙에 의하여

$$2R = \frac{\overline{BC}}{\sin 60^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{21}}{3} \quad \therefore R = \frac{\sqrt{21}}{6} \text{ (m)}$$

따라서 원탁의 반지름의 길이는 $\frac{\sqrt{21}}{6}$ m이다.

18 답 $\sqrt{7}$ m

풀이 오른쪽 그림과 같은 삼각형

ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$

$$- 2\overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos A$$

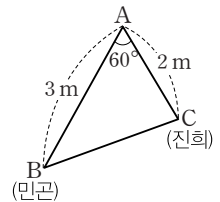
$$= 3^2 + 2^2 - 2 \times 3 \times 2 \times \cos 60^\circ$$

$$= 9 + 4 - 2 \times 3 \times 2 \times \frac{1}{2}$$

$$= 7$$

$$\overline{BC} > 0 \text{ 이므로 } \overline{BC} = \sqrt{7} \text{ (m)}$$

따라서 민곤이와 진희 사이의 거리는 $\sqrt{7}$ m이다.



19 답 $(30 + 40\sqrt{3})$ m

풀이 경기장의 반지름의 길이를

R m라고 하면 오른쪽 그림과 같

은 삼각형 ABC에서 사인법칙에

의하여

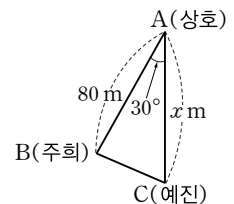
$$\frac{\overline{BC}}{\sin A} = 2R, \quad \frac{\overline{BC}}{\sin 30^\circ} = 2 \times 50$$

$$\therefore \overline{BC} = 100 \times \frac{1}{2} = 50 \text{ (m)}$$

$\overline{AC} = x$ m로 놓으면 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos A$$

$$50^2 = 80^2 + x^2 - 2 \times 80 \times x \times \cos 30^\circ$$



$$2500 = 6400 + x^2 - 2 \times 80 \times x \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x^2 - 80\sqrt{3}x + 3900 = 0$$

$$\therefore x = 40\sqrt{3} \pm \sqrt{(40\sqrt{3})^2 - 3900}$$

$$= 40\sqrt{3} \pm \sqrt{900} = 40\sqrt{3} \pm 30 \text{ (m)}$$

그런데 상호와 예진은 80 m보다 멀리 떨어져 있으므로
상호와 예진 사이의 거리는 $(30 + 40\sqrt{3})$ m이다.

20 답 2.54 km

풀이 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 - 2\overline{AC} \times \overline{CB} \times \cos C$$

$$= 2^2 + 4^2 - 2 \times 2 \times 4 \times \cos 60^\circ$$

$$= 4 + 16 - 2 \times 2 \times 4 \times \frac{1}{2} = 12$$

$$\overline{AB} > 0 \text{ 이므로 } \overline{AB} = 2\sqrt{3} = 2 \times 1.73 = 3.46 \text{ (km)}$$

따라서 산을 뚫어 직선 터널을 만들면 기존보다 거리가
 $(2+4) - 3.46 = 2.54$ (km)만큼 단축된다.

21 답 (1) $\frac{15\sqrt{3}}{2}$ (2) $12\sqrt{3}$ (3) 12 (4) $3\sqrt{2}$

풀이 (1) 삼각형 ABC의 넓이를 S라고 하면

$$S = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2} \times 5 \times 6 \times \sin 120^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 5 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{2}$$

(2) 삼각형 ABC의 넓이를 S라고 하면

$$S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 \times \sin 60^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$$

(3) 삼각형 ABC의 넓이를 S라고 하면

$$S = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 \times \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times 8 \times \frac{1}{2} = 12$$

(4) 삼각형 ABC의 넓이를 S라고 하면

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \sin 45^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

22 답 (1) $6\sqrt{11}$ (2) $2\sqrt{2}$ (3) $2\sqrt{14}$ (4) 24

풀이 (1) 코사인법칙에 의하여 $\cos C = \frac{5^2 + 8^2 - 9^2}{2 \times 5 \times 8} = \frac{1}{10}$

$0^\circ < C < 180^\circ$ 에서 $\sin C > 0$ 이므로

$$\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^2} = \frac{3\sqrt{11}}{10}$$

따라서 삼각형의 ABC의 넓이를 S라고 하면

$$S = \frac{1}{2} \times 5 \times 8 \times \frac{3\sqrt{11}}{10} = 6\sqrt{11}$$

(2) 코사인법칙에 의하여 $\cos C = \frac{3^2 + 3^2 - 2^2}{2 \times 3 \times 3} = \frac{7}{9}$

$0^\circ < C < 180^\circ$ 에서 $\sin C > 0$ 이므로

$$\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{9}\right)^2} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

따라서 삼각형의 ABC의 넓이를 S라고 하면

$$S = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times \frac{4\sqrt{2}}{9} = 2\sqrt{2}$$

(3) 코사인법칙에 의하여 $\cos C = \frac{6^2 + 3^2 - 5^2}{2 \times 6 \times 3} = \frac{5}{9}$

$0^\circ < C < 180^\circ$ 에서 $\sin C > 0$ 이므로

$$\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{9}\right)^2} = \frac{2\sqrt{14}}{9}$$

따라서 삼각형의 ABC의 넓이를 S라고 하면

$$S = \frac{1}{2} \times 6 \times 3 \times \frac{2\sqrt{14}}{9} = 2\sqrt{14}$$

(4) 코사인법칙에 의하여 $\cos C = \frac{6^2 + 8^2 - 10^2}{2 \times 6 \times 8} = 0$

$0^\circ < C < 180^\circ$ 에서 $C = 90^\circ$ 이므로

삼각형의 ABC는 직각삼각형이다.

따라서 삼각형의 ABC의 넓이를 S라고 하면

$$S = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$$

다른 풀이 (1) $s = \frac{5+8+9}{2} = 11$ 이므로

삼각형의 ABC의 넓이를 S라고 하면

$$S = \sqrt{11 \times (11-5) \times (11-8) \times (11-9)}$$

$$= \sqrt{11 \times 6 \times 3 \times 2} = \sqrt{11 \times 36} = 6\sqrt{11}$$

(2) $s = \frac{3+3+2}{2} = 4$ 이므로

삼각형의 ABC의 넓이를 S라고 하면

$$S = \sqrt{4 \times (4-3) \times (4-3) \times (4-2)}$$

$$= \sqrt{4 \times 1 \times 1 \times 2} = 2\sqrt{2}$$

(3) $s = \frac{6+3+5}{2} = 7$ 이므로

삼각형의 ABC의 넓이를 S라고 하면

$$S = \sqrt{7 \times (7-6) \times (7-3) \times (7-5)}$$

$$= \sqrt{7 \times 1 \times 4 \times 2} = \sqrt{4 \times 14} = 2\sqrt{14}$$

(4) $s = \frac{6+8+10}{2} = 12$ 이므로

삼각형의 ABC의 넓이를 S라고 하면

$$S = \sqrt{12 \times (12-6) \times (12-8) \times (12-10)}$$

$$= \sqrt{12 \times 6 \times 4 \times 2} = \sqrt{24 \times 24} = 24$$

23 답 (1) $17\sqrt{3}$ (2) $10\sqrt{3} + 4\sqrt{19}$

풀이 (1) 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{DB}^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \times 5 \times 8 \times \cos 60^\circ$$

$$= 25 + 64 - 2 \times 5 \times 8 \times \frac{1}{2} = 49$$

$$\overline{DB} > 0 \text{ 이므로 } \overline{DB} = 7$$

사각형 ABCD의 넓이를 S라고 하면

$$S = \frac{1}{2} \times 5 \times 8 \times \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \times 2\sqrt{6} \times 7 \times \sin 45^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 5 \times 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times 2\sqrt{6} \times 7 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= 10\sqrt{3} + 7\sqrt{3} = 17\sqrt{3}$$

(2) 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{DB}^2 = 4^2 + 10^2 - 2 \times 4 \times 10 \times \cos 60^\circ$$

$$= 16 + 100 - 2 \times 4 \times 10 \times \frac{1}{2} = 76$$

$$\overline{DB} > 0 \text{ 이므로 } \overline{DB} = 2\sqrt{19}$$

사각형 ABCD의 넓이를 S라고 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \times 4 \times 10 \times \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \times 2\sqrt{19} \times 8 \times \sin 30^\circ \\ &= \frac{1}{2} \times 4 \times 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times 2\sqrt{19} \times 8 \times \frac{1}{2} \\ &= 10\sqrt{3} + 4\sqrt{19} \end{aligned}$$

24 답 $\frac{24}{5}$

풀이 $\overline{AD} = x$ 라고 하면

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \times 12 \times 8 \times \sin 120^\circ \\ &= \frac{1}{2} \times 12 \times x \times \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \times x \times 8 \times \sin 60^\circ \\ 24\sqrt{3} &= 3\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}x, \quad 24\sqrt{3} = 5\sqrt{3}x \\ \therefore x &= \frac{24}{5} \end{aligned}$$

25 답 $\frac{12\sqrt{3}}{7}$

풀이 $\overline{AD} = x$ 라고 하면

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \times 4 \times 3 \times \sin 60^\circ \\ &= \frac{1}{2} \times 4 \times x \times \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \times x \times 3 \times \sin 30^\circ \\ 3\sqrt{3} &= x + \frac{3}{4}x, \quad 3\sqrt{3} = \frac{7}{4}x \\ \therefore x &= \frac{12\sqrt{3}}{7} \end{aligned}$$

26 답 (1) $4\sqrt{3}$ (2) $10\sqrt{2}$ (3) 12

풀이 (1) 평행사변형의 성질에 의하여 이웃하는 두 각의 크기의 합은 180° 이므로

$$B = 120^\circ$$

따라서 평행사변형의 넓이를 S라고 하면

$$S = \overline{AB} \times \overline{BC} \times \sin 120^\circ = 2 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

(2) 평행사변형의 성질에 의하여 이웃하는 두 각의 크기의 합은 180° 이므로

$$B = 45^\circ$$

따라서 평행사변형의 넓이를 S라고 하면

$$S = \overline{AB} \times \overline{BC} \times \sin 45^\circ = 4 \times 5 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}$$

(3) 평행사변형의 성질에 의하여 이웃하는 두 각의 크기의 합은 180° 이므로

$$A = 150^\circ$$

따라서 평행사변형의 넓이를 S라고 하면

$$S = \overline{AB} \times \overline{AD} \times \sin 150^\circ = 4 \times 6 \times \frac{1}{2} = 12$$

27 답 (1) $12\sqrt{3}$ (2) 18 (3) $24\sqrt{2}$

풀이 (1) 사각형 ABCD의 넓이를 S라고 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{BD} \times \sin 60^\circ \\ &= \frac{1}{2} \times 6 \times 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3} \end{aligned}$$

(2) 사각형 ABCD의 넓이를 S라고 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{BD} \times \sin 150^\circ \\ &= \frac{1}{2} \times 8 \times 9 \times \frac{1}{2} = 18 \end{aligned}$$

(3) 사각형 ABCD의 넓이를 S라고 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{BD} \times \sin 45^\circ \\ &= \frac{1}{2} \times 8 \times 12 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 24\sqrt{2} \end{aligned}$$

중단원 점검문제 | II-3 삼각함수의 활용

127-128쪽

01 답 $4\sqrt{6}$

풀이 주어진 조건을 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

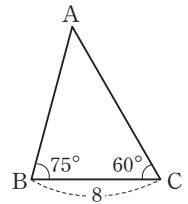
$$A = 180^\circ - (75^\circ + 60^\circ) = 45^\circ \text{ 이므로}$$

사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \frac{a}{\sin A} &= \frac{c}{\sin C} \\ \frac{8}{\sin 45^\circ} &= \frac{c}{\sin 60^\circ} \end{aligned}$$

$$c \sin 45^\circ = 8 \sin 60^\circ, \quad c \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore c = 4\sqrt{6}$$



02 답 $5\sqrt{3}$

풀이 삼각형의 외접원의 반지름의 길이가 5이므로

$$\frac{c}{\sin 60^\circ} = 2 \times 5 \quad \therefore c = 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$

03 답 2 : 3 : 4

풀이 $a + b = 5k, b + c = 7k, c + a = 6k$ ($k > 0$)라고 하면

$$2(a + b + c) = 18k, \quad a + b + c = 9k$$

$$\therefore a = 2k, \quad b = 3k, \quad c = 4k$$

삼각형의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \sin A : \sin B : \sin C &= \frac{a}{2R} : \frac{b}{2R} : \frac{c}{2R} \\ &= \frac{2k}{2R} : \frac{3k}{2R} : \frac{4k}{2R} = 2 : 3 : 4 \end{aligned}$$

04 답 30°

풀이 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(2\sqrt{3})^2 + 4^2 - 2^2}{2 \times 2\sqrt{3} \times 4} = \frac{24}{16\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$0^\circ < A < 180^\circ \text{ 이므로 } A = 30^\circ$$

05 답 $\sqrt{21}$

풀이 $b = 4, c = 5, A = 60^\circ$ 이므로

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 4^2 + 5^2 - 2 \times 4 \times 5 \times \cos 60^\circ \\ &= 16 + 25 - 2 \times 4 \times 5 \times \frac{1}{2} = 21 \end{aligned}$$

$$a > 0 \text{ 이므로 } a = \sqrt{21}$$

06 답 $\frac{19}{20}$

풀이 $a=2k, b=5k, c=6k (k>0)$ 라고 하면
코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{(5k)^2+(6k)^2-(2k)^2}{2 \times 5k \times 6k} \\ &= \frac{25k^2+36k^2-4k^2}{60k^2} = \frac{57k^2}{60k^2} = \frac{19}{20}\end{aligned}$$

07 답 $\frac{4}{5}$

풀이 $\frac{a+b}{7} = \frac{b+c}{9} = \frac{c+a}{8} = k (k>0)$ 라고 하면

$$a+b=7k, b+c=9k, c+a=8k$$

$$2(a+b+c)=24k, a+b+c=12k$$

$$\therefore a=3k, b=4k, c=5k$$

따라서 가장 작은 각 θ 는 $a=3k$ 인 변의 대각이다.

코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{(4k)^2+(5k)^2-(3k)^2}{2 \times 4k \times 5k} \\ &= \frac{16k^2+25k^2-9k^2}{40k^2} = \frac{32k^2}{40k^2} = \frac{4}{5}\end{aligned}$$

08 답 30°

풀이 $2\sqrt{3}\sin A=2\sin B=\sqrt{3}\sin C$ 의 각 변을 $2\sqrt{3}$ 으로 나누면

$$\sin A = \frac{\sin B}{\sqrt{3}} = \frac{\sin C}{2}$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라고 하면
사인법칙에 의하여

$$\frac{a}{2R} = \frac{b}{\sqrt{3}} = \frac{c}{2}$$

즉, $a = \frac{b}{\sqrt{3}} = \frac{c}{2} = k (k>0)$ 라고 하면

$$a=k, b=\sqrt{3}k, c=2k$$

코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{(\sqrt{3}k)^2+(2k)^2-k^2}{2 \times \sqrt{3}k \times 2k} \\ &= \frac{3k^2+4k^2-k^2}{4\sqrt{3}k^2} = \frac{6k^2}{4\sqrt{3}k^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

$0^\circ < A < 90^\circ$ 이므로 $A=30^\circ$

09 답 $b=c$ 인 이등변삼각형

풀이 $A+B+C=180^\circ$ 이므로 $A+C=180^\circ-B$

즉, $A-B+C=180^\circ-2B$ 이므로

$$\begin{aligned}\sin \frac{A-B+C}{2} &= \sin \frac{180^\circ-2B}{2} = \sin (90^\circ-B) \\ &= \cos B\end{aligned}$$

따라서 $\sin A=2\sin \frac{A-B+C}{2} \sin C$ 에서

$$\sin A=2\cos B\sin C$$

삼각형의 외접원의 반지름의 길이를 R 라고 하면 사인법칙
과 코사인법칙에 의하여

$$\frac{a}{2R} = 2 \times \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} \times \frac{c}{2R}, a = \frac{c^2+a^2-b^2}{a}$$

$$a^2=c^2+a^2-b^2, b^2=c^2$$

$$b>0, c>0 \text{이므로 } b=c$$

따라서 삼각형 ABC는 $b=c$ 인 이등변삼각형이다.

10 답 $\frac{27\sqrt{2}}{2}$

풀이 삼각형 ABC의 넓이를 S 라고 하면

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \times 6 \times 9 \times \sin 135^\circ \\ &= \frac{1}{2} \times 6 \times 9 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{27\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

11 답 $6\sqrt{6}$

풀이 코사인법칙에 의하여

$$\cos C = \frac{5^2+6^2-7^2}{2 \times 5 \times 6} = \frac{1}{5}$$

$0^\circ < C < 180^\circ$ 에서 $\sin C > 0$ 이므로

$$\sin C = \sqrt{1-\cos^2 C} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

따라서 삼각형의 ABC의 넓이를 S 라고 하면

$$S = \frac{1}{2} \times 5 \times 6 \times \frac{2\sqrt{6}}{5} = 6\sqrt{6}$$

다른 풀이 $s = \frac{5+6+7}{2} = 9$ 이므로

삼각형 ABC의 넓이를 S 라고 하면

$$\begin{aligned}S &= \sqrt{9 \times (9-5) \times (9-6) \times (9-7)} \\ &= \sqrt{9 \times 4 \times 3 \times 2} \\ &= \sqrt{36 \times 6} = 6\sqrt{6}\end{aligned}$$

12 답 $\frac{4\sqrt{3}+3\sqrt{6}}{2}$

풀이 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{AC}^2 &= 2^2+4^2-2 \times 2 \times 4 \times \cos 60^\circ \\ &= 4+16-2 \times 2 \times 4 \times \frac{1}{2} = 12\end{aligned}$$

$\overline{AC} > 0$ 이므로 $\overline{AC}=2\sqrt{3}$

사각형 ABCD의 넓이를 S 라고 하면

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \times 2 \times 4 \times \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 3 \times \sin 45^\circ \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 2\sqrt{3} + \frac{3\sqrt{6}}{2} = \frac{4\sqrt{3}+3\sqrt{6}}{2}\end{aligned}$$

13 답 $27\sqrt{3}$

풀이 평행사변형 ABCD의 넓이를 S 라고 하면

$$\begin{aligned}S &= 6 \times 9 \times \sin 120^\circ \\ &= 6 \times 9 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 27\sqrt{3}\end{aligned}$$

14 답 $27\sqrt{3}$

풀이 사각형 ABCD의 넓이를 S 라고 하면

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \times 9 \times 12 \times \sin 60^\circ \\ &= \frac{1}{2} \times 9 \times 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 27\sqrt{3}\end{aligned}$$

III

수열

III-1 | 등차수열과 등비수열

132-157쪽

01 답 (1) 2, 5, 8, 11

(2) 3, 5, 9, 17

(3) 2, 6, 12, 20

(4) $\frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}$

풀이 (1) $a_n = 3n - 1$ 에 $n = 1, 2, 3, 4$ 를 차례대로 대입하면

$$a_1 = 3 \times 1 - 1 = 2, a_2 = 3 \times 2 - 1 = 5,$$

$$a_3 = 3 \times 3 - 1 = 8, a_4 = 3 \times 4 - 1 = 11$$

(2) $a_n = 2^n + 1$ 에 $n = 1, 2, 3, 4$ 를 차례대로 대입하면

$$a_1 = 2^1 + 1 = 3, a_2 = 2^2 + 1 = 5,$$

$$a_3 = 2^3 + 1 = 9, a_4 = 2^4 + 1 = 17$$

(3) $a_n = n^2 + n$ 에 $n = 1, 2, 3, 4$ 를 차례대로 대입하면

$$a_1 = 1^2 + 1 = 2, a_2 = 2^2 + 2 = 6,$$

$$a_3 = 3^2 + 3 = 12, a_4 = 4^2 + 4 = 20$$

(4) $a_n = \frac{n}{n+2}$ 에 $n = 1, 2, 3, 4$ 를 차례대로 대입하면

$$a_1 = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}, a_2 = \frac{2}{2+2} = \frac{2}{4},$$

$$a_3 = \frac{3}{3+2} = \frac{3}{5}, a_4 = \frac{4}{4+2} = \frac{4}{6}$$

02 답 (1) $a_n = \frac{1}{2n}$

(2) $a_n = 5$

(3) $a_n = (-1)^n$

(4) $a_n = n(n+1)$

풀이 (1) $a_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{2 \times 1}, a_2 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2 \times 2},$

$$a_3 = \frac{1}{6} = \frac{1}{2 \times 3}, a_4 = \frac{1}{8} = \frac{1}{2 \times 4}, \dots$$

이므로

$$a_n = \frac{1}{2n}$$

(2) $a_1 = 5, a_2 = 5, a_3 = 5, a_4 = 5, \dots$

이므로 $a_n = 5$

(3) $a_1 = -1 = (-1)^1, a_2 = 1 = (-1)^2,$

$$a_3 = -1 = (-1)^3, a_4 = 1 = (-1)^4, \dots$$

이므로 $a_n = (-1)^n$

(4) $a_1 = 1 \times 2 = 1 \times (1+1),$

$$a_2 = 2 \times 3 = 2 \times (2+1),$$

$$a_3 = 3 \times 4 = 3 \times (3+1),$$

$$a_4 = 4 \times 5 = 4 \times (4+1), \dots$$

이므로 $a_n = n(n+1)$

03 답 (1) $a_n = 4n - 2$

(2) $a_n = \frac{n}{2} - \frac{7}{2}$

(3) $a_n = 3n - 6$

(4) $a_n = 6n - 26$

(5) $a_n = 6n - 1$

(6) $a_n = 4n - 9$

(7) $a_n = 5n + 2$

(8) $a_n = -8n + 30$

풀이 등차수열의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

(1) 첫째항은 $a = 2$, 공차는 $d = 6 - 2 = 4$

$$\therefore a_n = a + (n-1)d = 2 + (n-1) \times 4 = 4n - 2$$

(2) 첫째항은 $a = -3$, 공차는 $d = -\frac{5}{2} - (-3) = \frac{1}{2}$

$$\therefore a_n = a + (n-1)d = -3 + (n-1) \times \frac{1}{2} = \frac{n}{2} - \frac{7}{2}$$

(3) 첫째항은 $a = -3$, 공차는 $d = 0 - (-3) = 3$

$$\therefore a_n = a + (n-1)d = -3 + (n-1) \times 3 = 3n - 6$$

(4) 첫째항은 $a = -20$, 공차는 $d = -14 - (-20) = 6$

$$\therefore a_n = a + (n-1)d = -20 + (n-1) \times 6 = 6n - 26$$

(5) 첫째항은 $a = 5$, 공차는 $d = 11 - 5 = 6$

$$\therefore a_n = a + (n-1)d = 5 + (n-1) \times 6 = 6n - 1$$

(6) 첫째항은 $a = -5$, 공차는 $d = -1 - (-5) = 4$

$$\therefore a_n = a + (n-1)d = -5 + (n-1) \times 4 = 4n - 9$$

(7) 첫째항은 $a = 7$, 공차는 $d = 12 - 7 = 5$

$$\therefore a_n = a + (n-1)d = 7 + (n-1) \times 5 = 5n + 2$$

(8) 첫째항은 $a = 22$, 공차는 $d = 14 - 22 = -8$

$$\therefore a_n = a + (n-1)d = 22 + (n-1) \times (-8) \\ = -8n + 30$$

04 답 (1) 풀이 참조, 첫째항: 9, 공차: 2

(2) 풀이 참조, 첫째항: 7, 공차: 5

(3) 풀이 참조, 첫째항: 13, 공차: 6

(4) 풀이 참조, 첫째항: 1, 공차: 3

(5) 풀이 참조, 첫째항: -1, 공차: 6

(6) 풀이 참조, 첫째항: -1, 공차: -4

(7) 풀이 참조, 첫째항: 4, 공차: -3

(8) 풀이 참조, 첫째항: 1, 공차: -1

풀이 (1) $a_n = 2n + 7$ 에서 $a_{n+1} = 2(n+1) + 7 = 2n + 9$

$$\therefore (\text{공차}) = a_{n+1} - a_n = (2n+9) - (2n+7) = 2$$

$$\text{또, } a_1 = 2 \times 1 + 7 = 9$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 9, 공차가 2인 등차수열이다.

