최고 난도

중학수학 3-1

정답과 풀이

I 실수와 그 계산

01 제곱근과 실수

Lv. 1 개념을 적용하는 핵심 문제 8쪽~11쪽

01 ④	02 ③	03 $\pm\sqrt{7}$	04 $\sqrt{72}$ cm	05 ④
06 ①	07 6	08 -5	09 ③	10 ②
11 ④	12 4	13 ②	14 6	15 z
16 ①	17 ⑤	18 ⑤	19 ④	20 ⑤
21 ②, ⑤	22 18	23 ③		

01 답 ④

① 제곱근 4는 $\sqrt{4}=2$이다.
② -9의 제곱근은 없다.
③ $x^2=25$를 만족시키는 x의 값은 ±5이다.
⑤ 0의 제곱근은 0의 1개이다.
따라서 옳은 것은 ④이다.

02 답 ③

제곱근 1.44는 $\sqrt{1.44}=1.2$이므로 $a=1.2$
$\sqrt{16}=4$의 음의 제곱근은 -2이므로 $b=-2$
$\therefore\ 10a+b=10\times1.2+(-2)=10$

03 답 $\pm\sqrt{7}$

324의 두 제곱근은 18, -18이다.
이때 $a>b$이므로 $a=18$, $b=-18$
$$\therefore\ \sqrt{a-2b-5}=\sqrt{18-2\times(-18)-5}=\sqrt{49}=7$$
따라서 7의 제곱근은 $\pm\sqrt{7}$이다.

04 답 $\sqrt{72}$ cm

한 변의 길이가 24 cm인 정사각형의 넓이는
$24\times24=576(\text{cm}^2)$
1번 접었을 때 생긴 정사각형의 넓이는
$576\times\dfrac{1}{2}=288(\text{cm}^2)$
2번 접었을 때 생긴 정사각형의 넓이는
$288\times\dfrac{1}{2}=144(\text{cm}^2)$
3번 접었을 때 생긴 정사각형의 넓이는
$144\times\dfrac{1}{2}=72(\text{cm}^2)$
구하는 정사각형의 한 변의 길이를 x cm라고 하면 $x^2=72$
이때 $x>0$이므로 $x=\sqrt{72}$
따라서 구하는 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{72}$ cm이다.

05 답 ④

ㄱ. $\sqrt{5^2+12^2}=\sqrt{169}=13$
ㄴ. 정육면체의 한 모서리의 길이를 x라고 하면
$6x^2=0.\dot{2}\dot{4}=\dfrac{24}{99}$, $x^2=\dfrac{4}{99}$
이때 $x>0$이므로 $x=\sqrt{\dfrac{4}{99}}$
ㄷ. 원의 반지름의 길이를 r라고 하면
$\pi r^2=\dfrac{225}{4}\pi$, $r^2=\dfrac{225}{4}$
이때 $r>0$이므로 $r=\dfrac{15}{2}$
따라서 근호를 사용하지 않고 나타낼 수 있는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

06 답 ①

$\left(-\sqrt{5.\dot{4}}\right)^2=5.\dot{4}=\dfrac{54-5}{9}=\dfrac{49}{9}$의 양의 제곱근은 $\dfrac{7}{3}$이므로
$a=\dfrac{7}{3}$
$\sqrt{(-9)^2}=\sqrt{81}=9$의 음의 제곱근은 -3이므로 $b=-3$
$\therefore\ ab=\dfrac{7}{3}\times(-3)=-7$

Level UP

순환소수를 분수로 나타내기
분모는 순환마디의 숫자의 개수만큼 9를, 그 뒤에 소수점 아래 순환하지 않는 숫자의 개수만큼 0을 쓰고, 분자는 전체의 수에서 순환하지 않는 부분의 수를 빼면 된다.
$$a.bcdcdcd\cdots=a.b\dot{c}\dot{d}=\frac{abcd-ab}{990}$$

07 답 6

$$A=\sqrt{256}\times\left\{-\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}\right\}^3-\sqrt{16}$$
$$=\sqrt{16^2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^3-\sqrt{4^2}$$
$$=16\times\left(-\frac{1}{8}\right)-4$$
$$=-2-4=-6$$
$$\therefore\ \sqrt{(-A)^2}=\sqrt{\{-(-6)\}^2}=6$$

08 답 -5

1단계 $2a+5\geq0$일 때, a의 값 구하기

(ⅰ) $2a+5\geq 0$일 때, $\sqrt{(2a+5)^2}=2a+5$이므로

$2a+5=1$, $2a=-4$

$\therefore a=-2$

2단계 $2a+5<0$일 때, a의 값 구하기

(ⅱ) $2a+5<0$일 때, $\sqrt{(2a+5)^2}=-2a-5$이므로

$-2a-5=1$, $-2a=6$

$\therefore a=-3$

3단계 모든 a의 값의 합 구하기

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 a의 값의 합은

$-2+(-3)=-5$

단계	채점 기준	비율
❶	$2a+5\geq 0$일 때, a의 값을 구했다.	40 %
❷	$2a+5<0$일 때, a의 값을 구했다.	40 %
❸	모든 a의 값의 합을 구했다.	20 %

참고 근호 안의 식의 부호를 알 수 없으므로 근호 안의 식이 0 또는 양수인 경우와 음수인 경우로 나누어 a의 값을 구해 본다.

09 답 ③

$\sqrt{16a^2b^2}=\sqrt{(4ab)^2}$, $\sqrt{\frac{9}{16}b^2}=\sqrt{\left(\frac{3}{4}b\right)^2}$

이때 $a>0$, $b<0$이므로 $4ab<0$, $-8a<0$, $\frac{3}{4}b<0$

$$\begin{aligned}\therefore \sqrt{16a^2b^2}-\sqrt{(-8a)^2}\times\sqrt{\frac{9}{16}b^2} &=\sqrt{(4ab)^2}-\sqrt{(-8a)^2}\times\sqrt{\left(\frac{3}{4}b\right)^2}\\ &=-4ab-\{-(-8a)\}\times\left(-\frac{3}{4}b\right)\\ &=-4ab-8a\times\left(-\frac{3}{4}b\right)\\ &=-4ab+6ab=2ab\end{aligned}$$

10 답 ②

ㄱ. $x\leq -2$이면

$x+2\leq 0$, $2-x>0$

$$\begin{aligned}\therefore A&=\sqrt{(x+2)^2}-\sqrt{(2-x)^2}\\ &=-(x+2)-(2-x)=-4\end{aligned}$$

ㄴ. $-2<x\leq 2$이면

$x+2>0$, $2-x\geq 0$

$$\begin{aligned}\therefore A&=\sqrt{(x+2)^2}-\sqrt{(2-x)^2}\\ &=(x+2)-(2-x)=2x\end{aligned}$$

ㄷ. $x>2$이면

$x+2>0$, $2-x<0$

$$\begin{aligned}\therefore A&=\sqrt{(x+2)^2}-\sqrt{(2-x)^2}\\ &=(x+2)-\{-(2-x)\}=4\end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

11 답 ④

$108n=2^2\times 3^3\times n$이므로 $\sqrt{108n}$이 자연수가 되려면

$n=3\times(\text{자연수})^2$의 꼴이어야 한다.

따라서 두 번째로 작은 자연수 n의 값은

$3\times 2^2=12$

12 답 4

$\sqrt{200-x}$가 정수가 되려면 $200-x$가 0 또는 $(\text{자연수})^2$의 꼴이어야 한다.

이때 $\sqrt{200-x}$가 가장 큰 정수이어야 하고 200보다 작은 가장 큰 제곱수는 $14^2=196$이므로 $200-x=196$이어야 한다.

$\therefore x=4$

Level UP

$A-B$의 값이 가장 큰 값을 가지려면 A는 가장 큰 값, B는 가장 작은 값이어야 한다.

13 답 ②

$x+y=7+(4+\sqrt{13})=11+\sqrt{13}>0$

$x-y=7-(4+\sqrt{13})=3-\sqrt{13}=\sqrt{9}-\sqrt{13}<0$

$$\begin{aligned}\therefore \sqrt{(x+y)^2}-\sqrt{(x-y)^2}&=x+y-\{-(x-y)\}\\ &=x+y+x-y\\ &=2x\\ &=2\times 7=14\end{aligned}$$

14 답 6

$-5<-\sqrt{4x+1}<-2$의 각 변에 -1을 곱하면

$2<\sqrt{4x+1}<5$

각 변을 제곱하면

$4<4x+1<25$, $3<4x<24$

$\therefore \frac{3}{4}<x<6$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 x의 값은 1, 2, 3, 4, 5이므로 $M=5$, $m=1$

$\therefore M+m=5+1=6$

15 답 z

$$\begin{aligned}x-y&=(2+\sqrt{11})-(\sqrt{11}+\sqrt{7})\\ &=2-\sqrt{7}\\ &=\sqrt{4}-\sqrt{7}<0\end{aligned}$$

$\therefore x<y$

$$\begin{aligned}y-z&=(\sqrt{11}+\sqrt{7})-(\sqrt{7}+4)\\ &=\sqrt{11}-4\\ &=\sqrt{11}-\sqrt{16}<0\end{aligned}$$

$\therefore y<z$

따라서 $x<y<z$이므로 가장 큰 수는 z이다.

16 답 ①

x가 제곱수이면 $\sqrt{x}$가 유리수가 되므로 100 이하의 자연수 x에 대하여 유리수가 되도록 하는 x는 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100의 10개이다.
따라서 구하는 x의 개수는
$100-10=90$

17 답 ⑤

$\sqrt{1.21}=1.1,\ 0.\dot{4}\dot{2}=\frac{42}{99}=\frac{14}{33},\ -\sqrt{\left(-\frac{8}{2}\right)^2}=-\frac{8}{2}=-4$

① 정수는 0, $-\sqrt{\left(-\frac{8}{2}\right)^2}$의 2개이다.

② 정수가 아닌 유리수는 $\sqrt{1.21}$, $0.\dot{4}\dot{2}$, $-\frac{1}{3}$의 3개이다.

③ 무리수는 $\sqrt{\frac{4}{15}}$의 1개이다.

④ 실수는 0, $\sqrt{1.21}$, $0.\dot{4}\dot{2}$, $-\frac{1}{3}$, $\sqrt{\frac{4}{15}}$, $-\sqrt{\left(-\frac{8}{2}\right)^2}$의 6개이다.

⑤ $\frac{(\text{정수})}{(0\text{이 아닌 정수})}$의 꼴은 분수이고, 분수 $\frac{a}{b}$ (a, b는 정수, $b\neq0$)의 꼴로 나타낼 수 있는 수는 유리수이므로 유리수는 0, $\sqrt{1.21}$, $0.\dot{4}\dot{2}$, $-\frac{1}{3}$, $-\sqrt{\left(-\frac{8}{2}\right)^2}$의 5개이다.

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

18 답 ⑤

⑤ 유리수와 무리수의 합은 항상 무리수이다.

19 답 ④

피타고라스 정리에 의하여 $\overline{AD}=\overline{AB}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$
$\overline{AP}=\overline{AD}=\sqrt{13}$이므로 점 P의 좌표는 $(2-\sqrt{13})$
$\overline{AQ}=\overline{AB}=\sqrt{13}$이므로 점 Q의 좌표는 $(2+\sqrt{13})$

참고 직각삼각형의 세 변의 길이가 a, b, c이고 이 중 가장 긴 변의 길이가 c일 때, $a^2+b^2=c^2$이 성립한다.

20 답 ⑤

① 피타고라스 정리에 의하여 $\overline{AB}=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$
② 원의 반지름의 길이는 같으므로 $\overline{AP}=\overline{AQ}=\overline{AB}=\sqrt{17}$
③ 점 P에 대응하는 수가 $-1-\sqrt{17}$이므로 점 A에 대응하는 수는 $-1-\sqrt{17}+\sqrt{17}=-1$
④ $\overline{AC}=4$이므로 점 C에 대응하는 수는 $-1-4=-5$
⑤ 점 Q에 대응하는 수는 $-1+\sqrt{17}$이다.
따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

21 답 ②, ⑤

① $\sqrt{3}$과 $\sqrt{5}$ 사이에는 정수 2가 있다.
③ 서로 다른 두 정수 사이에는 유한개의 정수가 있다.
④ 무리수는 모두 수직선 위의 점에 대응된다.

22 답 18

1단계 $\sqrt{8}-5$가 어떤 연속한 두 정수 사이에 있는지 구하기
$\sqrt{4}<\sqrt{8}<\sqrt{9}$, 즉 $2<\sqrt{8}<3$이므로 $-3<\sqrt{8}-5<-2$
2단계 $9-\sqrt{8}$이 어떤 연속한 두 정수 사이에 있는지 구하기
$\sqrt{4}<\sqrt{8}<\sqrt{9}$, 즉 $2<\sqrt{8}<3$에서 $-3<-\sqrt{8}<-2$이므로
$6<9-\sqrt{8}<7$
3단계 $\sqrt{8}-5$와 $9-\sqrt{8}$ 사이에 있는 모든 정수 구하기
이때 $\sqrt{8}-5$와 $9-\sqrt{8}$ 사이에 있는 모든 정수는
$-2,\ -1,\ 0,\ \dots,\ 6$
4단계 $\sqrt{8}-5$와 $9-\sqrt{8}$ 사이에 있는 모든 정수의 합 구하기
따라서 구하는 합은
$-2+(-1)+0+\cdots+6=18$

단계	채점 기준	비율
❶	$\sqrt{8}-5$가 어떤 연속한 두 정수 사이에 있는지 구했다.	30 %
❷	$9-\sqrt{8}$이 어떤 연속한 두 정수 사이에 있는지 구했다.	30 %
❸	$\sqrt{8}-5$와 $9-\sqrt{8}$ 사이에 있는 모든 정수를 구했다.	30 %
❹	$\sqrt{8}-5$와 $9-\sqrt{8}$ 사이에 있는 모든 정수의 합을 구했다.	10 %

23 답 ③

$\sqrt{4}<\sqrt{6}<\sqrt{9}$, 즉 $2<\sqrt{6}<3$이므로 $0<-2+\sqrt{6}<1$
따라서 $-2+\sqrt{6}$은 점 C에 대응한다.
$\sqrt{1}<\sqrt{2}<\sqrt{4}$, 즉 $1<\sqrt{2}<2$에서 $-2<-\sqrt{2}<-1$이므로
$-3<-1-\sqrt{2}<-2$
따라서 $-1-\sqrt{2}$는 점 B에 대응한다.
$\sqrt{9}<\sqrt{13}<\sqrt{16}$, 즉 $3<\sqrt{13}<4$이므로 $-4<-\sqrt{13}<-3$
따라서 $-\sqrt{13}$은 점 A에 대응한다.
$\sqrt{16}<\sqrt{20}<\sqrt{25}$, 즉 $4<\sqrt{20}<5$이므로 $2<\sqrt{20}-2<3$
따라서 $\sqrt{20}-2$는 점 D에 대응한다.
그러므로 두 점 A, D에 대응하는 수는 차례대로 $-\sqrt{13}$, $\sqrt{20}-2$이다.

Lv. 2 사고를 확장하는 실전 문제

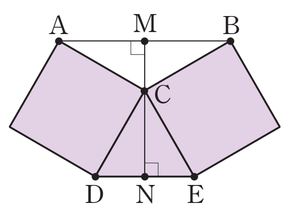
12쪽～17쪽

01 ③	**02** $\sqrt{153}$ cm		**03** ④	**04** ①
05 10000	**06** $-3a$	**07** ⑤	**08** $-2b$	**09** $2x$
10 ⑤	**11** 2	**12** ③	**13** ②	**14** ②
15 $3-\sqrt{5}$	**16** ④	**17** 11	**18** 7	**19** 16
20 99	**21** ③	**22** 26	**23** ③	**24** 3명
25 929	**26** 96	**27** $5+\sqrt{5}$	**28** ②	**29** $\frac{1}{2}$
30 28	**31** 3	**32** $10-\sqrt{34}$		**33** ②
34 ⑤	**35** ①	**36** 7, 15		

01 답 ③

해결 key Point!

합동인 두 삼각형을 찾아 $\overline{AB}$의 길이를 구해야 한다.



정삼각형의 세 꼭짓점을 CDE라 하고, 꼭짓점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 M, 변 DE에 내린 수선의 발을 N이라고 하자.

넓이가 3인 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{3}$이고, $\overline{DN}=\frac{1}{2}\overline{DE}=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 △CDN에서 피타고라스 정리에 의하여

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\overline{CN}^2=(\sqrt{3})^2$, $\overline{CN}^2=3-\frac{3}{4}=\frac{9}{4}$

$\therefore\ \overline{CN}=\frac{3}{2}$

한편, △ACM과 △CDN에서

$\angle M=\angle N=90^\circ$

$\overline{AC}=\overline{CD}$

$\angle ACM=90^\circ-\angle DCN=\angle CDN$

이므로

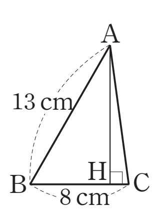
△ACM≡△CDN (RHA 합동)

$\therefore\ \overline{AB}=2\overline{AM}=2\overline{CN}=2\times\frac{3}{2}=3$

따라서 선분 AB를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는

$3^2=9$

02 답 $\sqrt{153}$ cm



오른쪽 그림과 같이 점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라고 하면 △ABC의 넓이가 48 cm^2이므로

$\frac{1}{2}\times8\times\overline{AH}=48$, $4\overline{AH}=48$

$\therefore\ \overline{AH}=12$ cm

△ABH에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{BH}=\sqrt{13^2-12^2}=\sqrt{25}=5(\text{cm})$

따라서 $\overline{CH}=8-5=3(\text{cm})$이므로 △AHC에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AC}=\sqrt{3^2+12^2}=\sqrt{153}(\text{cm})$

03 답 ④

$$\begin{aligned}\sqrt{4\sqrt{8\sqrt{32\sqrt{1024}}}}&=\sqrt{4\sqrt{8\sqrt{32\sqrt{2^{10}}}}}=\sqrt{4\sqrt{8\sqrt{32\times2^5}}}\\&=\sqrt{4\sqrt{8\sqrt{2^{10}}}}=\sqrt{4\sqrt{8\times2^5}}\\&=\sqrt{4\sqrt{2^8}}=\sqrt{4\times2^4}\\&=\sqrt{2^6}=2^3\\&=8\end{aligned}$$

꿀 한줄평

근호 안의 수가 어떤 수의 제곱으로 나타낼 수 있으면 근호를 없앨 수 있으므로 주어진 식에서 근호 안의 수를 어떤 수의 제곱의 꼴로 만들어 근호를 차근차근 없애 나가야 한다.

04 답 ①

(i) $x<-\frac{1}{4}$일 때

$4x+1<0$, $x-2<0$이므로

$$\begin{aligned}\sqrt{(4x+1)^2}-\sqrt{(x-2)^2}&=-(4x+1)-\{-(x-2)\}\\&=-4x-1+x-2=-3x-3\end{aligned}$$

즉, $-3x-3=5x$이므로

$-8x=3\qquad\therefore\ x=-\frac{3}{8}$

이때 $-\frac{3}{8}<-\frac{1}{4}$이므로 $x<-\frac{1}{4}$은 x의 값의 범위가 될 수 있다.

(ii) $-\frac{1}{4}\le x<2$일 때

$4x+1\ge0$, $x-2<0$이므로

$$\begin{aligned}\sqrt{(4x+1)^2}-\sqrt{(x-2)^2}&=(4x+1)-\{-(x-2)\}\\&=4x+1+x-2=5x-1\end{aligned}$$

즉, $5x-1=5x$이므로 $-1=0$

이때 $-1\ne0$이므로 조건을 만족시키는 x의 값은 존재하지 않는다.

즉, x의 값의 범위가 될 수 없다.

(iii) $x\ge2$일 때

$4x+1>0$, $x-2\ge0$이므로

$$\begin{aligned}\sqrt{(4x+1)^2}-\sqrt{(x-2)^2}&=(4x+1)-(x-2)\\&=4x+1-x+2=3x+3\end{aligned}$$

즉, $3x+3=5x$이므로

$-2x=-3 \qquad \therefore x=\frac{3}{2}$

이때 $\frac{3}{2}\le 2$이므로 조건을 만족시키는 x의 값은 존재하지 않는다.

즉, x의 값의 범위가 될 수 없다.

(i)~(iii)에 의하여 조건을 만족시키는 x의 값의 범위가 될 수 있는 것은 $x<-\frac{1}{4}$이다.

05 답 10000

해결 key Point!

근호 안의 수를 모두 3의 거듭제곱으로 바꾸어 계산해야 한다.

$$x=\sqrt{\frac{9^{10}+27^{10}}{9^{11}+27^{4}}}=\sqrt{\frac{(3^2)^{10}+(3^3)^{10}}{(3^2)^{11}+(3^3)^{4}}}$$
$$=\sqrt{\frac{3^{20}+3^{30}}{3^{22}+3^{12}}}=\sqrt{\frac{3^{20}(1+3^{10})}{3^{12}(3^{10}+1)}}$$
$$=\sqrt{3^8}=3^4=81$$

$\therefore (x+19)^2=(81+19)^2=100^2=10000$

06 답 $-3a$

$a-b<0,\ \frac{a}{b}<0$이므로 $a<0,\ b>0$

따라서 $-2a>0,\ -b<0$이므로

$$\sqrt{(a-b)^2}+\sqrt{(-2a)^2}-\sqrt{(-b)^2}$$
$$=-(a-b)+(-2a)-\{-(-b)\}$$
$$=-a+b-2a-b=-3a$$

Level UP

a가 실수일 때, $\sqrt{a^2}=|a|$이고 항상 양수이므로

$a\ge 0$일 때, $|a|=a$

$a<0$일 때, $|a|=-a$

07 답 ⑤

$2<3x-4<5$에서

$6<3x<9 \qquad \therefore 2<x<3$

이때 $1<\sqrt{3}<2$이므로 $\sqrt{3}+x>0,\ \sqrt{3}-x<0$

$$\therefore \sqrt{(\sqrt{3}+x)^2}+\sqrt{(\sqrt{3}-x)^2}=\sqrt{3}+x+\{-(\sqrt{3}-x)\}$$
$$=\sqrt{3}+x-\sqrt{3}+x$$
$$=2x$$

이때 $4<2x<6$이므로 $4<\sqrt{(\sqrt{3}+x)^2}+\sqrt{(\sqrt{3}-x)^2}<6$

⑤ $\sqrt{36}<\sqrt{40}<\sqrt{49}$, 즉 $6<\sqrt{40}<7$이므로 $\sqrt{40}$은 주어진 식의 값이 될 수 없다.

08 답 $-2b$

1단계 $b-\frac{1}{b},\ \frac{1}{b}-a$의 부호 구하기

$0<b<1$이므로 $\frac{1}{b}>1$

$\therefore b-\frac{1}{b}<0,\ \frac{1}{b}-a>0$

2단계 $a+b$의 부호 구하기

$|a|>|b|$이므로 $a+b<0$

3단계 주어진 식 간단히 하기

$$\therefore \sqrt{\left(b-\frac{1}{b}\right)^2}-\left|\frac{1}{b}-a\right|+\sqrt{(a+b)^2}$$
$$=-\left(b-\frac{1}{b}\right)-\left(\frac{1}{b}-a\right)+\{-(a+b)\}$$
$$=-b+\frac{1}{b}-\frac{1}{b}+a-a-b=-2b$$

단계	채점 기준	비율
❶	$b-\frac{1}{b},\ \frac{1}{b}-a$의 부호를 구했다.	20 %
❷	$a+b$의 부호를 구했다.	20 %
❸	주어진 식을 간단히 했다.	60 %

09 답 $2x$

해결 key Point!

$\sqrt{A^2}=|A|$임을 이용하여 주어진 식을 변형하고, $A\ge 0,\ A<0$으로 나누어 식을 간단히 해야 한다.

$$\sqrt{(x+\sqrt{x^2})^2}-\sqrt{(x-\sqrt{x^2})^2}=\sqrt{(x+|x|)^2}-\sqrt{(x-|x|)^2}$$
$$=|x+|x||-|x-|x||$$

(i) $x\ge 0$일 때

$$|x+|x||-|x-|x||=|x+x|-|x-x|$$
$$=|2x|=2x$$

(ii) $x<0$일 때

$$|x+|x||-|x-|x||=|x-x|-|x-(-x)|$$
$$=-|2x|$$
$$=-(-2x)=2x$$

(i), (ii)에 의하여 $\sqrt{(x+\sqrt{x^2})^2}-\sqrt{(x-\sqrt{x^2})^2}=2x$

10 답 ⑤

$$\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{-a+b}{2}\right)^2}=\left|\frac{-a+b}{2}\right|,$$
$$\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}-b\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}=\left|\frac{a-b}{2}\right|$$

(i) $a \ge b$인 경우

$-a+b \le 0$, $a-b \ge 0$이므로

$$\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}-b\right)^2}$$
$$=\left|\frac{-a+b}{2}\right|+\left|\frac{a-b}{2}\right|$$
$$=-\frac{-a+b}{2}+\frac{a-b}{2}=a-b$$

(ii) $a<b$인 경우

$-a+b>0$, $a-b<0$이므로

$$\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}-b\right)^2}$$
$$=\left|\frac{-a+b}{2}\right|+\left|\frac{a-b}{2}\right|$$
$$=\frac{-a+b}{2}-\frac{a-b}{2}=-a+b$$

(i), (ii)에 의하여

$$\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}-b\right)^2}=\begin{cases} a-b & (a\ge b) \\ -a+b & (a<b) \end{cases}$$
$$=|a-b|$$

Level UP

$|a-b|=\begin{cases} a-b & (a\ge b) \\ -a+b & (a<b) \end{cases}$이므로 이것을 거꾸로 나타낼 수도 있다.

즉, 문제에서와 같이 $\begin{cases} a-b & (a\ge b) \\ -a+b & (a<b) \end{cases}=|a-b|$

11 답 2

$1\times2\times3\times\cdots\times10\times11\times n$을 소인수분해하면

$2^8\times3^4\times5^2\times7\times11\times n$

$\sqrt{1\times2\times3\times\cdots\times10\times11\times n}=\sqrt{2^8\times3^4\times5^2\times7\times11\times n}$이 자연수가 되려면 $n=7\times11\times$(자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.

따라서 세 자리 자연수 n은 $7\times11\times2^2=308$, $7\times11\times3^2=693$의 2개이다.

12 답 ③

해결 key Point!

근호 안의 수가 어떤 수의 제곱으로 나타낼 수 있으면 근호를 없앨 수 있다.

$\sqrt{144-18n}=\sqrt{18(8-n)}=\sqrt{2\times3^2\times(8-n)}$이 정수가 되려면 $2(8-n)$이 0 또는 (자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.

이때 $0\le8-n<8$이므로 $8-n$의 값은 0, 2이다.

따라서 자연수 n의 값은 6, 8이므로 구하는 합은

$6+8=14$

13 답 ②

해결 key Point!

넓이가 S인 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{S}$임을 알아야 한다.

넓이가 각각 $3a$, $76-a$인 두 정사각형의 한 변의 길이는

$\sqrt{3a}$, $\sqrt{76-a}$

$\sqrt{76-a}$가 자연수가 되려면 $76-a$가 76보다 작은 제곱수이어야 하므로 $76-a=1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64$

즉, $a=75, 72, 67, 60, 51, 40, 27, 12$ …… ㉠

또, $\sqrt{3a}$가 자연수가 되려면 $a=3\times$(자연수)^{2}의 꼴이어야 하므로 $a=3, 12, 27, 48, 75, \cdots$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 a의 값은 12, 27, 75이므로 모든 자연수 a의 값의 합은

$12+27+75=114$

14 답 ②

해결 key Point!

500보다 작은 제곱수와 200보다 큰 제곱수를 생각해야 한다.

$\sqrt{500-x}-\sqrt{200+y}$가 0이 아닌 정수이려면 $500-x$와 $200+y$가 모두 제곱수이어야 한다.

이때 $\sqrt{500-x}-\sqrt{200+y}$의 값이 가장 큰 정수가 되려면 $\sqrt{500-x}$는 가장 큰 자연수가 되고, $\sqrt{200+y}$는 가장 작은 자연수가 되어야 한다.

x는 자연수이므로 500보다 작은 가장 큰 제곱수는 $22^2=484$이므로 $500-x=484$이어야 한다.

$\therefore x=16$

또, y도 자연수이므로 200보다 큰 가장 작은 제곱수는 $15^2=225$이므로 $200+y=225$이어야 한다.

$\therefore y=25$

$\therefore x+y=16+25=41$

15 답 $3-\sqrt{5}$

$2<\sqrt{8}<3$이므로 $1<\frac{\sqrt{8}}{2}<\frac{3}{2}$

$2<\sqrt{5}<3$에서 $-3<-\sqrt{5}<-2$이므로 $0<3-\sqrt{5}<1$

$2<\sqrt{6}<3$에서 $-3<-\sqrt{6}<-2$이고

$-2<1-\sqrt{6}<-1$이므로 $-1<\frac{1-\sqrt{6}}{2}<-\frac{1}{2}$

$2<\sqrt{7}<3$에서 $-3<-\sqrt{7}<-2$이므로 $-\frac{1}{2}<\frac{5}{2}-\sqrt{7}<\frac{1}{2}$

따라서 크기가 작은 것부터 차례대로 나열하면 -1, $\frac{1-\sqrt{6}}{2}$, $\frac{5}{2}-\sqrt{7}$, $3-\sqrt{5}$, $\frac{\sqrt{8}}{2}$이므로 네 번째에 오는 수는 $3-\sqrt{5}$이다.

16 답 ④

해결 key Point!

$x>0$이므로 주어진 식을 제곱하여 대소 관계를 알아봐야 한다.

x, $\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}$, $\sqrt{\frac{1}{x}}$을 각각 제곱하면 x^2, $\frac{1}{x^2}$, x, $\frac{1}{x}$

$x>1$일 때, $\frac{1}{x}<1$이고 $x^2>x$이므로 $\frac{1}{x^2}<\frac{1}{x}$

따라서 $\frac{1}{x^2}<\frac{1}{x}<1<x<x^2$이므로 $\frac{1}{x}<\sqrt{\frac{1}{x}}<\sqrt{x}<x$

즉, 주어진 수 중에서 가장 큰 수는 x이다.

$0<x<1$일 때, $\frac{1}{x}>1$이고 $x^2<x$이므로 $\frac{1}{x^2}>\frac{1}{x}$

따라서 $x^2<x<1<\frac{1}{x}<\frac{1}{x^2}$이므로 $x<\sqrt{x}<\sqrt{\frac{1}{x}}<\frac{1}{x}$

즉, 주어진 수 중에서 가장 큰 수는 $\frac{1}{x}$이다.

따라서 구하는 수는 차례대로 x, $\frac{1}{x}$이다.

17 답 11

1단계 m, n의 값 구하기

$1.0\dot{2}=\frac{102-10}{90}=\frac{92}{90}=\frac{46}{45}$, $0.\dot{2}=\frac{2}{9}$이므로

$\sqrt{\frac{1.0\dot{2}\times n}{m}}=0.\dot{2}$에서 $\sqrt{\frac{46n}{45m}}=\frac{2}{9}$

양변을 제곱하면

$\frac{46n}{45m}=\frac{4}{81}$ $\quad\therefore \frac{n}{m}=\frac{10}{207}$

m, n은 서로소인 자연수이므로 $m=207$, $n=10$

2단계 $\sqrt{n}$과 $\sqrt{m}$ 사이에 있는 자연수의 개수 구하기

이때 $14<\sqrt{207}<15$, $3<\sqrt{10}<4$이므로 $\sqrt{n}$과 $\sqrt{m}$ 사이에 있는 자연수는 4, 5, …, 14의 11개이다.

단계	채점 기준	비율
❶	m, n의 값을 구했다.	70 %
❷	$\sqrt{n}$과 $\sqrt{m}$ 사이에 있는 자연수의 개수를 구했다.	30 %

18 답 7

$n=1$일 때, $1\le\sqrt{x}<2$에서 $1\le x<4$이므로 자연수 x는 1, 2, 3의 3개이다.

$n=2$일 때, $2\le\sqrt{x}<3$에서 $4\le x<9$이므로 자연수 x는 4, 5, 6, 7, 8의 5개이다.

$n=3$일 때, $3\le\sqrt{x}<4$에서 $9\le x<16$이므로 자연수 x는 9, 10, …, 15의 7개이다.

⋮

즉, $n\le\sqrt{x}<n+1$을 만족시키는 자연수 x의 개수는 $2n+1$이다.

따라서 $2n+1=15$에서

$2n=14$ $\quad\therefore n=7$

참고 $n=7$일 때, $7\le\sqrt{x}<8$에서 $49\le x<64$이므로 자연수 x는 49, 50, …, 63의 15개이다.

Level UP

자연수 m, n $(m<n)$ 사이에 있는 자연수의 개수

(1) $m\le x\le n$을 만족시키는 자연수는 $(n-m+1)$개

(2) $m\le x<n$ 또는 $m<x\le n$을 만족시키는 자연수는 $(n-m)$개

(3) $m<x<n$을 만족시키는 자연수는 $(n-m-1)$개

19 답 16

해결 key Point!

$a>0$, $b>0$, $c>0$일 때, $a<\sqrt{b}<c$이면 $a^2<(\sqrt{b})^2<c^2$, 즉 $a^2<b<c^2$임을 이용해야 한다.

$1<\sqrt{|a-4|}<2$의 각 변을 제곱하면 $1<|a-4|<4$

(ⅰ) $a<4$일 때

$|a-4|=-a+4$이므로 $1<-a+4<4$에서

$-3<-a<0$ $\quad\therefore 0<a<3$

따라서 조건을 만족시키는 정수 a는 1, 2이다.

(ⅱ) $a\ge4$일 때

$|a-4|=a-4$이므로 $1<a-4<4$에서 $5<a<8$

따라서 조건을 만족시키는 정수 a는 6, 7이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 정수 a의 값의 합은

$1+2+6+7=16$

20 답 99

n의 양의 제곱근이 $7+a$이므로 $\sqrt{n}=7+a$

$2<a<3$이므로 $9<7+a<10$, 즉 $9<\sqrt{n}<10$

각 변을 제곱하면 $81<n<100$

따라서 자연수 n의 값 중 가장 큰 수는 99이다.

21 답 ③

해결 key Point!

주사위의 눈은 모두 1, 2, 3, 4, 5, 6이므로 b가 1부터 6일 때의 a^2+4b의 값을 각각 구해야 한다.

주사위를 두 번 던져 나오는 경우의 수는 $6\times6=36$

$5<\sqrt{a^2+4b}<6$의 각 변을 제곱하면 $25<a^2+4b<36$

(ⅰ) $b=1$일 때

$25<a^2+4<36$에서 $21<a^2<32$이므로 조건을 만족시키는 a의 값은 $a=5$

(ii) $b=2$일 때

$25<a^2+8<36$에서 $17<a^2<28$이므로 조건을 만족시키는 a의 값은 $a=5$

(iii) $b=3$일 때

$25<a^2+12<36$에서 $13<a^2<24$이므로 조건을 만족시키는 a의 값은 $a=4$

(iv) $b=4$일 때

$25<a^2+16<36$에서 $9<a^2<20$이므로 조건을 만족시키는 a의 값은 $a=4$

(v) $b=5$일 때

$25<a^2+20<36$에서 $5<a^2<16$이므로 조건을 만족시키는 a의 값은 $a=3$

(vi) $b=6$일 때

$25<a^2+24<36$에서 $1<a^2<12$이므로 조건을 만족시키는 a의 값은 $a=2,\ 3$

(i)~(vi)에 의하여 조건을 만족시키는 a, b의 값을 순서쌍으로 나타내면 $(2,\ 6)$, $(3,\ 5)$, $(3,\ 6)$, $(4,\ 3)$, $(4,\ 4)$, $(5,\ 1)$, $(5,\ 2)$의 7개이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{7}{36}$이다.