(2) $a_n = 5n + 2$ 에서 $a_{n+1} = 5(n+1) + 2 = 5n + 7$

$$\therefore (\text{공차}) = a_{n+1} - a_n = (5n+7) - (5n+2) = 5$$

$$\text{또, } a_1 = 5 \times 1 + 2 = 7$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 7, 공차가 5인 등차수열이다.

(3) $a_n = 6n + 7$ 에서 $a_{n+1} = 6(n+1) + 7 = 6n + 13$

$$\therefore (\text{공차}) = a_{n+1} - a_n = (6n+13) - (6n+7) = 6$$

$$\text{또, } a_1 = 6 \times 1 + 7 = 13$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 13, 공차가 6인 등차수열이다.

(4) $a_n = 3n - 2$ 에서 $a_{n+1} = 3(n+1) - 2 = 3n + 1$

$$\therefore (\text{공차}) = a_{n+1} - a_n = (3n+1) - (3n-2) = 3$$

$$\text{또, } a_1 = 3 \times 1 - 2 = 1$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1, 공차가 3인 등차수열이다.

- (5) $a_n=6n-7$ 에서 $a_{n+1}=6(n+1)-7=6n-1$
 $\therefore$ (공차) $=a_{n+1}-a_n=(6n-1)-(6n-7)=6$
 또, $a_1=6 \times 1-7=-1$
 따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 -1 , 공차가 6 인 등차수열이다.
- (6) $a_n=-4n+3$ 에서 $a_{n+1}=-4(n+1)+3=-4n-1$
 $\therefore$ (공차) $=a_{n+1}-a_n=(-4n-1)-(-4n+3)=-4$
 또, $a_1=-4 \times 1+3=-1$
 따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 -1 , 공차가 -4 인 등차수열이다.
- (7) $a_n=-3n+7$ 에서 $a_{n+1}=-3(n+1)+7=-3n+4$
 $\therefore$ (공차) $=a_{n+1}-a_n=(-3n+4)-(-3n+7)=-3$
 또, $a_1=-3 \times 1+7=4$
 따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 4 , 공차가 -3 인 등차수열이다.
- (8) $a_n=-n+2$ 에서 $a_{n+1}=-(n+1)+2=-n+1$
 $\therefore$ (공차) $=a_{n+1}-a_n=(-n+1)-(-n+2)=-1$
 또, $a_1=-1+2=1$
 따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1 , 공차가 -1 인 등차수열이다.

- 05 답** (1) 29 (2) -27
 (3) 54 (4) -50
 (5) 107 (6) 165
 (7) 198 (8) 113

- 풀이** (1) 등차수열의 첫째항을 a , 공차를 d , 일반항을 a_n 이라고 하면 $a_n=a+(n-1)d$
 $a_2=3$ 이므로 $a+d=3$ ㉠
 $a_7=13$ 이므로 $a+6d=13$ ㉡
 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1, d=2$
 $\therefore a_{15}=a+14d=1+14 \times 2=29$
- (2) 등차수열의 첫째항을 a , 공차를 d , 일반항을 a_n 이라고 하면 $a_n=a+(n-1)d$
 $a_3=5$ 이므로 $a+2d=5$ ㉠
 $a_8=-5$ 이므로 $a+7d=-5$ ㉡
 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=9, d=-2$
 $\therefore a_{19}=a+18d=9+18 \times (-2)=-27$
- (3) 등차수열의 첫째항을 a , 공차를 d , 일반항을 a_n 이라고 하면 $a_n=a+(n-1)d$
 $a_2=8$ 이므로 $a+d=8$ ㉠
 $a_6=16$ 이므로 $a+5d=16$ ㉡
 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=6, d=2$
 $\therefore a_{25}=a+24d=6+24 \times 2=54$
- (4) 등차수열의 첫째항을 a , 공차를 d , 일반항을 a_n 이라고 하면 $a_n=a+(n-1)d$
 $a_3=6$ 이므로 $a+2d=6$ ㉠
 $a_{10}=-8$ 이므로 $a+9d=-8$ ㉡
 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=10, d=-2$
 $\therefore a_{31}=a+30d=10+30 \times (-2)=-50$

- (5) 등차수열의 첫째항을 a , 공차를 d , 일반항을 a_n 이라고 하면 $a_n=a+(n-1)d$
 $a_3=7$ 이므로 $a+2d=7$ ㉠
 $a_{11}=39$ 이므로 $a+10d=39$ ㉡
 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1, d=4$
 $\therefore a_{28}=a+27d=-1+27 \times 4=107$
- (6) 등차수열의 첫째항을 a , 공차를 d , 일반항을 a_n 이라고 하면 $a_n=a+(n-1)d$
 $a_3=-10$ 이므로 $a+2d=-10$ ㉠
 $a_7=10$ 이므로 $a+6d=10$ ㉡
 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-20, d=5$
 $\therefore a_{38}=a+37d=-20+37 \times 5=165$
- (7) 등차수열의 첫째항을 a , 공차를 d , 일반항을 a_n 이라고 하면 $a_n=a+(n-1)d$
 $a_{11}=86$ 이므로 $a+10d=86$ ㉠
 $a_{19}=142$ 이므로 $a+18d=142$ ㉡
 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=16, d=7$
 $\therefore a_{27}=a+26d=16+26 \times 7=198$
- (8) 등차수열의 첫째항을 a , 공차를 d , 일반항을 a_n 이라고 하면 $a_n=a+(n-1)d$
 $a_7=23$ 이므로 $a+6d=23$ ㉠
 $a_{23}=71$ 이므로 $a+22d=71$ ㉡
 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5, d=3$
 $\therefore a_{37}=a+36d=5+36 \times 3=113$

- 06 답** (1) 11 (2) 43
 (3) 1 (4) 57

- 풀이** (1) 등차수열의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면
 $a_n=a+(n-1)d$
 $a_5=4a_3$ 에서 $a+4d=4(a+2d)$
 $\therefore 3a+4d=0$ ㉠
 $a_2+a_4=4$ 에서 $a+d+a+3d=4$
 $\therefore 2a+4d=4$ ㉡
 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-4, d=3$
 $\therefore a_6=a+5d=-4+5 \times 3=11$
- (2) 등차수열의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면
 $a_n=a+(n-1)d$
 $a_9=-5a_4$ 에서 $a+8d=-5(a+3d)$
 $\therefore 6a+23d=0$ ㉠
 $a_2+a_6=-10$ 에서 $a+d+a+5d=-10$
 $\therefore 2a+6d=-10$ ㉡
 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-23, d=6$
 $\therefore a_{12}=a+11d=-23+11 \times 6=43$
- (3) 등차수열의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면
 $a_n=a+(n-1)d$
 $a_1=4a_5$ 에서 $a=4(a+4d)$
 $\therefore 3a+16d=0$ ㉠
 $a_2+a_{11}=-1$ 에서 $a+d+a+10d=-1$
 $\therefore 2a+11d=-1$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=16, d=-3$

$$\therefore a_6 = a + 5d = 16 + 5 \times (-3) = 1$$

(4) 등차수열의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$a_7 = 5a_2 \text{에서 } a + 6d = 5(a + d)$$

$$\therefore 4a - d = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_8 - a_3 = 20 \text{에서 } a + 7d - (a + 2d) = 20$$

$$5d = 20 \quad \therefore d = 4$$

$$d = 4 \text{를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } a = 1$$

$$\therefore a_{15} = a + 14d = 1 + 14 \times 4 = 57$$

07 **답** (1) 첫째항: 10, 공차: -2

(2) 첫째항: 28, 공차: -4

풀이 (1) 등차수열의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$a_n = a + (n-1)d$$

제3항과 제9항은 절댓값이 같고 부호가 반대이므로

$$a_3 = -a_9, a + 2d = -(a + 8d)$$

$$2a + 10d = 0 \quad \therefore a + 5d = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_{13} = -14 \text{에서 } a + 12d = -14 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a = 10, d = -2$$

(2) 등차수열의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$a_n = a + (n-1)d$$

제5항과 제11항은 절댓값이 같고 부호가 반대이므로

$$a_5 = -a_{11}, a + 4d = -(a + 10d)$$

$$2a + 14d = 0 \quad \therefore a + 7d = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_7 = 4 \text{에서 } a + 6d = 4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a = 28, d = -4$$

08 **답** (1) 47

(2) 3

풀이 (1) 등차수열의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$a_3 = 11 \text{에서 } a + 2d = 11 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_6 : a_{10} = 5 : 8 \text{에서 } 8a_6 = 5a_{10}$$

$$8(a + 5d) = 5(a + 9d) \quad \therefore 3a - 5d = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a = 5, d = 3$$

$$\therefore a_{15} = a + 14d = 5 + 14 \times 3 = 47$$

(2) 등차수열의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$(a_1 + a_2) : (a_3 + a_4) = 1 : 2 \text{에서}$$

$$2(a_1 + a_2) = a_3 + a_4, 2(a + a + d) = a + 2d + a + 3d$$

$$4a + 2d = 2a + 5d \quad \therefore d = \frac{2}{3}a$$

$$\therefore \frac{a_4}{a_1} = \frac{a + 3d}{a} = \frac{a + 3 \times \left(\frac{2}{3}a\right)}{a} = \frac{3a}{a} = 3$$

09 **답** (1) 제9항

(2) 제19항

(3) 제35항

(4) 제14항

(5) 제16항

(6) 제16항

(7) 제32항

(8) 제54항

풀이 (1) 주어진 수열의 일반항을 a_n 이라고 하면

$$a_n = -22 + (n-1) \times 3 = 3n - 25$$

제 n 항이 처음으로 양수가 된다고 하면

$$3n - 25 > 0 \quad \therefore n > \frac{25}{3} = 8.333\cdots$$

이때 n 이 자연수이므로 제9항이 처음으로 양수가 된다.

(2) 주어진 수열의 일반항을 a_n 이라고 하면

$$a_n = 107 + (n-1) \times (-6) = -6n + 113$$

제 n 항이 처음으로 음수가 된다고 하면

$$-6n + 113 < 0 \quad \therefore n > \frac{113}{6} = 18.833\cdots$$

이때 n 이 자연수이므로 제19항이 처음으로 음수가 된다.

(3) 주어진 수열의 일반항을 a_n 이라고 하면

$$a_n = 100 + (n-1) \times (-3) = -3n + 103$$

제 n 항이 처음으로 음수가 된다고 하면

$$-3n + 103 < 0 \quad \therefore n > \frac{103}{3} = 34.333\cdots$$

이때 n 이 자연수이므로 제35항이 처음으로 음수가 된다.

(4) 주어진 수열의 일반항을 a_n 이라고 하면

$$a_n = -25 + (n-1) \times 2 = 2n - 27$$

제 n 항이 처음으로 양수가 된다고 하면

$$2n - 27 > 0 \quad \therefore n > \frac{27}{2} = 13.5$$

이때 n 이 자연수이므로 제14항이 처음으로 양수가 된다.

(5) 등차수열의 첫째항을 a , 공차를 d , 일반항을 a_n 이라고 하면

$$a_7 = 50 \text{에서 } a + 6d = 50 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_{11} = 26 \text{에서 } a + 10d = 26 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면}$$

$$a = 86, d = -6$$

$$\therefore a_n = 86 + (n-1) \times (-6) = -6n + 92$$

제 n 항이 처음으로 음수가 된다고 하면

$$-6n + 92 < 0 \quad \therefore n > \frac{46}{3} = 15.333\cdots$$

이때 n 이 자연수이므로 제16항이 처음으로 음수가 된다.

(6) 등차수열의 첫째항을 a , 공차를 d , 일반항을 a_n 이라고 하면

$$a_4 = 47 \text{에서 } a + 3d = 47 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_{10} = 23 \text{에서 } a + 9d = 23 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a = 59, d = -4$$

$$\therefore a_n = 59 + (n-1) \times (-4) = -4n + 63$$

제 n 항이 처음으로 음수가 된다고 하면

$$-4n + 63 < 0 \quad \therefore n > \frac{63}{4} = 15.75$$

이때 n 이 자연수이므로 제16항이 처음으로 음수가 된다.

(7) 등차수열의 첫째항을 a , 공차를 d , 일반항을 a_n 이라고 하면

$$a_{14} = 53 \text{에서 } a + 13d = 53 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_{28} = 11 \text{에서 } a + 27d = 11 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a = 92, d = -3$$

$$\therefore a_n = 92 + (n-1) \times (-3) = -3n + 95$$

제 n 항이 처음으로 음수가 된다고 하면

$$-3n+95 < 0 \quad \therefore n > \frac{95}{3} = 31.666\cdots$$

이때 n 이 자연수이므로 제32항이 처음으로 음수가 된다.

(8) 주어진 수열의 일반항을 a_n 이라고 하면

$$a_n = -5 + (n-1) \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}n - \frac{17}{3}$$

제 n 항이 처음으로 30보다 큰 항이 된다고 하면

$$\frac{2}{3}n - \frac{17}{3} > 30, \quad \frac{2}{3}n > \frac{107}{3}$$

$$\therefore n > \frac{107}{3} \times \frac{3}{2} = 53.5$$

이때 n 이 자연수이므로 제54항이 처음으로 30보다 커진다.

10 답 (1) -1, 4, 9 (2) -22, -15, -8

(3) 7, 11, 15

풀이 (1) 두 수 -6과 14 사이에 세 개의 수를 넣으면 첫째항이 -6, 제5항이 14가 된다.

첫째항을 a , 공차를 d , 일반항을 a_n 이라고 하면

$$a_5 = a + 4d = 14, \quad -6 + 4d = 14 \quad \therefore d = 5$$

-6에서부터 14까지 공차 5씩 더해 가면

$$-6, -1, 4, 9, 14$$

따라서 구하는 세 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

$$-1, 4, 9 \text{이다.}$$

(2) 두 수 -1과 -29 사이에 세 개의 수를 넣으면 첫째항이 -1, 제5항이 -29가 된다.

첫째항을 a , 공차를 d , 일반항을 a_n 이라고 하면

$$a_5 = a + 4d = -29, \quad -1 + 4d = -29 \quad \therefore d = -7$$

-1에서부터 -29까지 공차 -7씩 더해 가면

$$-1, -8, -15, -22, -29$$

따라서 구하는 세 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

$$-22, -15, -8 \text{이다.}$$

(3) 두 수 3과 19 사이에 세 개의 수를 넣으면 첫째항이 3, 제5항이 19가 된다.

첫째항을 a , 공차를 d , 일반항을 a_n 이라고 하면

$$a_5 = a + 4d = 19, \quad 3 + 4d = 19 \quad \therefore d = 4$$

3에서부터 19까지 공차 4씩 더해 가면

$$3, 7, 11, 15, 19$$

따라서 구하는 세 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

$$7, 11, 15 \text{이다.}$$

11 답 (1) 11, 18, 25, 32

(2) -2, 1, 4, 7

$$(3) -\frac{20}{3}, -6, -\frac{16}{3}, -\frac{14}{3}$$

풀이 (1) 두 수 4와 39 사이에 네 개의 수를 넣으면 첫째항이 4, 제6항이 39가 된다.

첫째항을 a , 공차를 d , 일반항을 a_n 이라고 하면

$$a_6 = a + 5d = 39, \quad 4 + 5d = 39 \quad \therefore d = 7$$

4에서부터 39까지 공차 7씩 더해 가면

$$4, 11, 18, 25, 32, 39$$

따라서 구하는 네 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면 11, 18, 25, 32이다.

(2) 두 수 10과 -5 사이에 네 개의 수를 넣으면 첫째항이 10, 제6항이 -5가 된다.

첫째항을 a , 공차를 d , 일반항을 a_n 이라고 하면

$$a_6 = a + 5d = -5, \quad 10 + 5d = -5 \quad \therefore d = -3$$

10에서부터 -5까지 공차 -3씩 더해 가면

$$10, 7, 4, 1, -2, -5$$

따라서 구하는 네 수를 작은 순서대로 나열하면 -2, 1,

$$4, 7 \text{이다.}$$

(3) 두 수 -4와 $-\frac{22}{3}$ 사이에 네 개의 수를 넣으면 첫째항이

$$-4, \text{ 제6항이 } -\frac{22}{3} \text{가 된다.}$$

첫째항을 a , 공차를 d , 일반항을 a_n 이라고 하면

$$a_6 = a + 5d = -\frac{22}{3}, \quad -4 + 5d = -\frac{22}{3} \quad \therefore d = -\frac{2}{3}$$

-4에서부터 $-\frac{22}{3}$ 까지 공차 $-\frac{2}{3}$ 씩 더해 가면

$$-4, -\frac{14}{3}, -\frac{16}{3}, -6, -\frac{20}{3}, -\frac{22}{3}$$

따라서 구하는 네 수를 작은 순서대로 나열하면

$$-\frac{20}{3}, -6, -\frac{16}{3}, -\frac{14}{3} \text{이다.}$$

12 답 (1) 2

(2) 0, 4

$$(3) -1, \frac{5}{2}$$

$$(4) -3, \frac{7}{2}$$

풀이 (1) 세 수 $x, 2x+3, 6x$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2(2x+3) = x+6x, \quad 4x+6=7x$$

$$\therefore x = 2$$

참고 $x=2$ 일 때, 세 수는 2, 7, 12로 첫째항이 2, 공차가 5인 등차수열이다.

(2) 세 수 $2x, 3x-1, x^2-2$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2(3x-1) = 2x+x^2-2, \quad x^2-4x=0$$

$$x(x-4)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=4$$

참고 $x=0$ 일 때, 세 수는 0, -1, -2로 첫째항이 0, 공차가 -1인 등차수열이다.

$x=4$ 일 때, 세 수는 8, 11, 14로 첫째항이 8, 공차가 3인 등차수열이다.

(3) 세 수 $x, x^2-1, 2x+3$ 이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2(x^2-1) = x+2x+3, \quad 2x^2-3x-5=0$$

$$(x+1)(2x-5)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=\frac{5}{2}$$

참고 $x=-1$ 일 때, 세 수는 -1, 0, 1로 첫째항이 -1, 공차가 1인 등차수열이다.

$x = \frac{5}{2}$ 일 때, 세 수는 $\frac{5}{2}, \frac{21}{4}, 8$ 로 첫째항이 $\frac{5}{2}$, 공차가 $\frac{11}{4}$ 인 등차수열이다.

- (4) 세 수 $3x, x^2-3, 15-2x$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2(x^2-3) = 3x+15-2x, 2x^2-x-21=0$$

$$(x+3)(2x-7)=0$$

$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = \frac{7}{2}$$

참고 $x = -3$ 일 때, 세 수는 $-9, 6, 21$ 로 첫째항이 -9 , 공차가 15 인 등차수열이다.

$x = \frac{7}{2}$ 일 때, 세 수는 $\frac{21}{2}, \frac{37}{4}, 8$ 로 첫째항이 $\frac{21}{2}$,

공차가 $-\frac{5}{4}$ 인 등차수열이다.

- 13** 답 (1) 4, 7, 10 (2) 3, 5, 7

(3) $-2, 1, 4$

풀이 (1) 등차수열의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면 등차수열을 이루는 세 수를 $a-d, a, a+d$ 로 놓을 수 있다.

세 수의 합이 21 이므로 $(a-d)+a+(a+d)=21$

$$3a=21 \quad \therefore a=7$$

세 수의 곱이 280 이므로 $(a-d) \times a \times (a+d) = 280$

$$a^3 - ad^2 = 280, 7^3 - 7 \times d^2 = 280, d^2 = 9$$

$$\therefore d = -3 \text{ 또는 } d = 3$$

(i) $a=7, d=-3$ 일 때, 세 수는 $10, 7, 4$ 이다.

(ii) $a=7, d=3$ 일 때, 세 수는 $4, 7, 10$ 이다.

따라서 구하는 세 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면 $4, 7, 10$ 이다.

- (2) 등차수열의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면 등차수열을 이루는 세 수를 $a-d, a, a+d$ 로 놓을 수 있다.

세 수의 합이 15 이므로 $(a-d)+a+(a+d)=15$

$$3a=15 \quad \therefore a=5$$

세 수의 곱이 105 이므로 $(a-d) \times a \times (a+d) = 105$

$$a^3 - ad^2 = 105, 5^3 - 5 \times d^2 = 105, d^2 = 4$$

$$\therefore d = -2 \text{ 또는 } d = 2$$

(i) $a=5, d=-2$ 일 때, 세 수는 $7, 5, 3$ 이다.

(ii) $a=5, d=2$ 일 때, 세 수는 $3, 5, 7$ 이다.

따라서 구하는 세 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면 $3, 5, 7$ 이다.

- (3) 등차수열의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면 등차수열을 이루는 세 수를 $a-d, a, a+d$ 로 놓을 수 있다.

세 수의 합이 3 이므로 $(a-d)+a+(a+d)=3$

$$3a=3 \quad \therefore a=1$$

세 수의 곱이 -8 이므로 $(a-d) \times a \times (a+d) = -8$

$$a^3 - ad^2 = -8, 1^3 - 1 \times d^2 = -8, d^2 = 9$$

$$\therefore d = -3 \text{ 또는 } d = 3$$

(i) $a=1, d=-3$ 일 때, 세 수는 $4, 1, -2$ 이다.

(ii) $a=1, d=3$ 일 때, 세 수는 $-2, 1, 4$ 이다.

따라서 구하는 세 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면 $-2, 1, 4$ 이다.

- 14** 답 (1) 968 (2) 315

(3) 116 (4) 648

풀이 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하면

$$(1) S_{22} = \frac{22 \times (2+86)}{2} = \frac{22 \times 88}{2} = 968$$

$$(2) S_{15} = \frac{15 \times (7+35)}{2} = \frac{15 \times 42}{2} = 315$$

$$(3) S_8 = \frac{8 \times (2+27)}{2} = \frac{8 \times 29}{2} = 116$$

$$(4) S_{16} = \frac{16 \times (3+78)}{2} = \frac{16 \times 81}{2} = 648$$

- 15** 답 (1) 265 (2) 225

(3) -143 (4) -460

풀이 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하면

$$(1) S_{10} = \frac{10 \times \{2 \times 4 + (10-1) \times 5\}}{2} \\ = \frac{10 \times (8+45)}{2} \\ = 265$$

$$(2) S_{15} = \frac{15 \times \{2 \times (-6) + (15-1) \times 3\}}{2} \\ = \frac{15 \times (-12+42)}{2} \\ = 225$$

$$(3) S_{11} = \frac{11 \times \{2 \times 2 + (11-1) \times (-3)\}}{2} \\ = \frac{11 \times (4-30)}{2} \\ = -143$$

$$(4) S_{20} = \frac{20 \times \{2 \times (-4) + (20-1) \times (-2)\}}{2} \\ = \frac{20 \times (-8-38)}{2} \\ = -460$$

- 16** 답 (1) 222 (2) 550

(3) 684 (4) -190

(5) -920

풀이 (1) 첫째항이 35 , 공차가 $32-35=-3$ 이므로 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하면

$$S_{12} = \frac{12 \times \{2 \times 35 + (12-1) \times (-3)\}}{2} \\ = \frac{12 \times (70-33)}{2} = 222$$

- (2) 첫째항이 -1 , 공차가 $2-(-1)=3$ 이므로 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하면

$$S_{20} = \frac{20 \times \{2 \times (-1) + (20-1) \times 3\}}{2} \\ = \frac{20 \times (-2+57)}{2} = 550$$

- (3) 첫째항이 4, 공차가 $8-4=4$ 이므로 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하면

$$S_{18} = \frac{18 \times \{2 \times 4 + (18-1) \times 4\}}{2} \\ = \frac{18 \times (8+68)}{2} = 684$$

- (4) 첫째항이 -1, 공차가 $-5-(-1)=-4$ 이므로 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하면

$$S_{10} = \frac{10 \times \{2 \times (-1) + (10-1) \times (-4)\}}{2} \\ = \frac{10 \times (-2-36)}{2} = -190$$

- (5) 첫째항이 11, 공차가 $5-11=-6$ 이므로 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하면

$$S_{20} = \frac{20 \times \{2 \times 11 + (20-1) \times (-6)\}}{2} \\ = \frac{20 \times (22-114)}{2} = -920$$

- 17** 답 (1) -253 (2) -351
(3) 1520 (4) 1404
(5) 7

- 풀이** (1) 첫째항이 42, 공차가 $29-42=-13$ 이므로 끝항 -88을 제 n 항이라고 하면

$$42 + (n-1) \times (-13) = -88, 13n = 143 \quad \therefore n = 11$$

따라서 항수는 11이다.

첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하면

$$S_{11} = \frac{11 \times (42-88)}{2} = -253$$

- (2) 첫째항이 15, 공차가 $8-15=-7$ 이므로 끝항 -69를 제 n 항이라고 하면

$$15 + (n-1) \times (-7) = -69, 7n = 91 \quad \therefore n = 13$$

따라서 항수는 13이다.

첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하면

$$S_{13} = \frac{13 \times (15-69)}{2} = -351$$

- (3) 첫째항이 3, 공차가 $5-3=2$ 이므로 끝항 77을 제 n 항이라고 하면

$$3 + (n-1) \times 2 = 77, 2n = 76 \quad \therefore n = 38$$

따라서 항수는 38이다.

첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하면

$$S_{38} = \frac{38 \times (3+77)}{2} = 1520$$

- (4) 첫째항이 4, 공차가 $8-4=4$ 이므로 끝항 104를 제 n 항이라고 하면

$$4 + (n-1) \times 4 = 104, 4n = 104 \quad \therefore n = 26$$

따라서 항수는 26이다.

첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하면

$$S_{26} = \frac{26 \times (4+104)}{2} = 1404$$

- (5) 첫째항이 -19, 공차가 $-16-(-19)=3$ 이므로 끝항 20을 제 n 항이라고 하면

$$-19 + (n-1) \times 3 = 20, 3n = 42 \quad \therefore n = 14$$

따라서 항수는 14이다.

첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하면

$$S_{14} = \frac{14 \times (-19+20)}{2} = 7$$

- 18** 답 (1) 첫째항: 40, 공차: -3
(2) 첫째항: 57, 공차: -4

- 풀이** (1) 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면 제20항이 -17이므로 $a+19d=-17$ ㉠

첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하면

$$S_{20} = \frac{20 \times \{2a + (20-1)d\}}{2} = 230$$

$$\therefore 2a+19d=23 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=40, d=-3$

- (2) 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면 제3항이 49이므로

$$a+2d=49 \quad \text{..... ㉢}$$

첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하면

$$S_{10} = \frac{10 \times \{2a + (10-1)d\}}{2} = 390$$

$$\therefore 2a+9d=78 \quad \text{..... ㉣}$$

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $a=57, d=-4$

- 19** 답 (1) $a_n=7n-2$
(2) $a_n=5n-16$

- 풀이** (1) 첫째항을 a , 공차를 d , 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하면

$$S_5 = \frac{5 \times \{2a + (5-1)d\}}{2} = 95$$

$$\therefore 2a+4d=38 \quad \text{..... ㉤}$$

$$S_{10} = \frac{10 \times \{2a + (10-1)d\}}{2} = 365$$

$$\therefore 2a+9d=73 \quad \text{..... ㉥}$$

㉤, ㉥을 연립하여 풀면 $a=5, d=7$

따라서 이 등차수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = 5 + (n-1) \times 7 = 7n-2$$

- (2) 첫째항을 a , 공차를 d , 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하면

$$S_{10} = \frac{10 \times \{2a + (10-1)d\}}{2} = 115$$

$$\therefore 2a+9d=23 \quad \text{..... ㉦}$$

$$S_{20} = \frac{20 \times \{2a + (20-1)d\}}{2} = 730$$

$$\therefore 2a+19d=73 \quad \text{..... ㉧}$$

㉦, ㉧을 연립하여 풀면 $a=-11, d=5$

따라서 이 등차수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = -11 + (n-1) \times 5 = 5n-16$$

- 20** 답 (1) 제8항, 128
(2) 제10항, 100
(3) 제15항, -345

- 풀이** (1) 일반항 a_n 을 구하면

$$a_n = 30 + (n-1) \times (-4) = -4n+34$$

$a_n < 0$ 인 경우는 $-4n + 34 < 0$ 에서

$$n > \frac{34}{4} = 8.5$$

따라서 제8항까지는 양수이고, 제9항부터는 음수이므로
첫째항부터 제8항까지의 합이 최대가 된다.

첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하면 구하는 최
댓값은

$$S_8 = \frac{8 \times \{2 \times 30 + (8-1) \times (-4)\}}{2} = 128$$

(2) 일반항 a_n 을 구하면

$$a_n = 19 + (n-1) \times (-2) = -2n + 21$$

$a_n < 0$ 인 경우는 $-2n + 21 < 0$ 에서

$$n > \frac{21}{2} = 10.5$$

따라서 제10항까지는 양수이고, 제11항부터는 음수이므
로 첫째항부터 제10항까지의 합이 최대가 된다.

첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하면 구하는 최
댓값은

$$S_{10} = \frac{10 \times \{2 \times 19 + (10-1) \times (-2)\}}{2} = 100$$

(3) 일반항 a_n 을 구하면

$$a_n = -44 + (n-1) \times 3 = 3n - 47$$

$a_n > 0$ 인 경우는 $3n - 47 > 0$ 에서

$$n > \frac{47}{3} = 15.666\cdots$$

따라서 제15항까지는 음수이고, 제16항부터는 양수이므
로 첫째항부터 제15항까지의 합이 최소가 된다.

첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하면 구하는 최
솟값은

$$S_{15} = \frac{15 \times \{2 \times (-44) + (15-1) \times 3\}}{2} = -345$$

21 답 (1) $n=9$, $d=5$

(2) $n=10$, $d=-4$

(3) $n=13$, $d=5$

풀이 (1) 첫째항이 -1 , 끝항이 49 , 항수가 $n+2$ 인 등차수
열의 합이 264 이므로

$$\frac{(n+2)(-1+49)}{2} = 264, n+2=11 \quad \therefore n=9$$

따라서 49 가 제11항이므로

$$-1 + 10d = 49, 10d = 50 \quad \therefore d = 5$$

(2) 첫째항이 52 , 끝항이 8 , 항수가 $n+2$ 인 등차수열의 합
이 360 이므로

$$\frac{(n+2)(52+8)}{2} = 360, n+2=12 \quad \therefore n=10$$

따라서 8 이 제12항이므로

$$52 + 11d = 8, 11d = -44 \quad \therefore d = -4$$

(3) 첫째항이 -7 , 끝항이 63 , 항수가 $n+2$ 인 등차수열의
합이 420 이므로

$$\frac{(n+2)(-7+63)}{2} = 420, n+2=15 \quad \therefore n=13$$

따라서 63 이 제15항이므로

$$-7 + 14d = 63, 14d = 70 \quad \therefore d = 5$$

22 답 (1) 816

(2) 735

풀이 (1) 1 과 100 사이에 있는 6 의 배수는

$$6, 12, 18, 24, \dots, 90, 96$$

이때 $96 = 6 \times 16$ 이므로 항수는 16 이다.

따라서 구하는 총합은 첫째항이 6 , 끝항이 96 , 항수가
 16 인 등차수열의 합이므로

$$\frac{16 \times (6+96)}{2} = 816$$

(2) 1 과 100 사이에 있는 7 의 배수는

$$7, 14, 21, 28, \dots, 91, 98$$

이때 $98 = 7 \times 14$ 이므로 항수는 14 이다.

따라서 구하는 총합은 첫째항이 7 , 끝항이 98 , 항수가
 14 인 등차수열의 합이므로

$$\frac{14 \times (7+98)}{2} = 735$$

23 답 (1) $a_n = 2n$

(2) $a_n = 4n - 5$

(3) $a_n = 6n + 6$

(4) $a_1 = -1$, $a_n = 2n - 4$ (단, $n \geq 2$)

(5) $a_1 = 5$, $a_n = 6n - 2$ (단, $n \geq 2$)

(6) $a_1 = 4$, $a_n = -4n + 9$ (단, $n \geq 2$)

풀이 (1) (i) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 1^2 + 1 = 2$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = (n^2 + n) - \{(n-1)^2 + n - 1\} \\ &= (n^2 + n) - (n^2 - n) = 2n \end{aligned} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

그런데 $a_1 = 2$ 는 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로

$$a_n = 2n$$

(2) (i) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 2 \times 1^2 - 3 \times 1 = -1$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (2n^2 - 3n) - \{2(n-1)^2 - 3(n-1)\} \\ &= (2n^2 - 3n) - (2n^2 - 7n + 5) \\ &= 4n - 5 \end{aligned} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

그런데 $a_1 = -1$ 은 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로

$$a_n = 4n - 5$$

(3) (i) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 3 \times 1^2 + 9 \times 1 = 12$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (3n^2 + 9n) - \{3(n-1)^2 + 9(n-1)\} \\ &= (3n^2 + 9n) - (3n^2 + 3n - 6) \\ &= 6n + 6 \end{aligned} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

그런데 $a_1 = 12$ 는 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로

$$a_n = 6n + 6$$

(4) (i) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 1^2 - 3 \times 1 + 1 = -1$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (n^2 - 3n + 1) - \{(n-1)^2 - 3(n-1) + 1\} \\ &= (n^2 - 3n + 1) - (n^2 - 5n + 5) \\ &= 2n - 4 \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

그런데 $a_1 = -1$ 은 ⑦에 $n=1$ 을 대입한 값과 다르므로

$$a_1 = -1, a_n = 2n - 4 \quad (\text{단, } n \geq 2)$$

(5) (i) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 3 \times 1^2 + 1 + 1 = 5$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (3n^2 + n + 1) - \{3(n-1)^2 + (n-1) + 1\} \\ &= (3n^2 + n + 1) - (3n^2 - 5n + 3) \\ &= 6n - 2 \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

그런데 $a_1 = 5$ 는 ⑦에 $n=1$ 을 대입한 값과 다르므로

$$a_1 = 5, a_n = 6n - 2 \quad (\text{단, } n \geq 2)$$

(6) (i) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = -2 \times 1^2 + 7 \times 1 - 1 = 4$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (-2n^2 + 7n - 1) \\ &\quad - \{-2(n-1)^2 + 7(n-1) - 1\} \\ &= (-2n^2 + 7n - 1) - (-2n^2 + 11n - 10) \\ &= -4n + 9 \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

그런데 $a_1 = 4$ 는 ⑦에 $n=1$ 을 대입한 값과 다르므로

$$a_1 = 4, a_n = -4n + 9 \quad (\text{단, } n \geq 2)$$

- 24 답** (1) $a_n = 3^{n-1}$ (2) $a_n = 5 \times 2^{n-1}$
 (3) $a_n = 10^{n-1}$ (4) $a_n = 2^{-n+2}$
 (5) $a_n = 2^{-2n+4}$ (6) $a_n = 2 \times 3^{-n+2}$
 (7) $a_n = (-2)^n$ (8) $a_n = -5 \times (-2)^{-n+2}$

풀이 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

(1) 첫째항은 $a=1$, 공비는 $r=\frac{3}{1}=3$ 이므로

$$a_n = 1 \times 3^{n-1} = 3^{n-1}$$

(2) 첫째항은 $a=5$, 공비는 $r=\frac{10}{5}=2$ 이므로

$$a_n = 5 \times 2^{n-1}$$

(3) 첫째항은 $a=1$, 공비는 $r=\frac{10}{1}=10$ 이므로

$$a_n = 1 \times 10^{n-1} = 10^{n-1}$$

(4) 첫째항은 $a=2$, 공비는 $r=\frac{1}{2}$ 이므로

$$a_n = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2^{-n+2}$$

(5) 첫째항은 $a=4$, 공비는 $r=\frac{1}{4}$ 이므로

$$a_n = 4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 4^{-n+2} = 2^{-2n+4}$$

(6) 첫째항은 $a=6$, 공비는 $r=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ 이므로

$$a_n = 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 2 \times 3^{-n+2}$$

(7) 첫째항은 $a=-2$, 공비는 $r=\frac{4}{-2}=-2$ 이므로

$$a_n = -2 \times (-2)^{n-1} = (-2)^n$$

(8) 첫째항은 $a=10$, 공비는 $r=\frac{-5}{10}=-\frac{1}{2}$ 이므로

$$a_n = 10 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -5 \times (-2)^{-n+2}$$

- 25 답** (1) 제9항 (2) 제9항
(3) 제7항 (4) 제13항

풀이 (1) 첫째항이 3, 공비가 $\frac{6}{3}=2$ 이므로 등비수열의 일반

항을 a_n 이라고 하면

$$a_n = 3 \times 2^{n-1}$$

768이 제 n 항이라고 하면

$$3 \times 2^{n-1} = 768 \text{에서 } 2^{n-1} = 256, 2^{n-1} = 2^8$$

즉, $n-1=8$ 에서 $n=9$

따라서 768은 제9항이다.

(2) 첫째항이 $\frac{1}{27}$, 공비가 $\frac{\frac{9}{27}}{\frac{1}{27}}=3$ 이므로 등비수열의 일반

항을 a_n 이라고 하면

$$a_n = \frac{1}{27} \times 3^{n-1} = 3^{-3} \times 3^{n-1} = 3^{n-4}$$

243이 제 n 항이라고 하면 $3^{n-4} = 243$ 에서 $3^{n-4} = 3^5$

즉, $n-4=5$ 에서 $n=9$

따라서 243은 제9항이다.

(3) 첫째항이 10, 공비가 $\frac{-\frac{5}{2}}{10} = -\frac{1}{4}$ 이므로 등비수열의

일반항을 a_n 이라고 하면

$$a_n = 10 \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$\frac{5}{2048}$ 가 제 n 항이라고 하면

$$10 \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{5}{2048} \text{에서 } \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{1}{4096}$$

$$\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \left(-\frac{1}{4}\right)^6$$

즉, $n-1=6$ 에서 $n=7$

따라서 $\frac{5}{2048}$ 는 제7항이다.

(4) 첫째항이 1, 공비가 $\frac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}$ 이므로 등비수열의 일반항을

a_n 이라고 하면

$$a_n = (\sqrt{2})^{n-1}$$

64가 제 n 항이라고 하면

$$(\sqrt{2})^{n-1} = 64 \text{에서 } (2^{\frac{1}{2}})^{n-1} = 2^6$$

즉, $\frac{n-1}{2}=6$ 에서 $n=13$

따라서 64는 제13항이다.

- 26 답** (1) 첫째항: 3, 공비: 3 (2) 첫째항: -12, 공비: 2

(3) 첫째항: 12, 공비: $\frac{1}{2}$ (4) 첫째항: $\frac{5}{2}$, 공비: $\frac{1}{4}$

(5) 첫째항: $\frac{8}{9}$, 공비: -3

풀이 (1) $a_1=3^1=3$, $a_2=3^2=9$ 이므로

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{9}{3}=3$$

따라서 주어진 등비수열의 첫째항은 3, 공비는 3이다.

(2) $a_1=-3 \times 2^{1+1}=-12$, $a_2=-3 \times 2^{2+1}=-24$ 이므로

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{-24}{-12}=2$$

따라서 주어진 등비수열의 첫째항은 -12, 공비는 2이다.

(3) $a_1=3 \times 2^{-1+3}=12$, $a_2=3 \times 2^{-2+3}=6$ 이므로

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

따라서 주어진 등비수열의 첫째항은 12, 공비는 $\frac{1}{2}$ 이다.

(4) $a_1=5 \times 2^{1-2 \times 1}=\frac{5}{2}$, $a_2=5 \times 2^{1-2 \times 2}=\frac{5}{8}$ 이므로

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{\frac{5}{8}}{\frac{5}{2}}=\frac{1}{4}$$

따라서 주어진 등비수열의 첫째항은 $\frac{5}{2}$, 공비는 $\frac{1}{4}$ 이다.

(5) $a_1=8 \times (-3)^{1-3}=\frac{8}{9}$, $a_2=8 \times (-3)^{2-3}=-\frac{8}{3}$ 이므로

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{-\frac{8}{3}}{\frac{8}{9}}=-3$$

따라서 주어진 등비수열의 첫째항은 $\frac{8}{9}$, 공비는 -3이다.

27 답 (1) $a_n=(-2)^{n-1}$ (2) $a_n=3 \times (-2)^{n-1}$
(3) $a_n=5 \times 2^{n-3}$

풀이 (1) 등비수열의 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$$a_n=ar^{n-1}$$

$$a_1=-8 \text{이므로 } ar^3 \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_7=64 \text{이므로 } ar^6=64 \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면 } \frac{ar^6}{ar^3}=\frac{64}{-8} \quad \therefore r^3=-8$$

$$\text{이때 } r \text{는 실수이므로 } r=-2$$

$$\text{이 값을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } -8a=-8 \quad \therefore a=1$$

$$\therefore a_n=(-2)^{n-1}$$

(2) 등비수열의 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$$a_n=ar^{n-1}$$

$$a_2=-6 \text{이므로 } ar=-6 \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_5=48 \text{이므로 } ar^4=48 \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면 } \frac{ar^4}{ar}=\frac{48}{-6} \quad \therefore r^3=-8$$

$$\text{이때 } r \text{는 실수이므로 } r=-2$$

$$\text{이 값을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } -2a=-6 \quad \therefore a=3$$

$$\therefore a_n=3 \times (-2)^{n-1}$$

(3) 등비수열의 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$$a_n=ar^{n-1}$$

$$a_3=5 \text{이므로 } ar^2=5 \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_6=40 \text{이므로 } ar^5=40 \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면 } \frac{ar^5}{ar^2}=\frac{40}{5} \quad \therefore r^3=8$$

$$\text{이때 } r \text{는 실수이므로 } r=2$$

$$\text{이 값을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } 4a=5 \quad \therefore a=\frac{5}{4}$$

$$\therefore a_n=\frac{5}{4} \times 2^{n-1}=5 \times 2^{n-3}$$

28 답 (1) 첫째항: $3\sqrt{3}-3$, 공비: $\sqrt{3}$

(2) 첫째항: 20, 공비: 2

(3) 첫째항: $\frac{3}{2}$, 공비: $\frac{1}{4}$

풀이 (1) 등비수열의 첫째항을 a , 공비를 r , 일반항을 a_n 이라고 하면 $a_n=ar^{n-1}$

$$a_1+a_2=6 \text{이므로 } a+ar=6$$

$$a(1+r)=6 \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_3+a_4=18 \text{이므로 } ar^2+ar^3=18$$

$$ar^2(1+r)=18 \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면 } \frac{ar^2(1+r)}{a(1+r)}=\frac{18}{6} \quad \therefore r^2=3$$

$$\text{이때 } r \text{는 양수이므로 } r=\sqrt{3}$$

$$\text{이 값을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } (1+\sqrt{3})a=6 \quad \therefore a=3\sqrt{3}-3$$

따라서 주어진 등비수열의 첫째항은 $3\sqrt{3}-3$, 공비는 $\sqrt{3}$ 이다.

(2) 등비수열의 첫째항을 a , 공비를 r , 일반항을 a_n 이라고

$$\text{하면 } a_n=ar^{n-1}$$

$$a_2+a_3=120 \text{이므로 } ar+ar^2=120$$

$$ar(1+r)=120 \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_4+a_5=480 \text{이므로 } ar^3+ar^4=480$$

$$ar^3(1+r)=480 \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면 } \frac{ar^3(1+r)}{ar(1+r)}=\frac{480}{120} \quad \therefore r^2=4$$

$$\text{이때 } r \text{는 양수이므로 } r=2$$

$$\text{이 값을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } 6a=120 \quad \therefore a=20$$

따라서 주어진 등비수열의 첫째항은 20, 공비는 2이다.

(3) 등비수열의 첫째항을 a , 공비를 r , 일반항을 a_n 이라고

$$\text{하면 } a_n=ar^{n-1}$$

$$a+ar=\frac{15}{8} \text{이므로 } a(1+r)=\frac{15}{8} \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_3+a_4=\frac{15}{128} \text{이므로 } ar^2+ar^3=\frac{15}{128}$$

$$ar^2(1+r)=\frac{15}{128} \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면 } \frac{ar^2(1+r)}{a(1+r)}=\frac{\frac{15}{128}}{\frac{15}{8}} \quad \therefore r^2=\frac{1}{16}$$

$$\text{이때 } r \text{는 양수이므로 } r=\frac{1}{4}$$

$$\text{이 값을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } \frac{5}{4}a=\frac{15}{8} \quad \therefore a=\frac{3}{2}$$

따라서 주어진 등비수열의 첫째항은 $\frac{3}{2}$, 공비는 $\frac{1}{4}$ 이다.

29 답 (1) 10, 20, 40 (2) $\frac{4}{3}$, 4, 12
(3) 2, $2\sqrt{2}$, 4

풀이 (1) 등비수열의 첫째항이 5, 제5항이 80이므로 공비를 r , 일반항을 a_n 이라고 하면

$$a_n = 5 \times r^{n-1}$$

$$a_5 = 5 \times r^4 = 80 \text{에서 } r^4 = 16$$

이때 이 등비수열의 모든 항이 양수이므로 $r = 2$

5에서부터 80까지 공비 2씩 곱해 가면

$$5, 10, 20, \underline{40}, 80$$

따라서 구하는 세 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

$$10, 20, \underline{40} \text{이다.}$$

(2) 등비수열의 첫째항이 36, 제5항이 $\frac{4}{9}$ 이므로 공비를 r ,

일반항을 a_n 이라고 하면

$$a_n = 36 \times r^{n-1}$$

$$a_5 = 36 \times r^4 = \frac{4}{9} \text{에서 } r^4 = \frac{1}{81}$$

이때 이 등비수열의 모든 항이 양수이므로 $r = \frac{1}{3}$

36에서부터 $\frac{4}{9}$ 까지 공비 $\frac{1}{3}$ 씩 곱해 가면

$$36, 12, 4, \frac{4}{3}, \frac{4}{9}$$

따라서 구하는 세 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

$$\frac{4}{3}, 4, 12 \text{이다.}$$

(3) 등비수열의 첫째항이 $\sqrt{2}$, 제5항이 $4\sqrt{2}$ 이므로 공비를 r , 일반항을 a_n 이라고 하면

$$a_n = \sqrt{2} \times r^{n-1}$$

$$a_5 = \sqrt{2} \times r^4 = 4\sqrt{2} \text{에서 } r^4 = 4$$

이때 이 등비수열의 모든 항이 양수이므로 $r = \sqrt{2}$

$\sqrt{2}$ 에서부터 $4\sqrt{2}$ 까지 공비 $\sqrt{2}$ 씩 곱해 가면

$$\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}$$

따라서 구하는 세 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

$$2, 2\sqrt{2}, 4 \text{이다.}$$

30 **답** (1) 6, 18, 54, 162

(2) 6, 12, 24, 48

(3) $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{9}{8}, \frac{27}{8}$

풀이 (1) 등비수열의 첫째항이 2, 제6항이 486이므로 공비를 r , 일반항을 a_n 이라고 하면

$$a_n = 2 \times r^{n-1}$$

$$a_6 = 2 \times r^5 = 486 \text{에서 } r^5 = 243$$

이때 r 는 실수이므로 $r = 3$

2에서부터 486까지 공비 3씩 곱해 가면

$$2, 6, 18, \underline{54}, 162, 486$$

따라서 구하는 네 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

$$6, 18, \underline{54}, 162 \text{이다.}$$

(2) 등비수열의 첫째항이 3, 제6항이 96이므로 공비를 r , 일반항을 a_n 이라고 하면

$$a_n = 3 \times r^{n-1}$$

$$a_6 = 3 \times r^5 = 96 \text{에서 } r^5 = 32 \quad \therefore r = 2 \quad (\because r \text{는 실수})$$

3에서부터 96까지 공비 2씩 곱해 가면

$$3, 6, 12, 24, 48, 96$$

따라서 구하는 네 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

6, 12, 24, 48이다.