22 답 26

$1<\sqrt{2}<2$이므로 $\sqrt{2}$ 미만의 자연수의 개수 $f(2)$는 $f(2)=1$

이때 $\sqrt{4}=2$이므로 $f(4)=1$

이와 마찬가지로 $\sqrt{6}<\sqrt{8}<\sqrt{9}=3$이므로 $f(6)=f(8)=2$

$\sqrt{10}<\sqrt{12}<\sqrt{14}<\sqrt{16}=4$이므로

$f(10)=f(12)=f(14)=f(16)=3$

$\sqrt{18}<\sqrt{20}<\sqrt{25}=5$이므로 $f(18)=f(20)=4$

$\therefore\ f(2)+f(4)+f(6)+\cdots+f(20)$

$=1\times2+2\times2+3\times4+4\times2$

$=26$

꿀 한줄평

$\sqrt{x}$가 유리수가 되는 값인 $\sqrt{1}=1$, $\sqrt{4}=2$, $\sqrt{9}=3$, $\sqrt{16}=4$, $\sqrt{25}=5$, …을 이용하여 $\sqrt{x}$ 미만의 자연수의 개수 $f(x)$는

$f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=1$,

$f(5)=f(6)=\cdots=f(9)=2$,

$f(10)=f(11)=\cdots=f(16)=3$,

$f(17)=f(18)=\cdots=f(25)=4$, …

임을 구하면 $f(x)$의 모든 값을 알 수 있으므로 구하는 값을 구하면 된다.

23 답 ③

자연수 N이 다섯 자리 자연수이므로 $10000\le N<100000$,

즉 $\sqrt{10000}\le\sqrt{N}<\sqrt{100000}$이고 $\sqrt{10000}=\sqrt{100^2}=100$,

$\sqrt{100000}<\sqrt{1000000}=\sqrt{1000^2}=1000$이므로

$100\le\sqrt{N}<1000$

따라서 $\sqrt{N}$의 정수 부분은 세 자리 수이다.

24 답 3명

상혁: 두 무리수가 $r=-\sqrt{2}$, $s=\sqrt{2}$이면 $r+s=0$이므로 유리수이다.

즉, $r+s$가 반드시 무리수라고 할 수 없다.

경진: 두 무리수가 $r=-\sqrt{2}$, $s=\sqrt{2}$이면 $\frac{r}{s}=\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=-1$이므로 유리수이다.

즉, $\frac{r}{s}$도 반드시 무리수라고 할 수 없다.

꿀 한줄평

0과 -1, 1은 무리수가 아니고 유리수이다. 두 무리수를 연산하여 -1 또는 0 또는 1이 되는 경우를 찾는다면 그 연산값이 반드시 무리수가 된다고 할 수 없다.

25 답 929

해결 key Point!

무리수가 되는 n의 개수를 구할 때에는 유리수가 되는 n의 개수를 구해야 더 편리하다.

무리수의 개수는 전체에서 유리수의 개수를 빼는 것과 같다.

(i) $\sqrt{n}$이 유리수가 되는 경우

$\sqrt{n}$이 유리수가 되려면 n은 (자연수)^{2}의 꼴이어야 하고 $31^2=961$, $32^2=1024$이므로 1000 이하의 자연수 중에서 $\sqrt{n}$이 유리수가 되도록 하는 n의 개수는 31이다.

(ii) $\sqrt{2n}$이 유리수가 되는 경우

$\sqrt{2n}$이 유리수가 되려면 $n=2\times$(자연수)^{2}의 꼴이어야 하고, $2\times22^2=968$, $2\times23^2=1058$이므로 1000 이하의 자연수 중에서 $\sqrt{2n}$이 유리수가 되도록 하는 n의 개수는 22이다.

(iii) $\sqrt{3n}$이 유리수가 되는 경우

$\sqrt{3n}$이 유리수가 되려면 $n=3\times$(자연수)^{2}의 꼴이어야 하고, $3\times18^2=972$, $3\times19^2=1083$이므로 1000 이하의 자연수 중에서 $\sqrt{3n}$이 유리수가 되도록 하는 n의 개수는 18이다.

$2\times$(자연수)$^2=$(자연수)^2, $3\times$(자연수)$^2=$(자연수)^{2}의 꼴이 될 수 없으므로 (i)~(iii)에서 공통되는 n의 값이 없다.

따라서 구하는 자연수 n의 개수는

$1000-(31+22+18)=929$

26 답 96

해결 key Point!

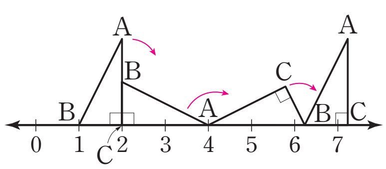
1부터 $\sqrt{n}$ 사이에 있는 무리수의 개수는 $\sqrt{n}$ 미만의 유리수의 개수를 먼저 구한 다음 $n-2$ (1과 $\sqrt{n}$ 제외)에서 빼면 된다.

$\sqrt{n}$이 유리수가 되려면 n이 제곱수이어야 한다.
1보다 크고 10보다 작은 제곱수는 4, 9의 2개이므로 1 초과 10 미만의 무리수의 개수는 $f(10)=8-2=6$
1보다 크고 100보다 작은 제곱수는 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81의 8개이므로 1 초과 100 미만의 무리수의 개수는
$f(100)=98-8=90$
$\therefore\ f(10)+f(100)=6+90=96$

27 답 $5+\sqrt{5}$

해결 key Point!

직각삼각형의 빗변의 길이를 이용하면 무리수를 수직선 위에 나타낼 수 있다.



직각삼각형 ABC가 수직선을 따라 시계 방향으로 한 바퀴 굴렸을 때, 꼭짓점 C가 수직선과 처음으로 다시 만나는 점의 좌표는 점 C의 좌표에 직각삼각형 ABC의 둘레의 길이를 더한 것과 같다.
이때 $\overline{BC}=1$이므로 피타고라스 정리에 의하여
$\overline{AB}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$
직각삼각형 ABC의 둘레의 길이는
$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=\sqrt{5}+1+2=\sqrt{5}+3$
따라서 구하는 점의 좌표는
(점 C의 좌표)+(직각삼각형 ABC 둘레의 길이)
$=2+(\sqrt{5}+3)=5+\sqrt{5}$

28 답 ②

한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선의 길이는 $\sqrt{2}$이므로
$\overline{BP}=\overline{BD}=\overline{CE}=\overline{EQ}=\overline{BF}=\overline{BR}=\sqrt{2}$
ㄱ. $b=p+\sqrt{2}$이므로 p가 유리수이면 b는 무리수이고, $a=b-1$이므로 무리수이다.
ㄴ. $q=-\sqrt{2}$이면 $e=q+\sqrt{2}=-\sqrt{2}+\sqrt{2}=0$, $b=e-1=-1$이므로 모두 유리수이지만 $q=-\sqrt{3}$이면 $e=q+\sqrt{2}=-\sqrt{3}+\sqrt{2}$이므로 무리수이다.
ㄷ. $r=-2+\sqrt{2}$이면 $b=r-\sqrt{2}=-2+\sqrt{2}-\sqrt{2}=-2$, $e=b+1=-1$이므로 $q=e-\sqrt{2}=-1-\sqrt{2}$
ㄹ. $p=-1-\sqrt{2}$이면 $b=p+\sqrt{2}=-1-\sqrt{2}+\sqrt{2}=-1$이므로 $r=b+\sqrt{2}=-1+\sqrt{2}$
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

29 답 $\frac{1}{2}$

1단계 정수 부분 n의 값 구하기

양수 a의 정수 부분이 n, 소수 부분이 r이므로 $a=n+r$
$$\begin{aligned}(a+r)(a-r)&=(n+r+r)(n+r-r)\\&=(n+2r)n\\&=n^2+2nr\\&=38+\sqrt{2}\end{aligned}$$
이때 $0<r<1$이므로
$n^2<n^2+2nr<n^2+2n \qquad \therefore\ n^2<38+\sqrt{2}<n^2+2n$
$1<\sqrt{2}<2$에서 $39<38+\sqrt{2}<40$
따라서 $6^2<38+\sqrt{2}<6^2+2\times6$이므로 $n=6$

2단계 r의 값 구하기

$a=6+r$이므로
$n^2+2nr=6^2+12r=38+\sqrt{2}$, $12r=2+\sqrt{2}$
$\therefore\ r=\frac{2+\sqrt{2}}{12}$

3단계 $(6r-1)^2$의 값 구하기

$$\begin{aligned}\therefore\ (6r-1)^2&=\left(6\times\frac{2+\sqrt{2}}{12}-1\right)^2\\&=\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}-1\right)^2\\&=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

단계	채점 기준	비율
❶	정수 부분 n의 값을 구했다.	40 %
❷	r의 값을 구했다.	30 %
❸	$(6r-1)^2$의 값을 구했다.	30 %

30 답 28

해결 key Point!

반올림해서 1이 되는 수는 0.5 이상 1.5 미만임을 이용해야 한다.

$1.5=\sqrt{2.25}$이므로 $n<2.25$인 자연수 n에 대하여 $f(n)=1$이다.
$\therefore\ f(1)=f(2)=1$
$2.5=\sqrt{6.25}$이므로 $2.25\le n<6.25$인 자연수 n에 대하여 $f(n)=2$이다.
$\therefore\ f(3)=f(4)=f(5)=f(6)=2$
$3.5=\sqrt{12.25}$이므로 $6.25\le n<12.25$인 자연수 n에 대하여 $f(n)=3$이다.
$\therefore\ f(7)=f(8)=\cdots=f(12)=3$
$\therefore\ f(1)+f(2)+\cdots+f(12)=1\times2+2\times4+3\times6=28$

꿀 한줄평

$\sqrt{n}$을 반올림한 값을 찾아야 하므로 1.5, 2.5, 3.5, 4.5가 되는 $\sqrt{n}$의 값을 구하고, 그 값들을 이용하여 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, …, $f(12)$의 값을 구해야 한다.

31 답 3

1단계 $\sqrt{nx}$의 정수 부분이 2가 되도록 하는 nx의 값의 범위 구하기

$\sqrt{nx}$의 정수 부분이 2이면 $2\le\sqrt{nx}<3$이므로 $4\le nx<9$

2단계 x의 값을 n을 이용하여 나타내기

$4\le nx<9$를 만족시키는 자연수 nx는

$nx=4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8 \qquad \therefore x=\dfrac{4}{n},\ \dfrac{5}{n},\ \dfrac{6}{n},\ \dfrac{7}{n},\ \dfrac{8}{n}$

3단계 n의 값 구하기

모든 x의 값의 합이 10이므로

$\dfrac{4}{n}+\dfrac{5}{n}+\dfrac{6}{n}+\dfrac{7}{n}+\dfrac{8}{n}=10,\ \dfrac{30}{n}=10$

$\therefore n=3$

단계	채점 기준	비율
❶	nx의 값의 범위를 구했다.	30 %
❷	x의 값을 n을 이용하여 나타냈다.	40 %
❸	n의 값을 구했다.	30 %

32 답 $10-\sqrt{34}$

해결 key Point!

$\sqrt{3a}+\sqrt{b}=5$를 만족시키는 두 자연수 a, b를 구해야 한다.

$\sqrt{b}>0$이므로 $\sqrt{3a}+\sqrt{b}=5$에서 $\sqrt{3a}<5$

$\sqrt{3a}$가 5보다 작은 정수가 되려면 $a=3$이다.

따라서 $\sqrt{3a}+\sqrt{b}=5$에서

$\sqrt{b}=5-\sqrt{3a}=5-3=2 \qquad \therefore b=4$

따라서 $\sqrt{2a^2+b^2}=\sqrt{2\times3^2+4^2}=\sqrt{34}$이고 $5<\sqrt{34}<6$이므로

$\sqrt{34}$의 정수부분은 $x=5$, 소수 부분은 $y=\sqrt{34}-5$

$\therefore x-y=5-(\sqrt{34}-5)=10-\sqrt{34}$

33 답 ②

ㄱ. $1<\sqrt{3}<2$이므로 $0<\dfrac{\sqrt{3}}{2}<1$이고 $1<\sqrt{2}<2$이므로

$0<\dfrac{\sqrt{3}}{2}<1<\sqrt{2}<2$

따라서 두 수 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$과 $\sqrt{2}$ 사이에 있는 정수는 1의 1개이다.

$\therefore f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \sqrt{2}\right)=1$

ㄴ. $2<\sqrt{5}<3$에서 $-3<-\sqrt{5}<-2$이므로

$-1<2-\sqrt{5}<0$

$1<\sqrt{3}<2$이므로 $4<3+\sqrt{3}<5$

즉, $-1<2-\sqrt{5}<0<4<3+\sqrt{3}<5$

따라서 두 수 $2-\sqrt{5}$와 $3+\sqrt{3}$ 사이에 있는 정수는 0, 1, 2, 3, 4의 5개이다.

$\therefore f(2-\sqrt{5},\ 3+\sqrt{3})=5$

ㄷ. $3<\sqrt{10}<4$에서 $-4<-\sqrt{10}<-3$이므로

$-3<1-\sqrt{10}<-2$

$2.5=\sqrt{6.25}$에서 $2.5<\sqrt{7}<3$, $2.5<\sqrt{8}<3$이므로

$5<\sqrt{7}+\sqrt{8}<6$

즉, $-3<1-\sqrt{10}<-2<5<\sqrt{7}+\sqrt{8}<6$

따라서 두 수 $1-\sqrt{10}$과 $\sqrt{7}+\sqrt{8}$ 사이에 있는 정수는 -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5의 8개이다.

$\therefore f(1-\sqrt{10},\ \sqrt{7}+\sqrt{8})=8$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

꿀 한줄평

ㄷ에서 $2<\sqrt{7}<3$, $2<\sqrt{8}<3$의 각 변을 더하면 $4<\sqrt{7}+\sqrt{8}<6$
이때 $\sqrt{7}+\sqrt{8}$과 5 사이의 대소 관계를 확인할 수 없다. 따라서 $\sqrt{7}$과 $\sqrt{8}$은 $2.5=\sqrt{6.25}$와의 대소 관계를 확인하여 $\sqrt{7}+\sqrt{8}$과 5 사이의 대소 관계를 확인해야 한다.

34 답 ⑤

$3<\sqrt{15}<4$이므로 $-4<-\sqrt{15}<-3$

$3<\sqrt{10}<4$이므로 $-\sqrt{15}$와 $\sqrt{10}$ 사이의 정수는 -3, -2, -1, …, 3의 7개이다.

$\therefore D(-\sqrt{15},\ \sqrt{10})=7$

$1<\sqrt{3}<2$에서 $-2<-\sqrt{3}<-1$이므로 $0<2-\sqrt{3}<1$

$2<\sqrt{5}<3$에서 $5<3+\sqrt{5}<6$이므로 $2-\sqrt{3}$과 $3+\sqrt{5}$ 사이의 정수는 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다.

$\therefore D(2-\sqrt{3},\ 3+\sqrt{5})=5$

$\therefore D(-\sqrt{15},\ \sqrt{10})+D(2-\sqrt{3},\ 3+\sqrt{5})=7+5=12$

35 답 ①

$1<\sqrt{2}<2$에서 $a+1<a+\sqrt{2}<a+2$

또, $-2<-\sqrt{2}<-1$에서 $b-2<b-\sqrt{2}<b-1$

a, b가 정수이고 두 수 $a+\sqrt{2}$, $b-\sqrt{2}$ 사이에 있는 정수의 개수는 $a+1<n<b-1$을 만족시키는 n의 값의 개수와 같다.

이때 주어진 부등식을 만족시키는 정수 n의 개수가 6이므로

$b-1-(a+1)-1=6 \qquad \therefore b-a=9$

36 답 7, 15

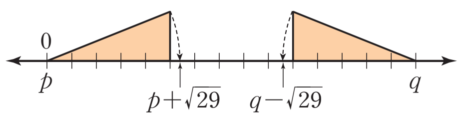
해결 key Point!

$\sqrt{29}=\sqrt{2^2+5^2}$이므로 빗변이 아닌 두 변의 길이가 2, 5인 직각삼각형을 이용해야 한다.

$\sqrt{29}=\sqrt{2^2+5^2}$이므로 $\sqrt{29}$는 두 변의 길이가 2, 5인 직각삼각형의 빗변의 길이이다.

점 p의 위치를 0, 두 점 p, q를 각각 두 직각삼각형의 한 점으로 하고 $p+\sqrt{29}$와 $q-\sqrt{29}$ 사이의 정수의 개수가 4가 되도록 수직선 위에 두 개의 직각삼각형을 나타내면 다음과 같다.

(ⅰ) $p+\sqrt{29}<q-\sqrt{29}$일 때



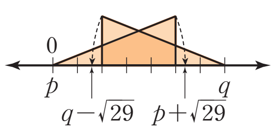
$5<\sqrt{29}<6$이므로 $5<p+\sqrt{29}<6$

$p+\sqrt{29}$와 $q-\sqrt{29}$ 사이의 정수의 개수가 4가 되려면 $9<q-\sqrt{29}<10$이어야 한다.

이때 q는 정수이므로 점 q의 좌표는 15이다.

$\therefore\ q-p=15$

(ⅱ) $p+\sqrt{29}>q-\sqrt{29}$일 때



$5<p+\sqrt{29}<6$이므로 $q-\sqrt{29}$와 $p+\sqrt{29}$ 사이의 정수의 개수가 4가 되려면 $1<q-\sqrt{29}<2$이어야 한다.

이때 q는 정수이므로 점 q의 좌표는 7이다.

$\therefore\ q-p=7$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $q-p$의 값은 7, 15이다.

꿀 한줄평

35번은 $A<n<B$를 만족시키는 정수 n의 개수가 주어졌고, **36**번은 A와 B 사이의 정수의 개수가 주어졌으므로 $A<n<B$ 뿐만 아니라 $B<n<A$의 경우도 가능한지 확인해야 한다. 즉, A와 B 사이의 정수의 개수를 묻는 문제는 A와 B의 대소 관계에 따라 두 가지 경우를 전부 확인해 봐야 한다.

02 근호를 포함한 식의 계산

Lv. 1 개념을 적용하는 핵심 문제

18쪽~21쪽

01 ②	**02** $\sqrt{2}$	**03** 55	**04** ③, ⑤	**05** ④
06 $\frac{1}{4}$	**07** 1	**08** ②	**09** $-\frac{1}{5}$	**10** $\frac{16\sqrt{3}}{3}$
11 7782	**12** ③, ④	**13** ③	**14** ③	**15** $\frac{1}{60}$
16 $\sqrt{14}$	**17** ⑤	**18** $3+12\sqrt{2}$		**19** $\frac{12+\sqrt{5}}{2}$
20 -2	**21** ④	**22** $6\sqrt{6}$ cm	**23** $2+4\sqrt{2}$	**24** $\sqrt{28}-6$

01 답 ②

$$\sqrt{3}\times\sqrt{5}\times\sqrt{a}\times\sqrt{10}=\sqrt{3\times5\times a\times10}=\sqrt{150a}=\sqrt{900}$$

따라서 $150a=900$이므로 $a=6$

02 답 $\sqrt{2}$

$4\sqrt{7}\times\sqrt{\frac{75}{7}}=4\sqrt{7\times\frac{75}{7}}=4\sqrt{75}=20\sqrt{3}$이므로

$a=20,\ b=3$

$\therefore\ \sqrt{a-6b}=\sqrt{20-6\times3}=\sqrt{2}$

03 답 55

1단계 a의 값 구하기

$\sqrt{\frac{242}{25}}=\sqrt{\frac{2\times11^2}{5^2}}=\frac{11}{5}\sqrt{2}$이므로 $a=\frac{11}{5}$

2단계 b의 값 구하기

$\sqrt{0.008}=\sqrt{\frac{8}{1000}}=\sqrt{\frac{80}{10000}}=\frac{\sqrt{80}}{100}=\frac{4\sqrt{5}}{100}=\frac{1}{25}\sqrt{5}$

이므로 $b=\frac{1}{25}$

3단계 $a\div b$의 값 구하기

$\therefore\ a\div b=\frac{11}{5}\div\frac{1}{25}=\frac{11}{5}\times25=55$

단계	채점 기준	비율
❶	a의 값을 구했다.	40 %
❷	b의 값을 구했다.	40 %
❸	$a\div b$의 값을 구했다.	20 %

04 답 ③, ⑤

$a>0,\ b>0$이므로 $ab>0,\ \frac{b}{a}>0$

① $\sqrt{(-a)^2 b}=\sqrt{a^2 b}=a\sqrt{b}$

② $\sqrt{a^2 b^2}=ab$

③ $\sqrt{a(-b)^2}=\sqrt{ab^2}=b\sqrt{a}$

④ $\sqrt{\dfrac{b^2}{(-a)^2}}=\sqrt{\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}=\dfrac{b}{a}$

⑤ $-\sqrt{\dfrac{ab}{a^2}}=-\dfrac{\sqrt{ab}}{a}$

따라서 옳은 것은 ③, ⑤이다.

05 답 ④

$$\sqrt{0.48}+\sqrt{0.015}=\sqrt{\frac{48}{100}}+\sqrt{\frac{15}{1000}}$$
$$=\sqrt{\frac{12}{25}}+\sqrt{\frac{3}{200}}$$
$$=\sqrt{\frac{2^2\times 3}{5^2}}+\sqrt{\frac{6}{20^2}}$$
$$=\frac{2}{5}\sqrt{3}+\frac{1}{20}\sqrt{6}$$
$$=\frac{2}{5}a+\frac{1}{20}b$$

06 답 $\frac{1}{4}$

$a>0$, $b>0$이므로

$$\frac{7}{a}\sqrt{\frac{a}{b}}-\frac{1}{b}\sqrt{\frac{9b}{a}}=7\sqrt{\frac{1}{a^2}\times\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{1}{b^2}\times\frac{9b}{a}}$$
$$=7\sqrt{\frac{1}{ab}}-\sqrt{\frac{9}{ab}}$$
$$=\frac{7}{\sqrt{ab}}-\frac{3}{\sqrt{ab}}$$
$$=\frac{4}{\sqrt{ab}}$$
$$=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$$

07 답 1

$\dfrac{6\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\dfrac{6\sqrt{5}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=3\sqrt{10}$이므로 $a=3$

$\dfrac{10}{\sqrt{180}}=\dfrac{10}{6\sqrt{5}}=\dfrac{5}{3\sqrt{5}}=\dfrac{5\times\sqrt{5}}{3\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\dfrac{1}{3}\sqrt{5}$이므로 $b=\dfrac{1}{3}$

$\therefore ab=3\times\dfrac{1}{3}=1$

08 답 ②

$\dfrac{\sqrt{392}}{7\sqrt{n}}=\dfrac{14\sqrt{2}}{7\sqrt{n}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$

이때 $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$이므로

$\dfrac{1}{\sqrt{n}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad\therefore \sqrt{n}=\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\dfrac{3\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

$\therefore n=3$

09 답 $-\frac{1}{5}$

1단계 A의 값 구하기

$$A=\frac{4}{\sqrt{18}}\times\sqrt{20}\div(-\sqrt{80})$$
$$=\frac{4}{3\sqrt{2}}\times 2\sqrt{5}\div(-4\sqrt{5})$$
$$=\frac{4}{3\sqrt{2}}\times 2\sqrt{5}\times\left(-\frac{1}{4\sqrt{5}}\right)$$
$$=-\frac{2}{3\sqrt{2}}$$
$$=-\frac{2\times\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$$
$$=-\frac{\sqrt{2}}{3}$$

2단계 B의 값 구하기

$$B=(-5\sqrt{6})\div\frac{6}{\sqrt{7}}\times\left(-\frac{2}{\sqrt{21}}\right)$$
$$=(-5\sqrt{6})\times\frac{\sqrt{7}}{6}\times\left(-\frac{2}{\sqrt{21}}\right)$$
$$=\frac{5\sqrt{2}}{3}$$

3단계 $A\div B$의 값 구하기

$$\therefore A\div B=-\frac{\sqrt{2}}{3}\div\frac{5\sqrt{2}}{3}=-\frac{\sqrt{2}}{3}\times\frac{3}{5\sqrt{2}}=-\frac{1}{5}$$

단계	채점 기준	비율
❶	A의 값을 구했다.	40 %
❷	B의 값을 구했다.	40 %
❸	$A\div B$의 값을 구했다.	20 %

10 답 $\frac{16\sqrt{3}}{3}$

직사각형의 가로의 길이를 $4x$, 세로의 길이를 $3x$ $(x>0)$라고 하면 직사각형의 세로의 길이를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이가 48이므로

$(3x)^2=48$, $9x^2=48$

$x^2=\dfrac{16}{3}$ $\quad\therefore x=\pm\dfrac{4}{\sqrt{3}}=\pm\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

이때 $x>0$이므로 $x=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

따라서 직사각형의 가로의 길이는

$4x=4\times\dfrac{4\sqrt{3}}{3}=\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$

참고 한 변의 길이가 a인 정사각형의 넓이는 a^2이다.

11 답 7782

$\sqrt{72.5}=8.515$이므로 $a=8.515$

$\sqrt{73.3}=8.562$이므로 $b=73.3$

$\therefore\ 1000a-10b=1000\times8.515-10\times73.3$

$=8515-733=7782$

12 답 ③, ④

① $\sqrt{500}=\sqrt{5\times100}=\sqrt{5\times10^2}=10\sqrt{5}$

② $\sqrt{2000}=\sqrt{5\times400}=\sqrt{5\times20^2}=20\sqrt{5}$

③ $\sqrt{45000}=\sqrt{50\times900}=\sqrt{50\times30^2}=30\sqrt{50}$

④ $\sqrt{0.005}=\sqrt{\dfrac{5}{1000}}=\sqrt{\dfrac{50}{10000}}=\sqrt{\dfrac{50}{100^2}}=\dfrac{\sqrt{50}}{100}$

⑤ $\sqrt{1.25}=\sqrt{\dfrac{125}{100}}=\sqrt{\dfrac{5}{4}}=\sqrt{\dfrac{5}{2^2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

따라서 $\sqrt{5}=2.236$임을 이용하여 그 값을 구할 수 없는 것은 ③, ④이다.

참고 주어진 수를 변형하여 $a\sqrt{5}$ (a는 유리수)의 꼴이 되면 그 값을 구할 수 있다.

13 답 ③

$$\frac{\sqrt{6}}{2}\times\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\div\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{2}\times\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}$$
$$=\frac{6}{\sqrt{2}}$$
$$=\frac{6\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$$
$$=3\sqrt{2}$$
$$=3\times1.414$$
$$=4.242$$

14 답 ③

① $2\sqrt{2}+5\sqrt{3}$은 근호 안의 수가 다르므로 더 이상 간단히 할 수 없다.

② $\sqrt{7}-\sqrt{4}=\sqrt{7}-2$

③ $4\sqrt{2}+6\sqrt{8}=4\sqrt{2}+12\sqrt{2}=16\sqrt{2}$

④ $\dfrac{5\sqrt{11}}{3}-\dfrac{2\sqrt{11}}{3}=\dfrac{3\sqrt{11}}{3}=\sqrt{11}$

⑤ $\dfrac{5}{8}+\dfrac{13\sqrt{3}}{8}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}=\dfrac{5}{8}+\dfrac{13\sqrt{3}}{8}-\dfrac{2\sqrt{3}}{8}$

$$=\frac{5}{8}+\left(\frac{13}{8}-\frac{2}{8}\right)\sqrt{3}$$
$$=\frac{5}{8}+\frac{11}{8}\sqrt{3}$$

따라서 옳은 것은 ③이다.

15 답 $\dfrac{1}{60}$

$$\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{3}}-\frac{4}{\sqrt{50}}-\frac{5}{\sqrt{48}}=\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{3}}-\frac{4}{5\sqrt{2}}-\frac{5}{4\sqrt{3}}$$
$$=\sqrt{2}+\sqrt{3}-\frac{2}{5}\sqrt{2}-\frac{5}{12}\sqrt{3}$$
$$=\frac{3}{5}\sqrt{2}+\frac{7}{12}\sqrt{3}$$

따라서 $a=\dfrac{3}{5}$, $b=\dfrac{7}{12}$이므로

$a-b=\dfrac{3}{5}-\dfrac{7}{12}=\dfrac{1}{60}$

16 답 $\sqrt{14}$

$$x=\frac{7\sqrt{2}+\sqrt{7}}{\sqrt{7}}=\frac{(7\sqrt{2}+\sqrt{7})\sqrt{7}}{\sqrt{7}\times\sqrt{7}}$$
$$=\frac{7\sqrt{14}+7}{7}=\sqrt{14}+1$$
$$y=\frac{7\sqrt{2}-\sqrt{7}}{\sqrt{7}}=\frac{(7\sqrt{2}-\sqrt{7})\sqrt{7}}{\sqrt{7}\times\sqrt{7}}$$
$$=\frac{7\sqrt{14}-7}{7}=\sqrt{14}-1$$

이므로

$x+y=(\sqrt{14}+1)+(\sqrt{14}-1)=2\sqrt{14}$

$x-y=(\sqrt{14}+1)-(\sqrt{14}-1)$

$=\sqrt{14}+1-\sqrt{14}+1=2$

$\therefore\ \dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{2\sqrt{14}}{2}=\sqrt{14}$

17 답 ⑤

$2\sqrt{2}(4\sqrt{3}-\sqrt{6})-(3\sqrt{18}-9)\div\sqrt{3}$

$=8\sqrt{6}-4\sqrt{3}-3\sqrt{6}+3\sqrt{3}$

$=-\sqrt{3}+5\sqrt{6}$

$=-\sqrt{3}+5\sqrt{2}\times\sqrt{3}$

$=-b+5ab$

18 답 $3+12\sqrt{2}$

$\dfrac{\sqrt{3}}{4}(8+12\sqrt{2})-\dfrac{\boxed{}}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}-\sqrt{6}$에서

$2\sqrt{3}+3\sqrt{6}-\dfrac{\boxed{}}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}-\sqrt{6}$

$\dfrac{\boxed{}}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}+3\sqrt{6}-(\sqrt{3}-\sqrt{6})$

$=2\sqrt{3}+3\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{6}$

$=\sqrt{3}+4\sqrt{6}$

$\therefore\ \boxed{}=(\sqrt{3}+4\sqrt{6})\sqrt{3}=3+12\sqrt{2}$

19 답 $\dfrac{12+\sqrt{5}}{2}$

두 점 A, B에 대응하는 수가 각각 $3-\sqrt{5}$, $7+\sqrt{5}$이므로

$\overline{AB}=(7+\sqrt{5})-(3-\sqrt{5})=4+2\sqrt{5}$

$\therefore\ \overline{AM}=\overline{BM}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{4+2\sqrt{5}}{2}=2+\sqrt{5}$

이때 $\overline{BM}$의 중점이 N이므로

$\overline{MN}=\overline{BN}=\frac{1}{2}\overline{BM}=\frac{2+\sqrt{5}}{2}$

따라서 점 N에 대응하는 수는 점 B에서 $\overline{BN}$을 뺀 수이므로

$7+\sqrt{5}-\frac{2+\sqrt{5}}{2}=\frac{12+\sqrt{5}}{2}$

Level UP

수직선 위의 두 점 $A(a)$, $B(b)$ $(a<b)$에 대하여 $\overline{AB}$의 중점을 M이라고 하면

$\overline{AM}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{b-a}{2}$이므로 점 M에 대응하는 수는

$a+\frac{b-a}{2}=b-\frac{b-a}{2}=\frac{a+b}{2}$

20 답 -2

$\sqrt{72}+\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}-a\left(\frac{\sqrt{48}-\sqrt{54}}{\sqrt{3}}\right)$

$=6\sqrt{2}+\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}-a\left(\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}}-\frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{3}}\right)$

$=6\sqrt{2}+2-a(4-3\sqrt{2})$

$=6\sqrt{2}+2-4a+3\sqrt{2}a$

$=2-4a+(6+3a)\sqrt{2}$

이 값이 유리수가 되려면 무리수 부분이 0이어야 하므로

$6+3a=0$, $3a=-6$

$\therefore\ a=-2$

Level UP

a, b가 유리수이고 $\sqrt{m}$이 무리수일 때, $a+b\sqrt{m}$이 유리수가 되려면 $b=0$이어야 한다.

21 답 ④

$\sqrt{36}<\sqrt{48}<\sqrt{49}$, 즉 $6<\sqrt{48}<7$이므로 $3<\sqrt{48}-3<4$

이때 $\sqrt{48}-3$의 정수 부분이 3이므로 소수 부분은

$(\sqrt{48}-3)-3=\sqrt{48}-6=4\sqrt{3}-6$ $\quad\therefore\ a=4\sqrt{3}-6$

$\sqrt{64}<\sqrt{75}<\sqrt{81}$, 즉 $8<\sqrt{75}<9$이므로 $12<\sqrt{75}+4<13$

이때 $\sqrt{75}+4$의 정수 부분이 12이므로 소수 부분은

$(\sqrt{75}+4)-12=\sqrt{75}-8=5\sqrt{3}-8$ $\quad\therefore\ b=5\sqrt{3}-8$

$\therefore\ b-a=(5\sqrt{3}-8)-(4\sqrt{3}-6)$

$\quad=5\sqrt{3}-8-4\sqrt{3}+6$

$\quad=-2+\sqrt{3}$

22 답 $6\sqrt{6}$ cm

정사각형 P의 넓이가 24 cm^2이므로 한 변의 길이는

$\sqrt{24}=2\sqrt{6}$ cm

정사각형 Q의 넓이가 96 cm^2이므로 한 변의 길이는

$\sqrt{96}=4\sqrt{6}$ cm

$\therefore\ \overline{AB}=2\sqrt{6}+4\sqrt{6}=6\sqrt{6}$(cm)

23 답 $2+4\sqrt{2}$

정사각형 ABCD의 넓이가 4이므로

$\overline{AB}=\overline{BC}=\sqrt{4}=2$

따라서 점 B에 대응하는 수는 $1-2=-1$이고 직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AC}=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

즉, 점 Q에 대응하는 수는 $1+2\sqrt{2}$

$\therefore\ b=1+2\sqrt{2}$

마찬가지로 $\overline{BD}=\overline{AC}=2\sqrt{2}$이므로 점 P에 대응하는 수는 $-1-2\sqrt{2}$

$\therefore\ a=-1-2\sqrt{2}$

$\therefore\ b-a=(1+2\sqrt{2})-(-1-2\sqrt{2})$

$\quad=1+2\sqrt{2}+1+2\sqrt{2}$

$\quad=2+4\sqrt{2}$

다른 풀이

정사각형 ABCD의 넓이가 4이므로

$\overline{AB}=\overline{BC}=\sqrt{4}=2$

직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{CQ}=\overline{AC}=\overline{BD}=\overline{BP}=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

이때 $b-a$의 값은 $\overline{BP}+\overline{BC}+\overline{CQ}$의 길이와 같으므로

$2\sqrt{2}+2+2\sqrt{2}=2+4\sqrt{2}$

24 답 $\sqrt{28}-6$

$(2-\sqrt{7})-(\sqrt{28}-6)=2-\sqrt{7}-2\sqrt{7}+6$

$\quad=8-3\sqrt{7}$

$\quad=\sqrt{64}-\sqrt{63}>0$

$\therefore\ 2-\sqrt{7}>\sqrt{28}-6$

$(2-\sqrt{7})-(3-\sqrt{7})=2-\sqrt{7}-3+\sqrt{7}$

$\quad=-1<0$

$\therefore\ 2-\sqrt{7}<3-\sqrt{7}$

따라서 $\sqrt{28}-6<2-\sqrt{7}<3-\sqrt{7}$이므로 세 수를 수직선 위에 나타낼 때, 가장 왼쪽에 오는 수는 $\sqrt{28}-6$이다.

Level UP

세 수 a, b, c의 대소를 비교할 때, $a<b$, $b<c$이면 $a<b<c$가 성립한다.

Lv. 2 사고를 확장하는 실전 문제

22쪽~27쪽

01 158	**02** ②	**03** 2	**04** $3\sqrt{3}-2$	**05** $1+\sqrt{6}$
06 5	**07** 28	**08** ③	**09** ⑤	**10** $108\sqrt{70}$
11 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$	**12** ②	**13** ④	**14** 1.775	**15** 13.78
16 ④	**17** ③	**18** ①	**19** 5	**20** 62
21 ④	**22** ③	**23** 1	**24** 2	**25** ②
26 ⑤	**27** ⑤	**28** $(p+11)(q+15)$		**29** 9
30 ⑤	**31** ②	**32** 7	**33** ②	**34** ②
35 ③	**36** $6+6\sqrt{2}$			

01 답 158

b와 c의 최대공약수는 5이므로 $b=5p$, $c=5q$ ($p\le q$이고 p, q는 서로소인 자연수)라고 하자.

이때 $\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}=10\sqrt{5}$에서 $\sqrt{abc}=10\sqrt{5}$이므로

$\sqrt{a\times5p\times5q}=5\sqrt{apq}=10\sqrt{5}$, $\sqrt{apq}=2\sqrt{5}$

$\therefore\ apq=20$

이때 a는 2 이상의 자연수이므로 $apq=20=2^2\times5$를 만족시키는 a, p, q를 순서쌍 (a, p, q)로 나타내면

$(2, 1, 2\times5)$, $(2, 2, 5)$, $(2^2, 1, 5)$, $(5, 1, 2^2)$

각각의 순서쌍 (a, p, q)에 대하여 순서쌍 $(a, 5p, 5q)$, 즉 (a, b, c)는

$(2, 5, 50)$, $(2, 10, 25)$, $(4, 5, 25)$, $(5, 5, 20)$

이고, 각각의 $a+b+c$의 값은

$2+5+50=57$, $2+10+25=37$, $4+5+25=34$, $5+5+20=30$

따라서 모든 $a+b+c$의 값의 합은

$57+37+34+30=158$

02 답 ②

$\sqrt{24m}\sqrt{45n}=\sqrt{2^3\times3^3\times5\times m\times n}$이 자연수가 되려면

$mn=2\times3\times5\times k^2$ (k는 자연수)의 꼴이어야 한다.

$k=1$일 때, mn의 값은 가장 작은 값 $mn=30$을 갖고 이를 만족시키는 자연수 m, n을 순서쌍 (m, n)으로 나타내면

$(1, 30)$, $(2, 15)$, $(3, 10)$, $(5, 6)$, $(6, 5)$, $(10, 3)$, $(15, 2)$, $(30, 1)$

이고, 각각의 $m+n$의 값은 다음과 같다.

m	1	2	3	5	6	10	15	30
n	30	15	10	6	5	3	2	1
$m+n$	31	17	13	11	11	13	17	31

따라서 가장 작은 $m+n$의 값은 11이다.

꿀 한줄평

근호 안에 제곱인 인수가 있으면 제곱근의 성질에 따라 n이 자연수일 때 $\sqrt{n^2}=|n|=n$이므로 근호 안의 수가 제곱수가 되도록 해야 자연수가 될 수 있음을 알고 있어야 한다. 즉, 근호 안을 제곱수로 만들기 위하여 추가로 곱해야 하는 값을 찾아 무리수가 자연수가 되도록 해야 한다.

03 답 2

해결 key Point!

최대공약수가 6이면 두 자연수는 $6=2\times3=\sqrt{2^2\times3^2}$을 모두 소인수로 가져야 한다.

두 자연수 $\sqrt{2^2\times5\times x}$, $\sqrt{2\times3^2\times y}$의 최대공약수는 6이므로

$x=3^2\times a$, $y=2\times b$ (a, b는 서로소인 자연수, b는 5와 서로소인 자연수)의 꼴이어야 한다.

또, 두 자연수 $\sqrt{2^2\times5\times x}=\sqrt{2^2\times5\times3^2\times a}=6\sqrt{5a}$,

$\sqrt{2\times3^2\times y}=\sqrt{2^2\times3^2\times b}=6\sqrt{b}$의 최소공배수는

$120=6\times20$이므로

$\sqrt{5a}\times\sqrt{b}=20$, $\sqrt{5ab}=20$

양변을 제곱하면

$5ab=400\qquad\therefore\ ab=80$

이때 $80=2^4\times5$이므로 a, b가 될 수 있는 값을 순서쌍 (a, b)로 나타내면

$(5, 2^4)$, $(2^4\times5, 1)$

이고, 이때의 x, y의 값은

$(3^2\times5, 2^5)$, $(2^4\times3^2\times5, 2)$

따라서 순서쌍 (x, y)의 개수는 2이다.

Level UP

두 자연수 A, B에 대하여 최대공약수가 G, 최소공배수가 L일 때,
$A=aG$, $B=bG$, $L=abG$ (a와 b는 서로소인 자연수)

04 답 $3\sqrt{3}-2$

해결 key Point!

대각선에 있는 세 수의 합을 구한 후 x, y의 값을 구해야 한다.

$\sqrt{75}+4=5\sqrt{3}+4$, $\sqrt{108}=6\sqrt{3}$이므로 오른쪽 위에서 왼쪽 아래로의 대각선에 있는 세 수의 합은

$(\sqrt{75}+4)+2\sqrt{3}+\sqrt{108}=(5\sqrt{3}+4)+2\sqrt{3}+6\sqrt{3}$
$=13\sqrt{3}+4$

$\sqrt{27}+1=3\sqrt{3}+1$이므로 왼쪽의 세로줄에 있는 세 수의 합은

$(\sqrt{27}+1)+x+\sqrt{108}=(3\sqrt{3}+1)+x+6\sqrt{3}$
$=9\sqrt{3}+1+x$

즉, $9\sqrt{3}+1+x=13\sqrt{3}+4$이므로 $x=4\sqrt{3}+3$

또, 중앙의 가로줄에 있는 세 수의 합은

$$x+2\sqrt{3}+y=(4\sqrt{3}+3)+2\sqrt{3}+y$$
$$=6\sqrt{3}+3+y$$

즉, $6\sqrt{3}+3+y=13\sqrt{3}+4$이므로 $y=7\sqrt{3}+1$

$$\therefore\ y-x=(7\sqrt{3}+1)-(4\sqrt{3}+3)$$
$$=7\sqrt{3}+1-4\sqrt{3}-3$$
$$=3\sqrt{3}-2$$

05 답 $1+\sqrt{6}$

해결 key Point!

주어진 등식을 정리하여 한 문자로 나타내야 한다.

1단계 x, y에 대한 관계식으로 나타내기

$\dfrac{3x-5y}{7x-2y}=\dfrac{1}{2}$에서

$2(3x-5y)=7x-2y$, $6x-10y=7x-2y$

$\therefore\ x=-8y$

2단계 주어진 식의 값 구하기

$$\therefore\ \frac{\sqrt{x-3y}}{\sqrt{2x+5y}}+\frac{\sqrt{5x-2y}}{\sqrt{x+y}}=\sqrt{\frac{x-3y}{2x+5y}}+\sqrt{\frac{5x-2y}{x+y}}$$
$$=\sqrt{\frac{-8y-3y}{-16y+5y}}+\sqrt{\frac{-40y-2y}{-8y+y}}$$
$$=\sqrt{\frac{-11y}{-11y}}+\sqrt{\frac{-42y}{-7y}}$$
$$=1+\sqrt{6}$$

단계	채점 기준	비율
❶	x, y에 대한 관계식으로 나타냈다.	50 %
❷	주어진 식의 값을 구했다.	50 %

06 답 5

$\overline{AB}=2$, $\overline{AE}=\dfrac{1}{2}\overline{AD}=1$이므로 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{BE}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

$\overline{DF}=\overline{BE}=\sqrt{5}$이므로 $\overline{QR}=\overline{BE}+\overline{DF}=\sqrt{5}+\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

이때 두 사각형의 넓이는 모두 4로 같으므로 $\overline{PQ}\times\overline{QR}=4$에서

$\overline{PQ}\times2\sqrt{5}=4$ $\quad\therefore\ \overline{PQ}=\dfrac{4}{2\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

$$\therefore\ \frac{\overline{QR}}{\overline{PQ}}=\frac{2\sqrt{5}}{\frac{2\sqrt{5}}{5}}=5$$

참고 $a=\dfrac{q}{p}$, $b=\dfrac{s}{r}$일 때

$\dfrac{a}{b}=a\div b=\dfrac{q}{p}\div\dfrac{s}{r}=\dfrac{q}{p}\times\dfrac{r}{s}=\dfrac{qr}{ps}$이므로 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{\frac{q}{p}}{\frac{s}{r}}=\dfrac{qr}{ps}$

07 답 28

해결 key Point!

근호 안의 수가 어떤 수의 제곱으로 나타낼 수 있으면 근호를 없앨 수 있다.

$n=\sqrt{63m}=3\sqrt{7m}$이고 n은 자연수이므로 $m=7\times k^2$

(k는 자연수)의 꼴이어야 하고 이때의 n의 값은

$n=3\sqrt{7\times7k^2}=21k$이다.

$k=1$일 때, $\sqrt{63m}$의 값은 최소가 되고 $m=7$, $n=21$이다.

따라서 $x=7$, $y=21$이므로

$x+y=7+21=28$

08 답 ③

해결 key Point!

$1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9\times10$을 먼저 소인수분해하여 2×5의 거듭제곱을 찾아야 한다.

$1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9\times10=2^8\times3^4\times5^2\times7$,

$125=5^3=\sqrt{5^6}$

$$\therefore\ 125\sqrt{1\times2\times3\times4\times\cdots\times10}=\sqrt{5^6\times2^8\times3^4\times5^2\times7}$$
$$=\sqrt{2^8\times3^4\times5^8\times7}$$
$$=\sqrt{567\times2^8\times5^8}$$
$$=\sqrt{567\times10^8}$$
$$=\sqrt{567}\times10^4$$

이때 $\sqrt{100}<\sqrt{567}<\sqrt{10000}$, 즉 $10<\sqrt{567}<100$이므로

$\sqrt{567}$은 두 자리 수이다.

따라서 $125\sqrt{1\times2\times3\times4\times\cdots\times10}$은 여섯 자리 수이다.

09 답 ⑤

색종이는 넓이가 8인 정사각형이므로 정사각형 모양의 색종이의 한 변의 길이는 $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

색종이를 4등분한 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{2}$

색종이를 4등분한 정사각형의 대각선의 길이는

$\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{4}=2$

보기의 도형의 둘레의 길이를 구하면 다음과 같다.

① $\sqrt{2}\times4+2\sqrt{2}\times2=8\sqrt{2}$ ⇨ 무리수

② $2\sqrt{2}+\sqrt{2}\times2+2\times2=4\sqrt{2}+4$ ⇨ 무리수

③ $\sqrt{2}\times4+2\times2=4\sqrt{2}+4$ ⇨ 무리수

④ $\sqrt{2}\times2+2\times3=2\sqrt{2}+6$ ⇨ 무리수

⑤ $2\times4=8$ ⇨ 유리수

따라서 둘레의 길이가 유리수로 나타나는 것은 ⑤이다.

10 답 $108\sqrt{70}$

$f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}+\dfrac{\sqrt{x}}{x}=\dfrac{(x+1)\sqrt{x}}{x}$이므로

$f(2)\times f(3)\times f(4)\times f(5)\times f(6)\times f(7)\times f(8)$

$=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{5\sqrt{4}}{4}\times\dfrac{6\sqrt{5}}{5}\times\dfrac{7\sqrt{6}}{6}\times\dfrac{8\sqrt{7}}{7}\times\dfrac{9\sqrt{8}}{8}$

$=\dfrac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times2\times\sqrt{5}\times\sqrt{6}\times\sqrt{7}\times18\sqrt{2}}{2}$

$=18\sqrt{2^3\times3^2\times5\times7}$

$=108\sqrt{70}$

11 답 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$\begin{cases}\sqrt{5}x-\sqrt{3}y=-2 & \cdots\cdots ㉠\\ \sqrt{3}x+\sqrt{5}y=2 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠의 식에 $\sqrt{3}$을 곱하면

$\sqrt{15}x-3y=-2\sqrt{3}$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉡의 식에 $\sqrt{5}$를 곱하면

$\sqrt{15}x+5y=2\sqrt{5}$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉢−㉣을 하면

$-8y=-2\sqrt{3}-2\sqrt{5}$ $\quad\therefore y=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{4}$

$y=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{4}$를 ㉠에 대입하면

$\sqrt{5}x-\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{4}=-2$, $\sqrt{5}x=-2+\dfrac{3+\sqrt{15}}{4}$

$\sqrt{5}x=\dfrac{-5+\sqrt{15}}{4}$ $\quad\therefore x=\dfrac{-5+\sqrt{15}}{4\sqrt{5}}=\dfrac{-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{4}$

따라서 $p=\dfrac{-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{4}$, $q=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{4}$이므로

$p+q=\dfrac{-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{4}+\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{4}=\dfrac{2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \dfrac{1}{p+q}=1\div\dfrac{\sqrt{3}}{2}=1\times\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

12 답 ②

사각형 AIGJ는 네 변의 길이가 모두 같으므로 마름모이다.

정육면체의 한 모서리의 길이가 6이므로

$\overline{\mathrm{IJ}}=\overline{\mathrm{FH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{FG}}^2+\overline{\mathrm{GH}}^2}=\sqrt{6^2+6^2}=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$

직각삼각형 AEG에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AG}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AE}}^2+\overline{\mathrm{EG}}^2}=\sqrt{6^2+(6\sqrt{2})^2}=\sqrt{108}=6\sqrt{3}$

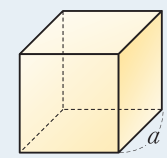
따라서 사각형 AIGJ의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{IJ}}\times\overline{\mathrm{AG}}=\dfrac{1}{2}\times6\sqrt{2}\times6\sqrt{3}=18\sqrt{6}$

Level UP

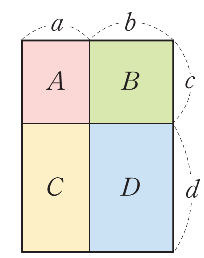
한 모서리의 길이가 a인 정육면체에서 밑면의 대각선의 길이가 $\sqrt{a^2+a^2}=a\sqrt{2}$이므로 정육면체의 대각선의 길이는

$\sqrt{a^2+(a\sqrt{2})^2}=\sqrt{3a^2}=a\sqrt{3}$



13 답 ④

오른쪽 그림과 같이 네 직사각형의 가로, 세로의 길이를 a, b, c, d라 하고 넓이를 나타내면 다음과 같다.



직사각형 A의 넓이는

$ac=\sqrt{0.\dot{2}}=\sqrt{\dfrac{2}{9}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

직사각형 C의 넓이는

$ad=\sqrt{0.\dot{5}}=\sqrt{\dfrac{5}{9}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

직사각형 D의 넓이는

$bd=\sqrt{1.\dot{1}\dot{1}}=\sqrt{\dfrac{110}{99}}=\sqrt{\dfrac{10}{9}}=\dfrac{\sqrt{10}}{3}$

따라서 직사각형 B의 넓이는

$bc=\dfrac{ac\times bd}{ad}$

$=(ac\times bd)\div ad$

$=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}\times\dfrac{\sqrt{10}}{3}\right)\div\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

$=\dfrac{2\sqrt{5}}{9}\times\dfrac{3}{\sqrt{5}}=\dfrac{2}{3}$

14 답 1.775

해결 key Point!

$\sqrt{3.35}$의 값은 표의 세로줄의 값이 3.3인 행과 가로줄의 값이 5인 열이 만나는 값을 읽으면 되고, 제곱근의 값이 1.364가 되는 수는 표 안에서 그 값이 되는 행과 열을 찾아 값을 구해야 한다.

$\sqrt{3.35}=1.830$이고 $\sqrt{1.83}=1.353$이므로

$a=\sqrt{\sqrt{3.35}}=\sqrt{1.83}=1.353$

$\sqrt{1.86}=1.364$이므로 $\sqrt{\sqrt{b}}=1.364$에서 $\sqrt{b}=1.86$

이때 $\sqrt{3.46}=1.860$이므로 $b=3.46$

$\therefore \sqrt{10a-3b}=\sqrt{10\times1.353-3\times3.46}=\sqrt{3.15}=1.775$

15 답 13.78

$2\sqrt{0.7}=2\times\sqrt{\dfrac{70}{100}}=2\times\dfrac{\sqrt{70}}{10}=2\times0.84=1.68$

$5\sqrt{2.8}=5\sqrt{\dfrac{280}{100}}=5\times\dfrac{2\sqrt{70}}{10}=8.4$

$\sqrt{425}=5\sqrt{17}=5\times4.1=20.5$

$\therefore 2\sqrt{0.7}-5\sqrt{2.8}+\sqrt{425}=1.68-8.4+20.5=13.78$

16 답 ④

> **해결 key Point!**
> 적당한 제곱수를 곱하거나 나누어 351×10^k (k는 자연수)의 꼴로 만들어야 한다.

① $\sqrt{0.0351}=\sqrt{\frac{3.51}{100}}=\frac{\sqrt{3.51}}{10}=\frac{a}{10}=0.1a$

② $\sqrt{0.351}=\sqrt{\frac{35.1}{100}}=\frac{\sqrt{35.1}}{10}=\frac{b}{10}=0.1b$

③ $\sqrt{39}=\sqrt{\frac{351}{9}}=\sqrt{\frac{3.51\times100}{9}}=\frac{10}{3}a$

④ $\sqrt{1404}=\sqrt{3.51\times400}=20\sqrt{3.51}=20a$

⑤ $\sqrt{126360}=\sqrt{35.1\times3600}=60\sqrt{35.1}=60b$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

17 답 ③

① $\sqrt{3.54}=1.881$

② $\sqrt{342}=\sqrt{3.42\times100}=10\sqrt{3.42}=10\times1.849=18.49$

④ $\sqrt{13.68}=\sqrt{4\times3.42}=2\sqrt{3.42}=2\times1.849=3.698$

⑤ $\sqrt{0.84}=\sqrt{\frac{3.36}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{3.36}=\frac{1}{2}\times1.833=0.9165$

18 답 ①

$$\sqrt{0.00343}=\sqrt{\frac{343}{100000}}=\sqrt{\frac{7^3}{10^5}}=\sqrt{\frac{7^3}{2^5\times5^5}}=\frac{(\sqrt{7})^3}{(\sqrt{2})^5\times(\sqrt{5})^5}=\frac{c^3}{a^5b^5}$$

19 답 5

1단계 양수 a의 값 구하기

$[2,\ a]=\sqrt{2a}+\sqrt{2^2}=\sqrt{2a}+2$

즉, $[2,\ a]=4$에서 $\sqrt{2a}+2=4$이므로 $\sqrt{2a}=2$

양변을 제곱하면

$2a=4\qquad\therefore a=2$

2단계 양수 b의 값 구하기

이때 $[a,\ a]=\sqrt{a^2}+\sqrt{a^2}=a+a=2a=4$,

$[3,\ b]=\sqrt{3b}+\sqrt{3^2}=\sqrt{3b}+3$이므로

$[a,\ a]-[3,\ b]=4-(\sqrt{3b}+3)=1-\sqrt{3b}$

즉, $[a,\ a]-[3,\ b]=-2$에서 $1-\sqrt{3b}=-2$이므로 $\sqrt{3b}=3$

양변을 제곱하면

$3b=9\qquad\therefore b=3$

3단계 $a+b$의 값 구하기

$\therefore a+b=2+3=5$

단계	채점 기준	비율
❶	a의 값을 구했다.	40 %
❷	b의 값을 구했다.	40 %
❸	$a+b$의 값을 구했다.	20 %

20 답 62

> **해결 key Point!**
> $\sqrt{n}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$ (a, b는 서로소)이므로 $\sqrt{n}=\sqrt{5m}+\sqrt{2}$가 성립하려면 $\sqrt{5m}=k\sqrt{2}$ (k는 자연수)의 꼴이고, $\sqrt{n}=(k+1)\sqrt{2}$의 꼴이어야 한다.

$\sqrt{n}=\sqrt{5m}+\sqrt{2}$가 성립하려면 $\sqrt{5m}$과 $\sqrt{2}$의 합을 계산할 수 있어야 하므로 $\sqrt{5m}=k\sqrt{2}$ (k는 자연수)의 꼴이어야 한다.

즉, $\sqrt{5m}=k\sqrt{2}=\sqrt{k^2\times2}$이므로

$5m=2k^2\qquad\therefore m=\frac{2k^2}{5}$

이때 m은 자연수이므로 k^2은 5의 배수이어야 한다.

따라서 가장 작은 자연수 m의 값은 $k=5$일 때이므로

$m=\frac{2\times5^2}{5}=10\qquad\therefore a=10$

$m=10$을 $\sqrt{n}=\sqrt{5m}+\sqrt{2}$에 대입하면

$\sqrt{n}=\sqrt{50}+\sqrt{2}=5\sqrt{2}+\sqrt{2}=6\sqrt{2}=\sqrt{72}\qquad\therefore n=72$

$\therefore n-a=72-10=62$

21 답 ④

> **해결 key Point!**
> (유리수)$\neq$(무리수)이므로 a, b, c, d가 유리수이고 $\sqrt{p}$가 무리수일 때
> $a+b\sqrt{p}=c+d\sqrt{p}$이면 $a=c$, $b=d$가 성립함을 이용해야 한다.

$2<2\sqrt{2}<3$이므로 $2\sqrt{2}-4<0$

$(\sqrt{2}-1)x+(\sqrt{2}+1)y=\sqrt{(2\sqrt{2}-4)^2}$에서

$\sqrt{2}x-x+\sqrt{2}y+y=-(2\sqrt{2}-4)$

$\therefore (-x+y)+(x+y)\sqrt{2}=4-2\sqrt{2}$

이때 x, y가 유리수이므로

$-x+y=4$, $x+y=-2$

두 식을 연립하여 풀면 $x=-3$, $y=1$

$\therefore x^2-y^2=(-3)^2-1^2=8$

22 답 ③

해결 key Point!

방정식 $f(x)=0$의 한 근이 α이면 $f(\alpha)=0$임을 이용해야 한다.

$\sqrt{3}$이 방정식 $x^3+ax^2-ax+b=0$의 한 근이므로 $x=\sqrt{3}$을 방정식에 대입하면

$3\sqrt{3}+3a-a\sqrt{3}+b=0 \qquad \therefore 3a+b+(3-a)\sqrt{3}=0$

즉, $3a+b=0$, $3-a=0$이므로 $a=3$, $b=-9$

$\therefore a+b=3+(-9)=-6$

23 답 1

$2<\sqrt{5}<3$에서 $3<\sqrt{5}+1<4$이므로

$[x]=3$, $\ll x \gg=\sqrt{5}+1-3=\sqrt{5}-2$

또, $0<\sqrt{5}-2<1$이므로 $[\ll x \gg]=0$

$$\begin{aligned}\therefore [x]+[\ll x \gg]+p\ll x \gg&=3+0+p(\sqrt{5}-2)\\&=3-2p+p\sqrt{5}\end{aligned}$$

즉, $3-2p+p\sqrt{5}=q+2\sqrt{5}$이고 p, q가 유리수이므로

$3-2p=q$, $p=2$

$\therefore q=-1$

$\therefore p+q=2+(-1)=1$

24 답 2

$3<\sqrt{10}<4$이므로 $2<\sqrt{10}-1<3$

따라서 $[x_1]=[\sqrt{10}-1]=2$이므로

$x_2=x_1-[x_1]=(\sqrt{10}-1)-2=\sqrt{10}-3$

$0<\sqrt{10}-3<1$이므로 $[x_2]=[\sqrt{10}-3]=0$

따라서 $x_3=x_2-[x_2]=(\sqrt{10}-3)-0=\sqrt{10}-3$, $[x_3]=0$

$x_4=x_3-[x_3]=(\sqrt{10}-3)-0=\sqrt{10}-3$, $[x_4]=0$

$\vdots$

즉, $x_2=x_3=x_4=\cdots=\sqrt{10}-3$이다.

$$\begin{aligned}\therefore\ & x_1-x_2+x_3-x_4+x_5+\cdots-x_{100}\\&=x_1-x_2\\&=(\sqrt{10}-1)-(\sqrt{10}-3)\\&=2\end{aligned}$$

25 답 ②

$2\sqrt{5}x+\sqrt{2}-8<\sqrt{10}(\sqrt{2}-\sqrt{5})x$에서

$2\sqrt{5}x-\sqrt{10}(\sqrt{2}-\sqrt{5})x<8-\sqrt{2}$,

$(2\sqrt{5}-2\sqrt{5}+5\sqrt{2})x<8-\sqrt{2}$

$5\sqrt{2}x<8-\sqrt{2}$, $x<\dfrac{8-\sqrt{2}}{5\sqrt{2}}$

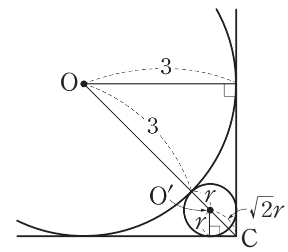
$\therefore x<\dfrac{4\sqrt{2}-1}{5}$

$1<\sqrt{2}<2$에서 $4<4\sqrt{2}<8$이므로

$3<4\sqrt{2}-1<7 \qquad \therefore \dfrac{3}{5}<\dfrac{4\sqrt{2}-1}{5}<\dfrac{7}{5}$

따라서 x의 값 중 정수는 1뿐이므로 정수의 개수는 1이다.

26 답 ⑤



큰 원의 중심을 O, 작은 원의 중심을 O′이라 하고 작은 원의 반지름의 길이를 r라고 하자.

큰 원의 반지름의 길이가 3이므로 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{OC}=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

$\overline{O'C}=\sqrt{r^2+r^2}=\sqrt{2r^2}=\sqrt{2}r$

이때 $\overline{OC}=3\sqrt{2}$에서 $3+r+\sqrt{2}r=3\sqrt{2}$이므로

$r+\sqrt{2}r=3\sqrt{2}-3$, $r(\sqrt{2}+1)=3(\sqrt{2}-1)$

$\therefore r=\dfrac{3(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}+1}$

따라서

$$\begin{aligned}3-r&=\frac{3(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+1}-\frac{3(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}+1}\\&=\frac{3\sqrt{2}+3-3\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}+1}=\frac{6}{\sqrt{2}+1}\end{aligned}$$

이므로

$\dfrac{2}{3-r}=2\times\dfrac{\sqrt{2}+1}{6}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{3}$

27 답 ⑤

$$\begin{aligned}3\sqrt{2}A-\sqrt{3}B&=3\sqrt{2}(4-a\sqrt{2})-\sqrt{3}(2a\sqrt{6}-5\sqrt{3})\\&=12\sqrt{2}-6a-6a\sqrt{2}+15\\&=-6a+15+(12-6a)\sqrt{2}\end{aligned}$$

이 값이 유리수가 되려면 무리수 부분이 0이어야 하므로

$12-6a=0$, $-6a=-12$

$\therefore a=2$

Level UP

a, b가 유리수이고 $\sqrt{m}$이 무리수일 때, $a+b\sqrt{m}$이 유리수가 되려면 $b=0$이어야 한다.

28 답 $(p+11)(q+15)$

해결 key Point!

$\sqrt{15}=\sqrt{3\times5}=\sqrt{3}\sqrt{5}$이므로 주어진 식을 이용하여 $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$를 각각 p, q를 이용하여 나타내야 한다.

$11<\sqrt{125}<12$에서 $p=\sqrt{125}-11=5\sqrt{5}-11$

즉, $p+11=5\sqrt{5}$이므로 $\sqrt{5}=\dfrac{p+11}{5}$

또, $15<\sqrt{243}<16$에서 $q=\sqrt{243}-15=9\sqrt{3}-15$

즉, $q+15=9\sqrt{3}$이므로 $\sqrt{3}=\dfrac{q+15}{9}$

이때 $\sqrt{15}=\sqrt{5}\sqrt{3}$이므로

$$45\sqrt{15}=45\left(\frac{p+11}{5}\right)\left(\frac{q+15}{9}\right)=(p+11)(q+15)$$

29 답 9

해결 key Point!

$\frac{\sqrt{n}+4}{\sqrt{n}-2}$의 정수 부분이 3이면 $3\le\frac{\sqrt{n}+4}{\sqrt{n}-2}<4$임을 이용하여 $\sqrt{n}$의 범위를 구해야 한다.

$\frac{\sqrt{n}+4}{\sqrt{n}-2}$의 정수 부분이 3이면 $3\le\frac{\sqrt{n}+4}{\sqrt{n}-2}<4$이고, n이 두 자리 자연수이므로

$\sqrt{n}>\sqrt{9}=3$ $\quad\therefore \sqrt{n}-2>0$

각 변에 $\sqrt{n}-2$를 곱하면 $3\sqrt{n}-6\le\sqrt{n}+4<4\sqrt{n}-8$

$3\sqrt{n}-6\le\sqrt{n}+4$에서

$2\sqrt{n}\le10$ $\quad\therefore \sqrt{n}\le5$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\sqrt{n}+4<4\sqrt{n}-8$에서

$3\sqrt{n}>12$ $\quad\therefore \sqrt{n}>4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $4<\sqrt{n}\le5$

즉, $16<n\le25$이므로 조건을 만족시키는 자연수 n은 17, 18, $\dots$, 25의 9개이다.

30 답 ⑤

해결 key Point!

$\frac{2x-y}{y-x}=2$를 정리하여 x, y의 관계식을 만들고 그것을 $\sqrt{\frac{x+y}{y-x}}$에 대입해서 구해야 한다.

$\frac{2x-y}{y-x}=2$에서

$2x-y=2y-2x$, $4x=3y$

$\therefore y=\frac{4}{3}x$

이때 $y=\frac{4}{3}x$를 $\sqrt{\frac{x+y}{y-x}}$에 대입하면

$$\sqrt{\frac{x+y}{y-x}}=\sqrt{\frac{x+\frac{4}{3}x}{\frac{4}{3}x-x}}=\sqrt{\frac{\frac{7}{3}x}{\frac{1}{3}x}}=\sqrt{7}$$

즉, $2<\sqrt{7}<3$이므로 $\sqrt{\frac{x+y}{y-x}}$의 정수 부분은 2, 소수 부분은 $\sqrt{7}-2$이다.

따라서 $a=\sqrt{7}-2$이므로 $a+2=\sqrt{7}$에서

$(a+2)^2=(\sqrt{7})^2=7$

31 답 ②

해결 key Point!

x, y의 값의 범위를 구해야 한다.

$1<\sqrt{3}<2$에서 $2<\sqrt{3}+1<3$이므로

$[x]=2$, $<x>=\sqrt{3}+1-2=\sqrt{3}-1$

또, $2<2\sqrt{2}<3$에서 $3<2\sqrt{2}+1<4$이므로

$[y]=3$, $<y>=2\sqrt{2}+1-3=2\sqrt{2}-2$

따라서 $\frac{<x>-[y]+4}{[x]+<y>}=\frac{\sqrt{3}-1-3+4}{2+2\sqrt{2}-2}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$이므로

$$\left(\frac{<x>-[y]+4}{[x]+<y>}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)^2=\frac{3}{8}$$

32 답 7

1단계 a_n의 값 구하기

모든 자연수 n에 대하여 $n=\sqrt{n^2}<\sqrt{n^2+1}$이고,

$\sqrt{1^2+1}<2$, $\sqrt{2^2+1}<3$, $\sqrt{3^2+1}<4$, $\dots$이므로

$\sqrt{n^2+1}<n+1$이다.

즉, 모든 자연수 n에 대하여 $n<\sqrt{n^2+1}<n+1$이 성립한다.

따라서 $\sqrt{n^2+1}$의 정수 부분은 n이므로 $a_n=\sqrt{n^2+1}-n$

2단계 $(a_n+2026)^2$의 값 구하기

$a_{2026}=\sqrt{2026^2+1}-2026$에서

$a_{2026}+2026=\sqrt{2026^2+1}$

$\therefore (a_{2026}+2026)^2=(\sqrt{2026^2+1})^2=2026^2+1$

3단계 $(a_{2026}+2026)^2$의 일의 자리의 수 구하기

즉, 구하는 수는 2026^2+1의 일의 자리의 수이다.

이때 2026^2의 일의 자리의 수는 $6^2=36$의 일의 자리의 수와 같으므로 2026^2+1의 일의 자리의 수는 $6+1=7$이다.

단계	채점 기준	비율
❶	a_n의 값을 구했다.	40 %
❷	$(a_n+2026)^2$의 값을 구했다.	30 %
❸	$(a_{2026}+2026)^2$의 일의 자리의 수를 구했다.	30 %

Level UP

실수 a의 정수 부분을 n, 소수 부분을 x라고 하면 $a=n+x$ $(0\le x<1)$에서 $n\le a<n+1$임을 이용한다.

33 답 ②

$$a\sqrt{\frac{50b}{9a}}+b\sqrt{\frac{2a}{9b}}=\sqrt{a^2\times\frac{50b}{9a}}+\sqrt{b^2\times\frac{2a}{9b}}$$
$$=\sqrt{\frac{50ab}{9}}+\sqrt{\frac{2ab}{9}}$$
$$=\frac{\sqrt{200}}{3}+\frac{\sqrt{8}}{3}$$
$$=\frac{10\sqrt{2}}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{3}$$
$$=\frac{12\sqrt{2}}{3}$$
$$=4\sqrt{2}$$

이때 $5<4\sqrt{2}<6$이므로 $x=5$, $y=4\sqrt{2}-5$

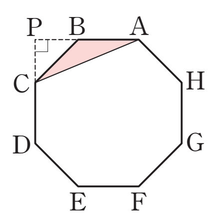
$\therefore\ \dfrac{y}{x}=\dfrac{4\sqrt{2}-5}{5}=\dfrac{4\sqrt{2}}{5}-1$

34 답 ②

해결 key Point!

두 변의 길이가 a인 직각이등변삼각형의 빗변의 길이가 $\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2a^2}=a\sqrt{2}$임을 이용해야 한다.

정팔각형의 한 내각의 크기는 $\dfrac{180^\circ\times(8-2)}{8}=135^\circ$



오른쪽 그림에서

$\angle PBC=180^\circ-135^\circ=45^\circ$이므로 삼각형 BPC는 직각이등변삼각형이다.

이때 $\overline{BC}=2$이므로 $\overline{BP}=\overline{PC}=a$라고 하면 피타고라스 정리에 의하여

$a^2+a^2=4$, $2a^2=4$

$a^2=2 \qquad \therefore\ a=\sqrt{2}$

$\therefore\ \overline{BP}=\overline{PC}=\sqrt{2}$

따라서 $\overline{AP}=\overline{AB}+\overline{BP}=2+\sqrt{2}$이므로

$\triangle ABC=\triangle APC-\triangle BPC$

$=\dfrac{1}{2}(2+\sqrt{2})\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}$

$=\sqrt{2}+1-1=\sqrt{2}$

Level UP

n각형의 내각의 합은 $180^\circ\times(n-2)$이므로 정n각형의 한 내각의 크기는 $\dfrac{180^\circ\times(n-2)}{n}$이다.

35 답 ③

해결 key Point!

한 꼭짓점에서 잘라내기 전의 겉넓이와 잘라낸 후의 겉넓이의 차이를 먼저 생각해야 한다.

잘라내기 전 정육면체의 겉넓이는 $6\times2^2=24$

정육면체의 한 면에서 잘라진 단면은 두 변의 길이가 1인 직각이등변삼각형이므로 그 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times1\times1=\dfrac{1}{2}$

한 꼭짓점에 대하여 잘라진 단면은 한 면에서 잘라진 직각이등변삼각형 세 개의 합이므로 그 넓이는 $3\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$

잘라낸 단면에 해당하는 정삼각형의 한 변의 길이는 두 변의 길이가 1인 직각이등변삼각형의 빗변의 길이이므로

$\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

따라서 잘라낸 단면의 정삼각형의 넓이는 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{2})^2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

즉, 정육면체의 한 꼭짓점에서 삼각뿔 모양의 입체도형을 잘라내면 겉넓이가 $\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$만큼 줄어드므로 정육면체의 8개의 꼭짓점에서 삼각뿔 모양의 입체도형을 잘라내고 남은 입체도형의 겉넓이는 정육면체의 겉넓이보다 $8\times\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=12-4\sqrt{3}$만큼 줄어든다.