(3) 등비수열의 첫째항이 $\frac{1}{24}$, 제6항이 $\frac{81}{8}$ 이므로 공비를 r , 일반항을 a_n 이라고 하면

$$a_n = \frac{1}{24} \times r^{n-1}$$

$$a_6 = \frac{1}{24} \times r^5 = \frac{81}{8} \text{에서 } r^5 = 243$$

$\therefore r = 3$ ($\because r$ 는 실수)

$\frac{1}{24}$ 에서부터 $\frac{81}{8}$ 까지 공비 3씩 곱해 가면

$$\frac{1}{24}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{9}{8}, \frac{27}{8}, \frac{81}{8}$$

따라서 구하는 네 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

$$\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{9}{8}, \frac{27}{8} \text{이다.}$$

31 **답** (1) 제7항

(2) 제10항

(3) 제8항

(4) 제7항

(5) 제11항

(6) 제9항

풀이 (1) 첫째항이 1, 공비가 5인 등비수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = 1 \times 5^{n-1} = 5^{n-1}$$

제 n 항이 처음으로 10000보다 커진다고 하면

$$5^{n-1} > 10000, 5^n \times 5^{-1} > 10000, 5^n \times \frac{1}{5} > 10000$$

$$5^n > 50000$$

이때 $5^6 = 15625$, $5^7 = 78125$ 이고 n 은 자연수이므로

$$n \geq 7$$

따라서 처음으로 10000보다 커지는 항은 제7항이다.

(2) 첫째항이 3, 공비가 2인 등비수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = 3 \times 2^{n-1}$$

제 n 항이 처음으로 1000보다 커진다고 하면

$$3 \times 2^{n-1} > 1000, 2^{n-1} > \frac{1000}{3}, 2^n \times 2^{-1} > \frac{1000}{3}$$

$$2^n \times \frac{1}{2} > \frac{1000}{3}, 2^n > \frac{2000}{3} = 666.6 \dots$$

이때 $2^9 = 512$, $2^{10} = 1024$ 이고 n 은 자연수이므로 $n \geq 10$

따라서 처음으로 1000보다 커지는 항은 제10항이다.

(3) 첫째항이 2, 공비가 5인 등비수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = 2 \times 5^{n-1}$$

제 n 항이 처음으로 50000보다 커진다고 하면

$$2 \times 5^{n-1} > 50000, 5^{n-1} > 25000, 5^n \times 5^{-1} > 25000$$

$$5^n \times \frac{1}{5} > 25000, 5^n > 125000$$

이때 $5^7 = 78125$, $5^8 = 390625$ 이고 n 은 자연수이므로

$$n \geq 8$$

따라서 처음으로 50000보다 커지는 항은 제8항이다.

(4) 주어진 등비수열의 일반항 a_n 은 $a_n = 300 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

제 n 항이 처음으로 1보다 작아진다고 하면

$$300 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} < 1, \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} < \frac{1}{300}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n \times \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} < \frac{1}{300}, \left(\frac{1}{3}\right)^n < \frac{1}{900}$$

이때 $\left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{1}{729}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^7 = \frac{1}{2187}$ 이고 n 은 자연수이므로 $n \geq 7$

따라서 처음으로 1보다 작아지는 항은 제7항이다.

- (5) 주어진 등비수열의 일반항 a_n 은 $a_n = 1024 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

제 n 항이 처음으로 2보다 작아진다고 하면

$$1024 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 2, \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < \frac{1}{512}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} < \frac{1}{512}, \left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{1}{1024}$$

이때 $\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{11} = \frac{1}{2048}$ 이고 n 은 자연수이

므로 $n \geq 11$

따라서 처음으로 2보다 작아지는 항은 제11항이다.

- (6) 주어진 등비수열의 일반항 a_n 은 $a_n = 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

제 n 항이 처음으로 $\frac{1}{500}$ 보다 작아진다고 하면

$$9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} < \frac{1}{500}, \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} < \frac{1}{4500}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n \times \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} < \frac{1}{4500}, \left(\frac{1}{3}\right)^n < \frac{1}{13500}$$

이때 $\left(\frac{1}{3}\right)^8 = \frac{1}{6561}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^9 = \frac{1}{19683}$ 이고 n 은 자연수이

므로 $n \geq 9$

따라서 처음으로 $\frac{1}{500}$ 보다 작아지는 항은 제9항이다.

- 32 답 (1) $-\frac{3}{2}, 3$ (2) $-1, 3$

- (3) $-\frac{1}{2}, 5$ (4) -7

풀이 (1) 세 수 $x, x+6, 9x$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$(x+6)^2 = x \times 9x \text{에서 } 8x^2 - 12x - 36 = 0$$

$$2x^2 - 3x - 9 = 0, (2x+3)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -\frac{3}{2} \text{ 또는 } x = 3$$

참고 $x = -\frac{3}{2}$ 일 때, 세 수는 $-\frac{3}{2}, \frac{9}{2}, -\frac{27}{2}$ 로

첫째항이 $-\frac{3}{2}$, 공비가 -3 인 등비수열이다.

$x = 3$ 일 때, 세 수는 $3, 9, 27$ 로 첫째항이 3 , 공비가 3 인 등비수열이다.

- (2) 세 수 $x, x+3, 4x$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$(x+3)^2 = x \times 4x \text{에서 } 3x^2 - 6x - 9 = 0$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0, (x+1)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

참고 $x = -1$ 일 때, 세 수는 $-1, 2, -4$ 로 첫째항이 -1 , 공비가 -2 인 등비수열이다.

$x = 3$ 일 때, 세 수는 $3, 6, 12$ 로 첫째항이 3 , 공비가 2 인 등비수열이다.

- (3) 세 수 $x-4, x-1, 3x+1$ 이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$(x-1)^2 = (x-4)(3x+1) \text{에서 } 2x^2 - 9x - 5 = 0$$

$$(2x+1)(x-5) = 0$$

$$\therefore x = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } x = 5$$

참고 $x = -\frac{1}{2}$ 일 때, 세 수는 $-\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$ 로

첫째항이 $-\frac{9}{2}$, 공비가 $\frac{1}{3}$ 인 등비수열이다.

$x = 5$ 일 때, 세 수는 $1, 4, 16$ 으로 첫째항이 1 , 공비가 4 인 등비수열이다.

- (4) 세 수 $x-2, x+10, x+6$ 이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$(x+10)^2 = (x-2)(x+6) \text{에서 } 16x = -112$$

$$\therefore x = -7$$

참고 $x = -7$ 일 때, 세 수는 $-9, 3, -1$ 로 첫째항이

-9 , 공비가 $-\frac{1}{3}$ 인 등비수열이다.

- 33 답 (1) $1, 2, 4$ (2) $-8, -2, 4$

풀이 (1) 세 수를 a, ar, ar^2 으로 놓으면

세 수의 합이 7 이므로 $a + ar + ar^2 = 7$

$$\therefore a(1+r+r^2) = 7 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

세 수의 곱이 8 이므로 $a \times ar \times ar^2 = 8$

$$(ar)^3 = 8 \quad \therefore ar = 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \div \textcircled{2} \text{을 하면 } \frac{a(1+r+r^2)}{ar} = \frac{7}{2}, \frac{1+r+r^2}{r} = \frac{7}{2}$$

$$2 + 2r + 2r^2 = 7r, 2r^2 - 5r + 2 = 0$$

$$(r-2)(2r-1) = 0 \quad \therefore r = 2 \text{ 또는 } r = \frac{1}{2}$$

이 값을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

(i) $r = 2$ 일 때, $a = 1$ 이므로 세 실수는 $1, 2, 4$ 이다.

(ii) $r = \frac{1}{2}$ 일 때, $a = 4$ 이므로 세 실수는 $4, 2, 1$ 이다.

따라서 구하는 세 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면 $1, 2, 4$ 이다.

- (2) 세 수를 a, ar, ar^2 으로 놓으면

세 수의 합이 -6 이므로 $a + ar + ar^2 = -6$

$$\therefore a(1+r+r^2) = -6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

세 수의 곱이 64 이므로 $a \times ar \times ar^2 = 64$

$$(ar)^3 = 64 \quad \therefore ar = 4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} \div \textcircled{2}$ 을 하면

$$\frac{a(1+r+r^2)}{ar} = \frac{-6}{4}, \frac{1+r+r^2}{r} = -\frac{3}{2}$$

$$2 + 2r + 2r^2 = -3r, 2r^2 + 5r + 2 = 0$$

$$(r+2)(2r+1) = 0 \quad \therefore r = -2 \text{ 또는 } r = -\frac{1}{2}$$

이 값을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

(i) $r = -2$ 일 때, $a = -2$ 이므로 세 수는 $-2, 4, -8$ 이다.

(ii) $r = -\frac{1}{2}$ 일 때, $a = -8$ 이므로 세 수는 $-8, 4, -2$ 이다.

따라서 구하는 세 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면 $-8, -2, 4$ 이다.

- 34 답 $9 \times \left(\frac{8}{9}\right)^{10}$

풀이 주어진 정사각형의 넓이가 $3 \times 3 = 9$ 이므로

첫 번째 시행 후 남은 도형의 넓이는

$$9 \times \frac{8}{9}$$

두 번째 시행 후 남은 도형의 넓이는

$$9 \times \frac{8}{9} \times \frac{8}{9} = 9 \times \left(\frac{8}{9}\right)^2$$

세 번째 시행 후 남은 도형의 넓이는

$$9 \times \left(\frac{8}{9}\right)^2 \times \frac{8}{9} = 9 \times \left(\frac{8}{9}\right)^3$$

⋮

n 번째 시행 후 남은 도형의 넓이는

$$9 \times \left(\frac{8}{9}\right)^n$$

따라서 10회 시행 후 남은 도형의 넓이는

$$9 \times \left(\frac{8}{9}\right)^{10}$$

35 답 $6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^8$

풀이 정삼각형 ABC의 한 변의 길이는 2이므로 첫 번째 시행에서 정삼각형 $A_1B_1C_1$ 의 한 변의 길이는

$$2 \times \frac{1}{2}$$

따라서 정삼각형 $A_1B_1C_1$ 의 둘레의 길이는

$$3 \times 2 \times \frac{1}{2}$$

두 번째 시행에서 정삼각형 $A_2B_2C_2$ 의 한 변의 길이는

$$2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

이므로 정삼각형 $A_2B_2C_2$ 의 둘레의 길이는

$$3 \times 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

세 번째 시행에서 정삼각형 $A_3B_3C_3$ 의 한 변의 길이는

$$2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

이므로 정삼각형 $A_3B_3C_3$ 의 둘레의 길이는

$$3 \times 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

⋮

n 번째 시행 후 정삼각형 $A_nB_nC_n$ 의 한 변의 길이는

$$2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{이므로 정삼각형 } A_nB_nC_n \text{의 둘레의 길이는}$$

$$3 \times 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

따라서 정삼각형 $A_8B_8C_8$ 의 둘레의 길이는

$$6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^8$$

36 답 $5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^7 \text{ m}$

풀이 n 번째 튀어 오른 공의 높이를 $a_n \text{ m}$ 라고 하면 첫 번째 튀어 오른 공의 높이는

$$a_1 = 5 \times \frac{2}{3}$$

두 번째 튀어 오른 공의 높이는

$$a_2 = 5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

세 번째 튀어 오른 공의 높이는

$$a_3 = 5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

⋮

n 번째 튀어 오른 공의 높이는

$$a_n = 5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

따라서 7번째 튀어 오른 공의 높이는

$$a_7 = 5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^7 \text{ m}$$

37 답 (1) $S_n = \frac{3}{2}(3^n - 1)$ (2) $S_n = \frac{1}{12}(4^n - 1)$

$$(3) S_n = \frac{5}{4}(5^n - 1) \quad (4) S_n = (\sqrt{2} + 1)\{(\sqrt{2})^n - 1\}$$

$$(5) S_n = \frac{3}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\} \quad (6) S_n = \frac{625}{4}\left\{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right\}$$

$$(7) S_n = \frac{1}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\} \quad (8) S_n = \frac{81}{4}\left\{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

풀이 (1) 첫째항이 3, 공비가 3이므로

$$S_n = \frac{3 \times (3^n - 1)}{3 - 1} = \frac{3}{2}(3^n - 1)$$

(2) 첫째항이 $\frac{1}{4}$, 공비가 4이므로

$$S_n = \frac{\frac{1}{4} \times (4^n - 1)}{4 - 1} = \frac{1}{12}(4^n - 1)$$

(3) 첫째항이 5, 공비가 5이므로

$$S_n = \frac{5 \times (5^n - 1)}{5 - 1} = \frac{5}{4}(5^n - 1)$$

(4) 첫째항이 1, 공비가 $\sqrt{2}$ 이므로

$$S_n = \frac{1 \times \{(\sqrt{2})^n - 1\}}{\sqrt{2} - 1} = (\sqrt{2} + 1)\{(\sqrt{2})^n - 1\}$$

(5) 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{3}$ 이므로

$$S_n = \frac{1 \times \left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

(6) 첫째항이 125, 공비가 $\frac{1}{5}$ 이므로

$$S_n = \frac{125 \times \left\{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right\}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{125 \times \left\{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right\}}{\frac{4}{5}} \\ = \frac{625}{4}\left\{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right\}$$

(7) 첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 $-\frac{1}{2}$ 이므로

$$S_n = \frac{\frac{1}{2} \times \left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

(8) 첫째항이 27, 공비가 $-\frac{1}{3}$ 이므로

$$S_n = \frac{27 \times \left\{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{81}{4}\left\{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

38 답 (1) 511

(2) 2730

(3) 1094

(4) 11111111

(5) $\frac{341}{128}$

풀이 (1) 256을 제 n 항이라고 하면 첫째항이 1, 공비가 2이

므로

$$2^{n-1}=256 \text{에서 } 2^{n-1}=2^8$$

$$n-1=8 \quad \therefore n=9$$

첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하면

$$S_9 = \frac{2^9-1}{2-1} = 511$$

(2) 2048을 제 n 항이라고 하면 첫째항이 2, 공비가 4이므로

$$2 \times 4^{n-1} = 2048 \text{에서 } 4^{n-1} = 1024$$

$$2^{2n-2} = 2^{10}, 2n-2=10 \quad \therefore n=6$$

첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하면

$$S_6 = \frac{2 \times (4^6-1)}{4-1} = \frac{2 \times 4095}{3} = 2730$$

(3) 1458을 제 n 항이라고 하면 첫째항이 2, 공비가 -3 이므로

$$2 \times (-3)^{n-1} = 1458 \text{에서 } (-3)^{n-1} = 729$$

$$\text{이때 } 729 = 3^6 \text{이므로 } (-3)^{n-1} = (-3)^6$$

$$n-1=6 \quad \therefore n=7$$

첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하면

$$S_7 = \frac{2 \times \{1 - (-3)^7\}}{1 - (-3)} = \frac{2 \times 2188}{4} = 1094$$

(4) 이 등비수열의 첫째항은 1, 공비는 10이고, 10^7 은 제8항
이므로 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하면

$$\begin{aligned} S_8 &= \frac{10^8-1}{10-1} = \frac{100000000-1}{9} \\ &= \frac{99999999}{9} = 11111111 \end{aligned}$$

(5) $-\frac{1}{128}$ 을 제 n 항이라고 하면 첫째항이 4, 공비가 $-\frac{1}{2}$
이므로

$$4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\frac{1}{128} \text{에서 } \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\frac{1}{512}$$

$$\text{이때 } 512 = 2^9 \text{이므로 } \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^9$$

$$n-1=9 \quad \therefore n=10$$

첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하면

$$\begin{aligned} S_{10} &= \frac{4 \times \left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{4 \times \left(1 - \frac{1}{1024}\right)}{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{4 \times \frac{1023}{1024}}{\frac{3}{2}} = \frac{341}{128} \end{aligned}$$

39 **답** (1) 315 (2) $6+7\sqrt{2}$ (3) 189

풀이 (1) 첫째항을 a , 공비를 r , 일반항을 a_n , 첫째항부터
제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하면

$$a_1 + a_3 = 25 \text{이므로 } a + ar^2 = 25$$

$$\therefore a(1+r^2) = 25 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_3 + a_5 = 100 \text{이므로 } ar^2 + ar^4 = 100$$

$$\therefore ar^2(1+r^2) = 100 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면 } \frac{ar^2(1+r^2)}{a(1+r^2)} = \frac{100}{25} \quad \therefore r^2 = 4$$

이때 r 는 양수이므로 $r=2$

$$\text{이 값을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } 5a = 25 \quad \therefore a = 5$$

$$\therefore S_6 = \frac{5 \times (2^6-1)}{2-1} = 315$$

(2) 첫째항을 a , 공비를 r , 일반항을 a_n , 첫째항부터 제 n 항
까지의 합을 S_n 이라고 하면

$$a_1 + a_3 = 3\sqrt{2} \text{이므로 } a + ar^2 = 3\sqrt{2}$$

$$\therefore a(1+r^2) = 3\sqrt{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_3 + a_5 = 6\sqrt{2} \text{이므로 } ar^2 + ar^4 = 6\sqrt{2}$$

$$\therefore ar^2(1+r^2) = 6\sqrt{2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면 } \frac{ar^2(1+r^2)}{a(1+r^2)} = \frac{6\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} \quad \therefore r^2 = 2$$

이때 r 는 양수이므로 $r=\sqrt{2}$

$$\text{이 값을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } 3a = 3\sqrt{2} \quad \therefore a = \sqrt{2}$$

$$\therefore S_5 = \frac{\sqrt{2} \{(\sqrt{2})^5-1\}}{\sqrt{2}-1} = \frac{8-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = 6+7\sqrt{2}$$

(3) 첫째항을 a , 공비를 r , 일반항을 a_n , 첫째항부터 제 n 항
까지의 합을 S_n 이라고 하면

$$a_2 + a_4 = 30 \text{이므로 } ar + ar^3 = 30$$

$$\therefore ar(1+r^2) = 30 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_4 + a_6 = 120 \text{이므로 } ar^3 + ar^5 = 120$$

$$\therefore ar^3(1+r^2) = 120 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면 } \frac{ar^3(1+r^2)}{ar(1+r^2)} = \frac{120}{30} \quad \therefore r^2 = 4$$

이때 r 는 양수이므로 $r=2$

$$\text{이 값을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } 10a = 30 \quad \therefore a = 3$$

$$\therefore S_6 = \frac{3 \times (2^6-1)}{2-1} = 189$$

40 **답** (1) $a_n = 3^{n-1}$ (2) $a_n = -2 \times 3^{n-1}$

$$(3) a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

풀이 (1) 첫째항을 a , 공비를 r , 첫째항부터 제 n 항까지의
합을 S_n 이라고 하면

$$S_3 = 13 \text{이므로 } \frac{a(1-r^3)}{1-r} = 13 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$S_6 = 364 \text{이므로 } \frac{a(1-r^6)}{1-r} = 364$$

$$\therefore \frac{a(1-r^3)(1+r^3)}{1-r} = 364 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } 13(1+r^3) = 364$$

$$1+r^3=28, r^3=27$$

이때 r 는 실수이므로 $r=3$

$$\text{이 값을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } -26a = -26 \quad \therefore a = 1$$

$$\therefore a_n = 3^{n-1}$$

(2) 첫째항을 a , 공비를 r , 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n
이라고 하면

$$S_3 = -26 \text{이므로 } \frac{a(1-r^3)}{1-r} = -26 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$S_6 = -728 \text{이므로 } \frac{a(1-r^6)}{1-r} = -728$$

$$\therefore \frac{a(1-r^3)(1+r^3)}{1-r} = -728 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } -26(1+r^3) = -728$$

$$1+r^3=28, r^3=27$$

이때 r 는 실수이므로 $r=3$

이 값을 ㉠에 대입하면 $-26a=52 \quad \therefore a=-2$

$$\therefore a_n = -2 \times 3^{n-1}$$

- (3) 첫째항을 a , 공비를 r , 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하면

$$S_5 = \frac{31}{32} \text{ 이므로 } \frac{a(1-r^5)}{1-r} = \frac{31}{32} \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$S_{10} = \frac{1023}{1024} \text{ 이므로 } \frac{a(1-r^{10})}{1-r} = \frac{1023}{1024}$$

$$\therefore \frac{a(1-r^5)(1+r^5)}{1-r} = \frac{1023}{1024} \quad \dots\dots \text{㉢}$$

$$\text{㉡을 ㉢에 대입하면 } \frac{31}{32}(1+r^5) = \frac{1023}{1024}$$

$$1+r^5 = \frac{1023}{1024} \times \frac{32}{31} = \frac{33}{32}, \quad r^5 = \frac{1}{32}$$

이때 r 는 실수이므로 $r = \frac{1}{2}$

이 값을 ㉠에 대입하면

$$\frac{a\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^5\right\}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{31}{32}, \quad \frac{\frac{31}{32}a}{\frac{1}{2}} = \frac{31}{32}$$

$$\therefore a = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

41 **답** (1) $x \neq 0$ 일 때 $S_n = \frac{(x+1)^n - 1}{x}$, $x=0$ 일 때 $S_n = n$

(2) $S_n = (x+1)^n - 1$

(3) $S_n = \frac{(x+1)^{2n} - 1}{x+2}$

(4) $x \neq -1$ 일 때 $S_n = \frac{x\{1-(-x)^n\}}{1+x}$,

$x = -1$ 일 때 $S_n = -n$

풀이 (1) 첫째항이 1, 공비가 $x+1$ 이므로

(i) $x+1=1$, 즉 $x=0$ 일 때,

$$S_n = 1+1+1+\dots+1 = n$$

(ii) $x+1 \neq 1$, 즉 $x \neq 0$ 일 때,

$$S_n = \frac{1 \times \{(x+1)^n - 1\}}{(x+1) - 1} = \frac{(x+1)^n - 1}{x}$$

(2) 첫째항이 x , 공비가 $x+1$ 이고 $x > 0$ 이므로

$$x+1 \neq 1$$

$$\therefore S_n = \frac{x\{(x+1)^n - 1\}}{(x+1) - 1} = (x+1)^n - 1$$

(3) 첫째항이 x , 공비가 $(x+1)^2$ 이고 $x > 0$ 이므로

$$(x+1)^2 \neq 1$$

$$\therefore S_n = \frac{x[\{(x+1)^2\}^n - 1]}{(x+1)^2 - 1}$$

$$= \frac{x\{(x+1)^{2n} - 1\}}{x^2 + 2x}$$

$$= \frac{(x+1)^{2n} - 1}{x+2}$$

(4) 첫째항이 x , 공비가 $-x$ 이므로

(i) $-x=1$, 즉 $x=-1$ 일 때,

$$S_n = (-1) + (-1) + (-1) + \dots + (-1) = -n$$

(ii) $-x \neq 1$, 즉 $x \neq -1$ 일 때,

$$S_n = \frac{x\{1-(-x)^n\}}{1-(-x)} = \frac{x\{1-(-x)^n\}}{1+x}$$

42 **답** (1) $a_n = 2 \times 3^n$ (2) $a_n = 3 \times 4^n$

(3) $a_n = \frac{4}{5} \times 5^n$ (4) $a_1 = 3, a_n = 2^{n-1}$ (단, $n \geq 2$)

(5) $a_1 = 24, a_n = 4 \times 5^n$ (단, $n \geq 2$)

풀이 (1) (i) $n=1$ 일 때, $a_1 = S_1 = 3^2 - 3 = 6$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = (3^{n+1} - 3) - (3^n - 3) \\ &= 3^{n+1} - 3^n = 3 \times 3^n - 3^n \\ &= (3-1) \times 3^n = 2 \times 3^n \quad \dots\dots \text{㉠} \end{aligned}$$

그런데 $a_1 = 6$ 은 ㉠에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로

$$a_n = 2 \times 3^n$$

(2) (i) $n=1$ 일 때, $a_1 = S_1 = 4^2 - 4 = 12$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = (4^{n+1} - 4) - (4^n - 4) \\ &= 4^{n+1} - 4^n = 4 \times 4^n - 4^n \\ &= (4-1) \times 4^n = 3 \times 4^n \quad \dots\dots \text{㉡} \end{aligned}$$