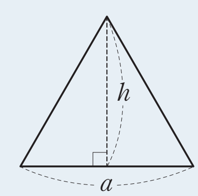
따라서 구하는 입체도형의 겉넓이는

$24-(12-4\sqrt{3})=12+4\sqrt{3}=4(3+\sqrt{3})$

Level UP

한 변의 길이가 a인 정삼각형의 높이를 h, 넓이를 S라고 하면

(1) $h=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ (2) $S=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$



36 답 $6+6\sqrt{2}$

정사각형 A_1의 넓이가 2이므로 정사각형 A_1의 한 변의 길이를 x_1이라고 하면 $x_1=\sqrt{2}$이다.

정사각형 A_2의 넓이는 정사각형 A_1의 넓이의 절반이므로 $\dfrac{1}{2}\times2=1$이고, 정사각형 A_2의 한 변의 길이를 x_2라고 하면 $x_2=1$이다.

정사각형 A_3의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times1=\dfrac{1}{2}$이고, 정사각형 A_3의 한 변의 길이를 x_3이라고 하면 $x_3=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이다.

정사각형 A_4의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$이고, 정사각형 A_4의 한 변의 길이를 x_4라고 하면 $x_4=\dfrac{1}{2}$이다.

따라서 주어진 도형의 모든 변의 길이의 합은

$4(x_1+x_2+x_3+x_4)=4\left(\sqrt{2}+1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{2}\right)=6+6\sqrt{2}$

Lv. X 상위 1%에 도달하는 심화 문제

29쪽~31쪽

01 333333	**02** 3쌍	**03** 11	**04** 일요일	**05** 3
06 $\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}$	**07** $20\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}-1\right)$		**08** 9	**09** $\dfrac{1}{20}$

01 답 333333

해결 key Point!

근호 안의 수가 제곱수가 되도록 변형해야 한다.

$111111111111-222222$
$=111111000000+111111-(111111+111111)$
$=111111\times1000000-111111$
$=111111(1000000-1)$
$=111111\times999999$
$=111111\times9\times111111$
$=3^2\times(111111)^2$
$=(333333)^2$
$\therefore \sqrt{111111111111-222222}=\sqrt{(333333)^2}$
$=333333$

꿀 한줄평

주어진 수가 간단해지기 위하여 두 수에서 같은 수가 나타나도록 수를 두 개의 수로 쪼개어 본다. 그때 같은 수끼리 계산하거나 묶어 내어 수를 간단히 한다. 이때

$$\underbrace{11111\cdots1}_{n\text{개}}=\frac{\overbrace{9999\cdots9}^{n\text{개}}}{9}=\frac{\overbrace{10000\cdots0}^{n\text{개}}-1}{9}=\frac{10^n-1}{9}$$

임을 이용한다.

02 답 3쌍

해결 key Point!

연속한 세 자연수를 한 문자로 나타내야 한다.

x, y, z가 연속된 세 자연수이므로 $y=x+1$, $z=x+2$라고 하면 $x+y+z=x+(x+1)+(x+2)=3x+3=3(x+1)$
즉, $\sqrt{x+y+z}=a$에서 $\sqrt{3(x+1)}=a$이므로 양변을 제곱하면
$3(x+1)=a^2$
따라서 a는 3의 배수이고 $a^2<100$이므로 이를 만족시키는 a의 값은 10 이하의 3의 배수인 3, 6, 9이다.
(ⅰ) $a=3$, 즉 $3(x+1)=3^2=9$일 때
$x+1=3$이므로 $x=2$, $y=3$, $z=4$
(ⅱ) $a=6$, 즉 $3(x+1)=6^2=36$일 때
$x+1=12$이므로 $x=11$, $y=12$, $z=13$
(ⅲ) $a=9$, 즉 $3(x+1)=9^2=81$일 때
$x+1=27$이므로 $x=26$, $y=27$, $z=28$
(ⅰ)~(ⅲ)에 의하여 구하는 세 수의 쌍은 3쌍이다.

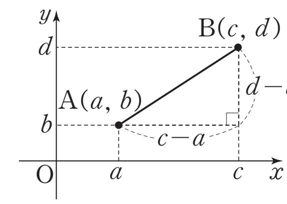
Level UP

연속된 세 자연수는 인접한 두 자연수 사이의 차가 1이므로 자연수 n에 대하여 n, $n+1$, $n+2$로 나타낼 수 있다. 이때 연속된 세 자연수의 합은 $n+(n+1)+(n+2)=3n+3=3(n+1)$이므로 항상 3의 배수이고, 연속된 세 자연수에는 반드시 적어도 하나의 짝수가 포함되므로 연속된 세 자연수의 곱은 6의 배수가 된다.

03 답 11

해결 key Point!

두 점을 모두 좌표로 나타내고, 두 점 사이의 거리를 좌표를 이용한 식으로 만든다.



좌표평면 위의 두 점 A(a, b), B(c, d)에 대하여 두 점 사이의 거리 $\overline{AB}$를 오른쪽 그림과 같이 피타고라스 정리를 이용하면
$\overline{AB}=\sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}$
임을 알 수 있다.
이때 a, b, c, d가 모두 정수이므로 $c-a$, $d-b$도 정수이다.
$c-a=p$, $d-b=q$ (p, q는 정수)로 놓으면 $\overline{AB}=\sqrt{p^2+q^2}$
이때 $7\le\overline{AB}<9$이므로 $\sqrt{49}\le\sqrt{p^2+q^2}<\sqrt{81}$
즉, $49\le p^2+q^2<81$이고 이를 만족시키는 정수 p, q의 값은 다음과 같다.

q \ p	1	2	3	4	5	6	7	8
1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{10}$	$\sqrt{17}$	$\sqrt{26}$	$\sqrt{37}$	$\sqrt{50}$	$\sqrt{65}$
2	$\sqrt{5}$	$\sqrt{8}$	$\sqrt{13}$	$\sqrt{20}$	$\sqrt{29}$	$\sqrt{40}$	$\sqrt{53}$	$\sqrt{68}$
3	$\sqrt{10}$	$\sqrt{13}$	$\sqrt{18}$	5	$\sqrt{34}$	$\sqrt{45}$	$\sqrt{58}$	$\sqrt{73}$
4	$\sqrt{17}$	$\sqrt{20}$	5	$\sqrt{32}$	$\sqrt{41}$	$\sqrt{52}$	$\sqrt{65}$	$\sqrt{80}$
5	$\sqrt{26}$	$\sqrt{29}$	$\sqrt{34}$	$\sqrt{41}$	$\sqrt{50}$	$\sqrt{61}$	$\sqrt{74}$	$\sqrt{89}$
6	$\sqrt{37}$	$\sqrt{40}$	$\sqrt{45}$	$\sqrt{52}$	$\sqrt{61}$	$\sqrt{72}$	$\sqrt{85}$	10
7	$\sqrt{50}$	$\sqrt{53}$	$\sqrt{58}$	$\sqrt{65}$	$\sqrt{74}$	$\sqrt{85}$	$\sqrt{98}$	$\sqrt{113}$
8	$\sqrt{65}$	$\sqrt{68}$	$\sqrt{73}$	$\sqrt{80}$	$\sqrt{89}$	10	$\sqrt{113}$	$\sqrt{128}$

따라서 조건을 만족시키는 서로 다른 무리수 $\overline{AB}$는 $\sqrt{50}$, $\sqrt{52}$, $\sqrt{53}$, $\sqrt{58}$, $\sqrt{61}$, $\sqrt{65}$, $\sqrt{68}$, $\sqrt{72}$, $\sqrt{73}$, $\sqrt{74}$, $\sqrt{80}$의 11개이다.

꿀 한줄평

x좌표와 y좌표가 모두 정수이므로 두 점의 좌표를 모두 문자로 나타내고 $\overline{AB}$를 나타낸 문자로 정리한다. 이때 정수로 나타낸 식이 성립하기 위하여 만족시키는 값을 하나씩 직접 구해야 하는데, 가능한 길이의 값을 구하는 것이므로 중복된 경우를 1개로 세야 하는 것에 유의해야 한다.

04 답 일요일

해결 key Point!

2704를 소인수분해하여 $\sqrt{2704}$의 값을 구해야 한다.

$\sqrt{2704}=\sqrt{52^2}=52$이므로
$\sqrt{2704}^{\sqrt{2704}}=\sqrt{(52^2)^{52}}=\sqrt{(52^{52})^2}=52^{52}$
이때 $52=7\times7+3$이므로 52를 7로 나눈 나머지는 3이다.

$52\times52=52\times(49+3)$

$\quad\quad=52\times49+52\times3$

$\quad\quad=52\times49+(49+3)\times3$

$\quad\quad=52\times49+49\times3+3^2$

에서 52×49와 49×3은 7로 나누어떨어지므로 52^2을 7로 나눈 나머지는 3^2을 7로 나눈 나머지와 같으므로 나머지는 2이다.

또,

$52^3=52^2\times52$

$=(52\times49+49\times3+3^2)\times52$

$=52^2\times49+52\times49\times3+52\times3^2$

$=52^2\times49+52\times49\times3+(49+3)\times3^2$

$=52^2\times49+52\times49\times3+49\times3^2+3^3$

이므로 52^3을 7로 나눈 나머지는 3^3을 7로 나눈 나머지와 같으므로 나머지는 6이다.

마찬가지로

$52^4=52^3\times52$

$=(52^2\times49+52\times49\times3+49\times3^2+3^3)\times52$

$=52^3\times49+52^2\times49\times3+52\times49\times3^2+52\times3^3$

$=52^3\times49+52^2\times49\times3+52\times49\times3^2+(49+3)\times3^3$

$=52^3\times49+52^2\times49\times3+52\times49\times3^2+49\times3^3+3^4$

이므로 52^4을 7로 나눈 나머지는 3^4을 7로 나눈 나머지와 같으므로 나머지는 4이다.

따라서 52^n (n은 자연수)을 7로 나눈 나머지는 3^n을 7로 나눈 나머지와 같으므로 52^{52}을 7로 나눈 나머지는 3^{52}을 7로 나눈 나머지와 같다.

이때 3을 7로 나눈 나머지는 3, 3^2을 7로 나눈 나머지는 2, 3^3을 7로 나눈 나머지는 6, 3^4을 7로 나눈 나머지는 4, 3^5을 7로 나눈 나머지는 5, 3^6을 7로 나눈 나머지는 1, 3^7을 7로 나눈 나머지는 3, …이므로 3^n으로 나눈 나머지는 3, 2, 6, 4, 5, 1의 순서대로 반복된다.

즉, $3^{52}=3^{7\times7+3}$을 7로 나눈 나머지는 3^3을 7로 나눈 나머지와 같으므로 나머지는 6이다.

따라서 오늘부터 52^{52}일이 지나면 토요일이 되므로 도희의 16번째 생일은 일요일이다.

Level UP

일주일은 7일 주기로 반복되므로 요일을 알아볼 때에는 7을 주기로 하는 나머지의 주기를 생각한다. 오늘부터 7일 후, 14일 후, 또는 7일 전은 모두 7로 나누어떨어지므로 오늘과 같은 요일이고, 7로 나누었을 때 나머지가 6이면 그 전 요일이 된다.

05 답 3

양수 x의 자연수 부분을 n이라고 하면 $x=n+y$로 놓을 수 있다.

이때 $0\le y<1$이므로 $0\le y^2<1$

$x^2+y^2=10$에서 $y^2=10-x^2$이므로

$0\le10-x^2<1$, $-10\le-x^2<-9$

$\therefore\ 9<x^2\le10$

즉, $9<(n+y)^2\le10$이고 이를 만족시키는 n의 값은 3이다.

따라서 양수 x의 자연수 부분은 3이다.

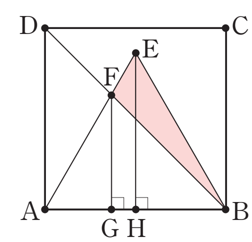
Level UP

실수 x의 정수 부분을 n, 소수 부분을 y라고 하면

$x=n+y$이므로 $y=x-n$

이때 $0\le y<1$임을 유의해야 한다.

06 답 $\frac{3-\sqrt{3}}{4}$



두 점 E, F에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 각각 H, G라 하고, $\overline{AG}=x$라고 하자.

$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}$이므로 삼각형 AHE에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{EH}=\sqrt{\overline{AE}^2-\overline{AH}^2}$

$=\sqrt{\overline{AB}^2-\left(\frac{1}{2}\overline{AB}\right)^2}$

$=\sqrt{\frac{3}{4}\overline{AB}^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AB}$

$\triangle$AHE와 $\triangle$AGF에서

$\angle$EAH는 공통, $\angle AHE=\angle AGF=90^\circ$이므로

$\triangle AHE \backsim \triangle AGF$ (AA 닮음)

이때 $\overline{AG}:\overline{FG}=\overline{AH}:\overline{EH}=\frac{1}{2}\overline{AB}:\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AB}=1:\sqrt{3}$이므로 $\overline{FG}=\sqrt{3}\,\overline{AG}=\sqrt{3}x$

한편, $\angle ABD=45^\circ$이므로 $\triangle$BFG는 직각이등변삼각형이고 $\overline{BG}=\overline{FG}=\sqrt{3}x$이므로

$\overline{AB}=\overline{AG}+\overline{BG}=x+\sqrt{3}x=(1+\sqrt{3})x$

즉, $\sqrt{1+\sqrt{3}}=(1+\sqrt{3})x$이므로 양변을 제곱하면

$1+\sqrt{3}=(1+\sqrt{3})^2x^2 \qquad \therefore\ x^2=\frac{1}{1+\sqrt{3}}$

삼각형 ABF의 넓이는

$\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{FG}=\frac{1}{2}\times(1+\sqrt{3})x\times\sqrt{3}x$

$=\frac{1}{2}x^2(1+\sqrt{3})\sqrt{3}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1+\sqrt{3}}\times(1+\sqrt{3})\times\sqrt{3}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}$

정삼각형 ABE의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\overline{AB}^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\sqrt{1+\sqrt{3}}\right)^2=\frac{3+\sqrt{3}}{4}$$

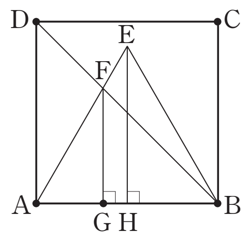
$\therefore\ \triangle BEF=\triangle ABE-\triangle ABF$

$$=\frac{3+\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{3+\sqrt{3}-2\sqrt{3}}{4}$$

$$=\frac{3-\sqrt{3}}{4}$$

다른 풀이



정삼각형 ABE의 꼭짓점 E에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}$

$\triangle AHE$에서 피타고라스 정리에 의하여

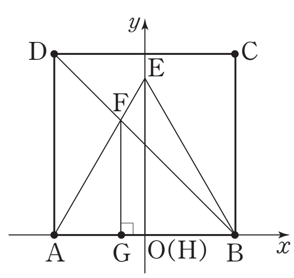
$\overline{AH}^2+\overline{EH}^2=\overline{AE}^2$이므로

$\left(\frac{1}{2}\overline{AB}\right)^2+\overline{EH}^2=\overline{AB}^2$

$\frac{1}{4}\overline{AB}^2+\overline{EH}^2=\overline{AB}^2$

$\overline{EH}^2=\frac{3}{4}\overline{AB}^2$

$\therefore\ \overline{EH}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AB}$



이때 직선 AH를 x축, 직선 EH를 y축, 점 H를 원점 O라고 하면 직선 AE의 기울기는

$$\frac{\overline{OE}}{\overline{OA}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AB}}{\frac{1}{2}\overline{AB}}=\sqrt{3}$$

점 F에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 G, $\overline{AG}=x$라고 하면 삼각형 AGF는 직각삼각형이고 직선 AE의 기울기는 $\sqrt{3}$이므로 $\overline{FG}=\sqrt{3}x$이다.

한편, $\angle ABD=45°$이므로 $\triangle BFG$는 직각이등변삼각형이고 $\overline{BG}=\overline{FG}=\sqrt{3}x$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{1+\sqrt{3}}=\overline{AG}+\overline{GB}=(1+\sqrt{3})x$

즉, $\sqrt{1+\sqrt{3}}=(1+\sqrt{3})x$이므로 양변을 제곱하면

$1+\sqrt{3}=(1+\sqrt{3})^2x^2\qquad\therefore\ x^2=\frac{1}{1+\sqrt{3}}$

$\therefore\ \triangle BEF=\triangle ABE-\triangle ABF$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{1+\sqrt{3}}\right)^2-\frac{1}{2}\times(1+\sqrt{3})x\times\sqrt{3}x$$

$$=\frac{3+\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times(1+\sqrt{3})\times\frac{1}{1+\sqrt{3}}$$

$$=\frac{3+\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{3-\sqrt{3}}{4}$$

꿀 한줄평

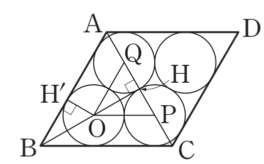
이등변삼각형의 꼭짓점에서 밑변에 내린 수선의 발은 밑변의 중점과 일치한다. 이때 정삼각형도 이등변삼각형이므로 정삼각형 ABE의 높이 EH는 밑변 AB를 수직이등분한다. 삼각형 BEF에서 밑변과 높이를 찾기 어려우므로 주어진 조건 $\overline{AB}$의 길이를 이용하여 구하기 쉬운 삼각형을 찾아 그것의 연산으로 삼각형 BEF를 구하는 방법으로 풀이를 진행해야 한다.

07 답 $20\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}-1\right)$

해결 key Point!

서로 접하는 두루마리 화장지의 중심 사이의 거리와 삼각형의 닮음과 합동을 이용하여 구해야 한다.

원의 지름의 길이가 20이므로 정사각형의 한 변의 길이는 40이다.



오른쪽 그림과 같이 마름모 모양의 상자를 마름모 ABCD라 하고, 내부에서 서로 접하는 세 원의 중심을 각각 O, P, Q라고 하면

$\overline{OQ}=\overline{OP}=\overline{PQ}$이고 이 길이는 원의 반지름의 길이의 2배, 즉 지름의 길이와 같으므로 $\triangle QOP$는 한 변의 길이가 20인 정삼각형이다.

이때 점 O에서 $\overline{AC}$에 내린 수선의 발을 H라고 하면 $\overline{OQ}$와 $\overline{AB}$가 서로 평행하므로 $\angle HAB=\angle HQO$

$\overline{OP}$와 $\overline{BC}$가 서로 평행하므로 $\angle BCH=\angle OPH$

$\therefore\ \triangle ABC\backsim\triangle QOP$ (AA 닮음)

정삼각형 QOP에서 $\overline{OH}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times20=10\sqrt{3}$이고, 점 O에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H′라고 하면 $\overline{OH'}=10$

$\triangle OHQ$와 $\triangle BH'O$에서

$\overline{HQ}=\overline{H'O}=10$, $\angle OHQ=\angle BH'O=90°$

$\angle QOH=\angle OBH'$이므로 $\angle HQO=\angle H'OB$

$\therefore\ \triangle OQH\equiv\triangle BOH'$ (ASA 합동)

따라서 $\overline{BO}=\overline{OQ}=20$이므로

$\overline{BH}=\overline{BO}+\overline{OH}=20+10\sqrt{3}=10(2+\sqrt{3})$

마찬가지로 $\triangle ABH\backsim\triangle QOH$ (AA 닮음)이므로

$\overline{AB}:\overline{QO}=\overline{BH}:\overline{OH}$에서

$\overline{AB}:20=10(2+\sqrt{3}):10\sqrt{3}$

$10\sqrt{3}\,\overline{AB}=200(2+\sqrt{3})$

$$\therefore\ \overline{AB}=\frac{200(2+\sqrt{3})}{10\sqrt{3}}=\frac{20(2+\sqrt{3})}{\sqrt{3}}=20+\frac{40\sqrt{3}}{3}$$

따라서 정사각형과 마름모의 한 변의 길이의 차는

$$\left(20+\frac{40\sqrt{3}}{3}\right)-40=\frac{40\sqrt{3}}{3}-20=20\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}-1\right)$$

08 답 9

해결 key Point!

주어진 식을 변형하여 간단히 해야 한다.

$\sqrt{x}(y-\sqrt{225})+\sqrt{y}(x-\sqrt{225})=225-\sqrt{225xy}$에서

$y\sqrt{x}-\sqrt{225x}+x\sqrt{y}-\sqrt{225y}=225-\sqrt{225xy}$

$\sqrt{xy^2}+\sqrt{x^2y}+\sqrt{225xy}=225+\sqrt{225x}+\sqrt{225y}$

$\sqrt{xy}(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{225})=\sqrt{225}(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{225})$

두 자연수 x, y에 대하여 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{225}>0$이므로 양변을 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{225}$로 나누면

$\sqrt{xy}=\sqrt{225}$ $\quad\therefore\ xy=225=3^2\times5^2$

따라서 순서쌍 (x, y)의 개수는 225의 약수의 개수와 같으므로 개수는 $(2+1)(2+1)=9$이다.

Level UP

자연수 n이 $n=p^a\times q^b\times r^c$으로 소인수분해될 때, 자연수 n은 $(a+1)(b+1)(c+1)$개의 약수를 갖는다.

참고 $xy=3^2\times5^2$을 만족시키는 순서쌍 (x, y)는
$(1, 225)$, $(3, 75)$, $(5, 45)$, $(9, 25)$, $(15, 15)$, $(25, 9)$, $(45, 5)$, $(75, 3)$, $(225, 1)$
이다.

09 답 $\frac{1}{20}$

해결 key Point!

$a-\frac{1}{4}$과 $a-\frac{1}{5}$의 부호를 판단하기 위하여 $4a-1$과 $5a-1$의 부호를 조사해야 한다.

$2<\sqrt{5}<3$에서 $\sqrt{5}$의 정수 부분이 2이므로 $a=\sqrt{5}-2$

한편,

$4a-1=4(\sqrt{5}-2)-1=4\sqrt{5}-9=\sqrt{80}-\sqrt{81}<0$

$5a-1=5(\sqrt{5}-2)-1=5\sqrt{5}-11=\sqrt{125}-\sqrt{121}>0$

이므로

$a-\frac{1}{4}<0,\ a-\frac{1}{5}>0$

$$\therefore \sqrt{\left(a-\frac{1}{4}\right)^2}+\sqrt{\left(a-\frac{1}{5}\right)^2}=-\left(a-\frac{1}{4}\right)+\left(a-\frac{1}{5}\right)$$
$$=-a+\frac{1}{4}+a-\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$$

꿀 한줄평

$\sqrt{5}$의 소수 부분을 구하는 것은 쉽지만 정확한 값을 알지 못하므로 $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$과의 대소 관계를 파악하는 것은 쉽지 않다.
이때 두 개의 차를 상수배하여 부호를 파악하기 쉽게 만들고, 그것이 양수인지 음수인지 구하여 $a-\frac{1}{4}$과 $a-\frac{1}{5}$의 대소 관계를 파악하면 된다.

Lv. Master 실력을 완성하는 대단원 평가

32쪽~36쪽

01 ③	02 ④	03 ③	04 ⑤	05 ①
06 ⑤	07 ①	08 ③	09 ③	10 ①
11 ④	12 ①	13 ②	14 ③	15 ①
16 40	17 7	18 $72\sqrt{3}$ cm^2		19 3
20 -1	21 57	22 $36\sqrt{3}$ cm		23 4

01 답 ③

해결 key Point!

새로 만들어진 정사각형의 넓이는 한 변의 길이가 각각 3 cm, 8 cm인 두 정사각형 모양의 종이의 넓이의 합과 같음을 이용하여 구해야 한다.

새로 만들어진 정사각형의 넓이는

$3^2+8^2=9+64=73(\text{cm}^2)$

넓이가 73 cm^{2}인 정사각형의 한 변의 길이를 x cm라고 하면

$x^2=73$

이때 $x>0$이므로 $x=\sqrt{73}$

따라서 구하는 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{73}$ cm이다.

02 답 ④

$\sqrt{256}=\sqrt{16^2}=16$의 양의 제곱근은 4이므로 $a=4$

$(-\sqrt{49})^2=49$의 음의 제곱근은 -7이므로 $b=-7$

$\therefore\ a-b=4-(-7)=11$

03 답 ③

해결 key Point!

$a\geq0$이면 $\sqrt{a^2}=a$이고 $a<0$이면 $\sqrt{a^2}=-a$임을 이용하여 근호를 풀어야 한다.

$a<0$, $ab<0$이므로 $b>0$

이때 $9a^2=(3a)^2$이고 $-2a>0$, $5b>0$, $3a<0$, $a-2b<0$이므로

$\sqrt{(-2a)^2}-\sqrt{(5b)^2}-\sqrt{9a^2}+\sqrt{(a-2b)^2}$

$=\sqrt{(-2a)^2}-\sqrt{(5b)^2}-\sqrt{(3a)^2}+\sqrt{(a-2b)^2}$

$=-2a-5b-(-3a)-(a-2b)$

$=-2a-5b+3a-a+2b$

$=-3b$

04 답 ⑤

① $\sqrt{2}a=\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$ (유리수)

② $-a^2=-(\sqrt{2})^2=-2$ (유리수)

③ $\sqrt{(-a)^4}=\sqrt{a^4}=a^2=(\sqrt{2})^2=2$ (유리수)
④ $a-\sqrt{2}=\sqrt{2}-\sqrt{2}=0$ (유리수)
⑤ $a+2=\sqrt{2}+2$ (무리수)
따라서 무리수인 것은 ⑤이다.

05 답 ①

$\overline{AD}=1$, $\overline{AB}=2$이므로 피타고라스 정리에 의하여
$\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{AD}^2=2^2+1^2=5 \qquad \therefore \overline{BD}=\sqrt{5}$
$\overline{BE}=\overline{BD}=\sqrt{5}$이므로 점 E에 대응하는 수는 $3+\sqrt{5}$이다.
이때 $2<\sqrt{5}<3$에서 $5<3+\sqrt{5}<6$이므로
$a=5$, $b=3+\sqrt{5}-5=\sqrt{5}-2$

$$\therefore \frac{5(\sqrt{a}-b)}{\sqrt{(a+b-3)^2}}=\frac{5(\sqrt{a}-b)}{|a+b-3|}=\frac{5\{\sqrt{5}-(\sqrt{5}-2)\}}{|5+\sqrt{5}-2-3|}=\frac{5(\sqrt{5}-\sqrt{5}+2)}{|5+\sqrt{5}-2-3|}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$$

06 답 ⑤

컵의 부피는 $\pi\times3^2\times4\sqrt{3}=36\sqrt{3}\pi(\text{cm}^3)$
물통의 부피는 $\pi\times(4\sqrt{6})^2\times9\sqrt{2}=864\sqrt{2}\pi(\text{cm}^3)$
이때 $\frac{864\sqrt{2}\pi}{36\sqrt{3}\pi}=8\sqrt{6}$이므로 물통의 부피는 컵의 부피의 $8\sqrt{6}$배이고, $19<8\sqrt{6}<20$이므로 물통에 물을 가득 채우려면 적어도 20번 부어야 한다.

07 답 ①

$300ab=2^2\times3\times5^2\times ab$이므로 $ab=3\times(\text{자연수})^2$의 꼴이어야 한다.
a, b는 주사위의 눈의 수이므로 ab가 될 수 있는 수는
$3\times1^2=3$, $3\times2^2=12$
a, b에 대하여 순서쌍 (a, b)는
(i) $ab=3$일 때
  $(1, 3)$, $(3, 1)$의 2개
(ii) $ab=12$일 때
  $(2, 6)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(6, 2)$의 4개
(i), (ii)에 의하여 순서쌍 (a, b)의 개수는 6이므로 구하는 확률은
$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

08 답 ③

ㄱ. $x=8$, $y=2$이면 $\sqrt{xy}=\sqrt{16}=4$이므로 유리수이다.
ㄴ. $\sqrt{x}$가 무리수일 때, $y=1$이면 $\sqrt{xy}$는 무리수이고 y는 유리수이다.
  이때 $\sqrt{x^2y}=\sqrt{x^2}=x$는 유리수이다.
ㄷ. $\sqrt{xy}$가 무리수이면 $\sqrt{x}$와 $\sqrt{y}$ 중 적어도 하나는 무리수이다.
  즉, $\sqrt{x}$ 또는 $\sqrt{y}$가 무리수이고, 두 수는 모두 양수이므로 $\sqrt{x}+\sqrt{y}$는 무리수이다.
따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

09 답 ③

해결 key Point!
양수는 양수끼리, 음수는 음수끼리 대소를 비교해야 한다.

주어진 수 중에서 음수는 $\sqrt{11}-5$, $-5+\sqrt{10}$이고 양수는 $2+\sqrt{10}$, 6, $\sqrt{10}-1$이다.
$(\sqrt{11}-5)-(-5+\sqrt{10})=\sqrt{11}-5+5-\sqrt{10}$
$=\sqrt{11}-\sqrt{10}>0$
$\therefore \sqrt{11}-5>-5+\sqrt{10}$
$(2+\sqrt{10})-6=\sqrt{10}-4=\sqrt{10}-\sqrt{16}<0$
$\therefore 2+\sqrt{10}<6$
$(2+\sqrt{10})-(\sqrt{10}-1)=2+\sqrt{10}-\sqrt{10}+1=3>0$
$\therefore 2+\sqrt{10}>\sqrt{10}-1$
따라서 $-5+\sqrt{10}<\sqrt{11}-5<\sqrt{10}-1<2+\sqrt{10}<6$이므로 수직선 위에 나타낼 때 가장 오른쪽에 오는 수는 6, 왼쪽에서 두 번째에 오는 수는 $\sqrt{11}-5$이므로 구하는 합은
$6+(\sqrt{11}-5)=1+\sqrt{11}$

10 답 ①

$\sqrt{108m}=\sqrt{2^2\times3^3\times m}$이므로 $\sqrt{108m}=n\sqrt{2}$를 만족시키려면 $m=2\times3\times(\text{자연수})^2$의 꼴이어야 한다.
이때 가장 작은 자연수 m의 값은 $m=2\times3\times1^2=6$
$m=6$이면 $\sqrt{108\times6}=18\sqrt{2}$이므로 $n=18$
$\therefore m+n=6+18=24$

11 답 ④

해결 key Point!
넓이가 S인 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{S}$임을 이용해야 한다.

넓이가 3, 8, 27, 50인 정사각형의 한 변의 길이는 각각

$\sqrt{3}$, $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, $\sqrt{27}=3\sqrt{3}$, $\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

또, 겹치는 부분의 세 정사각형의 한 변의 길이는 각각

$\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sqrt{2}$, $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

따라서 도형의 둘레의 길이는

$4(\sqrt{3}+2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+5\sqrt{2})-4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

$=4(7\sqrt{2}+4\sqrt{3})-4(\sqrt{2}+2\sqrt{3})$

$=28\sqrt{2}+16\sqrt{3}-4\sqrt{2}-8\sqrt{3}$

$=24\sqrt{2}+8\sqrt{3}$

$=8(3\sqrt{2}+\sqrt{3})$

12 답 ①

두 정사각형 A, B의 넓이가 각각 $70-n$, $24n$이므로 한 변의 길이는 각각 $\sqrt{70-n}$, $\sqrt{24n}$이다.

두 정사각형의 각 변의 길이가 모두 자연수이므로 $70-n$, $24n$도 $(\text{자연수})^2$의 꼴이어야 한다.

즉, $\sqrt{24n}=\sqrt{2^3\times 3\times n}$에서 $n=2\times 3\times(\text{자연수})^2$의 꼴이어야 하므로 이를 만족시키는 n의 값은

$n=6, 24, 54, 96, \cdots$

이 중 70 이하의 n의 값을 $\sqrt{70-n}$에 대입하면

$\sqrt{70-6}=\sqrt{64}=8$, $\sqrt{70-24}=\sqrt{46}$, $\sqrt{70-54}=\sqrt{16}=4$

이므로 조건을 만족시키는 n의 값은 6, 54이다.

따라서 모든 자연수 n의 값의 합은

$6+54=60$

13 답 ②

$\sqrt{400-m}-\sqrt{120+2n}$의 값이 자연수가 되려면 $400-m$과 $120+2n$이 모두 $(\text{자연수})^2$의 꼴이어야 한다.

이때 $\sqrt{400-m}-\sqrt{120+2n}$의 값이 최대인 자연수가 되려면 $\sqrt{400-m}$은 가장 큰 자연수가 되고, $\sqrt{120+2n}$은 가장 작은 자연수가 되어야 한다.

m은 자연수이므로 400보다 작은 가장 큰 수의 제곱수는

$19^2=361$이므로

$400-m=361 \qquad \therefore m=39$

n이 자연수이므로 120보다 큰 가장 작은 짝수의 제곱수는

$12^2=144$이므로

$120+2n=144$, $2n=24$

$\therefore n=12$

$\therefore m+n=39+12=51$

14 답 ③

해결 key Point!

$2<\sqrt{7}<2\sqrt{2}<3$임을 이용해야 한다.

조건 (가)에서 $0<a<1$이므로 $2<a+2<3$, $3<a+3<4$

$2<\sqrt{7}<2\sqrt{2}<3$이므로

$a+2<a+\sqrt{7}<a+2\sqrt{2}<a+3$

$\therefore 2<a+\sqrt{7}<a+2\sqrt{2}<4$

조건 (나)에서 $a+\sqrt{7}$과 $a+2\sqrt{2}$ 사이에 있는 정수가 한 개 있으려면 그 정수는 3이어야 하므로

$a+\sqrt{7}<3<a+2\sqrt{2}$

$a+\sqrt{7}<3$에서 $a<3-\sqrt{7}$

$a+2\sqrt{2}>3$에서 $a>3-2\sqrt{2}$

$\therefore 3-2\sqrt{2}<a<3-\sqrt{7}$

15 답 ①

해결 key Point!

네 실수의 대소 관계로 나타낼 수 있는 경우를 모두 구해야 한다.

$\sqrt{\frac{1}{8}}=\frac{1}{\sqrt{8}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$이고 두 실수 a, b가 $a<b$, $ab\neq 0$이므로 네 실수 $\sqrt{\frac{1}{8}}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, a, b의 대소 관계는 다음과 같은 경우로 나눌 수 있다.

(i) $a<b<\sqrt{\frac{1}{8}}<\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때

$\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{\frac{1}{8}}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}$이므로 이웃한 두 점 사이의 거리는 $\frac{\sqrt{2}}{4}$이다.

이때 $b=\sqrt{\frac{1}{8}}-\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}=0$이므로 $ab\neq 0$이라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a<\sqrt{\frac{1}{8}}<b<\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때

네 점 사이의 간격이 같으므로 이웃한 두 점 사이의 거리는

$\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{\frac{1}{8}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{8}$

즉, $a=\sqrt{\frac{1}{8}}-\frac{\sqrt{2}}{8}=\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{8}=\frac{\sqrt{2}}{8}$,

$b=\sqrt{\frac{1}{8}}+\frac{\sqrt{2}}{8}=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{8}=\frac{3\sqrt{2}}{8}$이므로

$2b-a=2\times\frac{3\sqrt{2}}{8}-\frac{\sqrt{2}}{8}=\frac{5\sqrt{2}}{8}$

(iii) $a<\sqrt{\frac{1}{8}}<\frac{\sqrt{2}}{2}<b$일 때

$\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{\frac{1}{8}}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}$이므로 이웃한 두 점 사이의 거리는 $\frac{\sqrt{2}}{4}$이다.

이때 $a=\sqrt{\frac{1}{8}}-\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}=0$이므로 $ab\neq0$이라는 조건을 만족시키지 않는다.