그런데 $a_1 = 12$ 는 ㉡에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로

$$a_n = 3 \times 4^n$$

(3) (i) $n=1$ 일 때, $a_1 = S_1 = 5 - 1 = 4$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = (5^n - 1) - (5^{n-1} - 1) \\ &= 5^n - 5^{n-1} = 5^n - (5^n \times 5^{-1}) \\ &= \left(1 - \frac{1}{5}\right) \times 5^n = \frac{4}{5} \times 5^n \quad \dots\dots \text{㉢} \end{aligned}$$

그런데 $a_1 = 4$ 는 ㉢에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로

$$a_n = \frac{4}{5} \times 5^n$$

(4) (i) $n=1$ 일 때, $a_1 = S_1 = 2 + 1 = 3$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = (2^n + 1) - (2^{n-1} + 1) \\ &= 2^n - 2^{n-1} = 2^n - (2^n \times 2^{-1}) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times 2^n = \frac{1}{2} \times 2^n \\ &= 2^{n-1} \quad \dots\dots \text{㉣} \end{aligned}$$

그런데 $a_1 = 3$ 은 ㉣에 $n=1$ 을 대입한 값과 다르므로

$$a_1 = 3, a_n = 2^{n-1} \text{ (단, } n \geq 2\text{)}$$

(5) (i) $n=1$ 일 때, $a_1 = S_1 = 5^2 - 1 = 24$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = (5^{n+1} - 1) - (5^n - 1) \\ &= 5^{n+1} - 5^n = 5 \times 5^n - 5^n \\ &= (5-1) \times 5^n = 4 \times 5^n \quad \dots\dots \text{㉤} \end{aligned}$$

그런데 $a_1 = 24$ 는 ㉤에 $n=1$ 을 대입한 값과 다르므로

$$a_1 = 24, a_n = 4 \times 5^n \text{ (단, } n \geq 2\text{)}$$

43 **답** (1) -3 (2) -2

(3) -4 (4) -6

풀이 (1) (i) $n=1$ 일 때, $a_1 = S_1 = 12 + k \quad \dots\dots \text{㉥}$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (3 \times 4^n + k) - (3 \times 4^{n-1} + k) \\ &= 3 \times 4 \times 4^{n-1} - 3 \times 4^{n-1} \\ &= (12-3) \times 4^{n-1} = 9 \times 4^{n-1} \quad \dots\dots \textcircled{A} \end{aligned}$$

첫째항부터 등비수열을 이루려면 $\textcircled{A}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값이 $\textcircled{A}$ 과 같아야 하므로

$$9 \times 4^{1-1} = 12 + k, \quad 9 = 12 + k \quad \therefore k = -3$$

(2) (i) $n=1$ 일 때, $a_1 = S_1 = 6 + k \quad \dots\dots \textcircled{B}$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (2 \times 3^n + k) - (2 \times 3^{n-1} + k) \\ &= 2 \times 3 \times 3^{n-1} - 2 \times 3^{n-1} \\ &= (6-2) \times 3^{n-1} = 4 \times 3^{n-1} \quad \dots\dots \textcircled{C} \end{aligned}$$

첫째항부터 등비수열을 이루려면 $\textcircled{C}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값이 $\textcircled{C}$ 과 같아야 하므로

$$4 \times 3^{1-1} = 6 + k, \quad 4 = 6 + k \quad \therefore k = -2$$

(3) (i) $n=1$ 일 때, $a_1 = S_1 = 20 + k \quad \dots\dots \textcircled{D}$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (4 \times 5^n + k) - (4 \times 5^{n-1} + k) \\ &= 4 \times 5 \times 5^{n-1} - 4 \times 5^{n-1} \\ &= (20-4) \times 5^{n-1} = 16 \times 5^{n-1} \quad \dots\dots \textcircled{E} \end{aligned}$$

첫째항부터 등비수열을 이루려면 $\textcircled{E}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값이 $\textcircled{E}$ 과 같아야 하므로

$$16 \times 5^{1-1} = 20 + k, \quad 16 = 20 + k \quad \therefore k = -4$$

(4) (i) $n=1$ 일 때, $a_1 = S_1 = 2 \times 3^1 + k = 54 + k \quad \dots\dots \textcircled{F}$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (2 \times 3^{2n+1} + k) - (2 \times 3^{2n-1} + k) \\ &= 2 \times 3^2 \times 3^{2n-1} - 2 \times 3^{2n-1} \\ &= (18-2) \times 3^{2n-1} = 16 \times 3^{2n-1} \quad \dots\dots \textcircled{G} \end{aligned}$$

첫째항부터 등비수열을 이루려면 $\textcircled{G}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값이 $\textcircled{G}$ 과 같아야 하므로

$$16 \times 3^{2-1} = 54 + k, \quad 48 = 54 + k \quad \therefore k = -6$$

44 답 (1) 30만 원 (2) 120만 원

풀이 (1) 1년 후의 원리합계는

$$20 + (20 \times 0.05) = 20(1 + 0.05) \text{ (만 원)}$$

2년 후의 원리합계는

$$20 + (20 \times 0.05) + (20 \times 0.05) = 20(1 + 2 \times 0.05) \text{ (만 원)}$$

3년 후의 원리합계는

$$\begin{aligned} &20 + (20 \times 0.05) + (20 \times 0.05) + (20 \times 0.05) \\ &= 20(1 + 3 \times 0.05) \text{ (만 원)} \end{aligned}$$

⋮

이므로 10년 후의 원리합계는

$$20(1 + 10 \times 0.05) = 20 \times 1.5 = 30 \text{ (만 원)}$$

(2) 1년 후의 원리합계는

$$100 + (100 \times 0.02) = 100(1 + 0.02) \text{ (만 원)}$$

2년 후의 원리합계는

$$\begin{aligned} &100 + (100 \times 0.02) + (100 \times 0.02) \\ &= 100(1 + 2 \times 0.02) \text{ (만 원)} \end{aligned}$$

3년 후의 원리합계는

$$\begin{aligned} &100 + (100 \times 0.02) + (100 \times 0.02) + (100 \times 0.02) \\ &= 100(1 + 3 \times 0.02) \text{ (만 원)} \end{aligned}$$

⋮

이므로 10년 후의 원리합계는

$$100(1 + 10 \times 0.02) = 100 \times 1.2 = 120 \text{ (만 원)}$$

45 답 (1) 32만 원 (2) 120만 원

풀이 (1) 1년 후의 원리합계는

$$20 + 20 \times 0.05 = 20(1 + 0.05) \text{ (만 원)}$$

2년 후의 원리합계는

$$\begin{aligned} &20(1 + 0.05) + 20(1 + 0.05) \times 0.05 \\ &= 20(1 + 0.05)(1 + 0.05) = 20(1 + 0.05)^2 \text{ (만 원)} \end{aligned}$$

3년 후의 원리합계는

$$\begin{aligned} &20(1 + 0.05)^2 + 20(1 + 0.05)^2 \times 0.05 \\ &= 20(1 + 0.05)^2(1 + 0.05) = 20(1 + 0.05)^3 \text{ (만 원)} \end{aligned}$$

⋮

이므로 10년 후의 원리합계는

$$\begin{aligned} &20(1 + 0.05)^{10} = 20 \times 1.05^{10} = 20 \times 1.6 \\ &= 32 \text{ (만 원)} \end{aligned}$$

(2) 1년 후의 원리합계는

$$100 + 100 \times 0.02 = 100(1 + 0.02) \text{ (만 원)}$$

2년 후의 원리합계는

$$\begin{aligned} &100(1 + 0.02) + 100(1 + 0.02) \times 0.02 \\ &= 100(1 + 0.02)(1 + 0.02) = 100(1 + 0.02)^2 \text{ (만 원)} \end{aligned}$$

3년 후의 원리합계는

$$\begin{aligned} &100(1 + 0.02)^2 + 100(1 + 0.02)^2 \times 0.02 \\ &= 100(1 + 0.02)^2(1 + 0.02) = 100(1 + 0.02)^3 \text{ (만 원)} \end{aligned}$$

⋮

이므로 10년 후의 원리합계는

$$\begin{aligned} &100(1 + 0.02)^{10} = 100 \times 1.02^{10} = 100 \times 1.2 \\ &= 120 \text{ (만 원)} \end{aligned}$$

46 답 (1) 424만 원 (2) 504만 원 (3) 816만 원

풀이 (1) 10년 후의 원리합계를 S라고 하면

$$\begin{aligned} S &= 30 \times 1.06 + 30 \times 1.06^2 + \dots + 30 \times 1.06^{10} \\ &= \frac{30 \times 1.06 \times (1.06^{10} - 1)}{1.06 - 1} \\ &= \frac{30 \times 1.06 \times (1.8 - 1)}{0.06} = 424 \text{ (만 원)} \end{aligned}$$

(2) 10년 후의 원리합계를 S라고 하면

$$\begin{aligned} S &= 40 \times 1.05 + 40 \times 1.05^2 + \dots + 40 \times 1.05^{10} \\ &= \frac{40 \times 1.05 \times (1.05^{10} - 1)}{1.05 - 1} \\ &= \frac{40 \times 1.05 \times (1.6 - 1)}{0.05} = 504 \text{ (만 원)} \end{aligned}$$

(3) 10년 후의 원리합계를 S 라고 하면

$$\begin{aligned} S &= 80 \times 1.02 + 80 \times 1.02^2 + \cdots + 80 \times 1.02^{10} \\ &= \frac{80 \times 1.02 \times (1.02^{10} - 1)}{1.02 - 1} \\ &= \frac{80 \times 1.02 \times (1.2 - 1)}{0.02} = 816 \text{ (만 원)} \end{aligned}$$

47 **답** (1) 1750만 원 (2) 3600만 원
(3) 1000만 원

풀이 (1) 10년 후의 원리합계를 S 라고 하면

$$\begin{aligned} S &= 100 + 100 \times 1.12 + 100 \times 1.12^2 + \cdots + 100 \times 1.12^9 \\ &= \frac{100 \times (1.12^{10} - 1)}{1.12 - 1} = \frac{100 \times (3.1 - 1)}{0.12} \\ &= 1750 \text{ (만 원)} \end{aligned}$$

(2) 10년 후의 원리합계를 S 라고 하면

$$\begin{aligned} S &= 300 + 300 \times 1.05 + 300 \times 1.05^2 + \cdots + 300 \times 1.05^9 \\ &= \frac{300 \times (1.05^{10} - 1)}{1.05 - 1} = \frac{300 \times (1.6 - 1)}{0.05} \\ &= 3600 \text{ (만 원)} \end{aligned}$$

(3) 10년 후의 원리합계를 S 라고 하면

$$\begin{aligned} S &= 80 + 80 \times 1.04 + 80 \times 1.04^2 + \cdots + 80 \times 1.04^9 \\ &= \frac{80 \times (1.04^{10} - 1)}{1.04 - 1} = \frac{80 \times (1.5 - 1)}{0.04} \\ &= 1000 \text{ (만 원)} \end{aligned}$$

중단원 점검문제 | Ⅲ-1 등차수열과 등비수열 158-159쪽

01 **답** $a_n = 6n - 8$

풀이 등차수열의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$a + 5d = 28 \quad \cdots \textcircled{7}$$

$$a + 9d = 52 \quad \cdots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 을 연립하여 풀면 $a = -2$, $d = 6$

따라서 일반항은 $a_n = -2 + (n-1) \times 6 = 6n - 8$

02 **답** 3

풀이 등차수열의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$a_1 + a_2 = a + a + d = 2a + d$$

$$a_3 + a_4 = a + 2d + a + 3d = 2a + 5d$$

$$(a_1 + a_2) : (a_3 + a_4) = 2 : 3 \text{에서}$$

$$(2a + d) : (2a + 5d) = 2 : 3, 3(2a + d) = 2(2a + 5d)$$

$$6a + 3d = 4a + 10d, 2a = 7d \quad \therefore d = \frac{2}{7}a$$

$$\therefore \frac{a_8}{a_1} = \frac{a + 7d}{a} = \frac{a + 7 \times \frac{2}{7}a}{a} = \frac{3a}{a} = 3$$

03 **답** 제16항

풀이 등차수열의 첫째항을 a , 공차를 d , 일반항을 a_n 이라고 하면

$$a + 2d = 51 \quad \cdots \textcircled{7}$$

$$a + 6d = 35 \quad \cdots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 을 연립하여 풀면 $a = 59$, $d = -4$

$$\therefore a_n = 59 + (n-1) \times (-4) = -4n + 63$$

제 n 항이 처음으로 음수가 된다고 하면

$$-4n + 63 < 0, -4n < -63$$

$$\therefore n > 15.75$$

이때 n 이 자연수이므로 제16항이 처음으로 음수가 된다.

04 **답** 30

풀이 두 수 3과 102 사이에 10개의 수를 넣으면 첫째항이 3, 제12항이 102가 된다.

첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$a = 3, a + 11d = 102 \quad \therefore d = 9$$

$$\therefore a_3 = 3 + 3 \times 9 = 30$$

05 **답** 10

풀이 등차수열을 이루는 세 수를 $a-d$, a , $a+d$ 라고 하면

$$(a-d) + a + (a+d) = 18 \text{에서 } 3a = 18 \quad \therefore a = 6$$

$$(a-d)^2 + a^2 + (a+d)^2 = 140 \text{에서 } 3a^2 + 2d^2 = 140$$

이 식에 $a=6$ 을 대입하면 $3 \times 6^2 + 2d^2 = 140$

$$2d^2 = 32, d^2 = 16 \quad \therefore d = \pm 4$$

(i) $a=6$, $d=4$ 일 때, 세 수는 2, 6, 10이다.

(ii) $a=6$, $d=-4$ 일 때, 세 수는 10, 6, 2이다.

따라서 세 수는 2, 6, 10이므로 이 중에서 가장 큰 수는 10이다.

06 **답** $a_n = -2n + 32$

풀이 등차수열의 공차를 d , 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하면

$$S_{10} = \frac{10 \times \{2 \times 30 + (10-1) \times d\}}{2} = 210$$

$$60 + 9d = 42, 9d = -18$$

$$\therefore d = -2$$

따라서 등차수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = 30 + (n-1) \times (-2) = -2n + 32$$

07 **답** 480

풀이 등차수열의 첫째항을 a , 공차를 d , 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하면

$$S_5 = \frac{5 \times \{2a + (5-1) \times d\}}{2} = -10$$

$$\therefore 2a + 4d = -4 \quad \cdots \textcircled{7}$$

$$S_{10} = \frac{10 \times \{2a + (10-1) \times d\}}{2} = 80$$

$$\therefore 2a + 9d = 16 \quad \cdots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 을 연립하여 풀면 $a = -10$, $d = 4$

따라서 이 등차수열의 제11항부터 제20항까지의 합은 첫째항부터 제20항까지의 합에서 첫째항부터 제10항까지의 합을 빼면 되므로

$$\begin{aligned} S_{20} - S_{10} &= \frac{20 \times \{2 \times (-10) + (20-1) \times 4\}}{2} - 80 \\ &= 560 - 80 = 480 \end{aligned}$$

08 **답** $a_n = 6n - 5$

풀이 (i) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 3 \times 1^2 - 2 \times 1 = 1$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (3n^2 - 2n) - \{3(n-1)^2 - 2(n-1)\} \\ &= 6n - 5 \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

그런데 $a_1 = 1$ 은 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로

$$a_n = 6n - 5$$

09 답 $a_n = 3 \times 2^{n-2}$

풀이 등비수열의 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$$\begin{aligned} a_n &= ar^{n-1} \\ a_2 &= 3 \text{이므로 } ar = 3 \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_5 = 24 \text{이므로 } ar^4 = 24 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면 } \frac{ar^4}{ar} = \frac{24}{3} \quad \therefore r^3 = 8$$

이때 r 는 실수이므로 $r = 2$

이 값을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$2a = 3 \quad \therefore a = \frac{3}{2}$$

$$\therefore a_n = \frac{3}{2} \times 2^{n-1} = 3 \times 2^{n-2}$$

10 답 48

풀이 등비수열의 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$$\begin{aligned} a_2 + a_3 &= 18 \text{에서 } ar + ar^2 = 18 \\ \therefore ar(1+r) &= 18 \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_4 = 24 \text{에서 } ar^3 = 24 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면 } \frac{r^2}{(1+r)} = \frac{4}{3}$$

$$3r^2 - 4r - 4 = 0, (3r+2)(r-2) = 0$$

이때 r 는 양수이므로 $r = 2$

$$\text{이 값을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } 2a \times 3 = 18 \quad \therefore a = 3$$

$$\therefore a_5 = ar^4 = 3 \times 2^4 = 48$$

11 답 8

풀이 등비수열의 첫째항이 4, 제6항이 128이므로 공비를 r , 일반항을 a_n 이라고 하면

$$a_n = 4 \times r^{n-1}$$

$$a_6 = 4 \times r^5 = 128 \text{에서 } r^5 = 32$$

이때 r 는 실수이므로 $r = 2$

4에서부터 128까지 공비 2씩 곱해 가면

4, 8, 16, 32, 64, 128

따라서 네 수는 8, 16, 32, 64이므로 이 중에서 가장 작은 수는 8이다.

12 답 제13항

풀이 등비수열의 첫째항을 a , 공비를 r , 일반항을 a_n 이라고 하면

$$\begin{aligned} a_n &= ar^{n-1} \\ a_3 &= 5 \text{이므로 } ar^2 = 5 \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_6 = 40 \text{이므로 } ar^5 = 40 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면 } \frac{ar^5}{ar^2} = \frac{40}{5} \quad \therefore r^3 = 8$$

이때 r 는 실수이므로 $r = 2$

$$\text{이 값을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } 4a = 5 \quad \therefore a = \frac{5}{4}$$

$$\therefore a_n = \frac{5}{4} \times 2^{n-1} = 5 \times 2^{n-3}$$

제 n 항이 처음으로 3000보다 커진다고 하면

$$5 \times 2^{n-3} > 3000, 2^{n-3} > 600$$

이때 $2^9 = 512, 2^{10} = 1024$ 이고 n 은 자연수이므로

$$n-3 \geq 10, n \geq 13$$

따라서 처음으로 3000보다 커지는 항은 제13항이다.

13 답 10

풀이 세 수 2, x , y 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$x = \frac{2+y}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

세 수 x , y , 9가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$y^2 = 9x \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{을 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } y^2 = 9 \times \frac{2+y}{2}$$

$$2y^2 - 9y - 18 = 0, (2y+3)(y-6) = 0$$

이때 y 는 양수이므로 $y = 6$

이 값을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $x = 4$

$$\therefore x + y = 10$$

14 답 $\frac{1}{3}$

풀이 등비수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하면

$$S_6 = \frac{a(2^6 - 1)}{2 - 1} = 21, 63a = 21$$

$$\therefore a = \frac{1}{3}$$

15 답 -3

풀이 등비수열의 일반항을 a_n 이라고 하면

(i) $n = 1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 9 + k \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (3^{n+1} + k) - (3^n + k) \\ &= 3^{n+1} - 3^n \\ &= 3^n(3 - 1) = 2 \times 3^n \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

첫째항부터 등비수열을 이루려면 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값이

$\textcircled{2}$ 과 같아야 하므로

$$2 \times 3^1 = 9 + k, 6 = 9 + k \quad \therefore k = -3$$

16 답 5544만 원

풀이 30년 후의 원리합계를 S 라고 하면

$$\begin{aligned} S &= 80 \times 1.05 + 80 \times 1.05^2 + \dots + 80 \times 1.05^{30} \\ &= \frac{80 \times 1.05 \times (1.05^{30} - 1)}{1.05 - 1} \\ &= \frac{80 \times 1.05 \times (4.3 - 1)}{0.05} \\ &= 5544 \text{ (만 원)} \end{aligned}$$

01 답 (1) $2+4+6+8+10$

(2) $3+3^2+3^3+3^4$

(또는 $3+9+27+81$)

(3) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$

(4) $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5 + 5 \times 6 + 6 \times 7$

(또는 $2+6+12+20+30+42$)

(5) $2+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\frac{5}{4}+\frac{6}{5}$

(6) $8+11+14+\dots+(3n+5)$

(7) $1+2+4+\dots+2^{n-1}$

(8) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\dots+\frac{1}{2n-1}$

(9) $\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\dots+\frac{1}{n(n+2)}$

(10) $-1+2-3+\dots+(-1)^n \times n$

풀이 (1) $2k$ 의 k 에 1부터 5까지 대입하여 더한 것이므로

$$\sum_{k=1}^5 2k = 2+4+6+8+10$$

(2) 3^k 의 k 에 1부터 4까지 대입하여 더한 것이므로

$$\sum_{k=1}^4 3^k = 3+3^2+3^3+3^4$$

(3) $\frac{1}{i}$ 의 i 에 1부터 7까지 대입하여 더한 것이므로

$$\sum_{i=1}^7 \frac{1}{i} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$$

(4) $j(j+1)$ 의 j 에 1부터 6까지 대입하여 더한 것이므로

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^6 j(j+1) &= 1 \times (1+1) + 2 \times (2+1) + 3 \times (3+1) \\ &\quad + 4 \times (4+1) + 5 \times (5+1) + 6 \times (6+1) \\ &= 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5 + 5 \times 6 + 6 \times 7 \end{aligned}$$

(5) $\frac{k+1}{k}$ 의 k 에 1부터 5까지 대입하여 더한 것이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^5 \frac{k+1}{k} &= \frac{1+1}{1} + \frac{2+1}{2} + \frac{3+1}{3} + \frac{4+1}{4} + \frac{5+1}{5} \\ &= 2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \frac{6}{5} \end{aligned}$$

(6) $3k+5$ 의 k 에 1부터 n 까지 대입하여 더한 것이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (3k+5) &= (3 \times 1 + 5) + (3 \times 2 + 5) + (3 \times 3 + 5) \\ &\quad + \dots + (3n + 5) \\ &= 8 + 11 + 14 + \dots + (3n + 5) \end{aligned}$$

(7) 2^{k-1} 의 k 에 1부터 n 까지 대입하여 더한 것이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n 2^{k-1} &= 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} \\ &= 1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1} \end{aligned}$$

(8) $\frac{1}{2i-1}$ 의 i 에 1부터 n 까지 대입하여 더한 것이므로

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2i-1} &= \frac{1}{2-1} + \frac{1}{4-1} + \frac{1}{6-1} + \dots + \frac{1}{2n-1} \\ &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} \end{aligned}$$

(9) $\frac{1}{j(j+2)}$ 의 j 에 1부터 n 까지 대입하여 더한 것이므로

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j(j+2)} &= \frac{1}{1 \times (1+2)} + \frac{1}{2 \times (2+2)} + \frac{1}{3 \times (3+2)} + \dots \\ &\quad + \frac{1}{n(n+2)} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{3 \times 5} + \dots + \frac{1}{n(n+2)}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{n(n+2)}$$

(10) $(-1)^k \times k$ 의 k 에 1부터 n 까지 대입하여 더한 것이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (-1)^k \times k &= (-1)^1 \times 1 + (-1)^2 \times 2 + (-1)^3 \times 3 \\ &\quad + (-1)^4 \times 4 + \dots + (-1)^n \times n \\ &= -1 + 2 - 3 + 4 + \dots + (-1)^n \times n \end{aligned}$$

02 답 (1) $\sum_{k=1}^n (2k+1)$

(2) $\sum_{k=1}^n (2k-1)$

(3) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}$

(4) $\sum_{k=1}^n 7^{k-1}$

(5) $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$

(6) $\sum_{k=1}^9 (k^2+k)$

(7) $\sum_{k=1}^{10} (3k-2)$

(8) $\sum_{k=1}^8 \frac{k}{k+1}$

(9) $\sum_{k=1}^{30} 3k$

(10) $\sum_{k=1}^{20} 5^k$

풀이 (1) $2k+1$ 의 k 에 1부터 n 까지 대입하여 더한 것이므로

$$3+5+7+\dots+(2n+1) = \sum_{k=1}^n (2k+1)$$

(2) $2k-1$ 의 k 에 1부터 n 까지 대입하여 더한 것이므로

$$1+3+5+\dots+(2n-1) = \sum_{k=1}^n (2k-1)$$

(3) $\frac{1}{2^k}$ 의 k 에 1부터 n 까지 대입하여 더한 것이므로

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}$$

(4) 7^{k-1} 의 k 에 1부터 n 까지 대입하여 더한 것이므로

$$1+7+7^2+\dots+7^{n-1} = \sum_{k=1}^n 7^{k-1}$$

(5) $\frac{(-1)^k}{k}$ 의 k 에 1부터 n 까지 대입하여 더한 것이므로

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{(-1)^k}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$$

(6) $k(k+1)$ 의 k 에 1부터 9까지 대입하여 더한 것이므로

$$\begin{aligned} 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + 9 \times 10 \\ = \sum_{k=1}^9 k(k+1) = \sum_{k=1}^9 (k^2+k) \end{aligned}$$

(7) $3k-2$ 의 k 에 1부터 10까지 대입하여 더한 것이므로

$$1+4+7+\dots+28 = \sum_{k=1}^{10} (3k-2)$$

(8) $\frac{k}{k+1}$ 의 k 에 1부터 8까지 대입하여 더한 것이므로

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{8}{9} = \sum_{k=1}^8 \frac{k}{k+1}$$

(9) $3k$ 의 k 에 1부터 30까지 대입하여 더한 것이므로

$$3+6+9+\dots+90 = \sum_{k=1}^{30} 3k$$

(10) 5^k 의 k 에 1부터 20까지 대입하여 더한 것이므로

$$5+5^2+5^3+\dots+5^{20} = \sum_{k=1}^{20} 5^k$$

03 답 (1) 35

(2) 50

$$\begin{aligned} \text{풀이} \quad (1) \sum_{k=1}^{10} (a_k + 1)^2 &= \sum_{k=1}^{10} (a_k^2 + 2a_k + 1) \\ &= \sum_{k=1}^{10} a_k^2 + 2 \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} 1 \\ &= 15 + 2 \times 5 + 10 = 35 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \sum_{k=1}^{10} (2a_k - 1)^2 &= \sum_{k=1}^{10} (4a_k^2 - 4a_k + 1) \\ &= 4 \sum_{k=1}^{10} a_k^2 - 4 \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} 1 \\ &= 4 \times 15 - 4 \times 5 + 10 = 50 \end{aligned}$$

04 답 (1) 80

(2) 20

$$\begin{aligned} \text{풀이} \quad (1) \sum_{k=1}^{10} (2a_k + 4b_k) &= 2 \sum_{k=1}^{10} a_k + 4 \sum_{k=1}^{10} b_k \\ &= 2 \times 10 + 4 \times 15 = 80 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \sum_{k=1}^{10} (-a_k + 2b_k) &= - \sum_{k=1}^{10} a_k + 2 \sum_{k=1}^{10} b_k \\ &= -10 + 2 \times 15 = 20 \end{aligned}$$

05 답 (1) 40

(2) 90

(3) 1

(4) 187

$$\begin{aligned} \text{풀이} \quad (1) \sum_{k=1}^{10} (k+2) - \sum_{k=1}^{10} (k-2) &= \sum_{k=1}^{10} \{(k+2) - (k-2)\} \\ &= \sum_{k=1}^{10} 4 = 4 \times 10 = 40 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \sum_{k=1}^{10} (k^2 + 4) - \sum_{k=1}^{10} (k^2 - 5) &= \sum_{k=1}^{10} \{(k^2 + 4) - (k^2 - 5)\} \\ &= \sum_{k=1}^{10} 9 = 9 \times 10 = 90 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \sum_{k=1}^{10} (k^2 - 2) - \sum_{k=3}^{10} (k^2 - 2) &= \sum_{k=1}^2 (k^2 - 2) \\ &= (1^2 - 2) + (2^2 - 2) \\ &= -1 + 2 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \sum_{k=1}^{10} (k^2 + 3) - \sum_{k=1}^8 (k^2 + 3) &= \sum_{k=9}^{10} (k^2 + 3) \\ &= (9^2 + 3) + (10^2 + 3) \\ &= 84 + 103 = 187 \end{aligned}$$

06 답 (1) $n^2 - 4n$

(2) 95

$$(3) \frac{4}{3}n^3 + 4n^2 + \frac{11}{3}n \quad (4) 450$$

$$\begin{aligned} \text{풀이} \quad (1) \sum_{k=1}^n (2k - 5) &= \sum_{k=1}^n 2k - \sum_{k=1}^n 5 = 2 \sum_{k=1}^n k - 5n \\ &= 2 \times \frac{n(n+1)}{2} - 5n = n^2 - 4n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \sum_{k=1}^{10} (k+4) &= \sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} 4 = \frac{10 \times 11}{2} + 4 \times 10 \\ &= 55 + 40 = 95 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \sum_{k=1}^n (2k+1)^2 &= \sum_{k=1}^n (4k^2 + 4k + 1) \\ &= 4 \sum_{k=1}^n k^2 + 4 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 \\ &= 4 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &\quad + 4 \times \frac{n(n+1)}{2} + n \\ &= \frac{4}{3}n^3 + 4n^2 + \frac{11}{3}n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \sum_{k=1}^{10} (k^2 + k + 1) &= \sum_{k=1}^{10} k^2 + \sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} 1 \\ &= \frac{10 \times 11 \times 21}{6} + \frac{10 \times 11}{2} + 10 \\ &= 385 + 55 + 10 = 450 \end{aligned}$$

07 답 (1) -58

(2) 408

(3) 123

(4) 5454

$$\begin{aligned} \text{풀이} \quad (1) \sum_{k=1}^5 (2^k - 8k) &= \sum_{k=1}^5 2^k - 8 \sum_{k=1}^5 k \\ &= 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 - 8 \times \frac{5 \times 6}{2} \\ &= \frac{2 \times (2^5 - 1)}{2 - 1} - 120 \\ &= 62 - 120 = -58 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \sum_{k=1}^5 (3^k + 3k) &= \sum_{k=1}^5 3^k + 3 \sum_{k=1}^5 k \\ &= 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3 \times \frac{5 \times 6}{2} \\ &= \frac{3 \times (3^5 - 1)}{3 - 1} + 45 \\ &= 363 + 45 = 408 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \sum_{k=1}^6 (2^{k-1} + 10) &= \sum_{k=1}^6 2^{k-1} + \sum_{k=1}^6 10 \\ &= 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 10 \times 6 \\ &= \frac{2^6 - 1}{2 - 1} + 60 \\ &= 63 + 60 = 123 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \sum_{k=1}^6 (4^k - 1) &= \sum_{k=1}^6 4^k - \sum_{k=1}^6 1 \\ &= 4^1 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + 4^5 + 4^6 - 1 \times 6 \\ &= \frac{4 \times (4^6 - 1)}{4 - 1} - 6 \\ &= 5460 - 6 = 5454 \end{aligned}$$

08 답 (1) $S_n = \frac{n(n+1)(4n-1)}{3}$ (2) $S_n = n(n+1)(2n-1)$

(3) $S_n = 4^n - 1$

풀이 (1) 제 k 항을 a_k 라고 하면

$$a_k = (2k-1) \times 2k = 4k^2 - 2k$$

$$\begin{aligned} \therefore S_n &= \sum_{k=1}^n (4k^2 - 2k) = 4 \sum_{k=1}^n k^2 - 2 \sum_{k=1}^n k \\ &= 4 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2 \times \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(4n-1)}{3} \end{aligned}$$

(2) 제 k 항을 a_k 라고 하면

$$a_k = 2k \times (3k-2) = 6k^2 - 4k$$

$$\begin{aligned} \therefore S_n &= \sum_{k=1}^n (6k^2 - 4k) = 6 \sum_{k=1}^n k^2 - 4 \sum_{k=1}^n k \\ &= 6 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4 \times \frac{n(n+1)}{2} \\ &= n(n+1)(2n-1) \end{aligned}$$

(3) 제 k 항을 a_k 라고 하면

$$a_k = 3 \times 4^{k-1}$$

$$\begin{aligned} \therefore S_n &= \sum_{k=1}^n (3 \times 4^{k-1}) = 3 \sum_{k=1}^n 4^{k-1} \\ &= 3 \times \frac{4^n - 1}{4 - 1} \\ &= 4^n - 1 \end{aligned}$$

09 답 (1) $S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

(2) $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $S_n = \frac{4^{n+1}}{9} - \frac{n}{3} - \frac{4}{9}$

풀이 (1) 제k항을 a_k 라고 하면

$$a_k = 1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k^2}{2} + \frac{k}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore S_n &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{k^2}{2} + \frac{k}{2} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \end{aligned}$$

(2) 제k항을 a_k 라고 하면

$$a_k = 1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) = \frac{k\{1+(2k-1)\}}{2} = k^2$$

$$\therefore S_n = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(3) 제k항을 a_k 라고 하면

$$a_k = 1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^{k-1} = \frac{4^k - 1}{4 - 1} = \frac{4^k}{3} - \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore S_n &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{4^k}{3} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n 4^k - \sum_{k=1}^n \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{4(4^n - 1)}{4 - 1} - \frac{n}{3} \\ &= \frac{4^{n+1}}{9} - \frac{n}{3} - \frac{4}{9} \end{aligned}$$

10 답 28

풀이 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k = n^2 - 2n$ 이라고 하면

(i) $n=1$ 일 때, $a_1 = S_1 = -1$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (n^2 - 2n) - \{(n-1)^2 - 2(n-1)\} \\ &= 2n - 3 \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

그런데 $a_1 = -1$ 은 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같다.

$$\therefore a_n = 2n - 3$$

$$a_{2k} = 2 \times 2k - 3 = 4k - 3 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^4 a_{2k} &= \sum_{k=1}^4 (4k - 3) = 4 \sum_{k=1}^4 k - \sum_{k=1}^4 3 \\ &= 4 \times \frac{4 \times 5}{2} - 3 \times 4 = 40 - 12 = 28 \end{aligned}$$

11 답 80

풀이 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k = n^2 - n$ 이라고 하면

(i) $n=1$ 일 때, $a_1 = S_1 = 0$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (n^2 - n) - \{(n-1)^2 - (n-1)\} \\ &= 2n - 2 \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

그런데 $a_1 = 0$ 은 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같다.

$$\therefore a_n = 2n - 2$$

$$a_{3k} = 2 \times 3k - 2 = 6k - 2 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^5 a_{3k} &= \sum_{k=1}^5 (6k - 2) = 6 \sum_{k=1}^5 k - \sum_{k=1}^5 2 \\ &= 6 \times \frac{5 \times 6}{2} - 2 \times 5 = 90 - 10 = 80 \end{aligned}$$

12 답 102

풀이 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k = n^2 + 2n$ 이라고 하면

(i) $n=1$ 일 때, $a_1 = S_1 = 3$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (n^2 + 2n) - \{(n-1)^2 + 2(n-1)\} \\ &= 2n + 1 \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

그런데 $a_1 = 3$ 은 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같다.

$$\therefore a_n = 2n + 1$$

$$a_{2k+1} = 2(2k+1) + 1 = 4k + 3 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^6 a_{2k+1} &= \sum_{k=1}^6 (4k + 3) = 4 \sum_{k=1}^6 k + \sum_{k=1}^6 3 \\ &= 4 \times \frac{6 \times 7}{2} + 3 \times 6 = 84 + 18 = 102 \end{aligned}$$

13 답 280

풀이 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k = n^2 + 5n$ 이라고 하면

(i) $n=1$ 일 때, $a_1 = S_1 = 6$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (n^2 + 5n) - \{(n-1)^2 + 5(n-1)\} \\ &= 2n + 4 \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

그런데 $a_1 = 6$ 은 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같다.

$$\therefore a_n = 2n + 4$$

$$a_{2k} = 2 \times 2k + 4 = 4k + 4 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^5 (ka_{2k}) &= \sum_{k=1}^5 \{k(4k+4)\} = \sum_{k=1}^5 (4k^2 + 4k) \\ &= 4 \sum_{k=1}^5 k^2 + 4 \sum_{k=1}^5 k \\ &= 4 \times \frac{5 \times 6 \times 11}{6} + 4 \times \frac{5 \times 6}{2} \\ &= 220 + 60 = 280 \end{aligned}$$

14 답 85

풀이 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k = 2^n - 1$ 이라고 하면

(i) $n=1$ 일 때, $a_1 = S_1 = 1$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (2^n - 1) - (2^{n-1} - 1) = 2^n - 2^{n-1} \\ &= 2 \times 2^{n-1} - 2^{n-1} = (2-1) \times 2^{n-1} = 2^{n-1} \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

그런데 $a_1 = 1$ 은 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같다.

$$\therefore a_n = 2^{n-1}$$

$$a_{2k-1} = 2^{(2k-1)-1} = 2^{2(k-1)} = 4^{k-1} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^4 a_{2k-1} &= \sum_{k=1}^4 4^{k-1} = 1 + 4 + 4^2 + 4^3 \\ &= \frac{4^4 - 1}{4 - 1} = \frac{255}{3} = 85 \end{aligned}$$

15 답 2340

풀이 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k = 2^n - 1$ 이라고 하면

(i) $n=1$ 일 때, $a_1 = S_1 = 1$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (2^n - 1) - (2^{n-1} - 1) = 2^n - 2^{n-1} \\ &= 2 \times 2^{n-1} - 2^{n-1} = (2-1) \times 2^{n-1} = 2^{n-1} \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

그런데 $a_1=1$ 은 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같다.

$\therefore a_n = 2^{n-1}$

$a_{3k} = 2^{3k-1}$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^4 a_{3k} &= \sum_{k=1}^4 2^{3k-1} = 2^2 + 2^5 + 2^8 + 2^{11} \\ &= \frac{2^2 \times \{(2^3)^4 - 1\}}{2^3 - 1} = \frac{4 \times 4095}{7} = 2340 \end{aligned}$$

16 답 4920

풀이 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k = 3^n - 1$ 이라고 하면

(i) $n=1$ 일 때, $a_1 = S_1 = 2$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (3^n - 1) - (3^{n-1} - 1) = 3^n - 3^{n-1} \\ &= 3 \times 3^{n-1} - 3^{n-1} = (3-1) \times 3^{n-1} = 2 \times 3^{n-1} \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

그런데 $a_1=2$ 는 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같다.

$\therefore a_n = 2 \times 3^{n-1}$

$a_{2k} = 2 \times 3^{2k-1}$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^4 a_{2k} &= \sum_{k=1}^4 (2 \times 3^{2k-1}) = 2 \sum_{k=1}^4 3^{2k-1} \\ &= 2 \times (3 + 3^3 + 3^5 + 3^7) = 2 \times \frac{3 \times \{(3^2)^4 - 1\}}{3^2 - 1} \\ &= 2 \times \frac{3 \times 6560}{8} = 4920 \end{aligned}$$

17 답 12

풀이 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k = 3^n - 1$ 이라고 하면

(i) $n=1$ 일 때, $a_1 = S_1 = 2$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = (3^n - 1) - (3^{n-1} - 1) = 3^n - 3^{n-1} \\ &= 3 \times 3^{n-1} - 3^{n-1} = (3-1) \times 3^{n-1} = 2 \times 3^{n-1} \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

그런데 $a_1=2$ 는 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같다.

$\therefore a_n = 2 \times 3^{n-1}$

$a_{2k} = 2 \times 3^{2k-1}$, $a_{2k-1} = 2 \times 3^{(2k-1)-1} = 2 \times 3^{2k-2}$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^4 \frac{a_{2k}}{a_{2k-1}} &= \sum_{k=1}^4 \frac{2 \times 3^{2k-1}}{2 \times 3^{2k-2}} = \sum_{k=1}^4 \frac{3^{-1} \times 3^{2k}}{3^{-2} \times 3^{2k}} \\ &= \sum_{k=1}^4 3 = 3 \times 4 = 12 \end{aligned}$$

18 답 (1) 1650

(3) -75

(5) 1911

(7) 196

(9) 195

(2) 0

(4) 225

(6) 900

(8) 70

(10) 840

$$\begin{aligned} \text{풀이 (1)} \quad \sum_{n=1}^{10} (2m+n) &= \sum_{n=1}^{10} 2m + \sum_{n=1}^{10} n \\ &= 20m + \frac{10 \times 11}{2} = 20m + 55 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{주어진 식}) &= \sum_{m=1}^{10} (20m+55) \\ &= 20 \sum_{m=1}^{10} m + \sum_{m=1}^{10} 55 \\ &= 20 \times \frac{10 \times 11}{2} + 55 \times 10 = 1650 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(2)} \quad \sum_{n=1}^7 (m-n) &= \sum_{n=1}^7 m - \sum_{n=1}^7 n = 7m - \frac{7 \times 8}{2} \\ &= 7m - 28 \\ \therefore (\text{주어진 식}) &= \sum_{m=1}^7 (7m-28) = 7 \sum_{m=1}^7 m - \sum_{m=1}^7 28 \\ &= 7 \times \frac{7 \times 8}{2} - 28 \times 7 = 196 - 196 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(3)} \quad \sum_{j=1}^5 (j-2i) &= \sum_{j=1}^5 j - \sum_{j=1}^5 2i = \frac{5 \times 6}{2} - 10i \\ &= 15 - 10i \\ \therefore (\text{주어진 식}) &= \sum_{i=1}^5 (15-10i) = \sum_{i=1}^5 15 - 10 \sum_{i=1}^5 i \\ &= 15 \times 5 - 10 \times \frac{5 \times 6}{2} = 75 - 150 \\ &= -75 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(4)} \quad \sum_{n=1}^5 mn &= m \sum_{n=1}^5 n = m \times \frac{5 \times 6}{2} = 15m \\ \therefore (\text{주어진 식}) &= \sum_{m=1}^5 15m = 15 \sum_{m=1}^5 m \\ &= 15 \times \frac{5 \times 6}{2} = 225 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(5)} \quad \sum_{n=1}^6 m^2 n &= m^2 \sum_{n=1}^6 n = m^2 \times \frac{6 \times 7}{2} = 21m^2 \\ \therefore (\text{주어진 식}) &= \sum_{m=1}^6 21m^2 = 21 \sum_{m=1}^6 m^2 \\ &= 21 \times \frac{6 \times 7 \times 13}{6} = 1911 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(6)} \quad \sum_{j=1}^4 (ij)^2 &= i^2 \sum_{j=1}^4 j^2 = i^2 \times \frac{4 \times 5 \times 9}{6} = 30i^2 \\ \therefore (\text{주어진 식}) &= \sum_{i=1}^4 30i^2 = 30 \sum_{i=1}^4 i^2 \\ &= 30 \times \frac{4 \times 5 \times 9}{6} = 900 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(7)} \quad \sum_{k=1}^j j &= j \times j = j^2 \\ \sum_{j=1}^i j^2 &= \frac{i(i+1)(2i+1)}{6} = \frac{2i^3 + 3i^2 + i}{6} \\ &= \frac{i^3}{3} + \frac{i^2}{2} + \frac{i}{6} \\ \therefore (\text{주어진 식}) &= \sum_{i=1}^6 \left(\frac{i^3}{3} + \frac{i^2}{2} + \frac{i}{6} \right) \\ &= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^6 i^3 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 i^2 + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 i \\ &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{6 \times 7}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \times \frac{6 \times 7 \times 13}{6} \\ &\quad + \frac{1}{6} \times \frac{6 \times 7}{2} \\ &= 147 + \frac{91}{2} + \frac{7}{2} = 196 \end{aligned}$$

$$(8) \sum_{k=1}^j 2k = 2 \sum_{k=1}^j k = 2 \times \frac{j(j+1)}{2} = j^2 + j$$

$$\sum_{j=1}^i (j^2 + j) = \sum_{j=1}^i j^2 + \sum_{j=1}^i j = \frac{i(i+1)(2i+1)}{6} + \frac{i(i+1)}{2}$$

$$= \frac{i^3}{3} + i^2 + \frac{2}{3}i$$

∴ (주어진 식)

$$= \sum_{i=1}^4 \left(\frac{i^3}{3} + i^2 + \frac{2}{3}i \right)$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^4 i^3 + \sum_{i=1}^4 i^2 + \frac{2}{3} \sum_{i=1}^4 i$$

$$= \frac{1}{3} \times \left(\frac{4 \times 5}{2} \right)^2 + \frac{4 \times 5 \times 9}{6} + \frac{2}{3} \times \frac{4 \times 5}{2}$$

$$= \frac{100}{3} + 30 + \frac{20}{3} = 70$$

$$(9) \sum_{k=1}^j 3i = 3ij$$

$$\sum_{j=1}^i 3ij = 3i \sum_{j=1}^i j = 3i \times \frac{i(i+1)}{2} = \frac{3}{2}i^3 + \frac{3}{2}i^2$$

$$\therefore (\text{주어진 식}) = \sum_{i=1}^4 \left(\frac{3}{2}i^3 + \frac{3}{2}i^2 \right)$$

$$= \frac{3}{2} \sum_{i=1}^4 i^3 + \frac{3}{2} \sum_{i=1}^4 i^2$$

$$= \frac{3}{2} \times \left(\frac{4 \times 5}{2} \right)^2 + \frac{3}{2} \times \frac{4 \times 5 \times 9}{6}$$

$$= 150 + 45 = 195$$

$$(10) \sum_{k=1}^j 10 = 10j$$

$$\sum_{j=1}^i 10j = 10 \sum_{j=1}^i j = 10 \times \frac{i(i+1)}{2} = 5i^2 + 5i$$

$$\therefore (\text{주어진 식}) = \sum_{i=1}^7 (5i^2 + 5i)$$

$$= 5 \sum_{i=1}^7 i^2 + 5 \sum_{i=1}^7 i$$

$$= 5 \times \frac{7 \times 8 \times 15}{6} + 5 \times \frac{7 \times 8}{2}$$

$$= 700 + 140 = 840$$

19 답 (1) $\frac{9}{10}$ (2) $\frac{20}{21}$ (3) $\frac{175}{132}$

풀이 제k항을 a_k 라고 하면

$$(1) a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \text{이므로}$$

$$(\text{주어진 식}) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots$$

$$+ \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

$$(2) a_k = \frac{2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \text{이므로}$$

$$(\text{주어진 식}) = \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \dots$$

$$+ \left(\frac{1}{17} - \frac{1}{19}\right) + \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{21}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{21} = \frac{20}{21}$$

$$(3) a_k = \frac{2}{k(k+2)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \text{이므로}$$

(주어진 식)

$$= \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \dots$$

$$+ \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11}\right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{11} - \frac{1}{12} = \frac{175}{132}$$

20 답 (1) $\frac{n(5n+13)}{12(n+2)(n+3)}$ (2) $\frac{n}{2n+1}$

풀이 (1) 주어진 수열의 제n항을 a_n , 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n 이라고 하면

$$a_n = \frac{1}{(n+1)(n+3)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} \right)$$

$$\therefore S_n = \frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{4 \times 6} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots$$

$$+ \frac{1}{(n+1)(n+3)}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) \right.$$

$$+ \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} \right) \left. \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{5n^2 + 13n}{6(n+2)(n+3)} = \frac{n(5n+13)}{12(n+2)(n+3)}$$

(2) 주어진 수열의 제n항을 a_n , 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n 이라고 하면

$$a_n = \frac{1}{(2n)^2 - 1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

$$\therefore S_n = \frac{1}{2^2 - 1} + \frac{1}{4^2 - 1} + \frac{1}{6^2 - 1} + \frac{1}{8^2 - 1} + \dots$$

$$+ \frac{1}{(2n)^2 - 1}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \dots \right.$$

$$+ \left(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-1} \right) + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \left. \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{n}{2n+1}$$