(iv) $\sqrt{\frac{1}{8}}<a<b<\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때

네 점 사이의 간격이 같으므로 이웃한 두 점 사이의 거리는

$\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{\frac{1}{8}}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{12}$

즉, $a=\sqrt{\frac{1}{8}}+\frac{\sqrt{2}}{12}=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{12}=\frac{\sqrt{2}}{3}$,

$b=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{12}=\frac{5\sqrt{2}}{12}$이므로

$2b-a=2\times\frac{5\sqrt{2}}{12}-\frac{\sqrt{2}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(v) $\sqrt{\frac{1}{8}}<a<\frac{\sqrt{2}}{2}<b$일 때

네 점 사이의 간격이 같으므로 이웃한 두 점 사이의 거리는

$\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{\frac{1}{8}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{8}$

즉, $a=\sqrt{\frac{1}{8}}+\frac{\sqrt{2}}{8}=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{8}=\frac{3\sqrt{2}}{8}$,

$b=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{8}=\frac{5\sqrt{2}}{8}$이므로

$2b-a=2\times\frac{5\sqrt{2}}{8}-\frac{3\sqrt{2}}{8}=\frac{7\sqrt{2}}{8}$

(vi) $\sqrt{\frac{1}{8}}<\frac{\sqrt{2}}{2}<a<b$일 때

$\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{\frac{1}{8}}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}$이므로 이웃한 두 점 사이의 거리는 $\frac{\sqrt{2}}{4}$이다.

즉,

$a=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$,

$b=\frac{3\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\sqrt{2}$

이므로

$2b-a=2\times\sqrt{2}-\frac{3\sqrt{2}}{4}=\frac{5\sqrt{2}}{4}$

(i)~(vi)에 의하여 $2b-a$의 가장 큰 값은 $\frac{5\sqrt{2}}{4}$, 가장 작은 값은 $\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로 두 값의 합은 $\frac{5\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{7\sqrt{2}}{4}$

따라서 $m=4$, $n=7$이므로

$m+n=4+7=11$

16 답 40

조건 (가)에서 $\sqrt{\frac{96}{x}}=\sqrt{\frac{2^5\times3}{x}}$이 자연수가 되려면 x는 96의 약수이면서 $x=2\times3\times$(자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.

이때 x의 값 중 가장 작은 수는 $a=2\times3\times1^2=6$

조건 (나)에서 $\sqrt{47+x}$가 자연수가 되려면 $47+x$가 47보다 큰 (자연수)^{2}의 꼴이어야 하므로

$47+x=49, 64, 81, \dots$ $\quad\therefore x=2, 17, 34, \dots$

이때 x의 값 중 세 번째로 작은 수는 34이므로 $b=34$

$\therefore a+b=6+34=40$

17 답 7

해결 key Point!

$\sqrt{a}<\sqrt{b}<\sqrt{c}$이면 $a<b<c$임을 이용해야 한다.

$2\leq\sqrt{nx-1}<3$의 각 변을 제곱하면 $4\leq nx-1<9$이므로

$5\leq nx<10$

이때 nx는 자연수이므로 $nx=5, 6, 7, 8, 9$

즉, $x=\frac{5}{n}, \frac{6}{n}, \frac{7}{n}, \frac{8}{n}, \frac{9}{n}$이고 모든 x의 값의 합이 5이므로

$\frac{5}{n}+\frac{6}{n}+\frac{7}{n}+\frac{8}{n}+\frac{9}{n}=5$, $\frac{35}{n}=5$

$\therefore n=7$

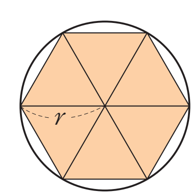
18 답 $72\sqrt{3}$ cm^2

원의 반지름의 길이를 r cm라고 하면

$\pi r^2=48\pi$, $r^2=48$

이때 $r>0$이므로 $r=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$

주어진 정육각형은 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 $4\sqrt{3}$ cm인 정삼각형 6개로 이루어져 있다.



한 변의 길이가 $4\sqrt{3}$ cm인 정삼각형의 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4}\times(4\sqrt{3})^2=12\sqrt{3}$(cm^2)

따라서 구하는 정육각형의 넓이는

$12\sqrt{3}\times6=72\sqrt{3}$(cm^2)

19 답 3

$1<\sqrt{2}<2$에서 $4<3+\sqrt{2}<5$이므로 $3+\sqrt{2}$의 정수 부분은 $a=4$

$2<\sqrt{5}<3$에서 $-3<-\sqrt{5}<-2$이므로 $-1<2-\sqrt{5}<0$
$2-\sqrt{5}$의 정수 부분이 -1이므로 소수 부분은
$b=(2-\sqrt{5})-(-1)=3-\sqrt{5}$
따라서 $\sqrt{5}-a=\sqrt{5}-4=\sqrt{5}-\sqrt{16}<0$,
$b-2=(3-\sqrt{5})-2=1-\sqrt{5}<0$이므로

$$\begin{aligned}\sqrt{(\sqrt{5}-a)^2}+\sqrt{(b-2)^2}&=\sqrt{(\sqrt{5}-4)^2}+\sqrt{(1-\sqrt{5})^2}\\&=-(\sqrt{5}-4)-(1-\sqrt{5})\\&=-\sqrt{5}+4-1+\sqrt{5}\\&=3\end{aligned}$$

20 답 -1

$\dfrac{5a-4b}{5b-a}=2$에서
$5a-4b=2(5b-a)$, $5a-4b=10b-2a$
$7a=14b$ $\quad\therefore a=2b$
$a=2b$를 $\sqrt{\dfrac{6a+3b}{2a-b}}$에 대입하면

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{6a+3b}{2a-b}}&=\sqrt{\frac{12b+3b}{4b-b}}\\&=\sqrt{\frac{15b}{3b}}=\sqrt{5}\end{aligned}$$

$2<\sqrt{5}<3$에서 $-3<-\sqrt{5}<-2$이므로 $-\sqrt{5}$를 넘지 않는 최대의 정수는 -3이다.

$\therefore \left[-\sqrt{\dfrac{6a+3b}{2a-b}}\right]=-3$

또, $2<\sqrt{5}<3$에서 $\sqrt{4}<\sqrt{5}<\sqrt{9}$이므로 $\sqrt{5}$에 가장 가까운 정수는 2이다.

$\therefore \left\langle\sqrt{\dfrac{6a+3b}{2a-b}}\right\rangle=2$

$\therefore \left[-\sqrt{\dfrac{6a+3b}{2a-b}}\right]+\left\langle\sqrt{\dfrac{6a+3b}{2a-b}}\right\rangle=-3+2=-1$

21 답 57

해결 key Point!

각 변의 역수를 하여 식을 정리해야 한다.

$\dfrac{1}{3}<\dfrac{1}{\sqrt{|x-7|}}<\dfrac{1}{2}$에서 $2<\sqrt{|x-7|}<3$이므로 각 변을 제곱하면 $4<|x-7|<9$

(i) $x<7$일 때, $|x-7|=-x+7$이므로
$4<|x-7|<9$에서
$4<-x+7<9$
$-3<-x<2$
$\therefore -2<x<3$
따라서 조건을 만족시키는 자연수 x는 1, 2이다.

(ii) $x\ge7$일 때, $|x-7|=x-7$이므로
$4<|x-7|<9$에서
$4<x-7<9$
$\therefore 11<x<16$
따라서 조건을 만족시키는 자연수 x는 12, 13, 14, 15이다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 x의 값의 합은
$1+2+12+13+14+15=57$

22 답 $36\sqrt{3}$ cm

1단계 정사각형 A의 한 변의 길이 구하기
정사각형 A의 넓이가 12 cm^{2}이므로 한 변의 길이는
$\sqrt{12}=2\sqrt{3}$(cm)

2단계 정사각형 B의 한 변의 길이 구하기
정사각형 B의 넓이는 $12\times4=48$(cm^2)이므로 한 변의 길이는
$\sqrt{48}=4\sqrt{3}$(cm)

3단계 정사각형 C의 한 변의 길이 구하기
정사각형 C의 넓이는 $12\times9=108$(cm^2)이므로 한 변의 길이는
$\sqrt{108}=6\sqrt{3}$(cm)

4단계 새로 만든 도형의 둘레의 길이 구하기
따라서 새로 만든 도형의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned}2\times(2\sqrt{3}+4\sqrt{3}+6\sqrt{3})+2\times6\sqrt{3}&=24\sqrt{3}+12\sqrt{3}\\&=36\sqrt{3}\text{(cm)}\end{aligned}$$

단계	채점 기준	배점
❶	정사각형 A의 한 변의 길이를 구했다.	1점
❷	정사각형 B의 한 변의 길이를 구했다.	2점
❸	정사각형 C의 한 변의 길이를 구했다.	2점
❹	새로 만든 도형의 둘레의 길이를 구했다.	2점

23 답 4

해결 key Point!

$a\ge0$, $b\ge0$에 대하여 $a+b=0$이면 $a=0$이고 $b=0$임을 이용해야 한다.

1단계 $\sqrt{(x-y+2)^2}+\sqrt{3x-y}=0$을 만족시키는 조건 구하기
$\sqrt{(x-y+2)^2}=|x-y+2|$
이때 $|x-y+2|\ge0$, $\sqrt{3x-y}\ge0$이므로
$|x-y+2|+\sqrt{3x-y}=0$을 만족시키려면 $x-y+2=0$, $3x-y=0$이어야 한다.

2단계 x, y의 값 구하기
두 식을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=3$

3단계 $x+y$의 값 구하기

$\therefore\ x+y=1+3=4$

단계	채점 기준	배점
❶	$\sqrt{(x-y+2)^2}+\sqrt{3x-y}=0$을 만족시키는 조건을 구했다.	4점
❷	x, y의 값을 구했다.	2점
❸	$x+y$의 값을 구했다.	1점

Ⅱ 다항식의 곱셈과 인수분해

01 다항식의 곱셈

Lv. 1 개념을 적용하는 핵심 문제

40쪽~41쪽

01 ③	02 ②	03 $4x^2-23x-6$		04 ③
05 ④	06 ⑤	07 ⑤	08 ②	09 ②
10 ④	11 ①	12 ④		

01 답 ③

$$(x-1)(x+6)-3(x+2)\left(x-\frac{1}{3}\right)$$
$$=x^2+5x-6-3\left(x^2+\frac{5}{3}x-\frac{2}{3}\right)$$
$$=x^2+5x-6-3x^2-5x+2$$
$$=-2x^2-4$$

02 답 ②

$$\left(5x+\frac{1}{2}a\right)\left(x-\frac{1}{5}\right)=5x^2+\left(\frac{1}{2}a-1\right)x-\frac{1}{10}a$$

이때 상수항이 2이므로

$$-\frac{1}{10}a=2 \qquad \therefore\ a=-20$$

따라서 x의 계수는

$$\frac{1}{2}a-1=\frac{1}{2}\times(-20)-1=-11$$

03 답 $4x^2-23x-6$

1단계 a의 값 구하기

$$(x+a)(x+4)=x^2+(a+4)x+4a$$
$$=x^2-2x-24$$

이므로 $a+4=-2$, $4a=-24$

$\therefore\ a=-6$

2단계 바르게 계산한 결과 구하기

따라서 바르게 계산하면

$$(x-6)(4x+1)=4x^2-23x-6$$

단계	채점 기준	비율
❶	a의 값을 구했다.	60 %
❷	바르게 계산한 결과를 구했다.	40 %

04 답 ③

$2x+1=A$라고 하면

$(2x-4y+1)(2x+3y+1)$

$=(A-4y)(A+3y)$

$=A^2-Ay-12y^2$

$=(2x+1)^2-(2x+1)y-12y^2$

$=4x^2-2xy-12y^2+4x-y+1$

따라서 $a=4$, $b=-1$, $c=-2$이므로

$a+b+c=4+(-1)+(-2)=1$

다른 풀이

주어진 식을 전개한 식에서 x항은

$2x\times1+1\times2x=4x \quad \therefore a=4$

주어진 식을 전개한 식에서 y항은

$-4y\times1+1\times3y=-y \quad \therefore b=-1$

주어진 식을 전개한 식에서 xy항은

$2x\times3y+(-4y)\times2x=-2xy \quad \therefore c=-2$

$\therefore a+b+c=4+(-1)+(-2)=1$

05 답 ④

$(x+1)(x-3)(x+2)(x+6)$

$=(x+1)(x+2)(x-3)(x+6)$

$=(x^2+3x+2)(x^2+3x-18)$

이때 $x^2+3x=A$라고 하면

$(x^2+3x+2)(x^2+3x-18)$

$=(A+2)(A-18)$

$=A^2-16A-36$

$=(x^2+3x)^2-16(x^2+3x)-36$

$=x^4+6x^3+9x^2-16x^2-48x-36$

$=x^4+6x^3-7x^2-48x-36$

따라서 $a=1$, $b=6$, $c=-7$, $d=-48$, $e=-36$이므로

$a+b-c-d+e=1+6-(-7)-(-48)+(-36)=26$

06 답 ⑤

ㄱ. $\left(\frac{33}{4}\right)^2=\left(8+\frac{1}{4}\right)^2 \Rightarrow (a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

ㄴ. $2.98^2=(3-0.02)^2 \Rightarrow (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

ㄷ. $51\times56=(50+1)(50+6)$

$\Rightarrow (x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

ㄹ. $7.9\times8.1=(8-0.1)(8+0.1)$

$\Rightarrow (a+b)(a-b)=a^2-b^2$

ㅁ. $(3\sqrt{3}-4)^2 \Rightarrow (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

ㅂ. $(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2) \Rightarrow (a+b)(a-b)=a^2-b^2$

따라서 곱셈 공식 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$을 이용하여 계산하면 편리한 것은 ㄹ, ㅂ이다.

참고 a, b의 부호가 주어지지 않았으므로 ㄴ에서 $(2.98)^2=\{3+(-0.02)\}^2$과 같이 생각하여 곱셈 공식 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$을 이용할 수도 있다.

07 답 ⑤

$A=(a-4\sqrt{7})(3+2\sqrt{7})$

$=3a+(2a-12)\sqrt{7}-56$

$=3a-56+(2a-12)\sqrt{7}$

이때 A가 유리수가 되려면 무리수 부분이 0이어야 하므로

$2a-12=0$, $2a=12$

$\therefore a=6$

참고 세 유리수 a, b, c $(c\neq0)$에 대하여 $a+b\sqrt{c}$가 유리수가 되려면 $b=0$이어야 한다.

$\Rightarrow a+b\sqrt{c}=a+0\times\sqrt{c}=a$ (유리수)

08 답 ②

$\frac{\sqrt{17}+4}{\sqrt{17}-4}+\frac{\sqrt{17}-4}{\sqrt{17}+4}$

$=\frac{(\sqrt{17}+4)^2}{(\sqrt{17}-4)(\sqrt{17}+4)}+\frac{(\sqrt{17}-4)^2}{(\sqrt{17}+4)(\sqrt{17}-4)}$

$=33+8\sqrt{17}+33-8\sqrt{17}$

$=66$

09 답 ②

$x=6-\sqrt{3}$에서 $x-6=-\sqrt{3}$

양변을 제곱하면

$(x-6)^2=(-\sqrt{3})^2$

$x^2-12x+36=3$

$x^2-12x=-33$

$\therefore x^2-12x+27=-33+27=-6$

다른 풀이

$x^2-12x+27=(6-\sqrt{3})^2-12(6-\sqrt{3})+27$

$=39-12\sqrt{3}-72+12\sqrt{3}+27$

$=-6$

10 답 ④

$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$이므로

$20=(5\sqrt{2})^2+2ab$

$2ab=-30$

$\therefore ab=-15$

11 답 ①

$$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=\frac{x^2+y^2}{xy}$$
$$=\frac{(x-y)^2+2xy}{xy}$$
$$=\frac{8^2+2\times(-4)}{-4}$$
$$=-14$$

12 답 ④

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4$$
$$=5^2-4$$
$$=21$$

이때 $0<x<1$에서 $\frac{1}{x}>1$이므로 $x-\frac{1}{x}<0$

$\therefore\ x-\frac{1}{x}=-\sqrt{21}$

Lv. 2 사고를 확장하는 실전 문제

42쪽~46쪽

01 18	**02** -6	**03** ②	**04** 392	**05** ④
06 ④	**07** 16	**08** 12 cm^2	**09** 2	**10** 46
11 ①	**12** $\frac{3^{16}-1}{2}$	**13** ⑤	**14** 4	**15** 29
16 ①	**17** $-\frac{27}{k}$	**18** 376	**19** $9\sqrt{5}-3\sqrt{3}$	
20 ⑤	**21** ③	**22** ①	**23** 12	**24** ④
25 ⑤	**26** $-\frac{13\sqrt{3}}{6}$	**27** -2	**28** 12	**29** -8
30 40				

01 답 18

$(4x^2-3x+1)(3x^3+5x^2+1)$

$=12x^5+20x^4+4x^2-9x^4-15x^3-3x+3x^3+5x^2+1$

$=12x^5+11x^4-12x^3+9x^2-3x+1$

따라서 상수항을 포함한 모든 항의 계수의 합은

$12+11+(-12)+9+(-3)+1=18$

다른 풀이

$(4x^2-3x+1)(3x^3+5x^2+1)$을 전개하여 내림차순으로 정리한 결과를 $Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F$로 놓으면

$(4x^2-3x+1)(3x^3+5x^2+1)$

$=Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F$

이 등식에 $x=1$을 대입하면 우변이 $A+B+C+D+E+F$가 되므로

$A+B+C+D+E+F=(4-3+1)(3+5+1)$

$=2\times9=18$

Level UP

x에 대한 다항식 $P(x)$의 상수항을 포함한 모든 항의 계수의 합은 $P(x)$에 $x=1$을 대입한 $P(1)$의 값과 같다.

02 답 -6

해결 key Point!

전개하여 x^3, x가 되는 항만을 각각 전개해야 한다.

1단계 x^3의 계수를 비교하여 a의 값 구하기

$(x+1)(x-2)(x^2+ax+b)$에서 x^3항은

$x\times(-2)\times x^2+1\times x\times x^2+x\times x\times ax$

$=-2x^3+x^3+ax^3$

$=(a-1)x^3$

이때 x^3의 계수가 4이므로

$a-1=4\qquad\therefore\ a=5$

2단계 x의 계수를 비교하여 b의 값 구하기

$(x+1)(x-2)(x^2+ax+b)$에서 x항은

$x\times(-2)\times b+1\times x\times b+1\times(-2)\times ax$

$=-2bx+bx-2ax$

$=(-2a-b)x$

이때 x의 계수가 1이므로

$-2a-b=1,\ -10-b=1$

$\therefore\ b=-11$

3단계 $a+b$의 값 구하기

$\therefore\ a+b=5+(-11)=-6$

단계	채점 기준	비율
❶	a의 값을 구했다.	40 %
❷	b의 값을 구했다.	40 %
❸	$a+b$의 값을 구했다.	20 %

03 답 ②

해결 key Point!

주어진 수의 세 분수를 모두 통분하여 분자의 식을 전개해야 한다.

$$\frac{a+b}{(a+1)(b+1)}+\frac{b+c}{(b+1)(c+1)}+\frac{c+a}{(c+1)(a+1)}$$
$$=\frac{(a+b)(c+1)+(b+c)(a+1)+(c+a)(b+1)}{(a+1)(b+1)(c+1)}$$
$$=\frac{2(ab+bc+ca+a+b+c)}{abc+ab+bc+ca+a+b+c+1}$$
$$=\frac{2(ab+bc+ca+a+b+c)}{-1+ab+bc+ca+a+b+c+1}$$
$$=\frac{2(ab+bc+ca+a+b+c)}{ab+bc+ca+a+b+c}=2$$

04 답 392

해결 key Point!

전개한 다항식과 주어진 다항식의 동류항의 계수가 서로 같아야 한다.

1단계 전개한 다항식과 주어진 다항식의 계수를 비교하여 a, b, c, d에 대한 식 나타내기

$(ax-b)(4x+c)=4ax^2+(ac-4b)x-bc$
$\qquad\qquad\qquad\qquad=dx^2+2x-21$

이므로 $4a=d$, $ac-4b=2$, $-bc=-21$

2단계 자연수 a, d의 값 구하기

이때 b, c는 자연수이므로 $-bc=-21$, 즉 $bc=21$을 만족시키는 b, c의 값을 순서쌍 (b, c)로 나타내면

$(1, 21)$, $(3, 7)$, $(7, 3)$, $(21, 1)$

각각의 경우를 $ac-4b=2$에 대입하면

(i) $b=1$, $c=21$일 때

$21a-4=2$, $21a=6$

$\therefore a=\frac{2}{7}$

이때 a가 자연수이어야 하므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $b=3$, $c=7$일 때

$7a-12=2$, $7a=14$

$\therefore a=2$, $d=4\times2=8$

(iii) $b=7$, $c=3$일 때

$3a-28=2$, $3a=30$

$\therefore a=10$, $d=4\times10=40$

(iv) $b=21$, $c=1$일 때

$a-84=2 \qquad \therefore a=86$, $d=4\times86=344$

(i)~(iv)에 의하여 $d=8$, 40, 344

3단계 모든 자연수 d의 값의 합 구하기

따라서 모든 자연수 d의 값의 합은

$8+40+344=392$

단계	채점 기준	비율
❶	a, b, c, d에 대한 식을 나타내었다.	30 %
❷	자연수 a, d의 값을 구했다.	50 %
❸	모든 자연수 d의 값의 합을 구했다.	20 %

05 답 ④

해결 key Point!

자연수 n을 p로 나누었을 때의 몫을 q, 나머지를 r라고 하면 $n=pq+r$ $(0\le r<p)$임을 이용해야 한다.

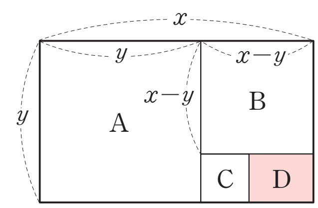
자연수 m을 8로 나누었을 때의 몫을 a (a는 상수)라고 하면 나머지가 5이므로 $m=8a+5$

자연수 n을 4로 나누었을 때의 몫을 b (b는 상수)라고 하면 나머지가 2이므로 $n=4b+2$

$\therefore m^2+n^2=(8a+5)^2+(4b+2)^2$
$\qquad\qquad\quad=64a^2+80a+25+16b^2+16b+4$
$\qquad\qquad\quad=16(4a^2+5a+b^2+b+1)+13$

따라서 m^2+n^2을 16으로 나누었을 때의 나머지는 13이다.

06 답 ④



위의 그림에서

(정사각형 B의 한 변의 길이)$=x-y$

(정사각형 C의 한 변의 길이)$=$(직사각형 D의 세로의 길이)
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad=y-(x-y)$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad=2y-x$

(직사각형 D의 가로의 길이)$=(x-y)-(2y-x)=2x-3y$

따라서 직사각형 D의 넓이는

$(2x-3y)(2y-x)=-2x^2+7xy-6y^2$

07 답 16

나누기 전의 직육면체의 부피는

$(a+b)^2(a+2b)=(a^2+2ab+b^2)(a+2b)$
$\qquad\qquad\qquad\quad=a^3+4a^2b+5ab^2+2b^3$

이므로 12개의 작은 직육면체의 개수는

부피가 a^3인 직육면체 1,

부피가 a^2b인 직육면체 4,

부피가 ab^2인 직육면체 5,

부피가 b^3인 직육면체 2

부피가 150인 직육면체가 5개이므로 $ab^2=150$

이때 a, b는 서로소인 자연수이므로 $ab^2=150=6\times5^2$에서

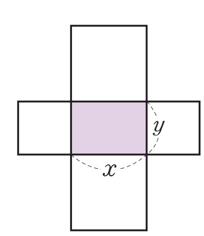
$a=6$, $b=5$

$\therefore a+2b=6+2\times5=16$

꿀 한줄평

부피가 같은 직육면체가 5개이므로 전개한 식의 동류항이 5개라는 뜻이다. 또, 모서리의 길이가 a 또는 b인 직육면체가 12개이므로 전개한 식의 계수들의 합이 12임을 의미한다.

08 답 12 cm^2



가운데 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x, y라고 하면 [그림 1]의 작은 직사각형의 둘레의 길이는

$2\{(x+2y)+y\}=2x+6y$

[그림 1]의 큰 직사각형의 둘레의 길이는

$2\{(2x+y)+x\}=6x+2y$

이때 [그림 1]의 두 직사각형의 둘레의 길이의 합이 56 cm이므로

$2x+6y+6x+2y=8x+8y=56$

$\therefore\ x+y=7$

또, [그림 2]의 5개의 사각형의 넓이의 합이 62 cm^2이므로

$2x^2+2y^2+xy=62$

$\therefore\ 2(x^2+y^2)+xy=62 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

한편, $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=49-2xy$이므로 이 식을 ㉠에 대입하면

$2(49-2xy)+xy=62,\ 98-3xy=62$

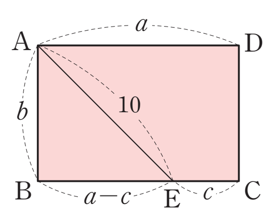
$-3xy=-36 \qquad \therefore\ xy=12$

따라서 가운데 직사각형의 넓이는 12 cm^2이다.

09 답 2

해결 key Point!

주어진 도형에서 식을 세우기 편하도록 $\overline{AD}=a$, $\overline{AB}=b$, $\overline{CE}=c$로 놓고 관계식을 세워야 한다.



$\overline{AD}=a$, $\overline{AB}=b$, $\overline{CE}=c$라고 하면 직사각형 ABCD의 넓이가 160이므로 $ab=160$

또, 주어진 조건에서

$a+b+a-c=10+12$,

$b+c=10+4$

$\therefore\ 2a+b-c=22 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$\quad b+c=14 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠+㉡을 하면

$2a+2b=36 \qquad \therefore\ a+b=18$

$$\begin{aligned}\therefore\ \overline{AC}&=\sqrt{a^2+b^2}\\&=\sqrt{(a+b)^2-2ab}\\&=\sqrt{18^2-2\times160}\\&=\sqrt{4}\\&=2\end{aligned}$$

10 답 46

해결 key Point!

10^n이 $n+1$자리 수이므로 주어진 수를 10의 거듭제곱의 꼴이 나타나도록 변형해야 한다.

$$\begin{aligned}(2^{44}+1)(5^{46}+1)&=2^{44}\times5^{46}+2^{44}+5^{46}+1\\&=(2^{44}\times5^{44})\times5^2+2^{44}+5^{46}+1\\&=25\times10^{44}+5^{46}+2^{44}+1\end{aligned}$$

즉, 10의 거듭제곱이 포함된 항 $25\times10^{44}=2.5\times10^{45}$이 46자리의 수이므로 $(2^{44}+1)(5^{46}+1)$은 46자리 수이다.

11 답 ①

$$\begin{aligned}197^2+1191&=(200-3)^2+(1200-9)\\&=40000-1200+9+1200-9\\&=40000\\&=2^6\times5^4\end{aligned}$$

따라서 $a=6$, $b=4$이므로

$a+b=6+4=10$

꿀 한줄평

곱셈 공식을 이용하여 수를 계산할 때에는 거듭제곱이나 곱의 계산이 간편하게 하기 위하여 일의 자리의 숫자가 0인 수가 나오도록 식을 변형해야 한다.

12 답 $\dfrac{3^{16}-1}{2}$

해결 key Point!

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$을 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형해야 한다.

$3-1=2$이므로

$$\begin{aligned}&(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)\\&=\frac{1}{2}(3-1)(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)\\&=\frac{1}{2}(3^2-1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)\\&=\frac{1}{2}(3^4-1)(3^4+1)(3^8+1)\\&=\frac{1}{2}(3^8-1)(3^8+1)\\&=\frac{3^{16}-1}{2}\end{aligned}$$

13 답 ⑤

해결 key Point!

$(10^{10}-3)^2$을 전개해야 한다.

$$\begin{aligned}(10^{10}-3)^2&=(10^{10})^2-2\times3\times10^{10}+3^2\\&=10^{20}-6\times10^{10}+9\end{aligned}$$

이때 $10^{20}=1\underbrace{000\cdots0}_{0\text{이 }20\text{개}}$이고 $10^{10}=1\underbrace{000\cdots0}_{0\text{이 }10\text{개}}$이므로

$10^{20}-6\times10^{10}+9=\underbrace{999\cdots9}_{9\text{가 }9\text{개}}4\underbrace{000\cdots0}_{0\text{이 }9\text{개}}9$

즉, $(10^{10}-3)^2$은 20자리 수이고 각 자리 숫자들의 합은

$9\times9+4+9=94$

따라서 $m=20$, $n=94$이므로

$m+n=20+94=114$

14 답 4

$(3+2\sqrt{2})^n=A$, $(3-2\sqrt{2})^n=B$라고 하면 주어진 식은

$(A+B)^2-(A-B)^2$

$=A^2+2AB+B^2-(A^2-2AB+B^2)$

$=4AB$

$=4(3+2\sqrt{2})^n(3-2\sqrt{2})^n$

$=4\{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})\}^n$

$=4\times 1^n$

$=4$

15 답 29

해결 key Point!

지수법칙 $a^n b^n=(ab)^n$을 이용하여 식을 변형해야 한다.

$(2\sqrt{2}-3)^{10}(2\sqrt{2}+3)^{12}$

$=\{(2\sqrt{2}-3)(2\sqrt{2}+3)\}^{10}(2\sqrt{2}+3)^2$

$=(-1)^{10}(17+12\sqrt{2})$

$=17+12\sqrt{2}$

따라서 $a=17$, $b=12$이므로

$a+b=17+12=29$

16 답 ①

$(\sqrt{1295}+\sqrt{k})(\sqrt{1295}-\sqrt{k})=1295-k$

이때 n^4의 양의 제곱근은 $\sqrt{n^4}=n^2$이므로

$n^2=1295-k$

한편, k, n^2은 자연수이고 $36^2=1296$이므로 $1295-k<36^2$,

즉 $n<36$이어야 한다.

따라서 $n^2=1295-k$의 최댓값은 35^2이고, 그때의 k의 값은

$35^2=1295-k \qquad \therefore k=1295-35^2=1295-1225=70$

17 답 $-\dfrac{27}{k}$

1단계 $(\sqrt{101}+2\sqrt{26})^3\times k$의 값 구하기

$(\sqrt{101}+2\sqrt{26})^3\times k$

$=(\sqrt{101}+2\sqrt{26})^3(\sqrt{101}-2\sqrt{26})^3$

$=(\sqrt{101}+\sqrt{104})^3(\sqrt{101}-\sqrt{104})^3$

$=\{(\sqrt{101}+\sqrt{104})(\sqrt{101}-\sqrt{104})\}^3$

$=(-3)^3$

$=-27$

2단계 $(\sqrt{101}+2\sqrt{26})^3$의 값을 k를 이용하여 나타내기

따라서 $(\sqrt{101}+2\sqrt{26})^3\times k=-27$이고, $k\neq 0$이므로

$(\sqrt{101}+2\sqrt{26})^3=-\dfrac{27}{k}$

단계	채점 기준	비율
❶	$(\sqrt{101}+2\sqrt{26})^3\times k$의 값을 구했다.	60 %
❷	$(\sqrt{101}+2\sqrt{26})^3$의 값을 k를 이용하여 나타냈다.	40 %

18 답 376

해결 key Point!

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$임을 이용할 수 있도록 식을 전개한 후 변형해야 한다.

$a+b=4$, $ab=3$이므로

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=4^2-2\times 3=10$

$x+y=6$, $xy=-2$이므로

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

$=6^2-2\times(-2)$

$=40$

$\therefore (ax+by)^2+(bx+ay)^2$

$=a^2x^2+2abxy+b^2y^2+b^2x^2+2abxy+a^2y^2$

$=a^2x^2+4abxy+b^2y^2+b^2x^2+a^2y^2$

$=a^2(x^2+y^2)+b^2(x^2+y^2)+4\times 3\times(-2)$

$=40a^2+40b^2-24$

$=40(a^2+b^2)-24$

$=40\times 10-24$

$=376$

19 답 $9\sqrt{5}-3\sqrt{3}$

해결 key Point!

등식의 양변을 제곱해서 한 개의 근호를 먼저 없애야 한다.

$x+y=\sqrt{7\sqrt{5}-\sqrt{3}}$의 양변을 제곱하면

$(x+y)^2=(\sqrt{7\sqrt{5}-\sqrt{3}})^2$에서

$x^2+2xy+y^2=7\sqrt{5}-\sqrt{3} \qquad \cdots\cdots ㉠$

$x-y=\sqrt{7\sqrt{3}-\sqrt{5}}$의 양변을 제곱하면

$(x-y)^2=(\sqrt{7\sqrt{3}-\sqrt{5}})^2$에서

$x^2-2xy+y^2=7\sqrt{3}-\sqrt{5} \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠+㉡을 하면

$2x^2+2y^2=6\sqrt{3}+6\sqrt{5} \qquad \therefore x^2+y^2=3\sqrt{3}+3\sqrt{5}$

㉠−㉡을 하면

$4xy=8\sqrt{5}-8\sqrt{3} \qquad \therefore xy=2\sqrt{5}-2\sqrt{3}$

$\therefore x^2+3xy+y^2=(x^2+y^2)+3xy$

$=3\sqrt{3}+3\sqrt{5}+3(2\sqrt{5}-2\sqrt{3})$

$=9\sqrt{5}-3\sqrt{3}$

꿀 한줄평

근호 안에 근호가 있는 문제이지만 수를 제곱하면 근호를 한 개 없앨 수 있으므로 주어진 수를 제곱하여 근호가 한 개인 식으로 만들어 문제를 해결해야 한다.

20 답 ⑤

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$

$=(\sqrt{7})^2-2=5$

$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}-2$

$=5-2=3$

이때 $x>1$에서 $0<\frac{1}{x}<1$이므로 $x-\frac{1}{x}>0$

$\therefore x-\frac{1}{x}=\sqrt{3}$

21 답 ③

해결 key Point!

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$임을 이용해야 한다.

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2$

$=5+2=7$

이때 $x>0$이므로 $x+\frac{1}{x}>0$

$\therefore x+\frac{1}{x}=\sqrt{7}$ ······ ㉠

또, $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}-2$

$=5-2=3$

이때 $0<x<1$에서 $\frac{1}{x}>1$이므로 $x-\frac{1}{x}<0$

$\therefore x-\frac{1}{x}=-\sqrt{3}$ ······ ㉡

㉠+㉡을 하면

$2x=\sqrt{7}-\sqrt{3}$ $\therefore x=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}$

22 답 ①

해결 key Point!

$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}-2$를 통하여 $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=x+\frac{1}{x}-2$임을 이용해야 한다.

$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}-2$

$=34-2=32$

이때 $x>1$에서 $0<\frac{1}{x}<1$이므로 $x-\frac{1}{x}>0$

$\therefore x-\frac{1}{x}=4\sqrt{2}$

또, $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2$

$=34+2=36$

이므로 $x+\frac{1}{x}=6$

한편, $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}-2$이므로

$\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=(\sqrt{x})^2+\frac{1}{(\sqrt{x})^2}-2$

$=x+\frac{1}{x}-2$

$=6-2=4$

이때 $x>1$에서 $\sqrt{x}>1$이고, $0<\frac{1}{\sqrt{x}}<1$이므로 $\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}>0$

$\therefore \sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}=2$

$\therefore x-\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=x-\frac{1}{x}-\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

$=4\sqrt{2}-2$

23 답 12

해결 key Point!

$x\neq0$이므로 주어진 식의 양변을 x로 나누어 식을 변형해야 한다.

$x^2-3x+1=0$의 양변을 x로 나누면

$x-3+\frac{1}{x}=0$ $\therefore x+\frac{1}{x}=3$

이때

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$

$=3^2-2=7$

$x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2$

$=7^2-2=47$

이므로

$x^4-5x^2-\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x^4}=\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)-5\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$

$=47-5\times7$

$=12$

Level UP

두 수의 곱이 1인 식의 변형

(1) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}$에서 $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$

(2) $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2=x^4+2+\frac{1}{x^4}$에서 $x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2$

24 답 ④

해결 key Point!

$(x+2)^2=4$와 $(x-1)(x-3)(x+5)(x+7)$을 각각 변형하여 공통 부분을 만들어야 한다.

$(x-1)(x-3)(x+5)(x+7)$
$=(x-1)(x+5)(x-3)(x+7)$
$=(x^2+4x-5)(x^2+4x-21)$
이때 $(x+2)^2=4$에서 $x^2+4x+4=4$
즉, $x^2+4x=0$이므로
$(x^2+4x-5)(x^2+4x-21)=(0-5)(0-21)=105$

25 답 ⑤

$x-\dfrac{10}{x}=2$의 양변에 x를 곱하면
$x^2-10=2x \quad \therefore x^2-2x=10$
$\therefore (x+2)(x+3)(x-4)(x-5)$
$=(x+2)(x-4)(x+3)(x-5)$
$=(x^2-2x-8)(x^2-2x-15)$
$=(10-8)(10-15)$
$=2\times(-5)=-10$

26 답 $-\dfrac{13\sqrt{3}}{6}$

해결 key Point!

분모에 무리수가 있으면 분모의 유리화를 통하여 식을 간단히 해야 한다.

1단계 x, y의 분모를 유리화하기

$$x=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3},$$
$$y=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3}$$

2단계 $x+y$, $x-y$, xy의 값 구하기

따라서
$x+y=(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})=4$
$x-y=(2-\sqrt{3})-(2+\sqrt{3})=-2\sqrt{3}$
$xy=(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=1$

3단계 주어진 식의 값 구하기

$$\therefore \frac{x^2+y^2-xy}{x-y}=\frac{(x+y)^2-3xy}{x-y}=\frac{4^2-3\times1}{-2\sqrt{3}}=-\frac{13}{2\sqrt{3}}=-\frac{13\sqrt{3}}{6}$$

단계	채점 기준	비율
❶	x, y의 분모를 유리화할 수 있다.	30 %
❷	$x+y$, $x-y$, xy의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸	주어진 식의 값을 구할 수 있다.	40 %

27 답 -2

$$x+y=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{15}}{3}$$
$$xy=\left(\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)=\frac{5-2}{3}=1$$
$\therefore x^5y^5=1,\ x^3y^3=1$
$$x^2=\left(\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{7-2\sqrt{10}}{3}$$
$$y^2=\left(\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{7+2\sqrt{10}}{3}$$
$$\therefore x^2-y^2=\frac{7-2\sqrt{10}}{3}-\frac{7+2\sqrt{10}}{3}=\frac{-4\sqrt{10}}{3}$$
$$\begin{aligned}\therefore x^7y^5-x^3y^5-x^2y-y&=x^2\times x^5y^5-y^2\times x^3y^3-x\times xy-y\\&=x^2-y^2-(x+y)\\&=\frac{7-2\sqrt{10}}{3}-\frac{7+2\sqrt{10}}{3}-\frac{2\sqrt{15}}{3}\\&=\frac{-4\sqrt{10}}{3}-\frac{2\sqrt{15}}{3}\\&=a\sqrt{10}+b\sqrt{15}\end{aligned}$$
따라서 $a=-\dfrac{4}{3}$, $b=-\dfrac{2}{3}$이므로
$$a+b=-\frac{4}{3}+\left(-\frac{2}{3}\right)=-2$$

28 답 12

해결 key Point!

$\dfrac{1}{f(x)}$의 식을 간단히 나타내야 한다.

$f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$이므로
$$\begin{aligned}\frac{1}{f(x)}&=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\\&=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})}\\&=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\therefore &\frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(3)}+\cdots+\frac{1}{f(168)}\\&=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots\\&\qquad+(\sqrt{169}-\sqrt{168})\\&=\sqrt{169}-1\\&=13-1=12\end{aligned}$$

꿀 한줄평

$\frac{1}{f(1)}, \frac{1}{f(2)}, \cdots, \frac{1}{f(168)}$에 $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$을 대입하면 각각을 모두 유리화해야 한다. 따라서 $\frac{1}{f(x)}$의 식을 먼저 간단히 나타낸 후, 그 식에 1, 2, …, 168을 대입하여 문제를 해결한다. 이때 대입한 식에서 규칙을 찾아 식을 간단히 하여 값을 구한다.

29 답 -8

$x=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=5+2\sqrt{6}$에서

$x-5=2\sqrt{6}$

양변을 제곱하면

$(x-5)^2=(2\sqrt{6})^2,\ x^2-10x+25=24$

$\therefore\ x^2-10x=-1$

$$\begin{aligned}\therefore\ (x^2-10x+4)(x^2-10x)-5&=(-1+4)\times(-1)-5\\&=-8\end{aligned}$$

30 답 40

해결 key Point!

$a+b+c=10$에서 $a+b=10-c$임을 이용해야 한다.

$a+b+c=10$에서 $a+b=10-c$ ······ ㉠

㉠의 양변을 제곱하면 $a^2+2ab+b^2=c^2-20c+100$

$$\begin{aligned}2ab+20c&=c^2+100-a^2-b^2\\&=100-(a^2+b^2-c^2)\\&=100-20=80\end{aligned}$$

즉, $2ab+20c=80$이므로

$ab+10c=40$

02 다항식의 인수분해

Lv. 1 개념을 적용하는 핵심 문제

47쪽~49쪽

01 ①, ③	02 ③	03 ⑤	04 ①	05 ④
06 ⑤	07 -2	08 ④	09 ⑤	10 ④
11 7	12 ④	13 ③	14 $x-y-2$	15 ①
16 ②	17 ③	18 $4x-6$		

01 답 ①, ③

$$\begin{aligned}x^2y-12xy^2+36y^3&=y(x^2-12xy+36y^2)\\&=y(x-6y)^2\end{aligned}$$

따라서 주어진 다항식의 인수가 아닌 것은 ①, ③이다.

02 답 ③

$$\begin{aligned}&(x+2)(x^2+2)+(2x+4)\left(\frac{1}{2}x^2-5\right)\\&=(x+2)(x^2+2)+2(x+2)\left(\frac{1}{2}x^2-5\right)\\&=(x+2)(x^2+2)+(x+2)(x^2-10)\\&=(x+2)(x^2+2+x^2-10)\\&=(x+2)(2x^2-8)\\&=2(x+2)(x^2-4)\\&=2(x+2)^2(x-2)\end{aligned}$$

03 답 ⑤

$x^2+Ax-8=(x+B)(x+C)=x^2+(B+C)x+BC$에서

$A=B+C,\ -8=BC$

곱이 -8인 두 정수 B, C를 순서쌍 (B, C)로 나타내면

$(-1, 8), (1, -8), (-2, 4), (2, -4), (-4, 2),$

$(4, -2), (-8, 1), (8, -1)$

이때 $A=B+C$이므로 $A=7, -7, 2, -2$

따라서 A의 값이 될 수 없는 것은 ⑤이다.

04 답 ①

$(x-4)(x-5)+m=x^2-9x+20+m$

이 식이 완전제곱식이 되어야 하므로

$20+m=\left(\frac{-9}{2}\right)^2=\frac{81}{4}\qquad\therefore\ m=\frac{1}{4}$

Level UP

x^2+ax+b가 완전제곱식이 되기 위한 조건

(1) b의 조건: $b=\left(\frac{a}{2}\right)^2$

(2) a의 조건: $a=\pm2\sqrt{b}$ (단, $b>0$)

05 답 ④

$-3<a<0$이므로 $a<0,\ a-2<0,\ a+3>0$

$$\begin{aligned}\therefore\ &\sqrt{a^2}-\sqrt{a^2-4a+4}+\sqrt{a^2+6a+9}\\&=\sqrt{a^2}-\sqrt{(a-2)^2}+\sqrt{(a+3)^2}\\&=-a-\{-(a-2)\}+a+3\\&=-a+a-2+a+3\\&=a+1\end{aligned}$$

참고 $\sqrt{k^2}=\begin{cases}k & (k\ge0)\\-k & (k<0)\end{cases}$임을 이용한다.

06 답 ⑤

$12x^2-axy-14y^2$이 $3x+2y$로 나누어떨어지므로

$3x+2y$는 $12x^2-axy-14y^2$의 인수이다.

$12x^2-axy-14y^2=(3x+2y)(4x+ky)$ (k는 상수)라고 하면

$12x^2-axy-14y^2=(3x+2y)(4x+ky)$
$=12x^2+(3k+8)xy+2ky^2$

따라서 $-a=3k+8$, $-14=2k$이므로

$k=-7$, $a=13$

다른 풀이

$12x^2-axy-14y^2$이 $3x+2y$로 나누어떨어지므로 $3x+2y$는 $12x^2-axy-14y^2$의 인수이다.

즉, $12x^2-axy-14y^2=(3x+2y)(4x-7y)$에서

$-axy=-21xy+8xy=-13xy$ $\therefore a=13$

Level UP

$12x^2-axy-14y^2$이 $3x+2y$로 나누어떨어지므로 나머지는 0이다.
즉, $12x^2-axy-14y^2=(3x+2y)(4x-7y)$임을 바로 알 수 있다.

07 답 -2

1단계 a의 값 구하기

$2x^2+ax-20=(x-4)(2x+c)$ (c는 상수)라고 하면

$2x^2+ax-20=2x^2+(c-8)x-4c$

따라서 $a=c-8$, $-20=-4c$이므로

$c=5$, $a=-3$

2단계 b의 값 구하기

$\frac{1}{8}x^2-2b^2=(x-4)\left(\frac{1}{8}x+d\right)$ (d는 상수)라고 하면

$\frac{1}{8}x^2-2b^2=\frac{1}{8}x^2+\left(d-\frac{1}{2}\right)x-4d$

따라서 $d-\frac{1}{2}=0$, $-2b^2=-4d$이므로

$d=\frac{1}{2}$, $-2b^2=-2$

$\therefore b^2=1$

이때 $b>0$이므로 $b=1$

3단계 $a+b$의 값 구하기

$\therefore a+b=-3+1=-2$

단계	채점 기준	비율
❶	a의 값을 구했다.	40 %
❷	b의 값을 구했다.	50 %
❸	$a+b$의 값을 구했다.	10 %

08 답 ④

도하는 상수항을 바르게 보았으므로

$(x+1)(x-10)=x^2-9x-10$에서 처음 이차식의 상수항은 -10이다.

또, 서연이는 x의 계수를 바르게 보았으므로

$(x+1)(x+2)=x^2+3x+2$에서 처음 이차식의 x의 계수는 3이다.

따라서 처음 이차식은 $x^2+3x-10$이므로 바르게 인수분해 하면

$x^2+3x-10=(x-2)(x+5)$

09 답 ⑤

$4x^2-324=4(x^2-81)$
$=4(x+9)(x-9)$

따라서 직육면체의 밑면의 가로의 길이는 $(x+9)$ cm, 세로의 길이는 $(x-9)$ cm이므로 구하는 겉넓이는

$2\{(x+9)(x-9)+4(x+9)+4(x-9)\}$
$=2(x^2-81+4x+36+4x-36)$
$=2(x^2+8x-81)$
$=2x^2+16x-162(\text{cm}^2)$

참고 직육면체의 밑면의 가로와 세로의 길이, 높이가 각각 a, b, c일 때
① (직육면체의 부피)$=abc$
② (직육면체의 겉넓이)$=2(ab+bc+ca)$
임을 이용한다.

10 답 ④

$3x+y=A$라고 하면

$(3x+y)(3x+y-2)-8=A(A-2)-8$
$=A^2-2A-8$
$=(A+2)(A-4)$
$=(3x+y+2)(3x+y-4)$

따라서 두 일차식은 $3x+y+2$, $3x+y-4$이므로 두 일차식의 합은

$(3x+y+2)+(3x+y-4)=6x+2y-2$

11 답 7

$x+2=A$라고 하면

$(x+2)^2+3(x+2)y-4y^2$
$=A^2+3Ay-4y^2$
$=(A-y)(A+4y)$
$=(x+2-y)(x+2+4y)$
$=(x-y+2)(x+4y+2)$

이때 $a<0$이므로 $a=-1$, $b=2$, $c=4$, $d=2$

$\therefore a+b+c+d=-1+2+4+2=7$

12 답 ④

$x(x-2)(x-4)(x-6)+15$
$=x(x-6)(x-2)(x-4)+15$
$=(x^2-6x)(x^2-6x+8)+15$

이때 $x^2-6x=A$라고 하면

$$\begin{aligned} A(A+8)+15 &= A^2+8A+15 \\ &= (A+3)(A+5) \\ &= (x^2-6x+3)(x^2-6x+5) \\ &= (x-1)(x-5)(x^2-6x+3) \end{aligned}$$

13 답 ③

$$\begin{aligned} 3x^2y+5x^2-12y-20 &= x^2(3y+5)-4(3y+5) \\ &= (3y+5)(x^2-4) \\ &= (3y+5)(x+2)(x-2) \end{aligned}$$

따라서 주어진 다항식의 인수인 것은 ㄱ, ㄴ, ㅁ, ㅂ, ㅈ의 5개이다.

14 답 $x-y-2$

1단계 x^2-y^2-4x+4를 인수분해 하기

$$\begin{aligned} x^2-y^2-4x+4 &= (x^2-4x+4)-y^2 \\ &= (x-2)^2-y^2 \\ &= (x+y-2)(x-y-2) \end{aligned}$$

2단계 $x^2-y^2+x-5y-6$을 인수분해 하기

$x^2-y^2+x-5y-6$을 x의 차수가 높은 항부터 낮은 항의 순서대로 정리하면

$$\begin{aligned} x^2-y^2+x-5y-6 &= x^2+x-(y^2+5y+6) \\ &= x^2+x-(y+3)(y+2) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & y+3 & \longrightarrow & y+3 \\ 1 & & -(y+2) & \longrightarrow & \underline{-y-2} \ (+ \\ & & & & 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} &= (x+y+3)\{x-(y+2)\} \\ &= (x+y+3)(x-y-2) \end{aligned}$$

3단계 공통인수 구하기

따라서 주어진 두 다항식의 공통인수는 $x-y-2$이다.

단계	채점 기준	비율
❶	x^2-y^2-4x+4를 인수분해 했다.	40 %
❷	$x^2-y^2+x-5y-6$을 인수분해 했다.	50 %
❸	공통인수를 구했다.	10 %

15 답 ①

$$\begin{aligned} A &= 99^2-6\times 99-7 \\ &= (99+1)(99-7) \\ &= 100\times 92=9200 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= 7.5^2\times\frac{1}{200}-2.5^2\times\frac{1}{200} \\ &= (7.5^2-2.5^2)\times\frac{1}{200} \\ &= (7.5+2.5)(7.5-2.5)\times\frac{1}{200} \\ &= 10\times 5\times\frac{1}{200}=\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$\therefore\ AB=9200\times\frac{1}{4}=2300$

16 답 ②

$$x=\frac{1}{4+\sqrt{15}}=\frac{4-\sqrt{15}}{(4+\sqrt{15})(4-\sqrt{15})}=4-\sqrt{15},$$

$$y=\frac{1}{4-\sqrt{15}}=\frac{4+\sqrt{15}}{(4-\sqrt{15})(4+\sqrt{15})}=4+\sqrt{15}$$

이므로

$x-y=(4-\sqrt{15})-(4+\sqrt{15})=-2\sqrt{15},$

$xy=(4-\sqrt{15})(4+\sqrt{15})=1$

$$\begin{aligned} \therefore\ x^2y-xy^2 &= xy(x-y) \\ &= -2\sqrt{15} \end{aligned}$$

Level UP

분모가 두 수의 합 또는 차인 무리수일 때, 분모의 유리화는

① $\dfrac{c}{a+\sqrt{b}}=\dfrac{c(a-\sqrt{b})}{(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})}=\dfrac{c(a-\sqrt{b})}{a^2-b}$

(단, $b>0$, $a\neq\sqrt{b}$)

② $\dfrac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\dfrac{c(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\dfrac{c(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$

(단, $a>0$, $b>0$, $a\neq b$)

임을 이용한다.

17 답 ③

$x-4=A$라고 하면

$$\begin{aligned} (x-4)^2-6(x-4)+9 &= A^2-6A+9 \\ &= (A-3)^2 \\ &= (x-4-3)^2 \\ &= (x-7)^2 \\ &= (7-\sqrt{3}-7)^2 \\ &= (-\sqrt{3})^2=3 \end{aligned}$$

참고 주어진 식에 x의 값을 바로 대입하는 것보다 주어진 식을 간단히 한 후에 대입하여 계산하는 것이 더 편리하다.

18 답 $4x-6$

$$\begin{aligned} (\text{사다리꼴 } A\text{의 넓이}) &= \frac{1}{2}\{(x-3)+(x-1)\}(x-1) \\ &= \frac{1}{2}(2x-4)(x-1) \\ &= (x-2)(x-1) \end{aligned}$$

직사각형 B는 사다리꼴 A와 넓이가 같고, 직사각형 B의 가로의 길이가 $x-2$이므로 세로의 길이는 $x-1$이다.

따라서 직사각형 B의 둘레의 길이는

$2(x-2+x-1)=2(2x-3)=4x-6$

Lv. 2 사고를 확장하는 실전 문제

50쪽~56쪽

01 $\sqrt{2}+1$	**02** 10	**03** $2x$	**04** ⑤	
05 (1) $f(x,\ y)=\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}$ (2) 8			**06** ③	
07 $a=1$, $b=2$, 몫: $x+y+1$			**08** 17	**09** ①
10 ④	**11** 16	**12** 32	**13** ③	**14** ③
15 ③, ④	**16** ④	**17** a^3	**18** ③	
19 $(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$			**20** ⑤	**21** 8
22 3	**23** ④	**24** -48	**25** $-4,\ 2$	**26** ⑤
27 $(a-b)(b-c)(a-c)$		**28** ④	**29** ㄱ, ㄹ	
30 $(x-1)(y-1)(z-1)$		**31** $-\frac{4}{9}$	**32** ②	**33** ⑤
34 ②	**35** ⑤	**36** 4950	**37** 192	**38** 67
39 $6\sqrt{2}+6\sqrt{3}$		**40** ⑤	**41** $\frac{a^2b+b^3}{2}$	**42** 1

01 답 $\sqrt{2}+1$

해결 key Point!

하나의 근호를 없애려면 근호 앞의 수를 2로 만들어야 한다.

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\sqrt{12+8\sqrt{2}}}&=\sqrt{1+\sqrt{12+2\sqrt{32}}}\\&=\sqrt{1+\sqrt{(8+4)+2\sqrt{8}\sqrt{4}}}\\&=\sqrt{1+\sqrt{(\sqrt{8}+\sqrt{4})^2}}\\&=\sqrt{1+(\sqrt{8}+\sqrt{4})}\\&=\sqrt{1+2\sqrt{2}+2}\\&=\sqrt{3+2\sqrt{2}}\\&=\sqrt{(2+1)+2\sqrt{2}\sqrt{1}}\\&=\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}\\&=\sqrt{2}+1\end{aligned}$$

Level UP

a, b가 양수일 때, 근호 안에 근호가 있는 식은

$\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}}=\sqrt{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$

$\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}}=\sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$ (단, $a>b$)

02 답 10

해결 key Point!

( )( )( )( )$+k$의 꼴인 경우 공통 부분이 생기도록 2개씩 묶어 전개해야 한다.

$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+k$

$=(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)+k$

$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+k$

$x^2+5x=A$라고 하면

$(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+k$

$=(A+4)(A+6)+k$

$=A^2+10A+24+k$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠이 완전제곱식이 되려면 $24+k=\left(\frac{10}{2}\right)^2=25$이어야 하므로

$k=1$

$\therefore\ 10k^2=10\times1^2=10$

참고 $k=1$일 때 주어진 식을 인수분해 하면

$A^2+10A+25=(A+5)^2=(x^2+5x+5)^2$

03 답 $2x$

$0<x<1$에서 $\frac{1}{x}>1$이므로

$x+\frac{1}{x}>0,\ x-\frac{1}{x}<0$

$$\begin{aligned}\therefore\ &\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4}-\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4}\\&=\sqrt{x^2+2+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{x^2-2+\frac{1}{x^2}}\\&=\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}-\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}\\&=\left|x+\frac{1}{x}\right|-\left|x-\frac{1}{x}\right|\\&=x+\frac{1}{x}-\left\{-\left(x-\frac{1}{x}\right)\right\}\\&=x+\frac{1}{x}+x-\frac{1}{x}\\&=2x\end{aligned}$$

04 답 ⑤

해결 key Point!

$1-\frac{1}{n^2}=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{n-1}{n}\times\frac{n+1}{n}$임을 이용해야 한다.

$f(2)f(3)f(4)\times\cdots\times f(12)$

$=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{12^2}\right)$

$=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\times\cdots$

$\times\left(1-\frac{1}{12}\right)\left(1+\frac{1}{12}\right)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{11}{12}\times\frac{13}{12}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{13}{12}=\frac{13}{24}$

05 답 (1) $f(x, y)=\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}$ (2) 8

해결 key Point!

근호 안에 근호가 있는 항을 정리하여 한 개의 근호를 없애야 한다.

(1) $f(x, y)=\sqrt{2x-2\sqrt{x^2-y^2}}$

$=\sqrt{2x-2\sqrt{(x+y)(x-y)}}$ ← $x+y+x-y=2x$

$=\sqrt{(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y})^2}$

$=\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}$

(2) $f(2, 1)+f(4, 1)+f(6, 1)+\cdots+f(80, 1)$

$=(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{7}-\sqrt{5})+\cdots$

$+(\sqrt{81}-\sqrt{79})$

$=\sqrt{81}-1$

$=9-1=8$

06 답 ③

해결 key Point!

인수분해는 전개의 역과정임을 이용해야 한다.

x^3-ax+6을 인수분해하면 $(x-2)(x^2+px+q)$이므로

$x^3-ax+6=(x-2)(x^2+px+q)$

$=x^3+(p-2)x^2+(q-2p)x-2q$

따라서 $0=p-2$, $-a=q-2p$, $6=-2q$이므로

$p=2$, $q=-3$, $a=7$

$\therefore a+p+q=7+2+(-3)=6$

07 답 $a=1$, $b=2$, 몫: $x+y+1$

1단계 주어진 다항식을 두 일차식의 곱으로 나타내고 그 식을 전개하기

$x^2+y^2+bxy-1$이 $x+ay-1$로 나누어떨어지므로

$x+ay-1$은 $x^2+y^2+bxy-1$의 인수이다.

$x^2+y^2+bxy-1=(x+ay-1)(x+cy+1)$ (c는 상수)라고 하면

$x^2+y^2+bxy-1$

$=(x+ay-1)(x+cy+1)$

$=x^2+cxy+x+axy+acy^2+ay-x-cy-1$

$=x^2+acy^2+(a+c)xy+(a-c)y-1$

2단계 a, b의 값 구하기

따라서 $1=ac$, $b=a+c$, $0=a-c$이므로 $a=c$

이때 $ac=a^2=1$에서 a는 양수이므로 $a=1$

$\therefore c=1$, $b=2$

3단계 몫 구하기

따라서 $x^2+y^2+2xy-1=(x+y-1)(x+y+1)$이므로

$x+y-1$로 나누었을 때의 몫은 $x+y+1$이다.

단계	채점 기준	비율
❶	주어진 다항식을 두 일차식의 곱으로 나타내고 그 식을 전개했다.	40 %
❷	a, b의 값을 구했다.	40 %
❸	몫을 구했다.	20 %

꿀 한줄평

다항식 P를 다항식 A로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라고 하면 $P=AQ+R$가 성립한다. 이때 나누어떨어지는 경우 $R=0$이므로 $P=AQ$이다. 즉, 다항식 P를 인수분해한 식이 AQ이다.

08 답 17

해결 key Point!

소수는 1과 자기 자신 이외에는 약수를 갖지 않는다는 것을 생각해야 한다.

$p=n^2+6n-27=(n+9)(n-3)$이 소수가 되려면 $n+9$, $n-3$ 중 하나는 1이 되어야 한다.

이때 $n-3<n+9$이므로

$n-3=1$ $\quad\therefore n=4$

따라서 $p=n^2+6n-27=4^2+6\times4-27=13$이므로

$n+p=4+13=17$

09 답 ①

해결 key Point!

두 양수 p, q에 대하여 $x^2+2x-n=(x+p)(x-q)$라 하고 주어진 식이 성립하는 경우를 생각해봐야 한다.

두 양수 p, q에 대하여 $x^2+2x-n=(x+p)(x-q)$라고 하면

$x^2+2x-n=(x+p)(x-q)$

$=x^2+(p-q)x-pq$

따라서 $p-q=2$, $pq=n$이므로 이를 만족시키는 p, q의 값과 그때의 n의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

p	3	4	5	$\cdots$	11	12	$\cdots$
q	1	2	3	$\cdots$	9	10	$\cdots$
n	3	8	15	$\cdots$	99	120	$\cdots$

따라서 1보다 크고 100보다 작은 자연수 n은 3, 8, 15, $\cdots$, 99의 9개이다.

10 답 ④

$m^2-mn-2n^2=7$에서 $(m-2n)(m+n)=7$

이때 7은 소수이고 $m+n>0$이므로

$\begin{cases} m-2n=1 \\ m+n=7 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} m-2n=7 \\ m+n=1 \end{cases}$

(i) $\begin{cases} m-2n=1 \\ m+n=7 \end{cases}$ 일 때

연립방정식을 풀면 $m=5$, $n=2$

(ii) $\begin{cases} m-2n=7 \\ m+n=1 \end{cases}$ 일 때

연립방정식을 풀면 $m=3$, $n=-2$

이때 m, n은 모두 자연수이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 $m=5$, $n=2$

$\therefore m+n=5+2=7$

꿀 한줄평

자연수 조건에서 식의 개수보다 미지수의 개수가 많을 때에는 조건에 맞는 경우를 모두 확인해야 한다.

11 답 16

1단계 두 일차식의 곱 전개하기

다항식 $3x^2+kx+5$가 두 일차식의 곱 $(3x-a)(x-b)$로 인수분해되므로

$$3x^2+kx+5=(3x-a)(x-b)$$
$$=3x^2-(a+3b)x+ab$$

2단계 두 정수 a, b의 값을 순서쌍 (a, b)로 나타내기

따라서 $k=-(a+3b)$, $5=ab$이고, a, b가 정수이므로 a, b의 값을 순서쌍 (a, b)로 나타내면

$(-5, -1)$, $(-1, -5)$, $(1, 5)$, $(5, 1)$

3단계 가장 큰 상수 k의 값 구하기

(i) $a=-5$, $b=-1$일 때, $k=-\{-5+3\times(-1)\}=8$

(ii) $a=-1$, $b=-5$일 때, $k=-\{-1+3\times(-5)\}=16$

(iii) $a=1$, $b=5$일 때, $k=-(1+3\times5)=-16$

(iv) $a=5$, $b=1$일 때, $k=-(5+3\times1)=-8$

(i)~(iv)에 의하여 가장 큰 상수 k의 값은 16이다.

단계	채점 기준	비율
❶	두 일차식의 곱을 전개했다.	20 %
❷	두 정수 a, b의 값을 순서쌍 (a, b)로 나타냈다.	40 %
❸	가장 큰 상수 k의 값을 구했다.	40 %

12 답 32

해결 key Point!

곱해서 5와 3이 되는 두 정수를 각각 찾아야 한다.

네 정수 p, q, s, t에 대하여

$5x^2+ax+3=(px+s)(qx+t)$라고 하면

$$5x^2+ax+3=(px+s)(qx+t)$$
$$=pqx^2+(pt+qs)x+st$$

따라서 $5=pq$, $a=pt+qs$, $3=st$이므로 이때 곱이 5인 두 정수는 -1, -5 또는 1, 5, 곱이 3인 두 정수는 -1, -3 또는 1, 3이므로 a의 값이 될 수 있는 수는 다음과 같다.

(i) $p=1$, $q=5$, $s=-3$, $t=-1$일 때

$a=pt+qs=1\times(-1)+5\times(-3)=-16$

(ii) $p=1$, $q=5$, $s=-1$, $t=-3$일 때

$a=pt+qs=1\times(-3)+5\times(-1)=-8$

(iii) $p=1$, $q=5$, $s=1$, $t=3$일 때

$a=pt+qs=1\times3+5\times1=8$

(iv) $p=1$, $q=5$, $s=3$, $t=1$일 때

$a=pt+qs=1\times1+5\times3=16$

(i)~(iv)에 의하여 a의 값이 될 수 있는 수 중 가장 큰 수는 16, 가장 작은 수는 -16이므로 구하는 차는

$16-(-16)=32$

참고 p, q, s, t의 값이 될 수 있는 경우는 16가지가 있지만 문제에서 다루지 않은 12가지 경우의 a의 값은 각각 (i)~(iv)와 같으므로 16가지의 경우의 모든 a의 값을 구해볼 필요가 없다.

13 답 ③

$$3x^2+19x+k=(3x+a)(x+b)$$
$$=3x^2+(a+3b)x+ab$$

따라서 $19=a+3b$, $k=ab$이고 a, b는 자연수이므로 이를 만족시키는 a, b의 값과 그때의 k의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

a	1	4	7	10	13	16
b	6	5	4	3	2	1
k	6	20	28	30	26	16

그러므로 가장 큰 실수 k의 값은 30이다.

14 답 ③

해결 key Point!

삼각형의 세 변의 길이가 a, b, c이고 내접원의 반지름의 길이가 r이면 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}r(a+b+c)$임을 이용해야 한다.

삼각형 ABC의 세 변의 길이를 각각 a, b, c라고 하면 삼각형의 둘레의 길이가 $10x+14$이므로

$a+b+c=10x+14=2(5x+7)$

또, 이 삼각형의 내접원의 반지름의 길이를 r라고 하면 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr=\frac{1}{2}r(a+b+c)$$
$$=\frac{1}{2}r\times2(5x+7)$$
$$=r(5x+7)$$

이때 $5x^2+17x+14=(5x+7)(x+2)$이므로

$r(5x+7)=(5x+7)(x+2)$

$\therefore\ r=x+2$

따라서 삼각형 ABC의 내접원의 넓이는 $(x+2)^2\pi$이다.

15 답 ③, ④

해결 key Point!

주어진 식을 전개한 다음 공통인수로 묶어야 한다.

$$\begin{aligned}&(ax+by)^2+(ay-bx)^2+c^2x^2+c^2y^2\\&=a^2x^2+2abxy+b^2y^2+a^2y^2-2abxy+b^2x^2+c^2x^2+c^2y^2\\&=a^2x^2+b^2y^2+a^2y^2+b^2x^2+c^2x^2+c^2y^2\\&=x^2(a^2+b^2+c^2)+y^2(a^2+b^2+c^2)\\&=(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2)\end{aligned}$$

따라서 주어진 다항식의 인수인 것은 ③, ④이다.

16 답 ④

해결 key Point!

인수분해가 안된 식은 모두 인수분해 해야 한다.

$$\begin{aligned}a^2b^2-6a^2b+9a^2-(b-3)^2&=a^2(b^2-6b+9)-(b-3)^2\\&=a^2(b-3)^2-(b-3)^2\\&=(a^2-1)(b-3)^2\\&=(a-1)(a+1)(b-3)^2\end{aligned}$$

④ $ab+3a-b-3=a(b+3)-(b+3)$
$=(a-1)(b+3)$

⑤ $ab-3a-b+3=a(b-3)-(b-3)$
$=(a-1)(b-3)$

따라서 주어진 다항식의 인수가 아닌 것은 ④이다.

꿀 한줄평

다항식의 인수분해도 정수의 소인수분해와 마찬가지로 다항식을 몇 개의 수와 몇 개의 다항식의 곱으로 나타낼 때, 그 다항식들을 원래 다항식의 인수라고 한다. 따라서 다항식을 인수분해 한 후, 그 인수 또는 인수들의 곱으로 나타낼 수 있는 것을 찾으면 된다.

17 답 a^3

해결 key Point!

$a=b+c=d+e+f$를 대입할 수 있도록 식을 $b+c$, $d+e+f$의 꼴로 정리해야 한다.

$a(ad+be+df)+be(c+f)+ce(c+f)+(d+e)f^2+f^3$

에서 공통 부분을 포함한 항끼리 묶어서 정리하면

$$\begin{aligned}&a(ad+be+df)+be(c+f)+ce(c+f)+(d+e)f^2+f^3\\&=a(ad+be+df)+(b+c)e(c+f)+(d+e+f)f^2\end{aligned}$$

위의 식에 $a=b+c=d+e+f$를 대입하면

$$\begin{aligned}&a(ad+be+df)+(b+c)e(c+f)+(d+e+f)f^2\\&=a(ad+be+df)+ae(c+f)+af^2\\&=a\{ad+be+df+e(c+f)+f^2\}\\&=a(ad+be+df+ce+ef+f^2)\\&=a\{ad+(b+c)e+(d+e+f)f\}\\&=a(ad+ae+af)\\&=a^2(d+e+f)=a^3\end{aligned}$$

18 답 ③

해결 key Point!

$a+b+c=3$이므로 주어진 식의 3에 $a+b+c$를 대입하여 공통인수가 나오도록 식을 변형해야 한다.

$a=\dfrac{a^2}{a}$, $b=\dfrac{b^2}{b}$, $c=\dfrac{c^2}{c}$이므로

$a^2\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)+b^2\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right)+c^2\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)+3=0$에서

$$\begin{aligned}&a^2\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b^2\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c^2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+a+b+c=0\\&a^2\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+a+b^2\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+b+c^2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+c=0\\&a^2\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+b^2\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+c^2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=0\\&\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a^2+b^2+c^2)=0\end{aligned}$$

이때 $abc\neq0$에서 $a^2+b^2+c^2\neq0$이므로 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0$

따라서 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{ab+bc+ca}{abc}=0$이므로

$ab+bc+ca=0$

19 답 $(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

$$\begin{aligned}x^4+x^2+1&=x^4+2x^2+1-x^2=(x^2+1)^2-x^2\\&=(x^2+x+1)(x^2-x+1)\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}x^5+x^4+x^3+x^2+x+1&=x^4(x+1)+x^2(x+1)+(x+1)\\&=(x+1)(x^4+x^2+1)\\&=(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)\end{aligned}$$

20 답 ⑤

해결 key Point!

$A^2-B^2=(A+B)(A-B)$임을 이용하기 위해 주어진 식에 $+1-1$을 하여 두 개의 완전제곱식을 만들어야 한다.

$$\begin{aligned}x^2y^2-x^2+2xy-2x&=x^2(y^2-1)+2x(y-1)\\&=x^2(y+1)(y-1)+2x(y-1)\\&=x(y-1)\{x(y+1)+2\}\\&=x(y-1)(xy+x+2)\end{aligned}$$

다른 풀이

$x^2y^2-x^2+2xy-2x$
$=x^2y^2+2xy+1-(x^2+2x+1)$
$=(xy+1)^2-(x+1)^2$
$=(xy+1+x+1)\{xy+1-(x+1)\}$
$=(xy+1+x+1)(xy+1-x-1)$
$=(xy+x+2)(xy-x)$
$=x(y-1)(xy+x+2)$

따라서 주어진 다항식의 인수가 아닌 것은 ⑤이다.

21 답 8

해결 key Point!

공통 부분이 생기도록 항을 묶어 전개해야 한다.

$(xy+2)(x+2)(y+1)+2xy$
$=(xy+2)(xy+x+2y+2)+2xy$

이때 $xy+2=A$라고 하면

$(xy+2)(xy+x+2y+2)+2xy=A(A+x+2y)+2xy$
$=A^2+(x+2y)A+2xy$
$=(A+x)(A+2y)$
$=(xy+x+2)(xy+2y+2)$

따라서 $a=1$, $b=2$, $c=2$, $d=2$이므로
$abcd=1\times2\times2\times2=8$

22 답 3

1단계 주어진 식을 인수분해 하기

$a(a+1)+b(b+1)+2(ab+1)-4$
$=a^2+a+b^2+b+2ab+2-4$
$=a^2+2ab+b^2+a+b-2$
$=(a+b)^2+(a+b)-2$

이때 $a+b=A$라고 하면

$(a+b)^2+(a+b)-2=A^2+A-2$
$=(A+2)(A-1)$
$=(a+b+2)(a+b-1)$

2단계 두 일차식의 차 구하기

따라서 두 일차식은 $a+b+2$, $a+b-1$이므로 두 일차다항식의 차는
$(a+b+2)-(a+b-1)=3$

단계	채점 기준	비율
❶	주어진 식을 인수분해 했다.	80 %
❷	두 일차식의 차를 구했다.	20 %

23 답 ④

해결 key Point!