21 답 (1) $\frac{\sqrt{101}-1}{2}$ (2) $10 - \sqrt{2}$ (3) 18

풀이 제k항을 a_k 라고 하면

$$(1) a_k = \frac{1}{\sqrt{2k-1} + \sqrt{2k+1}}$$

$$= \frac{(\sqrt{2k-1} - \sqrt{2k+1})}{(\sqrt{2k-1} + \sqrt{2k+1})(\sqrt{2k-1} - \sqrt{2k+1})}$$

$$= -\frac{1}{2}(\sqrt{2k-1} - \sqrt{2k+1})$$

∴ (주어진 식)

$$= \sum_{k=1}^{50} a_k = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{50} (\sqrt{2k-1} - \sqrt{2k+1})$$

$$= -\frac{1}{2} \times \{ (1 - \sqrt{3}) + (\sqrt{3} - \sqrt{5}) + (\sqrt{5} - \sqrt{7}) + \dots$$

$$+ (\sqrt{97} - \sqrt{99}) + (\sqrt{99} - \sqrt{101}) \}$$

$$= \frac{\sqrt{101}-1}{2}$$

$$\begin{aligned}
 (2) a_k &= \frac{2}{\sqrt{2k+2} + \sqrt{2k}} \\
 &= \frac{2(\sqrt{2k+2} - \sqrt{2k})}{(\sqrt{2k+2} + \sqrt{2k})(\sqrt{2k+2} - \sqrt{2k})} \\
 &= \sqrt{2k+2} - \sqrt{2k} \\
 \therefore (\text{주어진 식}) &= \sum_{k=1}^{49} a_k = \sum_{k=1}^{49} (\sqrt{2k+2} - \sqrt{2k}) \\
 &= (\sqrt{4} - \sqrt{2}) + (\sqrt{6} - \sqrt{4}) + (\sqrt{8} - \sqrt{6}) \\
 &\quad + \cdots + (\sqrt{98} - \sqrt{96}) + (\sqrt{100} - \sqrt{98}) \\
 &= \sqrt{100} - \sqrt{2} = 10 - \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) a_k &= \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} \\
 &= \frac{2(\sqrt{k} - \sqrt{k+1})}{(\sqrt{k} + \sqrt{k+1})(\sqrt{k} - \sqrt{k+1})} \\
 &= -2(\sqrt{k} - \sqrt{k+1}) \\
 \therefore (\text{주어진 식}) &= \sum_{k=1}^{99} a_k = -2 \sum_{k=1}^{99} (\sqrt{k} - \sqrt{k+1}) \\
 &= -2 \times \{ (1 - \sqrt{2}) + (\sqrt{2} - \sqrt{3}) + (\sqrt{3} - \sqrt{4}) + \cdots \\
 &\quad + (\sqrt{98} - \sqrt{99}) + (\sqrt{99} - \sqrt{100}) \} \\
 &= -2 \times (1 - \sqrt{100}) \\
 &= -2 \times (-9) = 18
 \end{aligned}$$

22 답 (1) $S_n = \sqrt{n+1} - 1$ (2) $S_n = \sqrt{2n+1} - 1$
 (3) $S_n = \sqrt{2n+2} - \sqrt{2}$

풀이 제k항을 a_k 라고 하면

$$\begin{aligned}
 (1) a_k &= \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k+1}}{(\sqrt{k} + \sqrt{k+1})(\sqrt{k} - \sqrt{k+1})} \\
 &= \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \\
 \therefore S_n &= \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \\
 &= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \cdots \\
 &\quad + (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\
 &= \sqrt{n+1} - 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) a_k &= \frac{2}{\sqrt{2k+1} + \sqrt{2k-1}} \\
 &= \frac{2(\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1})}{(\sqrt{2k+1} + \sqrt{2k-1})(\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1})} \\
 &= \sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1} \\
 \therefore S_n &= \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1}) \\
 &= (\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{5} - \sqrt{3}) + (\sqrt{7} - \sqrt{5}) + \cdots \\
 &\quad + (\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}) + (\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}) \\
 &= \sqrt{2n+1} - 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) a_k &= \frac{2}{\sqrt{2k+2} + \sqrt{2k}} \\
 &= \frac{2(\sqrt{2k+2} - \sqrt{2k})}{(\sqrt{2k+2} + \sqrt{2k})(\sqrt{2k+2} - \sqrt{2k})} \\
 &= \sqrt{2k+2} - \sqrt{2k} \\
 \therefore S_n &= \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (\sqrt{2k+2} - \sqrt{2k}) \\
 &= (\sqrt{4} - \sqrt{2}) + (\sqrt{6} - \sqrt{4}) + (\sqrt{8} - \sqrt{6}) + \cdots \\
 &\quad + (\sqrt{2n+2} - \sqrt{2n}) + (\sqrt{2n+2} - \sqrt{2n}) \\
 &= \sqrt{2n+2} - \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

23 답 (1) $\log 66$ (2) 2 (3) $\log 6$ (4) $\log \frac{11}{20}$

(5) 2 (6) 1

풀이 (1) $1 + \frac{2}{k} = \frac{k+2}{k}$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{10} \log \left(1 + \frac{2}{k} \right) &= \sum_{k=1}^{10} \log \frac{k+2}{k} \\
 &= \log \frac{3}{1} + \log \frac{4}{2} + \log \frac{5}{3} + \cdots \\
 &\quad + \log \frac{10}{8} + \log \frac{11}{9} + \log \frac{12}{10} \\
 &= \log \left(\frac{3}{1} \times \frac{4}{2} \times \frac{5}{3} \times \cdots \right. \\
 &\quad \left. \times \frac{10}{8} \times \frac{11}{9} \times \frac{12}{10} \right) \\
 &= \log \frac{11 \times 12}{1 \times 2} = \log 66
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \sum_{k=1}^{99} \log \frac{k+1}{k} &= \log \frac{2}{1} + \log \frac{3}{2} + \log \frac{4}{3} + \cdots + \log \frac{99}{98} + \log \frac{100}{99} \\
 &= \log \left(\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{98}{97} \times \frac{99}{98} \times \frac{100}{99} \right) \\
 &= \log 100 = 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \frac{1}{k+1} + 1 &= \frac{k+2}{k+1} \text{ 이므로} \\
 \sum_{k=1}^{10} \log \left(\frac{1}{k+1} + 1 \right) &= \sum_{k=1}^{10} \log \frac{k+2}{k+1} \\
 &= \log \frac{3}{2} + \log \frac{4}{3} + \log \frac{5}{4} + \cdots \\
 &\quad + \log \frac{10}{9} + \log \frac{11}{10} + \log \frac{12}{11} \\
 &= \log \left(\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} \times \cdots \right. \\
 &\quad \left. \times \frac{10}{9} \times \frac{11}{10} \times \frac{12}{11} \right) \\
 &= \log \frac{12}{2} = \log 6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \frac{k^2-1}{k^2} &= \frac{(k-1)(k+1)}{k \times k} \text{ 이므로} \\
 \sum_{k=2}^{10} \log \frac{k^2-1}{k^2} &= \sum_{k=2}^{10} \log \frac{(k-1)(k+1)}{k \times k} \\
 &= \log \frac{1 \times 3}{2 \times 2} + \log \frac{2 \times 4}{3 \times 3} + \log \frac{3 \times 5}{4 \times 4} + \cdots \\
 &\quad + \log \frac{8 \times 10}{9 \times 9} + \log \frac{9 \times 11}{10 \times 10} \\
 &= \log \left(\frac{1 \times 3}{2 \times 2} \times \frac{2 \times 4}{3 \times 3} \times \frac{3 \times 5}{4 \times 4} \times \cdots \right. \\
 &\quad \left. \times \frac{8 \times 10}{9 \times 9} \times \frac{9 \times 11}{10 \times 10} \right) \\
 &= \log \left(\frac{1}{2} \times \frac{11}{10} \right) = \log \frac{11}{20}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5) \sum_{k=1}^{15} \log_2 \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}} &= \log_2 \frac{\sqrt{2}}{1} + \log_2 \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \log_2 \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}} + \cdots \\
 &\quad + \log_2 \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{14}} + \log_2 \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{15}} \\
 &= \log_2 \left(\frac{\sqrt{2}}{1} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}} \times \cdots \times \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{14}} \times \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{15}} \right) \\
 &= \log_2 \sqrt{16} = \log_2 2^2 = 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(6) \log_{k+1}(k+2) &= \frac{\log(k+2)}{\log(k+1)} \text{이므로} \\
&\sum_{k=1}^{30} [\log_5 \{\log_{k+1}(k+2)\}] \\
&= \sum_{k=1}^{30} \left\{ \log_5 \frac{\log(k+2)}{\log(k+1)} \right\} \\
&= \log_5 \left(\frac{\log 3}{\log 2} \right) + \log_5 \left(\frac{\log 4}{\log 3} \right) + \log_5 \left(\frac{\log 5}{\log 4} \right) + \dots \\
&\quad + \log_5 \left(\frac{\log 31}{\log 30} \right) + \log_5 \left(\frac{\log 32}{\log 31} \right) \\
&= \log_5 \left(\frac{\log 3}{\log 2} \times \frac{\log 4}{\log 3} \times \frac{\log 5}{\log 4} \times \dots \right. \\
&\quad \left. \times \frac{\log 31}{\log 30} \times \frac{\log 32}{\log 31} \right) \\
&= \log_5 \left(\frac{\log 32}{\log 2} \right) = \log_5 \left(\frac{\log 2^5}{\log 2} \right) \\
&= \log_5 \left(\frac{5 \log 2}{\log 2} \right) = \log_5 5 \\
&= 1
\end{aligned}$$

24 답 $\frac{5}{21}$

풀이 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k = n^2 + n$ 이라고 하면

(i) $n=1$ 일 때, $a_1 = S_1 = 1^2 + 1 = 2$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned}
a_n &= S_n - S_{n-1} \\
&= (n^2 + n) - \{(n-1)^2 + (n-1)\} \\
&= 2n \quad \dots \textcircled{1}
\end{aligned}$$

그런데 $a_1=2$ 는 ①에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로

$$a_n = 2n$$

$$a_k = 2k, a_{k+1} = 2(k+1) = 2k+2 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{20} \frac{1}{a_k a_{k+1}} \\
&= \sum_{k=1}^{20} \frac{1}{2k(2k+2)} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{20} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \times \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8} \right) + \dots \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{40} - \frac{1}{42} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{42} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{10}{21} = \frac{5}{21}
\end{aligned}$$

25 답 $\frac{5}{48}$

풀이 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k = n^2 + 3n$ 이라고 하면

(i) $n=1$ 일 때, $a_1 = S_1 = 1^2 + 3 \times 1 = 4$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned}
a_n &= S_n - S_{n-1} \\
&= (n^2 + 3n) - \{(n-1)^2 + 3(n-1)\} \\
&= 2n + 2 \quad \dots \textcircled{1}
\end{aligned}$$

그런데 $a_1=4$ 는 ①에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로

$$a_n = 2n + 2$$

$$a_k = 2k + 2, a_{k+1} = 2(k+1) + 2 = 2k + 4 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{a_k a_{k+1}} \\
&= \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{(2k+2)(2k+4)} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{2k+2} - \frac{1}{2k+4} \right) \\
&= \frac{1}{2} \times \left\{ \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8} \right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10} \right) + \dots \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{22} - \frac{1}{24} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{24} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{24} = \frac{5}{48}
\end{aligned}$$

26 답 $\frac{5}{63}$

풀이 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k = 2n^2 - 3n$ 이라고 하면

(i) $n=1$ 일 때, $a_1 = S_1 = 2 \times 1^2 - 3 \times 1 = -1$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned}
a_n &= S_n - S_{n-1} \\
&= (2n^2 - 3n) - \{2(n-1)^2 - 3(n-1)\} \\
&= 4n - 5 \quad \dots \textcircled{1}
\end{aligned}$$

그런데 $a_1 = -1$ 은 ①에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로

$$a_n = 4n - 5$$

$$a_{k+1} = 4(k+1) - 5 = 4k - 1, a_{k+2} = 4(k+2) - 5 = 4k + 3$$

이므로

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{15} \frac{1}{a_{k+1} a_{k+2}} \\
&= \sum_{k=1}^{15} \frac{1}{(4k-1)(4k+3)} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{15} \left(\frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4k+3} \right) \\
&= \frac{1}{4} \times \left\{ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{11} \right) + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{15} \right) + \dots \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{55} - \frac{1}{59} \right) + \left(\frac{1}{59} - \frac{1}{63} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{63} \right) = \frac{1}{4} \times \frac{20}{63} = \frac{5}{63}
\end{aligned}$$

27 답 4

풀이 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k = n^2 + 8n$ 이라고 하면

(i) $n=1$ 일 때, $a_1 = S_1 = 1^2 + 8 \times 1 = 9$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned}
a_n &= S_n - S_{n-1} \\
&= (n^2 + 8n) - \{(n-1)^2 + 8(n-1)\} \\
&= 2n + 7 \quad \dots \textcircled{1}
\end{aligned}$$

그런데 $a_1=9$ 은 ①에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로

$$a_n = 2n + 7$$

$$a_k = 2k + 7, a_{k+1} = 2(k+1) + 7 = 2k + 9 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{20} \frac{1}{\sqrt{a_{k+1}} + \sqrt{a_k}} \\
&= \sum_{k=1}^{20} \frac{1}{\sqrt{2k+9} + \sqrt{2k+7}} = \sum_{k=1}^{20} (\sqrt{2k+9} - \sqrt{2k+7}) \\
&= (\sqrt{11} - \sqrt{9}) + (\sqrt{13} - \sqrt{11}) + (\sqrt{15} - \sqrt{13}) + \dots \\
&\quad + (\sqrt{47} - \sqrt{45}) + (\sqrt{49} - \sqrt{47}) \\
&= \sqrt{49} - \sqrt{9} = 7 - 3 = 4
\end{aligned}$$

28 답 8

풀이 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k = 2n^2 - n$ 이라고 하면

(i) $n=1$ 일 때, $a_1 = S_1 = 2 \times 1^2 - 1 = 1$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 2n^2 - n - \{2(n-1)^2 - (n-1)\} \\ &= 4n - 3 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

그런데 $a_1=1$ 은 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로

$$a_n = 4n - 3$$

$a_k = 4k - 3$, $a_{k+1} = 4(k+1) - 3 = 4k + 1$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{20} \frac{4}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} &= \sum_{k=1}^{20} \frac{4}{\sqrt{4k-3} + \sqrt{4k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^{20} (\sqrt{4k+1} - \sqrt{4k-3}) \\ &= (\sqrt{9} - \sqrt{1}) + (\sqrt{13} - \sqrt{9}) + (\sqrt{17} - \sqrt{13}) + \dots \\ &\quad + (\sqrt{81} - \sqrt{77}) + (\sqrt{81} - \sqrt{77}) \\ &= \sqrt{81} - \sqrt{1} = 9 - 1 = 8 \end{aligned}$$

29 답 3

풀이 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k = 2n^2 + n$ 이라고 하면

(i) $n=1$ 일 때, $a_1 = S_1 = 2 \times 1^2 + 1 = 3$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 2n^2 + n - \{2(n-1)^2 + (n-1)\} \\ &= 4n - 1 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

그런데 $a_1=3$ 은 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로

$$a_n = 4n - 1$$

$a_k = 4k - 1$, $a_{k+1} = 4(k+1) - 1 = 4k + 3$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{15} \frac{2}{\sqrt{a_k+1} + \sqrt{a_{k+1}+1}} &= \sum_{k=1}^{15} \frac{2}{\sqrt{4k} + \sqrt{4k+4}} = \sum_{k=1}^{15} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^{15} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \\ &= (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \dots \\ &\quad + (\sqrt{15} - \sqrt{14}) + (\sqrt{16} - \sqrt{15}) \\ &= \sqrt{16} - \sqrt{1} = 4 - 1 = 3 \end{aligned}$$

- 30 답 (1) $\frac{19}{4} \times 3^{11} + \frac{3}{4}$ (2) $\frac{29}{9} \times 4^{10} + \frac{1}{9}$
(3) $2^{11} - 12$ (4) $-3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^8 + 2$

풀이 (1) 등비수열의 공비가 3이므로 주어진 식의 양변에 3을 곱하여 변끼리 빼면

$$\begin{aligned} S &= 1 \times 3 + 2 \times 3^2 + 3 \times 3^3 + \dots + 10 \times 3^{10} \\ -) 3S &= 1 \times 3^2 + 2 \times 3^3 + \dots + 9 \times 3^{10} + 10 \times 3^{11} \\ -2S &= (3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{10}) - 10 \times 3^{11} \\ &= \frac{3 \times (3^{10} - 1)}{3 - 1} - 10 \times 3^{11} \\ &= \frac{3}{2} \times (3^{10} - 1) - 10 \times 3^{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore S &= -\frac{3}{4} \times (3^{10} - 1) + 5 \times 3^{11} \\ &= \frac{19}{4} \times 3^{11} + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

(2) 등비수열의 공비가 4이므로 주어진 식의 양변에 4를 곱하여 변끼리 빼면

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 \times 4 + 3 \times 4^2 + \dots + 10 \times 4^9 \\ -) 4S &= 1 \times 4 + 2 \times 4^2 + \dots + 9 \times 4^9 + 10 \times 4^{10} \\ -3S &= (1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^9) - 10 \times 4^{10} \\ &= \frac{4^{10} - 1}{4 - 1} - 10 \times 4^{10} \\ &= \frac{4^{10} - 1}{3} - 10 \times 4^{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore S &= -\frac{1}{9} \times (4^{10} - 1) + \frac{10}{3} \times 4^{10} \\ &= \frac{29}{9} \times 4^{10} + \frac{1}{9} \end{aligned}$$

(3) 등비수열의 공비가 2이므로 주어진 식의 양변에 2를 곱하여 변끼리 빼면

$$\begin{aligned} S &= 10 \times 1 + 9 \times 2 + 8 \times 2^2 + \dots + 1 \times 2^9 \\ -) 2S &= 10 \times 2 + 9 \times 2^2 + \dots + 2 \times 2^9 + 1 \times 2^{10} \\ -S &= 10 \times 1 - (2 + 2^2 + \dots + 2^9 + 2^{10}) \\ &= 10 - \frac{2 \times (2^{10} - 1)}{2 - 1} \\ &= 10 - 2 \times (2^{10} - 1) = -2^{11} + 12 \end{aligned}$$

$$\therefore S = 2^{11} - 12$$

(4) 등비수열의 공비가 $\frac{1}{2}$ 이므로 주어진 식의 양변에 $\frac{1}{2}$ 을 곱하여 변끼리 빼면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{10}{2^{10}} \\ -) \frac{1}{2}S &= \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \dots + \frac{9}{2^{10}} + \frac{10}{2^{11}} \\ \frac{1}{2}S &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{10}}\right) - \frac{10}{2^{11}} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \times \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{10}{2^{11}} \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} - \left(\frac{1}{2^{10}} \times \frac{10}{2}\right) \\ &= (-1 - 5) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + 1 \\ &= -6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + 1 = -3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^9 + 1 \\ \therefore S &= -3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^8 + 2 \end{aligned}$$

중단원 점검문제 | Ⅲ-2 수열의 합

172-173쪽

01 답 230

$$\begin{aligned} \text{풀이 } \sum_{k=1}^{20} (3a_k - 1)^2 &= \sum_{k=1}^{20} (9a_k^2 - 6a_k + 1) \\ &= 9 \sum_{k=1}^{20} a_k^2 - 6 \sum_{k=1}^{20} a_k + \sum_{k=1}^{20} 1 \\ &= 9 \times 30 - 6 \times 10 + 1 \times 20 \\ &= 270 - 60 + 20 = 230 \end{aligned}$$

02 답 70

$$\begin{aligned}\text{풀이} \quad \sum_{k=1}^{10} (2a_k - b_k + 7) &= 2 \sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{10} b_k + \sum_{k=1}^{10} 7 \\ &= 2 \times 8 - 16 + 7 \times 10 \\ &= 16 - 16 + 70 = 70\end{aligned}$$

03 답 50

$$\begin{aligned}\text{풀이} \quad \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2 &= 100 \text{에서} \\ \sum_{k=1}^n (a_k^2 + 2a_k b_k + b_k^2) &= 100 \\ \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) + 2 \sum_{k=1}^n a_k b_k &= 100 \\ \therefore \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) &= 100 - 2 \times 25 = 100 - 50 = 50\end{aligned}$$

04 답 50

$$\begin{aligned}\text{풀이} \quad \sum_{k=1}^{10} (k^2 + 3) - \sum_{k=1}^{10} (k^2 - 2) &= \sum_{k=1}^{10} \{(k^2 + 3) - (k^2 - 2)\} \\ &= \sum_{k=1}^{10} 5 \\ &= 5 \times 10 = 50\end{aligned}$$

05 답 4n

$$\begin{aligned}\text{풀이} \quad \sum_{k=1}^n (k-2)^2 - \sum_{k=1}^n (k^2 - 4k) &= \sum_{k=1}^n \{(k-2)^2 - (k^2 - 4k)\} \\ &= \sum_{k=1}^n (k^2 - 4k + 4 - k^2 + 4k) \\ &= \sum_{k=1}^n 4 = 4n\end{aligned}$$

06 답 13

$$\begin{aligned}\text{풀이} \quad \sum_{k=1}^n (k+1) - \sum_{k=1}^{n-1} (k-1) \\ &= \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 - \sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} 1 \\ &= \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^n 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 1 \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n-1} k + n \right) - \sum_{k=1}^{n-1} k + n + (n-1) \\ &= 3n-1\end{aligned}$$

$$\text{즉, } 3n-1=38 \text{에서 } 3n=39 \quad \therefore n=13$$

07 답 $\frac{2n^3+3n^2-23n}{6}$

$$\begin{aligned}\text{풀이} \quad \sum_{k=1}^n (k+2)(k-2) &= \sum_{k=1}^n (k^2 - 4) = \sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=1}^n 4 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4n \\ &= \frac{2n^3+3n^2+n}{6} - \frac{24n}{6} \\ &= \frac{2n^3+3n^2-23n}{6}\end{aligned}$$

08 답 585

$$\begin{aligned}\text{풀이} \quad \sum_{k=1}^6 (2^k + k^3 + 3) &= \sum_{k=1}^6 2^k + \sum_{k=1}^6 k^3 + \sum_{k=1}^6 3 \\ &= \frac{2 \times (2^6 - 1)}{2 - 1} + \left(\frac{6 \times 7}{2} \right)^2 + 3 \times 6 \\ &= 2 \times 63 + 21^2 + 18 \\ &= 126 + 441 + 18 = 585\end{aligned}$$

09 답 1

풀이 $k=5$ 부터 $k=n+5$ 까지 항의 개수는

$$\begin{aligned}(n+5) - 5 + 1 &= n+1 \\ \therefore \sum_{k=5}^{n+5} (2k+3) &= 2 \sum_{k=5}^{n+5} k + \sum_{k=5}^{n+5} 3 \\ &= 2 \times \{5+6+7+\dots+(n+5)\} + 3(n+1) \\ &= 2 \times \frac{(n+1)\{5+(n+5)\}}{2} + 3(n+1) \\ &= (n+1)(n+10) + 3(n+1) \\ &= n^2 + 14n + 13\end{aligned}$$

즉, $n^2 + 14n + 13 = an^2 + bn + c$ 에서

$$a=1, b=14, c=13$$

$$\therefore \frac{a+c}{b} = \frac{1+13}{14} = 1$$

10 답 $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

풀이 수열의 제 k 항을 a_k 라고 하면

$$a_k = 2 \times \frac{k(k+1)}{2} = k^2 + k$$

주어진 수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하면

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (k^2 + k) \\ &= \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3n(n+1)}{6} \\ &= \frac{2n^3 + 6n^2 + 4n}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}\end{aligned}$$

11 답 310

풀이 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k = n^2 + 10n$ 이라고 하면

(i) $n=1$ 일 때, $a_1 = S_1 = 1^2 + 10 \times 1 = 11$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned}a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (n^2 + 10n) - \{(n-1)^2 + 10(n-1)\} \\ &= 2n+9\end{aligned}$$

..... ㉠

그런데 $a_1=11$ 은 ㉠에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로

$$a_n = 2n+9$$

$$a_{2k} = 2 \times 2k + 9 = 4k + 9 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} a_{2k} &= \sum_{k=1}^{10} (4k+9) = 4 \sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} 9 \\ &= 4 \times \frac{10 \times 11}{2} + 9 \times 10 \\ &= 220 + 90 = 310\end{aligned}$$