공통 부분이 나오도록 식을 변형하여 치환해야 한다.

$x^4+6x^3+9x^2-8(x^2+3x)-20$
$=x^2(x^2+6x+9)-8x(x+3)-20$
$=x^2(x+3)^2-8x(x+3)-20$
$=\{x(x+3)\}^2-8x(x+3)-20$

이때 $x(x+3)=A$라고 하면

$\{x(x+3)\}^2-8x(x+3)-20$
$=A^2-8A-20$
$=(A-10)(A+2)$
$=\{x(x+3)-10\}\{x(x+3)+2\}$
$=(x^2+3x-10)(x^2+3x+2)$
$=(x-2)(x+5)(x+1)(x+2)$
$=(x+1)(x+2)(x-2)(x+5)$

따라서 $a<b$이므로 $a=-2$, $b=5$
$\therefore\ b-a=5-(-2)=7$

24 답 -48

해결 key Point!

x^2+5x+6, x^2-3x+2에는 공통 부분이 없으므로 두 식을 각각 인수분해 하여 공통 부분을 만들어야 한다.

$(x^2+5x+6)(x^2-3x+2)-60$
$=(x+2)(x+3)(x-1)(x-2)-60$
$=(x+2)(x-1)(x+3)(x-2)-60$
$=(x^2+x-2)(x^2+x-6)-60$

이때 $x^2+x=A$라고 하면

$(x^2+x-2)(x^2+x-6)-60=(A-2)(A-6)-60$
$=A^2-8A-48$
$=(A+4)(A-12)$
$=(x^2+x+4)(x^2+x-12)$
$=(x^2+x+4)(x+4)(x-3)$

이때 $c>d$이므로 $a=1$, $b=4$, $c=4$, $d=-3$
$\therefore\ abcd=1\times4\times4\times(-3)=-48$

25 답 -4, 2

해결 key Point!

주어진 식을 $(\quad)^2-a^2=k$ (k는 정수)의 꼴로 나타내야 한다.

$x^2+2x+8=a^2$에서
$x^2+2x+1+7=a^2$, $(x+1)^2-a^2=-7$
$\therefore\ (x+1+a)(x+1-a)=-7$

두 정수의 곱이 -7인 두 정수를 순서쌍으로 나타내면
$(-7,\ 1)$, $(-1,\ 7)$, $(1,\ -7)$, $(7,\ -1)$

(ⅰ) $x+1+a=-7,\ x+1-a=1$일 때

두 식을 연립하여 풀면 $x=-4,\ a=-4$

(ⅱ) $x+1+a=-1,\ x+1-a=7$일 때

두 식을 연립하여 풀면 $x=2,\ a=-4$

(ⅲ) $x+1+a=1,\ x+1-a=-7$일 때

두 식을 연립하여 풀면 $x=-4,\ a=4$

(ⅳ) $x+1+a=7,\ x+1-a=-1$일 때

두 식을 연립하여 풀면 $x=2,\ a=4$

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 구하는 정수 x는 $-4,\ 2$이다.

26 답 ⑤

해결 key Point!

주어진 식을 낮은 차수의 문자에 대하여 정리해 본다.

$$\begin{aligned} x^4+x^2-2ax+1-a^2 &= x^4+2x^2+1-(x^2+2ax+a^2) \\ &=(x^2+1)^2-(x+a)^2 \\ &=(x^2+1+x+a)\{x^2+1-(x+a)\} \\ &=(x^2+x+a+1)(x^2-x-a+1) \end{aligned}$$

다른 풀이

$x^4+x^2-2ax+1-a^2$을 a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$-a^2-2xa+(x^4+x^2+1)$

이때

$$\begin{aligned} x^4+x^2+1 &= x^4+2x^2+1-x^2 \\ &=(x^2+1)^2-x^2 \\ &=(x^2+x+1)(x^2-x+1) \end{aligned}$$

이므로

$x^4+x^2-2ax+1-a^2$

$=-a^2-2xa+(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

$$\begin{array}{rcrcr} 1 & & x^2+x+1 & \longrightarrow & -x^2-x-1 \\ -1 & & x^2-x+1 & \longrightarrow & x^2-x+1 \ (+ \\ \hline & & & & -2x \end{array}$$

$=(a+x^2+x+1)(-a+x^2-x+1)$

$=(x^2+x+a+1)(x^2-x-a+1)$

27 답 $(a-b)(b-c)(a-c)$

해결 key Point!

여러 개의 문자가 포함된 다항식을 인수분해 할 때에는 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 후 공통인수가 나오는지 확인해 봐야 한다.

$<a,\ b,\ c>+<b,\ c,\ a>+<c,\ a,\ b>$

$=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

$=a^2b-a^2c+b^2c-ab^2+ac^2-bc^2$

$=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+b^2c-bc^2$

$=(b-c)a^2-(b-c)(b+c)a+bc(b-c)$

$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$

$=(b-c)(a-b)(a-c)$

$=(a-b)(b-c)(a-c)$

28 답 ④

$a^4+b^4+c^4-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$

$=a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2$

$=a^4-2(b^2+c^2)a^2+(b^4-2b^2c^2+c^4)$

$=a^4-2(b^2+c^2)a^2+(b^2-c^2)^2$

$=a^4-2(b^2+c^2)a^2+(b+c)^2(b-c)^2$

$$\begin{array}{rcrcr} 1 & & -(b+c)^2 & \longrightarrow & -b^2-2bc-c^2 \\ 1 & & -(b-c)^2 & \longrightarrow & -b^2+2bc-c^2 \ (+ \\ \hline & & & & -2b^2-2c^2=-2(b^2+c^2) \end{array}$$

$=\{a^2-(b+c)^2\}\{a^2-(b-c)^2\}$

$=(a+b+c)(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)$

따라서 주어진 다항식의 인수가 아닌 것은 ④이다.

29 답 ㄱ, ㄹ

$(x+y)(y+z)(z+x)+xyz$

$=x^2y+xz^2+x^2z+y^2z+xy^2+yz^2+3xyz$

$=(y+z)x^2+(y^2+3yz+z^2)x+yz(y+z)$

$$\begin{array}{rcrcr} (y+z) & & yz & \longrightarrow & yz \\ 1 & & (y+z) & \longrightarrow & y^2+2yz+z^2 \ (+ \\ \hline & & & & y^2+3yz+z^2 \end{array}$$

$=\{(y+z)x+yz\}(x+y+z)$

$=(x+y+z)(xy+yz+zx)$

따라서 주어진 다항식의 인수인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

꿀 한줄평

$acx^2+(ad+bc)x+bd$를 인수분해 하면

$$\begin{array}{rcrcr} a & & b & \longrightarrow & bc \\ c & & d & \longrightarrow & ad \ (+ \\ \hline & & & & ad+bc \end{array}$$

$acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

이므로 이차항의 계수와 상수항을 모두 두 개의 곱으로 나누고 각각을 곱한 것을 더하여 일차항의 계수를 만들어내야 한다. 식이 복잡할 때에는 곱셈과 덧셈을 해 보면서 적절한 식을 찾는 것이 중요하다.

30 답 $(x-1)(y-1)(z-1)$

해결 key Point!

공통인수가 보이지 않을 때에는 한 문자에 대하여 정리해야 한다.

$xyz-xy-yz-zx+x+y+z-1$
$=(yz-y-z+1)x-(yz-y-z+1)$
$=(x-1)(yz-y-z+1)$
$=(x-1)\{y(z-1)-(z-1)\}$
$=(x-1)(y-1)(z-1)$

31 답 $-\frac{4}{9}$

해결 key Point!

$x^2-xy-2y^2+2x+5y-3$을 인수분해하여 두 다항식의 곱으로 나타내야 한다.

1단계 PQ 인수분해 하기

$x^2-xy-2y^2+2x+5y-3$
$=x^2+(-y+2)x-(2y^2-5y+3)$
$=x^2-(y-2)x-(2y-3)(y-1)$

$$\begin{array}{lll} 1 & -(2y-3) & \longrightarrow -2y+3 \\ 1 & y-1 & \longrightarrow \underline{\quad y-1}\ (+ \\ & & \quad -y+2 \end{array}$$

$=\{x-(2y-3)\}(x+y-1)$
$=(x-2y+3)(x+y-1)$

2단계 x, y의 값 구하기

즉, 두 다항식 P, Q는 $x-2y+3$, $x+y-1$이므로

연립방정식 $\begin{cases} P=0 \\ Q=0 \end{cases}$은 $\begin{cases} x-2y+3=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+y-1=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 또는

$\begin{cases} x+y-1=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x-2y+3=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$이다.

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=-\frac{1}{3}$, $y=\frac{4}{3}$

3단계 xy의 값 구하기

$\therefore\ xy=-\frac{1}{3}\times\frac{4}{3}=-\frac{4}{9}$

단계	채점 기준	비율
❶	PQ를 인수분해 했다.	40 %
❷	x, y의 값을 구했다.	40 %
❸	xy의 값을 구했다.	20 %

32 답 ②

해결 key Point!

$(x^2-y^2)^2=(x^2+y^2)^2-4x^2y^2$으로 놓고 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$임을 이용해야 한다.

$(x^2-y^2)^2=x^4-2x^2y^2+y^4$
$=x^4+2x^2y^2+y^4-4x^2y^2$
$=(x^2+y^2)^2-4x^2y^2$

이므로

$(x^2-y^2)^2-8(x^2+y^2)+16$
$=(x^2+y^2)^2-4x^2y^2-8(x^2+y^2)+16$
$=\{(x^2+y^2)^2-8(x^2+y^2)+16\}-4x^2y^2$
$=\{(x^2+y^2)-4\}^2-(2xy)^2$
$=(x^2+y^2+2xy-4)(x^2+y^2-2xy-4)$
$=\{(x+y)^2-2^2\}\{(x-y)^2-2^2\}$
$=(x+y+2)(x+y-2)(x-y+2)(x-y-2)$

따라서 주어진 다항식의 인수가 아닌 것은 ②이다.

Level UP

공통인수도 보이지 않고 치환할 부분도 찾기 어려운 다항식을 인수분해 하는 경우 주어진 식에 완전제곱식이 있는지 확인하여 완전제곱식을 만든 후, $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$를 이용한다.

33 답 ⑤

$2^{12}-1=(2^6+1)(2^6-1)$
$=(2^6+1)(2^3+1)(2^3-1)$
$=65\times9\times7$
$=3^2\times5\times7\times13$

따라서 약수의 개수는

$(2+1)(1+1)(1+1)(1+1)=24$

참고 자연수 $A=a^p\times b^q\times c^r$ (a, b, c는 서로 다른 소수, p, q, r는 자연수)의 약수의 개수는 $(p+1)(q+1)(r+1)$임을 이용한다.

34 답 ②

해결 key Point!

인수분해를 통하여 주어진 수의 인수를 최대한 찾아야 한다.

$2^{40}-1=(2^{20}+1)(2^{20}-1)$
$=(2^{20}+1)(2^{10}+1)(2^{10}-1)$
$=(2^{20}+1)(2^{10}+1)(2^5+1)(2^5-1)$

$2^5=32$, $2^{10}=1024$이므로

$2^{40}-1=(2^{20}+1)\times1025\times33\times31$
$=(2^{20}+1)\times41\times31\times11\times5^2\times3$

이때 $33=11\times3$, $93=31\times3$이므로 $2^{40}-1$을 나누어떨어지게 하는 자연수가 아닌 것은 ②이다.

35 답 ⑤

$3\times17^3\times n+9\times17^3(n+1)=3\times17^3\times\{n+3(n+1)\}$
$=3\times17^3\times(4n+3)$

이 수가 어떤 자연수의 제곱이 되려면 $4n+3$이 $3\times17\times k^2$

(k는 자연수)의 꼴이어야 한다.
이때 $4n+3$은 홀수이므로 $3\times17\times k^2$도 홀수이다.
즉, k는 홀수이다.
$4n+3=3\times17\times k^2$에서
$4n=3\times17\times k^2-3 \quad \therefore n=\dfrac{3\times17\times k^2-3}{4}$
이때 $100\le\dfrac{3\times17\times k^2-3}{4}<1000$이므로
$400\le51k^2-3<4000$, $403\le51k^2<4003$
$\therefore \dfrac{403}{51}\le k^2<\dfrac{4003}{51}$
즉, $\dfrac{403}{51}=7.90\cdots$, $\dfrac{4003}{51}=78.49\cdots$이므로 가능한 홀수 k의 값은 3, 5, 7이다.
(i) $k=3$일 때
$4n+3=3\times17\times3^2=459$에서
$4n=456 \quad \therefore n=114$
(ii) $k=5$일 때
$4n+3=3\times17\times5^2=1275$에서
$4n=1272 \quad \therefore n=318$
(iii) $k=7$일 때
$4n+3=3\times17\times7^2=2499$에서
$4n=2496 \quad \therefore n=624$
(i)~(iii)에 의하여 구하는 자연수 n의 값은 114, 318, 624이므로 그 합은
$114+318+624=1056$

36 답 4950

해결 key Point!

연속된 두 제곱수에서 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$를 이용하여 정리해야 한다.

$1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+\cdots+99^2$
$=99^2-98^2+97^2-96^2+\cdots+3^2-2^2+1^2$
$=(99^2-98^2)+(97^2-96^2)+\cdots+(3^2-2^2)+1$
$=(99-98)(99+98)+(97-96)(97+96)+\cdots+(3-2)(3+2)+1$
$=99+98+97+96+\cdots+3+2+1$
$=(1+99)+(2+98)+\cdots+(49+51)+50$
$=49\times100+50=4950$

Level UP

$1+2+3+\cdots+n=x$라고 하면

$$\begin{array}{rcccccccccl} & 1 & + & 2 & + & 3 & +\cdots+ & (n-1) & + & n & =x \\ +) & n & + & (n-1) & + & (n-2) & +\cdots+ & 2 & + & 1 & =x \\ \hline & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & +\cdots+ & (n+1) & + & (n+1) & =2x \end{array}$$

즉, $n(n+1)=2x$이므로 $x=\dfrac{n(n+1)}{2}$

37 답 192

해결 key Point!

$14=A$라 하고 주어진 식을 간단히 해야 한다.

$\sqrt{13\times15\times12\times16-36\times16}$
$=\sqrt{13\times15\times12\times16-3\times12\times16}$
이때 $14=A$라고 하면
$\sqrt{13\times15\times12\times16-3\times12\times16}$
$=\sqrt{(A-1)(A+1)(A-2)(A+2)-3(A-2)(A+2)}$
$=\sqrt{(A^2-1)(A^2-4)-3(A^2-4)}$
$=\sqrt{(A^2-4)(A^2-1-3)}$
$=\sqrt{(A^2-4)^2}$
$=A^2-4$
$=14^2-4$
$=192$

38 답 67

해결 key Point!

근호 안에 연속된 4개의 자연수가 있음을 확인하고 하나의 수를 미지수로 표현하여 변형한 후 인수분해 해야 한다.

1단계 a의 값 구하기
$a=22\times24+1$
$=22\times(22+2)+1$
$=22^2+22\times2+1$
$=(22+1)^2$
$=23^2$
$=529$

2단계 $x=30$이라 하고 $30\times31\times32\times33+1$을 인수분해 하기
$x=30$이라고 하면
$30\times31\times32\times33+1=x(x+1)(x+2)(x+3)+1$
$=x(x+3)(x+1)(x+2)+1$
$=(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1$
이때 $x^2+3x=A$라고 하면
$(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1=A(A+2)+1$
$=A^2+2A+1$
$=(A+1)^2$
$=(x^2+3x+1)^2$

3단계 b의 값 구하기
이때 $x^2+3x+1>0$이므로
$b=\sqrt{30\times31\times32\times33+1}$
$=\sqrt{(x^2+3x+1)^2}$
$=x^2+3x+1$
$=30^2+3\times30+1$
$=991$

4단계 $2a-b$의 값 구하기

$\therefore\ 2a-b=2\times529-991=67$

단계	채점 기준	비율
❶	a의 값을 구했다.	30 %
❷	$x=30$이라 하고 $30\times31\times32\times33+1$을 인수분해 했다.	30 %
❸	b의 값을 구했다.	30 %
❹	$2a-b$의 값을 구했다.	10 %

39 답 $6\sqrt{2}+6\sqrt{3}$

해결 key Point!

주어진 식을 인수분해 하고, 두 수 x, y의 합과 차, 곱 등으로 변형하여 대입해야 한다.

$$x+y=\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}=\frac{2}{2}=1$$

$$\begin{aligned}x-y&=\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}-\frac{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}\\&=\frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{2}\\&=\sqrt{2}+\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ x^2+5x-y^2-5y&=x^2-y^2+5x-5y\\&=(x+y)(x-y)+5(x-y)\\&=(x-y)(x+y+5)\\&=(\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+5)\\&=6(\sqrt{2}+\sqrt{3})\\&=6\sqrt{2}+6\sqrt{3}\end{aligned}$$

꿀 한줄평

주어진 x, y의 값을 더하거나 뺀 값이 x, y의 값보다 더 간단하므로 주어진 식을 인수분해 하여 $x+y$, $x-y$로 나타내고 그 값을 대입한다.

40 답 ⑤

$\sqrt{49}<\sqrt{52}<\sqrt{64}$에서 $7<\sqrt{52}<8$이므로 $\sqrt{52}$의 정수 부분은 $x=7$, 소수 부분은 $y=\sqrt{52}-7=2\sqrt{13}-7$

$$\begin{aligned}\therefore\ \frac{x^3+2x^2y-xy^2-2y^3}{x-y}&=\frac{x^2(x+2y)-y^2(x+2y)}{x-y}\\&=\frac{(x+2y)(x^2-y^2)}{x-y}\\&=\frac{(x+2y)(x+y)(x-y)}{x-y}\\&=(x+2y)(x+y)\\&=\{7+2(2\sqrt{13}-7)\}(7+2\sqrt{13}-7)\\&=(7+4\sqrt{13}-14)\times2\sqrt{13}\\&=(4\sqrt{13}-7)\times2\sqrt{13}\\&=104-14\sqrt{13}\end{aligned}$$

따라서 $a=104$, $b=-14$, $m=13$이므로

$a+bm=104+(-14)\times13=-78$

41 답 $\dfrac{a^2b+b^3}{2}$

$$\begin{aligned}x^3-x^2y+xy^2-y^3&=x^2(x-y)+y^2(x-y)\\&=(x-y)(x^2+y^2)\end{aligned}$$

$x+y=a$의 양변을 제곱하면 $x^2+2xy+y^2=a^2$ …… ㉠

$x-y=b$의 양변을 제곱하면 $x^2-2xy+y^2=b^2$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$2x^2+2y^2=a^2+b^2$ $\quad\therefore\ x^2+y^2=\dfrac{a^2+b^2}{2}$

$$\begin{aligned}\therefore\ x^3-x^2y+xy^2-y^3&=(x-y)(x^2+y^2)\\&=b\times\frac{a^2+b^2}{2}=\frac{a^2b+b^3}{2}\end{aligned}$$

42 답 1

해결 key Point!

n^4+n^2+1이 소수이면 인수분해 하였을 때 두 인수 중 하나는 1이어야 한다.

$$\begin{aligned}n^4+n^2+1&=n^4+2n^2+1-n^2\\&=(n^2+1)^2-n^2\\&=(n^2+n+1)(n^2-n+1)\end{aligned}$$

이때 n^4+n^2+1이 소수이므로 두 인수 n^2+n+1과 n^2-n+1 중 작은 수인 n^2-n+1은 반드시 1이 되어야 한다.

즉, $n^2-n+1=1$이므로 $n^2-n=0$

$\therefore\ n^4-n^3+n^2-n+1=n^2(n^2-n)+(n^2-n)+1=1$

Lv. X 상위 1%에 도달하는 심화 문제

58쪽~59쪽

01 128	**02** 2	**03** $\dfrac{2}{25}$	**04** 13	**05** 30
06 36				

01 답 128

해결 key Point!

전개식에서 x의 계수만 구하면 되므로 x항이 나오는 부분만 전개하여 구하면 더 편리하다.

$\{5x^3+(x+1)^2+2x+1\}^4=(5x^3+x^2+4x+2)^4$에서 x의 계수만 알면 되므로 차수가 2 이상인 항, 즉 x^3, x^2항이 곱해진 항은 구할 필요가 없다.

즉, $(4x+2)^4$의 전개식에서의 x의 계수를 구하면 $(5x^3+x^2+4x+2)^4$의 x의 계수와 같다.

또, $(4x+2)^4=\{(4x+2)^2\}^2=(16x^2+16x+4)^2$에서 마찬가지 방법으로 $(16x+4)^2$에서 x의 계수만 구하면 된다.
따라서 $(16x+4)^2=256x^2+128x+16$이므로 x의 계수는 128이다.

02 답 2

해결 key Point!

주어진 식을 모두 a, c로 정리하여 a와 c에 대한 식으로 만들어야 한다.

$ac+bd=0$에서 $ac=-bd$이므로 $a^2c^2=b^2d^2$ ...... ㉠
$a^2+b^2=2$에서 $b^2=2-a^2$ ...... ㉡
$c^2+d^2=2$에서 $d^2=2-c^2$ ...... ㉢
㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}a^2c^2&=b^2d^2\\&=(2-a^2)(2-c^2)\\&=4-2(a^2+c^2)+a^2c^2\end{aligned}$$

따라서 $4-2(a^2+c^2)=0$이므로
$-2(a^2+c^2)=-4$ $\quad\therefore a^2+c^2=2$

03 답 $\frac{2}{25}$

해결 key Point!

$x^2-3x-n=(x+a)(x+b)$ (a, b는 정수)로 인수분해 됨을 이용해야 한다.

다항식 x^2-3x-n이 일차항의 계수가 1이고 상수항이 정수인 두 일차식의 곱으로 인수분해 되므로
$x^2-3x-n=(x+a)(x+b)$ (a, b는 정수이고, $a>b$)라고 하자.
이때 $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$이므로
$a+b=-3$ ...... ㉠
$-n=ab$
즉, $1\le n\le 100$에서 $-100\le -n\le -1$이므로
$-100\le ab\le -1$ ...... ㉡
㉠, ㉡을 모두 만족시키는 두 정수 a, b의 값과 그때의 n의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

a	1	2	3	4	5	6	7	8
b	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11
n	4	10	18	28	40	54	70	88

따라서 조건을 만족시키는 n의 값은 4, 10, 18, 28, 40, 54, 70, 88의 8개이므로 구하는 확률은
$\frac{8}{100}=\frac{2}{25}$

꿀 한줄평

다항식 x^2-3x-n이 일차항의 계수가 1이고 상수항이 정수인 두 일차식의 곱으로 인수분해 되므로 합이 -3이고 곱이 $-n$인 두 정수를 찾아야 한다. 이때 $1\le n\le 100$을 이용하여 조건을 만족시키는 두 정수를 모두 구하면 된다.

04 답 13

해결 key Point!

다항식 $x^2+3x-10$을 두 일차식의 곱으로 인수분해 하고 각각의 일차식이 다항식 $x^3+ax^2-4bx+10$의 인수가 되는 경우를 파악해야 한다.

$x^2+3x-10=(x+5)(x-2)$이므로 공통인수가 될 수 있는 일차식은 $x+5$ 또는 $x-2$이다.
(i) 공통인수가 $x+5$일 때

$$\begin{aligned}x^3+ax^2-4bx+10&=(x+5)(x^2+px+q)\\&=x^3+(p+5)x^2+(5p+q)x+5q\end{aligned}$$

(p, q는 상수)

라고 할 수 있다.
따라서 $a=p+5$, $-4b=5p+q$, $10=5q$이므로 $q=2$
이때 a, b가 자연수이므로 p는 정수이고
$a=p+5\ge 1$에서 $p\ge -4$
$5p+2=-4b\le -4$에서
$5p\le -6$ $\quad\therefore p\le -\frac{6}{5}$
따라서 $-4\le p\le -\frac{6}{5}$이므로 가능한 p의 값은 -4, -3, -2이다.
ⓐ $p=-4$일 때
$a=p+5=-4+5=1$
$-4b=5p+2=5\times(-4)+2=-18$이므로 $b=\frac{9}{2}$
이때 b는 자연수이어야 하므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
ⓑ $p=-3$일 때
$a=p+5=-3+5=2$
$-4b=5p+2=5\times(-3)+2=-13$이므로 $b=\frac{13}{4}$
이때 b는 자연수이어야 하므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
ⓒ $p=-2$일 때
$a=p+5=-2+5=3$
$-4b=5p+2=5\times(-2)+2=-8$이므로 $b=2$

(ii) 공통인수가 $x-2$일 때

$$x^3+ax^2-4bx+10=(x-2)(x^2+rx+s)$$
$$=x^3+(r-2)x^2+(s-2r)x-2s$$
$(r,\ s$는 상수$)$

라고 할 수 있다.

따라서 $a=r-2$, $-4b=s-2r$, $10=-2s$이므로

$s=-5$

이때 $-5-2r=-4b$, 즉 $2r+5=4b$에서 $2r+5$는 홀수이고 $4b$는 짝수이므로 조건을 만족시키는 a, b의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 $a=3$, $b=2$이므로

$a^2+b^2=3^2+2^2=13$

꿀 한줄평

$x^2+3x-10=(x+5)(x-2)$이므로 일차식인 공통인수가 $x+5$ 또는 $x-2$임은 바로 찾을 수 있다. 따라서 $x^3+ax^2-4bx+10$을 인수분해 하면 $x+5$ 또는 $x-2$를 인수로 가져야 하므로 $(x+5)(x^2+px+q)$ (p, q는 상수) 또는 $(x-2)(x^2+rx+s)$ (r, s는 상수)를 전개한 식의 x^2, x의 계수가 자연수가 되는 경우를 찾으면 된다.

05 답 30

$$<x,\ y,\ z>+<y,\ z,\ x>+<z,\ x,\ y>$$
$$=(x-y)(x-z)+(y-z)(y-x)+(z-x)(z-y)$$
$$=x^2-zx-xy+yz+y^2-xy-yz+zx+z^2-yz-zx+xy$$
$$=x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$$
$$=\frac{1}{2}(2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx)$$
$$=\frac{1}{2}(x^2-2xy+y^2+y^2-2yz+z^2+z^2-2zx+x^2)$$
$$=\frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}=0$$

이때 $(x-y)^2\geq 0$, $(y-z)^2\geq 0$, $(z-x)^2\geq 0$이므로

$(x-y)^2=0$, $(y-z)^2=0$, $(z-x)^2=0$

즉, $x-y=0$, $y-z=0$, $z-x=0$이므로 $x=y$, $y=z$, $z=x$

따라서 $x=y=z=10$이므로

$x+y+z=3x=3\times 10=30$

Level UP

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$$
$$=\frac{1}{2}(2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx)$$
$$=\frac{1}{2}(x^2-2xy+y^2+y^2-2yz+z^2+z^2-2zx+x^2)$$
$$=\frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}$$

이므로 $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\geq 0$이다.

이때 $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=0$이면

$x-y=0$, $y-z=0$, $z-x=0$이므로 $x=y=z$이다.

06 답 36

해결 key Point!

$5\times 7\times 13\times 16\times 73$을 적절히 조합하여 인수분해 공식을 활용할 수 있도록 변형해야 한다.

$$5\times 7\times 13\times 16\times 73+1=2^4\times 5\times 7\times 13\times 73+1$$
$$=(7\times 2^3\times 13)\times(2\times 5\times 73)+1$$
$$=728\times 730+1$$
$$=(729-1)(729+1)+1$$
$$=(3^6-1)(3^6+1)+1$$
$$=3^{12}-1+1=3^{12}$$

이때 $a<5$이므로 $a=3$, $n=12$

$\therefore\ an=3\times 12=36$

꿀 한줄평

$5\times 7\times 13\times 16\times 73+1=a^n$이므로

$5\times 7\times 13\times 16\times 73=a^n-1$의 꼴로 변형해야 한다.

$5\times 7\times 13\times 16\times 73=531440$이고 $3^{12}=729^2=531441$이므로

$5\times 7\times 13\times 16\times 73=(729-1)(729+1)$로 나타낼 수 있음을 알아야 한다.

Lv. Master 실력을 완성하는 대단원 평가

60쪽~64쪽

01 ⑤	02 ⑤	03 ①	04 ③	05 ④
06 ③	07 ①	08 ③	09 ③	10 ③
11 ②	12 ③	13 ①	14 ④	15 ⑤
16 3	17 4	18 128	19 23	20 $2a+6b$
21 -2	22 70	23 $(7,\ 2)$, $(7,\ 3)$		

01 답 ⑤

$$\left(3x+\frac{1}{4}a\right)\left(4x-\frac{1}{3}\right)=12x^2+(-1+a)x-\frac{1}{12}a$$

이때 x의 계수가 상수항의 4배이므로

$-1+a=4\times\left(-\frac{1}{12}a\right)$, $-1+a=-\frac{1}{3}a$

$\frac{4}{3}a=1\qquad \therefore\ a=\frac{3}{4}$

참고 $a=\frac{3}{4}$이므로

x의 계수는 $-1+a=-1+\frac{3}{4}=-\frac{1}{4}$

상수항은 $-\frac{1}{12}a=-\frac{1}{12}\times\frac{3}{4}=-\frac{1}{16}$

이때 $-\frac{1}{16}\times 4=-\frac{1}{4}$이므로 x의 계수는 상수항의 4배이다.

02 답 ⑤

$(x-3)(-4x-1)+(3x+2)(3x-2)$
$=(-4x^2+11x+3)+(9x^2-4)$
$=5x^2+11x-1$
따라서 $a=5$, $b=11$, $c=-1$이므로
$a-bc=5-11\times(-1)=16$

03 답 ①

$$\begin{aligned}(3+2\sqrt{2})^{100}(3-2\sqrt{2})^{100}&=\{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})\}^{100}\\&=(9-8)^{100}\\&=1^{100}\\&=1\end{aligned}$$

04 답 ③

해결 key Point!
x의 분모를 유리화하여 얻은 등식을 $x-a=\sqrt{b}$ (a, b는 유리수)의 꼴로 변형한 후 양변을 제곱하여 정리해야 한다.

$x=\dfrac{7}{2+\sqrt{11}}=\dfrac{7(2-\sqrt{11})}{(2+\sqrt{11})(2-\sqrt{11})}=-2+\sqrt{11}$에서
$x+2=\sqrt{11}$
양변을 제곱하면
$(x+2)^2=(\sqrt{11})^2$
$x^2+4x+4=11$
$x^2+4x=7$
$\therefore\ x^2+4x-9=7-9=-2$

05 답 ④

$$\begin{aligned}9x^2+ax-24&=3(3x-4)(x-b)\\&=3\{3x^2+(-3b-4)x+4b\}\\&=9x^2+3(-3b-4)x+12b\end{aligned}$$
따라서 $a=3(-3b-4)$, $-24=12b$이므로
$b=-2$, $a=3\times\{-3\times(-2)-4\}=6$
$\therefore\ a+b=6+(-2)=4$

06 답 ③

$$\begin{aligned}ab+a+b+1&=a(b+1)+(b+1)\\&=(a+1)(b+1)\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}a^2b+a^2-b-1&=a^2(b+1)-(b+1)\\&=(b+1)(a^2-1)\\&=(b+1)(a+1)(a-1)\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}ab^2-a-b^2+1&=a(b^2-1)-(b^2-1)\\&=(a-1)(b^2-1)\\&=(a-1)(b+1)(b-1)\end{aligned}$$
따라서 세 다항식의 공통인수는 ③이다.

07 답 ①

해결 key Point!
주어진 식을 전개하여 x와 y 사이의 관계를 파악해야 한다.

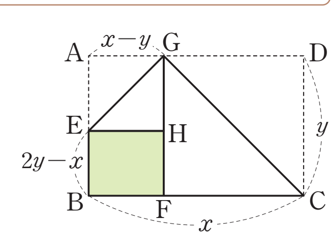
$(1+x)(2026+y)=(2026-x)(1-y)$에서
$2026+y+2026x+xy=2026-2026y-x+xy$,
$2027x+2027y=0$
$2027(x+y)=0$, $x+y=0$
$\therefore\ x=-y$ $\cdots\cdots$ ㉠
㉠을 $(2026-x)(y-2026)-x^2$에 대입하면
$(2026-x)(y-2026)-x^2$
$=\{2026-(-y)\}(y-2026)-(-y)^2$
$=(y+2026)(y-2026)-y^2$
$=y^2-2026^2-y^2$
$=-2026^2$

08 답 ③

$a>b$이고, 두 수 a, b의 차가 2이므로 $a-b=2$
$\therefore\ (a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16})$
$=\dfrac{1}{2}\times2(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16})$
$=\dfrac{1}{2}(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16})$
$=\dfrac{1}{2}(a^2-b^2)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16})$
$=\dfrac{1}{2}(a^4-b^4)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16})$
$=\dfrac{1}{2}(a^8-b^8)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16})$
$=\dfrac{1}{2}(a^{16}-b^{16})(a^{16}+b^{16})$
$=\dfrac{1}{2}(a^{32}-b^{32})=\dfrac{1}{2}a^{32}-\dfrac{1}{2}b^{32}$
따라서 $p=\dfrac{1}{2}$, $q=-\dfrac{1}{2}$, $x=32$, $y=32$이므로
$p+q+x+y=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}+32+32=64$

09 답 ③

해결 key Point!
두 변이 겹치게 접어서 생긴 사각형은 정사각형임을 이용해야 한다.



정사각형 GFCD의 한 변의 길이가 y이므로 사각형 EBFH의 가로의 길이는 $x-y$이다.
정사각형 AEHG의 한 변의 길이는 $x-y$이므로 사각형 EBFH의 세로의 길이는 $y-(x-y)=2y-x$이다.

따라서 사각형 EBFH의 넓이는

$(x-y)(2y-x)=-x^2+3xy-2y^2$

10 답 ③

$$\begin{aligned}4x^4-8x^2y^2+y^4&=4x^4-4x^2y^2+y^4-4x^2y^2\\&=(2x^2-y^2)^2-4x^2y^2\\&=(2x^2+2xy-y^2)(2x^2-2xy-y^2)\end{aligned}$$

이므로 $a=2,\ b=2,\ c=-1,\ d=2,\ e=-1$

따라서 다섯 상수 $a,\ b,\ c,\ d,\ e$에 대하여 옳지 않은 것은 ③이다.

11 답 ②

해결 key Point!

주어진 식을 치수가 가장 낮은 문자인 b에 대하여 정리한 후 인수를 파악해야 한다.

주어진 식을 b에 대하여 정리하면

$$\begin{aligned}&a^3+(2b+1)a^2+(b^2+2b-1)a+(b^2-1)\\&=a^3+2a^2b+a^2+ab^2+2ab-a+b^2-1\\&=(a+1)b^2+2(a^2+a)b+a^3+a^2-a-1\\&=(a+1)b^2+2a(a+1)b+a^2(a+1)-(a+1)\\&=(a+1)(b^2+2ab+a^2-1)\\&=(a+1)\{(a+b)^2-1\}\\&=(a+1)(a+b+1)(a+b-1)\end{aligned}$$

따라서 주어진 다항식의 인수인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

꿀 한줄평

문자가 두 종류 이상인 경우 차수가 가장 낮은 문자에 대하여 정리하면 공통인수를 찾기 쉽다.

12 답 ③

$$\begin{aligned}3^8-1&=(3^4)^2-1\\&=(3^4+1)(3^4-1)\\&=(3^4+1)(3^2+1)(3^2-1)\\&=(3^4+1)(3^2+1)(3+1)(3-1)\\&=82\times10\times4\times2\\&=2^5\times5\times41\end{aligned}$$

즉, 3^8-1의 모든 소인수는 2, 5, 41이므로 모든 소인수의 합 x는 $x=2+5+41=48$

$$\begin{aligned}\therefore\ x^2-16x+64&=(x-8)^2\\&=(48-8)^2\\&=40^2=1600\end{aligned}$$

13 답 ①

해결 key Point!