12 답 $n(n+1)(2n+1)$

$$\begin{aligned}\text{풀이} \quad \sum_{k=1}^l (12k-6) &= 12 \sum_{k=1}^l k - \sum_{k=1}^l 6 \\ &= 12 \times \frac{l(l+1)}{2} - 6l \\ &= 6l^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{l=1}^n \left\{ \sum_{k=1}^l (12k-6) \right\} &= \sum_{l=1}^n 6l^2 = 6 \sum_{l=1}^n l^2 \\ &= 6 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= n(n+1)(2n+1)\end{aligned}$$

13 답 8

풀이 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 4, 공차가 2인 등차수열이므로 수열 $\{a_n\}$ 을 첫째항부터 제49항까지 나열하면

$$4, 6, 8, 10, \dots, 98, 100$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{2}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{2}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \frac{2}{\sqrt{a_3}+\sqrt{a_4}} + \dots \\ + \frac{2}{\sqrt{a_{48}}+\sqrt{a_{49}}} \\ = \frac{2}{\sqrt{4}+\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{6}+\sqrt{8}} + \frac{2}{\sqrt{8}+\sqrt{10}} + \dots + \frac{2}{\sqrt{98}+\sqrt{100}} \\ = (\sqrt{6}-\sqrt{4}) + (\sqrt{8}-\sqrt{6}) + (\sqrt{10}-\sqrt{8}) + \dots \\ + (\sqrt{96}-\sqrt{94}) + (\sqrt{98}-\sqrt{96}) + (\sqrt{100}-\sqrt{98}) \\ = \sqrt{100}-\sqrt{4} \\ = 10-2=8\end{aligned}$$

14 답 6

$$\begin{aligned}\text{풀이 } \sum_{k=1}^{48} \frac{1}{f(k, k+1)} \\ = \sum_{k=1}^{48} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \sum_{k=1}^{48} (\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) \\ = (\sqrt{2}-\sqrt{1}) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{4}-\sqrt{3}) + \dots \\ + (\sqrt{47}-\sqrt{46}) + (\sqrt{48}-\sqrt{47}) + (\sqrt{49}-\sqrt{48}) \\ = \sqrt{49}-\sqrt{1} \\ = 7-1=6\end{aligned}$$

15 답 2

$$\begin{aligned}\text{풀이 } \sum_{k=2}^8 \log_6 \left(\frac{k+1}{k-1} \right) \\ = \log_6 \frac{3}{1} + \log_6 \frac{4}{2} + \log_6 \frac{5}{3} + \log_6 \frac{6}{4} \\ + \log_6 \frac{7}{5} + \log_6 \frac{8}{6} + \log_6 \frac{9}{7} \\ = \log_6 \left(\frac{3}{1} \times \frac{4}{2} \times \frac{5}{3} \times \frac{6}{4} \times \frac{7}{5} \times \frac{8}{6} \times \frac{9}{7} \right) \\ = \log_6 \left(\frac{8 \times 9}{1 \times 2} \right) = \log_6 36 \\ = \log_6 6^2 = 2\end{aligned}$$

16 답 $\frac{19}{2} \times 3^{11} + \frac{3}{2}$

풀이 등비수열의 공비가 3이므로 주어진 식의 양변에 3을 곱하여 변끼리 빼면

$$\begin{aligned}S &= 2 \times 3 + 4 \times 3^2 + 6 \times 3^3 + \dots + 20 \times 3^{10} \\ -) 3S &= 2 \times 3^2 + 4 \times 3^3 + \dots + 18 \times 3^{10} + 20 \times 3^{11} \\ -2S &= 2 \times 3 + 2 \times 3^2 + 2 \times 3^3 + \dots + 2 \times 3^{10} - 20 \times 3^{11} \\ &= 2 \times (3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{10}) - 20 \times 3^{11} \\ &= 2 \times \frac{3 \times (3^{10}-1)}{3-1} - 20 \times 3^{11} \\ &= 3^{11} - 3 - 20 \times 3^{11} \\ &= -19 \times 3^{11} - 3 \\ \therefore S &= \frac{19}{2} \times 3^{11} + \frac{3}{2}\end{aligned}$$

III-3 | 수학적 귀납법

174-179쪽

- 01 답** (1) 122 (2) 23 (3) -5
(4) 32 (5) 375 (6) 7
(7) 16 (8) 30

풀이 (1) $n=1$ 일 때, $a_2=3a_1-1=3 \times 5-1=14$

$$n=2\text{일 때, } a_3=3a_2-1=3 \times 14-1=41$$

$$n=3\text{일 때, } a_4=3a_3-1=3 \times 41-1=122$$

(2) $n=1$ 일 때, $a_2=a_1+7=2+7=9$

$$n=2\text{일 때, } a_3=a_2+7=9+7=16$$

$$n=3\text{일 때, } a_4=a_3+7=16+7=23$$

(3) $n=1$ 일 때, $a_2=a_1-3=4-3=1$

$$n=2\text{일 때, } a_3=a_2-3=1-3=-2$$

$$n=3\text{일 때, } a_4=a_3-3=-2-3=-5$$

(4) $n=1$ 일 때, $a_2=2a_1=2 \times 4=8$

$$n=2\text{일 때, } a_3=2a_2=2 \times 8=16$$

$$n=3\text{일 때, } a_4=2a_3=2 \times 16=32$$

(5) $n=1$ 일 때, $a_2=5a_1=5 \times 3=15$

$$n=2\text{일 때, } a_3=5a_2=5 \times 15=75$$

$$n=3\text{일 때, } a_4=5a_3=5 \times 75=375$$

(6) $n=1$ 일 때, $2a_2=a_1+a_3$

$$2 \times 3 = 1 + a_3 \quad \therefore a_3 = 5$$

$$n=2\text{일 때, } 2a_3=a_2+a_4$$

$$2 \times 5 = 3 + a_4 \quad \therefore a_4 = 7$$

(7) $n=1$ 일 때, $a_2^2=a_1a_3$

$$16=2a_3 \quad \therefore a_3=8$$

$$n=2\text{일 때, } a_3^2=a_2a_4$$

$$64=4a_4 \quad \therefore a_4=16$$

(8) $n=1$ 일 때, $a_2=\frac{a_1+a_3}{2}$

$$12=\frac{3+a_3}{2} \quad \therefore a_3=21$$

$$n=2\text{일 때, } a_3=\frac{a_2+a_4}{2}$$

$$21=\frac{12+a_4}{2} \quad \therefore a_4=30$$

- 02 답** (1) $a_n=4n-1$ (2) $a_n=-5n+3$
(3) $a_n=5n-8$ (4) $a_n=6n-1$

풀이 (1) 첫째항이 3, 공차가 4인 등차수열이므로

$$a_n=3+(n-1) \times 4=4n-1$$

(2) 첫째항이 -2, 공차가 -5인 등차수열이므로

$$a_n=-2+(n-1) \times (-5)=-5n+3$$

(3) 첫째항이 -3, 둘째항이 2인 등차수열이고,

$$\text{공차는 } a_2-a_1=2-(-3)=5 \text{ 이므로}$$

$$a_n=-3+(n-1) \times 5=5n-8$$

(4) 첫째항이 5, 둘째항이 11인 등차수열이고,

$$\text{공차는 } a_2-a_1=11-5=6 \text{ 이므로}$$

$$a_n=5+(n-1) \times 6=6n-1$$

- 03 답 (1) $a_n = 2^{3-n}$ (2) $a_n = (-2)^n$
 (3) $a_n = 3^n$ (4) $a_n = -(-2)^{n+1}$

풀이 (1) 첫째항이 4, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로

$$a_n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2^2 \times (2^{-1})^{n-1} = 2^2 \times 2^{1-n} = 2^{3-n}$$

(2) 첫째항이 -2, 공비가 -2인 등비수열이므로

$$a_n = (-2) \times (-2)^{n-1} = (-2)^n$$

(3) 첫째항이 3, 둘째항이 9인 등비수열이고,

$$\text{공비는 } \frac{a_2}{a_1} = \frac{9}{3} = 3 \text{ 이므로}$$

$$a_n = 3 \times 3^{n-1} = 3^n$$

(4) 첫째항이 -4, 둘째항이 8인 등비수열이고,

$$\text{공비는 } \frac{a_2}{a_1} = \frac{8}{-4} = -2 \text{ 이므로}$$

$$a_n = -4 \times (-2)^{n-1} = -(-2)^2 \times (-2)^{n-1} = -(-2)^{n+1}$$

- 04 답 (1) $a_n = \frac{n^2-n+2}{2}$ (2) $a_n = \frac{3n^2-3n+4}{2}$

(3) $a_n = 2^n$

풀이 (1) $a_{n+1} = a_n + n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입한 후 변끼리 더하면

$$a_2 = a_1 + 1$$

$$a_3 = a_2 + 2$$

$$a_4 = a_3 + 3$$

⋮

$$+) a_n = a_{n-1} + n - 1$$

$$a_n = a_1 + \{1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)\}$$

$$\therefore a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} k = a_1 + \frac{n(n-1)}{2}$$

$$= 1 + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2-n+2}{2}$$

(2) $a_{n+1} = a_n + 3n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입한 후 변끼리 더하면

$$a_2 = a_1 + 3$$

$$a_3 = a_2 + 6$$

$$a_4 = a_3 + 9$$

⋮

$$+) a_n = a_{n-1} + 3(n-1)$$

$$a_n = a_1 + \{3 + 6 + 9 + \cdots + 3(n-1)\}$$

$$\therefore a_n = 2 + 3 \times \frac{n(n-1)}{2} = \frac{3n^2-3n+4}{2}$$

(3) $a_{n+1} = a_n + 2^n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입한 후 변끼리 더하면

$$a_2 = a_1 + 2$$

$$a_3 = a_2 + 2^2$$

$$a_4 = a_3 + 2^3$$

⋮

$$+) a_n = a_{n-1} + 2^{n-1}$$

$$a_n = a_1 + (2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1})$$

$$\begin{aligned} \therefore a_n &= 2 + \frac{2 \times (2^{n-1} - 1)}{2 - 1} \\ &= 2 + 2^n - 2 = 2^n \end{aligned}$$

- 05 답 (1) $a_n = 2n$ (2) $a_n = \frac{(n+1)(n+2)}{6}$

(3) $a_n = 3^{\frac{n(n-1)}{2}}$

풀이 (1) $a_{n+1} = \frac{n+1}{n} a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례

대로 대입한 후 변끼리 곱하면

$$a_2 = 2a_1$$

$$a_3 = \frac{3}{2}a_2$$

$$a_4 = \frac{4}{3}a_3$$

⋮

$$\times) a_n = \frac{n}{n-1} a_{n-1}$$

$$a_n = a_1 \times \left(2 \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{n}{n-1}\right)$$

$$\therefore a_n = a_1 \times n = 2n$$

(2) $a_{n+1} = \frac{n+3}{n+1} a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로

대입한 후 변끼리 곱하면

$$a_2 = \frac{4}{2}a_1$$

$$a_3 = \frac{5}{3}a_2$$

$$a_4 = \frac{6}{4}a_3$$

⋮

$$\times) a_n = \frac{n+2}{n} a_{n-1}$$

$$a_n = a_1 \times \left(\frac{4}{2} \times \frac{5}{3} \times \frac{6}{4} \times \frac{7}{5} \times \cdots \times \frac{n}{n-2} \times \frac{n+1}{n-1} \times \frac{n+2}{n}\right)$$

$$\therefore a_n = a_1 \times \frac{(n+1)(n+2)}{2 \times 3} = \frac{(n+1)(n+2)}{6}$$

(3) $a_{n+1} = 3^n a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입한 후 변끼리 곱하면

$$a_2 = 3 \times a_1$$

$$a_3 = 3^2 \times a_2$$

$$a_4 = 3^3 \times a_3$$

⋮

$$\times) a_n = 3^{n-1} \times a_{n-1}$$

$$a_n = a_1 \times (3 \times 3^2 \times 3^3 \times \cdots \times 3^{n-1})$$

$$= a_1 \times 3^{1+2+3+\cdots+(n-1)}$$

$$\therefore a_n = a_1 \times 3^{\frac{n(n-1)}{2}} = 3^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

- 06 답 (1) 9

(2) $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 4$ (단, $n=1, 2, 3, \dots$)

풀이 (1) a_1 L는 10 L의 절반을 버리고 다시 4 L를 넣은 물의 양이므로

$$a_1 = 10 \times \frac{1}{2} + 4 = 9$$

- (2) $(n+1)$ 번 반복한 후 물통에 남아 있는 물의 양 a_{n+1} L
 는 n 번 반복한 후 남은 양의 절반을 버리고 다시 4 L를
 넣은 물의 양이므로

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 4 \quad (\text{단, } n=1, 2, 3, \dots)$$

07 답 (1) 180

- (2) $a_{n+1} = 2a_n - 20$ (단, $n=1, 2, 3, \dots$)

풀이 (1) a_1 은 100마리에서 10마리는 죽고 나머지는 각각 2
 마리로 분열한 것이므로

$$a_1 = (100 - 10) \times 2 = 180$$

- (2) $(n+1)$ 시간 후 살아 있는 세균의 수 a_{n+1} 은 n 시간 후
 살아 있는 세균에서 10마리는 죽고 나머지는 각각 2마리
 로 분열한 것이므로

$$a_{n+1} = (a_n - 10) \times 2$$

$$\therefore a_{n+1} = 2a_n - 20 \quad (\text{단, } n=1, 2, 3, \dots)$$

08 답 풀이 참조

풀이 (1) (i) $n=1$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = 2 \times 1 - 1 = 1, (\text{우변}) = 1^2 = 1$$

이므로 주어진 등식이 성립한다.

- (ii) $n=k$ 일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) = k^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변에 $2k+1$ 을 더하면

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) + (2k+1)$$

$$= k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$$

즉, $n=k+1$ 일 때에도 주어진 등식이 성립한다.

- (i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 등식이 성립
 한다.

- (2) (i) $n=1$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = 2 \times 1 = 2, (\text{우변}) = 1 \times 2 = 2$$

이므로 주어진 등식이 성립한다.

- (ii) $n=k$ 일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2k = k(k+1) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변에 $2k+2$ 를 더하면

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2k + (2k+2)$$

$$= k(k+1) + 2k+2$$

$$= k^2 + 3k + 2$$

$$= (k+1)(k+2)$$

즉, $n=k+1$ 일 때에도 주어진 등식이 성립한다.

- (i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 등식이 성립
 한다.

- (3) (i) $n=1$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = 1^3 = 1, (\text{우변}) = \frac{1^2 \times 2^2}{4} = 1$$

이므로 주어진 등식이 성립한다.

- (ii) $n=k$ 일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변에 $(k+1)^3$ 을 더하면

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3$$

$$= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3$$

$$= \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4}$$

$$= \frac{(k+1)^2 \{k^2 + 4(k+1)\}}{4}$$

$$= \frac{(k+1)^2 (k^2 + 4k + 4)}{4}$$

$$= \frac{(k+1)^2 (k+2)^2}{4}$$

즉, $n=k+1$ 일 때에도 주어진 등식이 성립한다.

- (i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 등식이 성립
 한다.

- (4) (i) $n=1$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = 1 \times 2 = 2, (\text{우변}) = \frac{1 \times 2 \times 3}{3} = 2$$

이므로 주어진 등식이 성립한다.

- (ii) $n=k$ 일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + k(k+1)$$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변에 $(k+1)(k+2)$ 를 더하면

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots$$

$$+ k(k+1) + (k+1)(k+2)$$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2)$$

$$= \frac{k(k+1)(k+2) + 3(k+1)(k+2)}{3}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

$$= \frac{(k+1)\{(k+1)+1\}\{(k+1)+2\}}{3}$$

즉, $n=k+1$ 일 때에도 주어진 등식이 성립한다.

- (i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 등식이 성립
 한다.

09 답 풀이 참조

풀이 (i) $n=1$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = a+b, (\text{우변}) = a+b$$

이므로 주어진 부등식이 성립한다.

- (ii) $n=k$ 일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$(a+b)^k \geq a^k + b^k \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변에 $a+b$ 를 곱하면

$$(a+b)^{k+1} \geq (a^k + b^k)(a+b)$$

$$= a^{k+1} + b^{k+1} + a^k b + a b^k$$

$$> \frac{a^{k+1} + b^{k+1}}{2}$$

$$(\because a > 0, b > 0 \text{이므로 } a^k b + a b^k > 0)$$

$$\therefore (a+b)^{k+1} \geq a^{k+1} + b^{k+1}$$

즉, $n=k+1$ 일 때에도 주어진 부등식이 성립한다.

- (i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 부등식이 성립
 한다.

10 답 풀이 참조

풀이 (i) $n=2$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = 1 + \frac{1}{2^2} = \frac{5}{4}, (\text{우변}) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

이므로 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k$ ($k \geq 2$)일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{k} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변에 $\frac{1}{(k+1)^2}$ 을 더하면

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2}$$

$$\text{이때 } \frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)^2} > 0 \text{이므로}$$

$$2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k+1}$$

$$\therefore 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k+1}$$

즉, $n=k+1$ 일 때에도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

11 답 풀이 참조

풀이 (i) $n=4$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = 3 \times 4 + 2 = 14, (\text{우변}) = 2^4 = 16$$

이므로 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k$ ($k \geq 4$)일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$3k + 2 < 2^k \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변에 3을 더하면

$$(3k+2)+3=3(k+1)+2 < 2^k+3$$

그런데 $k \geq 4$ 인 k 에 대하여

$$2^{k+1} - 2^k = 2^k > 3 \text{이므로 } 2^k + 3 < 2^{k+1}$$

$$\therefore 3(k+1)+2 < 2^{k+1}$$

즉, $n=k+1$ 일 때에도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 $n \geq 4$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

12 답 풀이 참조

풀이 (i) $n=5$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = 2^5 = 32, (\text{우변}) = 5^2 = 25$$

이므로 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k$ ($k \geq 5$)일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$2^k > k^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변에 2를 곱하면

$$2^{k+1} = 2^k \times 2 > 2k^2$$

이때 $k \geq 5$ 에서

$$2k^2 - (k+1)^2 = k^2 - 2k - 1$$

$$= (k-1)^2 - 2 > 0$$

$$\text{이므로 } 2k^2 > (k+1)^2$$

$$\therefore 2^{k+1} > (k+1)^2$$

즉, $n=k+1$ 일 때에도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 $n \geq 5$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

중단원 점검문제 | Ⅲ-3 수학적 귀납법

180-181쪽

01 답 $a_n = 7n - 17$

풀이 첫째항이 -10 , 공차가 7 인 등차수열이므로

$$a_n = -10 + (n-1) \times 7 = 7n - 17$$

02 답 $a_n = 2^{2n-1}$

풀이 첫째항이 2 , 공비가 4 인 등비수열이므로

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \times 4^{n-1} \\ &= 2 \times (2^2)^{n-1} \\ &= 2 \times 2^{2n-2} = 2^{2n-1} \end{aligned}$$

03 답 $a_n = -n^2 + n + 1$

풀이 주어진 식의 n 에 $1, 2, 3, \dots, n-1$ 을 차례대로 대입한 후 변끼리 더하면

$$a_2 = a_1 - 2 \times 1$$

$$a_3 = a_2 - 2 \times 2$$

$$a_4 = a_3 - 2 \times 3$$

$\vdots$

$$+) a_n = a_{n-1} - 2 \times (n-1)$$

$$a_n = a_1 - 2\{1+2+3+\cdots+(n-1)\}$$

$$\therefore a_n = 1 - 2 \times \frac{n(n-1)}{2}$$

$$= -n^2 + n + 1$$

04 답 $a_n = \frac{3^n + 3}{2}$

풀이 주어진 식의 n 에 $1, 2, 3, \dots, n-1$ 을 차례대로 대입한 후 변끼리 더하면

$$a_2 = a_1 + 3$$

$$a_3 = a_2 + 3^2$$

$$a_4 = a_3 + 3^3$$

$\vdots$

$$+) a_n = a_{n-1} + 3^{n-1}$$

$$a_n = a_1 + (3+3^2+3^3+\cdots+3^{n-1})$$

$$\therefore a_n = 3 + \frac{3 \times (3^{n-1} - 1)}{3 - 1}$$

$$= \frac{3^n + 3}{2}$$

05 답 $a_n = 6n - 3$

풀이 주어진 식의 n 에 $1, 2, 3, \dots, n-1$ 을 차례대로 대입한 후 변끼리 곱하면

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{3}{1}a_1 \\
a_3 &= \frac{5}{3}a_2 \\
a_4 &= \frac{7}{5}a_3 \\
&\vdots \\
&\times \left) a_n = \frac{2n-1}{2n-3} a_{n-1} \right. \\
a_n &= a_1 \times \left(\frac{3}{1} \times \frac{5}{3} \times \frac{7}{5} \times \cdots \times \frac{2n-1}{2n-3} \right) \\
\therefore a_n &= (2n-1)a_1 \\
&= 3(2n-1) \\
&= 6n-3
\end{aligned}$$

06 **답** $a_n = 2^{\frac{n^2-3n+4}{2}}$

풀이 주어진 식의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입한 후 변끼리 곱하면

$$\begin{aligned}
a_2 &= 2^0 a_1 \\
a_3 &= 2^1 a_2 \\
a_4 &= 2^2 a_3 \\
&\vdots \\
&\times \left) a_n = 2^{n-2} a_{n-1} \right. \\
a_n &= a_1 \times (2^0 \times 2^1 \times 2^2 \times \cdots \times 2^{n-2}) \\
&= 2 \times 2^{1+2+\cdots+(n-2)} \\
&= 2 \times 2^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}} \\
\therefore a_n &= 2 \times 2^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}+1} \\
&= 2^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}+1+1} \\
&= 2^{\frac{n^2-3n+4}{2}}
\end{aligned}$$

07 **답** $a_n = 2^n - 1$

풀이 주어진 식의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례대로 대입하면

$$\begin{aligned}
a_2 &= 2a_1 + 1 = 2 \times 1 + 1 = 2 + 1 \\
a_3 &= 2a_2 + 1 = 2 \times (2 + 1) + 1 = 2^2 + 2 + 1 \\
a_4 &= 2a_3 + 1 = 2 \times (2^2 + 2 + 1) + 1 = 2^3 + 2^2 + 2 + 1 \\
&\vdots \\
&\text{따라서 일반항 } a_n \text{은} \\
a_n &= 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \cdots + 2 + 1 \\
&= \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1
\end{aligned}$$

08 **답** $a_1 = \frac{2}{3}p, a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n$ (단, $n=1, 2, 3, \dots$)

풀이 $a_1 = \frac{2}{3}p, a_2 = \frac{2}{3}a_1, \dots$ 이므로

$a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n$ 임을 알 수 있다.

따라서 이 수열의 귀납적 정의는

$a_1 = \frac{2}{3}p, a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n$ (단, $n=1, 2, 3, \dots$)

09 **답** (가) $\frac{1}{(k+1)(k+2)},$ (나) $\frac{k}{k+1},$ (다) $\frac{k+1}{(k+1)+1}$

풀이 (i) $n=1$ 일 때

(좌변) $= \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2},$ (우변) $= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

이므로 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$$

위의 식의 양변에 $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$ 을 더하면

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots \\
&\quad + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{k^2 + 2k + 1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{k+1}{k+2} = \frac{k+1}{(k+1)+1}
\end{aligned}$$

즉, $n=k+1$ 일 때에도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

10 **답** (가) $k+1,$ (나) 2^k

풀이 (i) $n=3$ 일 때,

(좌변) $= 1 \times 2 \times 3 = 6 > 2^{3-1} = 4 =$ (우변)

이므로 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k$ ($k \geq 3$)일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times k > 2^{k-1}$$

위의 식의 양변에 $k+1$ 을 곱하면

$$1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times k \times (k+1) > 2^{k-1} \times (k+1)$$

이때 $k+1 \geq 4$ 이므로

$$2^{k-1} \times (k+1) \geq 2^{k-1} \times 2^2 > 2^k$$

$$\therefore 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times k \times (k+1) > 2^k$$

즉, $n=k+1$ 일 때에도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 $n \geq 3$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.