세 개의 항을 가진 식을 유리화할 때에는 두 항을 하나로 묶어서 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$임을 이용할 수 있도록 해야 한다.

$$\frac{\sqrt{2}}{x}=\sqrt{2}(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})=\sqrt{2}+2-\sqrt{6}$$

이때

$$\begin{aligned}x&=\frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}\}\{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}\}}\\&=\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})^2-3}=\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3+2\sqrt{2}-3}\\&=\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+2+\sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

이므로

$$4x=4\times\frac{\sqrt{2}+2+\sqrt{6}}{4}=\sqrt{2}+2+\sqrt{6}$$

$$\therefore\ 4x-\frac{\sqrt{2}}{x}=\sqrt{2}+2+\sqrt{6}-(\sqrt{2}+2-\sqrt{6})=2\sqrt{6}$$

14 답 ④

해결 key Point!

공통 부분을 $x^2+x=A$라 하고 식을 변형한 후 인수분해 공식을 이용해야 한다.

$x^2+x=A$라고 하면

$$\begin{aligned}&(x^2+x)^2-8(x^2+x)+12\\&=A^2-8A+12\\&=(A-6)(A-2)\\&=(x^2+x-6)(x^2+x-2)\\&=(x+3)(x-2)(x+2)(x-1)\\&=(x-1)(x-2)(x+2)(x+3)\end{aligned}$$

따라서 $a=2,\ b=3$ 또는 $a=3,\ b=2$이므로

$ab=2\times3=6$

15 답 ⑤

해결 key Point!

$\sqrt{x}$가 양수이므로 $\sqrt{x}=\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}>0$임을 이용해야 한다.

$\sqrt{x}=\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}$의 양변을 제곱하면

$x=a+\frac{1}{a}-2\qquad\therefore\ x+2=a+\frac{1}{a}$

$$\begin{aligned}\therefore\ \sqrt{x^2+4x}&=\sqrt{x^2+4x+4-4}\\&=\sqrt{(x+2)^2-4}\\&=\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-4}\\&=\sqrt{a^2-2+\frac{1}{a^2}}\\&=\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}\end{aligned}$$

이때 $\sqrt{x}=\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{a-1}{\sqrt{a}}>0$이므로 $a>1$

따라서 $0<\frac{1}{a}<1$이므로 $a-\frac{1}{a}>0$

$$\therefore \frac{x+2+\sqrt{x^2+4x}}{x+2-\sqrt{x^2+4x}}$$
$$=\frac{(x+2+\sqrt{x^2+4x})^2}{(x+2-\sqrt{x^2+4x})(x+2+\sqrt{x^2+4x})}$$
$$=\frac{(x+2)^2+2(x+2)\sqrt{x^2+4x}+x^2+4x}{(x+2)^2-(x^2+4x)}$$
$$=\frac{(x+2)^2+2(x+2)\sqrt{x^2+4x}+(x^2+4x+4)-4}{x^2+4x+4-x^2-4x^2}$$
$$=\frac{2(x+2)^2+2(x+2)\sqrt{x^2+4x}-4}{4}$$
$$=\frac{2\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+2\left(a+\frac{1}{a}\right)\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}-4}{4}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(a+\frac{1}{a}\right)\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}-2\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a-\frac{1}{a}\right)-2\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(a^2+2+\frac{1}{a^2}+a^2-\frac{1}{a^2}-2\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times 2a^2=a^2$$

꿀 한줄평

a에 대한 식에 $\sqrt{x}$가 없으므로 주어진 등식의 양변을 제곱하여 x와 a에 대한 식을 만든다. 이때 $x^2+4x=(x+2)^2-4$이므로 $x+2$와 x^2+4x를 하나의 공통 부분이 존재하도록 만들어 x와 a에 대한 식을 공통 부분에 대한 식으로 정리한다.

16 답 3

해결 key Point!

주어진 식의 분모를 유리화해야 한다.

$$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$$
$$=10^2-4\times 16$$
$$=36$$

이때 $x>y$이므로 $x-y=6$

$$\therefore \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}$$
$$=\frac{x+y+2\sqrt{xy}}{x-y}$$
$$=\frac{10+2\times\sqrt{16}}{6}$$
$$=\frac{18}{6}$$
$$=3$$

17 답 4

$$(x+a)(x-2)=x^2+(-2+a)x-2a$$
$$=x^2+bx-18$$

이므로

$-2+a=b$, $-2a=-18$ $\quad\therefore a=9,\ b=7$

$$(x+5)(cx+7)=cx^2+(7+5c)x+35$$
$$=cx^2+17x+35$$

이므로

$7+5c=17$, $5c=10$

$\therefore c=2$

$\therefore a-b+c=9-7+2=4$

18 답 128

$$2^{48}-1=(2^{24}+1)(2^{24}-1)$$
$$=(2^{24}+1)(2^{12}+1)(2^{12}-1)$$
$$=(2^{24}+1)(2^{12}+1)(2^6+1)(2^6-1)$$
$$=(2^{24}+1)(2^{12}+1)(64+1)(64-1)$$
$$=(2^{24}+1)(2^{12}+1)\times 65\times 63$$

따라서 구하는 자연수 n은 63, 65이고, 그 합은

$63+65=128$

참고 $2^6-1=(2^3+1)(2^3-1)=9\times 7=63$이므로 60 이상 80 이하이고, $2^7=128<2^{12}$이므로 $2^{12}+1$은 80 이상이다. 즉, $2^{12}+1$의 값을 구하지 않아도 되고, 2^6-1을 더 인수분해 하지 않아도 된다.

19 답 23

$(x^2+x+1)(x^2-x+1)$에서 $x^2+1=X$라고 하면

$$(x^2+x+1)(x^2-x+1)=(X+x)(X-x)$$
$$=X^2-x^2$$
$$=(x^2+1)^2-x^2$$
$$=x^4+x^2+1$$

또, $x^4+x^2=Y$라고 하면

$$(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4+x^2-1)$$
$$=(x^4+x^2+1)(x^4+x^2-1)$$
$$=(Y+1)(Y-1)$$
$$=Y^2-1$$
$$=(x^4+x^2)^2-1$$
$$=x^8+2x^6+x^4-1$$

따라서 $a=1$, $p=8$, $b=2$, $q=6$, $c=1$, $r=4$, $d=-1$이므로

$ap+bq+cr+d=1\times 8+2\times 6+1\times 4+(-1)=23$

20 답 $2a+6b$

해결 key Point!

주어진 식을 변형하여 완전제곱식 두 개를 만든 후 인수를 파악해야 한다.

$a^2-16b^2-c^2+6ab+10bc$

$=a^2+6ab+9b^2-9b^2-16b^2+10bc-c^2$

$=(a^2+6ab+9b^2)-(25b^2-10bc+c^2)$

$=(a+3b)^2-(5b-c)^2$

$=(a+3b+5b-c)(a+3b-5b+c)$

$=(a+8b-c)(a-2b+c)$

따라서 두 일차식은 $a+8b-c$, $a-2b+c$이므로 그 합은

$(a+8b-c)+(a-2b+c)=2a+6b$

21 답 -2

주어진 식을 x에 대하여 정리하면

$x^2-4xy+3y^2-6x+2y-16$

$=x^2-(4y+6)x+3y^2+2y-16$

$=x^2-(4y+6)x+(3y+8)(y-2)$

$$\begin{array}{llll} 1 & -(3y+8) & \rightarrow & -3y-8 \\ 1 & -(y-2) & \rightarrow & \underline{-y+2} \; (+ \\ & & & -4y-6 \end{array}$$

$=(x-3y-8)(x-y+2)$

따라서 두 일차식은 $x-3y-8$, $x-y+2$이므로 두 일차식의 x항과 y항의 계수의 합은

$(1-3)+(1-1)=-2$

22 답 70

해결 key Point!

다항식 ax^2+bx+c $(a>0,\ c>0)$가 완전제곱식이 되려면 $b=\pm2\sqrt{ac}$이어야 함을 이용해야 한다.

1단계 주어진 식이 완전제곱식이 됨을 확인하기

$16x^2-(m-35)x+121=(4x)^2-(m-35)x+11^2$

2단계 완전제곱식이 되기 위한 상수 m의 값 구하기

이 식이 완전제곱식이 되려면

$-(m-35)=2\times4\times11$ 또는 $-(m-35)=-2\times4\times11$

이어야 하므로

$-m+35=88$ 또는 $-m+35=-88$

$\therefore\ m=-53$ 또는 $m=123$

3단계 모든 상수 m의 값의 합 구하기

따라서 모든 상수 m의 값의 합은

$-53+123=70$

단계	채점 기준	배점
❶	주어진 식이 완전제곱식이 됨을 확인했다.	2점
❷	완전제곱식이 되기 위한 상수 m의 값을 구했다.	4점
❸	모든 상수 m의 값의 합을 구했다.	1점

23 답 $(7,\ 2)$, $(7,\ 3)$

해결 key Point!

주어진 식이 A^2-B^2의 꼴이므로 인수분해 공식 $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$를 이용해야 한다.

1단계 주어진 식 인수분해 하기

$(x+y)^2-(y+6)^2$

$=(x+y+y+6)(x+y-y-6)$

$=(x+2y+6)(x-6)$ ······ ㉠

2단계 x의 값 구하기

㉠이 20 이하의 소수가 되어야 하고 두 자연수 x, y에 대하여 $x+2y+6\geq9$이므로 $x-6=1$이어야 한다.

$\therefore\ x=7$

3단계 순서쌍 $(x,\ y)$ 모두 구하기

이때 $x+2y+6=7+2y+6=2y+13\geq15$이므로 ㉠이 20 이하의 소수가 되려면 $2y+13$의 값은 17 또는 19이다.

(i) $2y+13=17$일 때

$2y=4$ $\quad\therefore\ y=2$

(ii) $2y+13=19$일 때

$2y=6$ $\quad\therefore\ y=3$

(i), (ii)에 의하여 구하는 순서쌍 $(x,\ y)$는

$(7,\ 2)$, $(7,\ 3)$

단계	채점 기준	배점
❶	주어진 식을 인수분해 했다.	2점
❷	x의 값을 구했다.	2점
❸	순서쌍 $(x,\ y)$를 모두 구했다.	3점

Ⅲ 이차방정식

01 이차방정식의 풀이

Lv. 1 개념을 적용하는 핵심 문제

68쪽~70쪽

01 ④	02 ④	03 ①	04 ⑤	05 $x=-1$
06 ③, ④	07 ③	08 -12	09 ①	10 ④
11 $x=6\pm2\sqrt{10}$		12 ⑤	13 ④	14 $\sqrt{41}$
15 ①	16 ③	17 -9	18 10	

01 답 ④

$(2a-1)x^2+3x=(x-4)(3x+1)$에서

$(2a-1)x^2+3x=3x^2-11x-4$

$\therefore (2a-4)x^2+14x+4=0$

이 등식이 x에 대한 이차방정식이 되려면 $2a-4\neq0$이어야 하므로

$2a\neq4 \qquad \therefore a\neq2$

따라서 a의 값이 될 수 없는 것은 ④이다.

02 답 ④

$x=4$를 $x^2-2ax+8=0$에 대입하면

$4^2-2\times a\times4+8=0$, $16-8a+8=0$

$-8a=-24 \qquad \therefore a=3$

$x=-1$을 $3x^2-4x-2b-5=0$에 대입하면

$3\times(-1)^2-4\times(-1)-2b-5=0$

$3+4-2b-5=0$, $-2b=-2$

$\therefore b=1$

$\therefore ab=3\times1=3$

03 답 ①

$x=p$를 $6x^2+3x-1=0$에 대입하면

$6p^2+3p-1=0$, $6p^2+3p=1$

$\therefore 2p^2+p=\dfrac{1}{3}$

$x=q$를 $2x^2+4x-5=0$에 대입하면

$2q^2+4q-5=0$, $2q^2+4q=5$

$\therefore q^2+2q=\dfrac{5}{2}$

$$\therefore (2p^2+p+1)(q^2+2q-4)=\left(\frac{1}{3}+1\right)\left(\frac{5}{2}-4\right)=\frac{4}{3}\times\left(-\frac{3}{2}\right)=-2$$

참고 p, q의 값을 구할 수는 없지만 $2p^2+p$, q^2+2q의 값은 구할 수 있음을 이용한다.

04 답 ⑤

$(4x+1)(x-3)=2x^2-2x-12$에서

$4x^2-11x-3=2x^2-2x-12$

$2x^2-9x+9=0$, $(2x-3)(x-3)=0$

$\therefore x=\dfrac{3}{2}$ 또는 $x=3$

따라서 $\alpha=\dfrac{3}{2}$, $\beta=3$ 또는 $\alpha=3$, $\beta=\dfrac{3}{2}$이므로

$4\alpha\beta=4\times\dfrac{3}{2}\times3=18$

05 답 $x=-1$

1단계 이차방정식 $x^2-10x+25=0$의 근 구하기

$x^2-10x+25=0$에서

$(x-5)^2=0 \qquad \therefore x=5$

2단계 상수 k의 값 구하기

$x=5$를 $-2x^2-kx+10=0$에 대입하면

$-2\times5^2-5k+10=0$, $-50-5k+10=0$

$-5k=40 \qquad \therefore k=-8$

3단계 이차방정식 $-2x^2-kx+10=0$의 다른 한 근 구하기

즉, $-2x^2+8x+10=0$에서

$x^2-4x-5=0$, $(x+1)(x-5)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=5$

따라서 다른 한 근은 $x=-1$이다.

단계	채점 기준	비율
❶	이차방정식 $x^2-10x+25=0$의 근을 구했다.	30 %
❷	상수 k의 값을 구했다.	30 %
❸	이차방정식 $-2x^2-kx+10=0$의 다른 한 근을 구했다.	40 %

06 답 ③, ④

$x^2+2kx+k+6=0$이 중근을 가지려면

$k+6=\left(\dfrac{2k}{2}\right)^2$이어야 하므로

$k^2-k-6=0$, $(k+2)(k-3)=0$

$\therefore k=-2$ 또는 $k=3$

참고 이차방정식 $x^2+ax+b=0$이 중근을 가지려면 $b=\left(\dfrac{a}{2}\right)^2$이어야 한다.

07 답 ③

$3x(3x-4)=5-12x$에서

$9x^2-12x=5-12x$, $9x^2=5$

$x^2=\frac{5}{9}$ $\quad\therefore x=\pm\frac{\sqrt{5}}{3}$

따라서 두 근의 곱은

$-\frac{\sqrt{5}}{3}\times\frac{\sqrt{5}}{3}=-\frac{5}{9}$

참고 이차방정식 $x^2=q\ (q\ge0)$의 근은 $x=\pm\sqrt{q}$이다.

08 답 -12

$3(x+a)^2=b$에서

$(x+a)^2=\frac{b}{3}$, $x+a=\pm\sqrt{\frac{b}{3}}$

$\therefore x=-a\pm\sqrt{\frac{b}{3}}$

따라서 $-a=2$, $\frac{b}{3}=2$이므로

$a=-2$, $b=6$

$\therefore ab=-2\times6=-12$

09 답 ①

$x^2-12x+30=0$에서

$x^2-12x=-30$, $x^2-12x+36=-30+36$

$(x-6)^2=6$, $x-6=\pm\sqrt{6}$

$\therefore x=6\pm\sqrt{6}$

따라서 $c<d$이므로

$a=-6$, $b=6$, $c=6-\sqrt{6}$, $d=6+\sqrt{6}$

$$\begin{aligned}\therefore ac-bd&=-6(6-\sqrt{6})-6(6+\sqrt{6})\\&=-36+6\sqrt{6}-36-6\sqrt{6}\\&=-72\end{aligned}$$

10 답 ④

$3x^2+6x-5=0$에서

$x=\frac{-3\pm\sqrt{24}}{3}=\frac{-3\pm2\sqrt{6}}{3}$

따라서 $m=\frac{-3-2\sqrt{6}}{3}+\frac{-3+2\sqrt{6}}{3}=-2$이므로

$-5m=-5\times(-2)=10$

참고 이차방정식 $ax^2+2b'x+c=0$의 근의 공식은

$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$ $(b'^2-ac\ge0)$이다.

11 답 $x=6\pm2\sqrt{10}$

이차방정식 $x^2-2ax-a+2=0$에서 x의 계수와 상수항을 서로 바꾼 이차방정식은 $x^2+(-a+2)x-2a=0$

이 이차방정식의 한 근이 6이므로

$6^2+6(-a+2)-2a=0$, $36-6a+12-2a=0$

$-8a=-48$ $\quad\therefore a=6$

따라서 처음 이차방정식은 $x^2-12x-4=0$이므로

$x=6\pm2\sqrt{10}$

12 답 ⑤

$Ax^2-5x-1=0$에서 $x=\frac{5\pm\sqrt{25+4A}}{2A}$

따라서 $2A=4$, $25+4A=B$이므로 $A=2$, $B=33$

$\therefore B-6A=33-6\times2=21$

참고 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근의 공식은

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (단, $b^2-4ac\ge0$)이다.

13 답 ④

$x^2-ax+4b=0$에서 $x=\frac{a\pm\sqrt{a^2-16b}}{2}$

따라서 $\frac{a}{2}=2$, $\frac{\sqrt{a^2-16b}}{2}=4\sqrt{5}$이므로 $a=4$

$\frac{\sqrt{a^2-16b}}{2}=4\sqrt{5}$에서 $\sqrt{a^2-16b}=8\sqrt{5}$이므로 양변을 제곱하면

$a^2-16b=320$, $16b=4^2-320=-304$

$\therefore b=-19$

$\therefore a-b=4-(-19)=23$

14 답 $\sqrt{41}$

$\frac{1}{5}x^2=\frac{1}{2}x+\frac{1}{5}$의 양변에 10을 곱하면

$2x^2=5x+2$, $2x^2-5x-2=0$

$\therefore x=\frac{5\pm\sqrt{41}}{4}$

따라서 $\alpha>\beta$이므로 $\alpha=\frac{5-\sqrt{41}}{4}$, $\beta=\frac{5+\sqrt{41}}{4}$

$$\begin{aligned}\therefore 2\beta-2\alpha&=2(\beta-\alpha)=2\left(\frac{5+\sqrt{41}}{4}-\frac{5-\sqrt{41}}{4}\right)\\&=2\times\frac{\sqrt{41}}{2}=\sqrt{41}\end{aligned}$$

15 답 ①

$(x+2)(x-1)-\frac{x^2-1}{3}=\frac{5x-3}{2}$의 양변에 6을 곱하면

$6(x^2+x-2)-2(x^2-1)=3(5x-3)$

$6x^2+6x-12-2x^2+2=15x-9$

$4x^2-9x-1=0$ $\quad\therefore x=\frac{9\pm\sqrt{97}}{8}$

이때 두 근 중 작은 근은 $\frac{9-\sqrt{97}}{8}$이므로 $a=\frac{9-\sqrt{97}}{8}$

$\therefore\ 9-8a=9-8\times\frac{9-\sqrt{97}}{8}$
$=9-(9-\sqrt{97})=\sqrt{97}$

16 답 ③

$\frac{1}{7}x^2-0.9x=0.7$에서 $\frac{1}{7}x^2-\frac{9}{10}x-\frac{7}{10}=0$

이 식의 양변에 70을 곱하면

$10x^2-63x-49=0,\ (10x+7)(x-7)=0$

$\therefore\ x=-\frac{7}{10}$ 또는 $x=7$

이때 음수인 근 A는 $A=-\frac{7}{10}$이고 $-1<-\frac{7}{10}<0$이므로

$-1<A<0 \qquad \therefore\ n=-1$

17 답 -9

1단계 공통 부분을 A라 하고 주어진 식을 A에 대한 식으로 나타내기

$(5x+2y)(5x+2y-6)+9=0$에서 $5x+2y=A$라고 하면

$A(A-6)+9=0$

2단계 A의 값 구하기

$A^2-6A+9=0,\ (A-3)^2=0$

$\therefore\ A=3$

3단계 $-6y-15x$의 값 구하기

따라서 $5x+2y=3$이므로

$-6y-15x=-3(5x+2y)=-3\times3=-9$

단계	채점 기준	비율
❶	공통 부분을 A라 하고 주어진 식을 A에 대한 식으로 나타냈다.	30 %
❷	A의 값을 구했다.	40 %
❸	$-6y-15x$의 값을 구했다.	30 %

참고 공통 부분이 있으므로 공통 부분을 한 문자로 놓고 이차방정식을 푼다.

18 답 10

$(x^2-5x+1)(x^2-5x+9)+15=0$에서 $x^2-5x=A$라고 하면

$(A+1)(A+9)+15=0,\ A^2+10A+24=0$

$(A+6)(A+4)=0 \qquad \therefore\ A=-6$ 또는 $A=-4$

(i) $A=-6$일 때

$x^2-5x=-6,\ x^2-5x+6=0$

$(x-2)(x-3)=0 \qquad \therefore\ x=2$ 또는 $x=3$

(ii) $A=-4$일 때

$x^2-5x=-4,\ x^2-5x+4=0$

$(x-1)(x-4)=0 \qquad \therefore\ x=1$ 또는 $x=4$

(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식의 해는

$x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$ 또는 $x=4$

따라서 모든 해의 합은

$1+2+3+4=10$

Lv. 2 사고를 확장하는 실전 문제

71쪽~76쪽

01 ⑤	**02** ③	**03** 3	**04** ②	
05 $-5\le x<-4$ 또는 $11\le x<12$			**06** $\frac{1}{5}\le k<\frac{11}{5}$	
07 ③	**08** 2	**09** ②	**10** ①	**11** ③
12 1012	**13** $4\sqrt{5}-4$	**14** $x=-3$	**15** ①	**16** ②
17 ③	**18** ②	**19** ④	**20** $4\sqrt{3}$	**21** -1
22 $x=1$	**23** 4	**24** ②	**25** ①	**26** ①
27 ③	**28** -1	**29** $\frac{7}{9}$	**30** ⑤	**31** ⑤
32 11	**33** ④	**34** 2	**35** ⑤	**36** 4

01 답 ⑤

해결 key Point!

$x=2$를 대입한 등식을 k에 대하여 정리해야 한다.

$x=2$를 $kx^2+ax+(k+1)b=0$에 대입하면

$k\times2^2+a\times2+(k+1)b=0$

$4k+2a+kb+b=0$

위의 식을 k에 대하여 정리하면 $(4+b)k+(2a+b)=0$

위의 식이 실수 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면 $4+b=0$, $2a+b=0$이어야 한다.

따라서 $b=-4,\ a=2$이므로

$a-b=2-(-4)=6$

02 답 ③

해결 key Point!

$a,\ b$를 c에 대한 문자로 나타낸 뒤, $a:b:c$의 값을 구해야 한다.

$a(x+1)(x+2)+b(x+2)(x+3)+c(x+3)(x+1)=0$에

$x=0$을 대입하면

$2a+6b+3c=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$x=1$을 대입하면

$6a+12b+8c=0$

$\therefore\ 3a+6b+4c=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉡$-$㉠을 하면

$a+c=0$

$\therefore\ a=-c \qquad \cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$6b+c=0 \qquad \therefore b=-\frac{1}{6}c$

따라서 $a:b:c=-c:-\frac{c}{6}:c=-6:-1:6$이므로

$a=-6k$, $b=-k$, $c=6k$ (k는 실수)라고 하면

$$\frac{(c-a)^3}{abc}=\frac{\{6k-(-6k)\}^3}{-6k\times(-k)\times 6k}=\frac{(12k)^3}{36k^3}=48$$

03 답 3

해결 key Point!

방정식 $P(x)=0$의 근이 α이면 $P(\alpha)=0$임을 이용해야 한다.

$(x-p)(x-q)=3$의 두 근이 α, β이므로

$(\alpha-p)(\alpha-q)=3$, $(\beta-p)(\beta-q)=3$

이때

$(\alpha-p)(\alpha-q)=3$에서 $(p-\alpha)(q-\alpha)=3$

$(\beta-p)(\beta-q)=3$에서 $\beta^2-(p+q)\beta+pq=3$

$$\therefore \frac{(p-\alpha)(q-\alpha)}{\beta^2-(p+q)\beta+pq-2}=\frac{3}{3-2}=3$$

04 답 ②

해결 key Point!

주어진 등식을 변형하여 $x+\frac{1}{x}$의 값을 구해야 한다.

$x^2-5x+1=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 x로 나누면

$x-5+\frac{1}{x}=0 \qquad \therefore x+\frac{1}{x}=5$

$\therefore \alpha+\frac{1}{\alpha}=5$, $\beta+\frac{1}{\beta}=5$

$\alpha+\frac{1}{\alpha}=5$에서

$\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}=\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2-2=5^2-2=23$

$\alpha^4+\frac{1}{\alpha^4}=\left(\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}\right)^2-2=23^2-2=527$

마찬가지 방법으로 $\beta^2+\frac{1}{\beta^2}=23$

$$\begin{aligned}\therefore\ &\alpha^4+\beta^2+\alpha+\beta+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha^4}+\frac{1}{\beta^2}\\&=\alpha^4+\frac{1}{\alpha^4}+\alpha+\frac{1}{\alpha}+\beta^2+\frac{1}{\beta^2}+\beta+\frac{1}{\beta}\\&=527+5+23+5=560\end{aligned}$$

05 답 $-5\le x<-4$ 또는 $11\le x<12$

해결 key Point!

정수 n에 대하여 $[x]=n$일 때, $n\le x<n+1$임을 이용해야 한다.

$[x]^2-6[x]-55=0$에서

$([x]+5)([x]-11)=0 \qquad \therefore [x]=-5$ 또는 $[x]=11$

(i) $[x]=-5$일 때, $-5\le x<-4$

(ii) $[x]=11$일 때, $11\le x<12$

(i), (ii)에 의하여 $-5\le x<-4$ 또는 $11\le x<12$

꿀 한줄평

$[x]$를 한 문자로 생각하고 이차방정식의 해를 구하여 $[x]=\alpha$의 꼴로 나타내면 된다. 이때 $[x]=\alpha$이면 $\alpha\le x<\alpha+1$이므로 방정식의 해는 부등식의 형태로 나타난다.

06 답 $\frac{1}{5}\le k<\frac{11}{5}$

$3(x+2)(x-7)=x(x-7)$에서

$3(x^2-5x-14)=x^2-7x$, $3x^2-15x-42=x^2-7x$

$2x^2-8x-42=0$, $x^2-4x-21=0$

$(x+3)(x-7)=0$

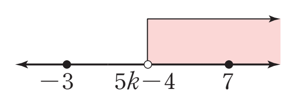
$\therefore x=-3$ 또는 $x=7$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$2(3x+2)>5(x+k)$에서

$6x+4>5x+5k$

$\therefore x>5k-4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x의 값이 7이려면 오른쪽 그림에서 $-3\le5k-4<7$이어야 하므로



$1\le5k<11 \qquad \therefore \frac{1}{5}\le k<\frac{11}{5}$

07 답 ③

$x^2+3|x-1|-7=0$에서

(i) $x<1$일 때

$x^2-3(x-1)-7=0$이므로

$x^2-3x-4=0$, $(x+1)(x-4)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=4$

이때 $x<1$이므로 $x=-1$

(ii) $x\ge1$일 때

$x^2+3(x-1)-7=0$이므로

$x^2+3x-10=0$, $(x+5)(x-2)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=2$

이때 $x\ge1$이므로 $x=2$

(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식의 근은 $x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 $\alpha=-1$, $\beta=2$ 또는 $\alpha=2$, $\beta=-1$이므로

$|\alpha-\beta|=|-1-2|=3$

08 답 2

해결 key Point!

$x\ge y$인 경우와 $x<y$인 경우로 나누어 생각해야 한다.

(ⅰ) $x \ge y$일 때

$L(x, y)=x$이므로 $x=x^2+2y^2$ …… ㉠

$S(x, y)=y$이므로

$y=3x-y$, $2y=3x$

$\therefore y=\frac{3}{2}x$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$x=x^2+2\times\left(\frac{3}{2}x\right)^2$, $\frac{11}{2}x^2-x=0$

$11x^2-2x=0$, $x(11x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{2}{11}$

$\therefore x=0$, $y=0$ 또는 $x=\frac{2}{11}$, $y=\frac{3}{11}$

이때 $x \ge y$이므로 $x=0$, $y=0$

그런데 $x \ne 0$, $y \ne 0$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $x<y$일 때

$L(x, y)=y$이므로

$y=x^2+2y^2$ …… ㉢

$S(x, y)=x$이므로

$x=3x-y$

$\therefore y=2x$ …… ㉣

㉣을 ㉢에 대입하면

$2x=x^2+2\times(2x)^2$, $9x^2-2x=0$

$x(9x-2)=0$ $\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{2}{9}$

$\therefore x=0$, $y=0$ 또는 $x=\frac{2}{9}$, $y=\frac{4}{9}$

이때 $x<y$이므로 $x=\frac{2}{9}$, $y=\frac{4}{9}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $x=\frac{2}{9}$, $y=\frac{4}{9}$이므로

$\frac{y}{x}=y\times\frac{1}{x}=\frac{4}{9}\times\frac{9}{2}=2$

09 답 ②

$P(x)+4x=P(x+2)+2$에서

$P(x+2)-P(x)=4x-2$

이때

$P(x+2)-P(x)$

$=a(x+2)^2+b(x+2)+1-(ax^2+bx+1)$

$=ax^2+4ax+4a+bx+2b+1-ax^2-bx-1$

$=4ax+4a+2b$

$=4x-2$

즉, $4a=4$, $4a+2b=-2$이므로 $a=1$, $b=-3$

따라서 $P(x)=x^2-3x+1$이므로 $P(x)=19$에서

$x^2-3x+1=19$, $x^2-3x-18=0$

$(x+3)(x-6)=0$ $\therefore x=-3$ 또는 $x=6$

10 답 ①

해결 key Point!

$\sqrt{a^2}=|a|$, $|a|=\pm a$ (a는 실수)임을 이용해야 한다.

$\sqrt{9-6x+x^2}=\sqrt{(3-x)^2}=|3-x|$이므로

$|x^2-4x+3|=\sqrt{9-6x+x^2}$에서

$|x^2-4x+3|=|3-x|$

(ⅰ) $x^2-4x+3=-(3-x)$일 때

$x^2-4x+3=-3+x$, $x^2-5x+6=0$

$(x-2)(x-3)=0$ $\therefore x=2$ 또는 $x=3$

(ⅱ) $x^2-4x+3=3-x$일 때

$x^2-3x=0$, $x(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 근의 합은

$0+2+3=5$

11 답 ③

해결 key Point!

함수 $y=-\frac{a}{4}x+1$의 그래프가 지나는 사분면을 이용하여 a의 범위를 찾아야 한다.

함수 $y=-\frac{a}{4}x+1$의 그래프가 제1, 2, 4사분면을 지나므로 기울기가 음수이어야 한다.

즉, $-\frac{a}{4}<0$에서 $a>0$

또, 점 $(a-1, a^2)$이 $y=-\frac{a}{4}x+1$의 그래프 위의 점이므로

$a^2=-\frac{a}{4}\times(a-1)+1$, $4a^2+a(a-1)-4=0$

$5a^2-a-4=0$, $(5a+4)(a-1)=0$

$\therefore a=-\frac{4}{5}$ 또는 $a=1$

이때 $a>0$이므로 $a=1$

12 답 1012

해결 key Point!

1011을 문자로 놓고 방정식의 해를 구해야 한다.

$(1011x)^2-1010\times1012x-1=0$에서 $1011=A$라고 하면

$(Ax)^2-(A-1)(A+1)x-1=0$

$A^2x^2-(A^2-1)x-1=0$

$(A^2x+1)(x-1)=0$ $\therefore x=-\frac{1}{A^2}$ 또는 $x=1$

즉, $(1011x)^2-1010\times1012x-1=0$의 두 근은

$x=-\frac{1}{1011^2}$ 또는 $x=1$이므로 $a=1$

또, $x^2+1010x-1011=0$에서

$(x+1011)(x-1)=0$ $\quad\therefore x=-1011$ 또는 $x=1$

$\therefore \beta=-1011$

$\therefore \alpha-\beta=1-(-1011)=1012$

13 답 $4\sqrt{5}-4$

1단계 $1-\sqrt{5}$의 정수 부분과 소수 부분 구하기

$2<\sqrt{5}<3$에서 $-3<-\sqrt{5}<-2$

$-2<1-\sqrt{5}<-1$이므로 $1-\sqrt{5}$의 정수 부분은 -2이고 소수 부분은 $(1-\sqrt{5})-(-2)=3-\sqrt{5}$

2단계 a, b의 값 구하기

$x=-2$가 $x^2+ax+b=0$의 근이므로

$(-2)^2+a\times(-2)+b=0$, $4-2a+b=0$

$\therefore b=2a-4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$x=3-\sqrt{5}$도 $x^2+ax+b=0$의 근이므로

$(3-\sqrt{5})^2+a\times(3-\sqrt{5})+b=0$

$9-6\sqrt{5}+5+3a-\sqrt{5}a+b=0$

$\therefore 14-6\sqrt{5}+3a-\sqrt{5}a+b=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$14-6\sqrt{5}+3a-\sqrt{5}a+2a-4=0$

$10-6\sqrt{5}+(5-\sqrt{5})a=0$

$(5-\sqrt{5})a=-10+6\sqrt{5}$

$$\therefore a=\frac{6\sqrt{5}-10}{5-\sqrt{5}}=\frac{(6\sqrt{5}-10)(5+\sqrt{5})}{(5-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}$$

$$=\frac{20\sqrt{5}-20}{20}=\sqrt{5}-1$$

$b=2(\sqrt{5}-1)-4=2\sqrt{5}-6$

3단계 $2a+b$의 값 구하기

$\therefore 2a+b=2(\sqrt{5}-1)+(2\sqrt{5}-6)=4\sqrt{5}-4$

단계	채점 기준	비율
❶	$1-\sqrt{5}$의 정수 부분과 소수 부분을 구했다.	30 %
❷	a, b의 값을 구했다.	60 %
❸	$2a+b$의 값을 구했다.	10 %

14 답 $x=-3$

$|5-3x|=2$에서

$5-3x=-2$ 또는 $5-3x=2$

$-3x=-7$ 또는 $-3x=-3$

$\therefore x=\frac{7}{3}$ 또는 $x=1$

이때 둘 중 작은 근인 $x=1$이 $x^2+2x+a=0$의 근이므로

$1^2+2+a=0$ $\quad\therefore a=-3$

즉, $x^2+2x-3=0$에서

$(x+3)(x-1)=0$ $\quad\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

따라서 또 다른 한 근은 $x=-3$이다.

15 답 ①

$x=1$을 $|x^2-(a+1)x+a^2-3a|=3$에 대입하면

$|1^2-(a+1)+a^2-3a|=3$, $|a^2-4a|=3$

$\therefore a^2-4a=-3$ 또는 $a^2-4a=3$

(i) $a^2-4a=-3$일 때

$a^2-4a+3=0$이므로

$(a-1)(a-3)=0$ $\quad\therefore a=1$ 또는 $a=3$

(ii) $a^2-4a=3$일 때

$a^2-4a-3=0$이므로 $a=2\pm\sqrt{7}$

(i), (ii)에 의하여 모든 실수 a의 값의 곱은

$1\times3\times(2-\sqrt{7})(2+\sqrt{7})=-9$

16 답 ②

해결 key Point!

주어진 두 식을 적절히 변형하고 한 식을 다른 한 식에 대입하여 한 문자 b로 이루어진 식을 만들어야 한다.

$x^2-2(a-2)x+a^2-4a-3b=0$에서

$x^2-2(a-2)x+a^2-4a=3b$

$x^2-(2a-4)x+a(a-4)=3b$

$(x-a)(x-a+4)=3b$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$x+2=a+b$에서 $x-a=b-2$이므로 이를 ㉠에 대입하면

$(b-2)(b-2+4)=3b$

$(b-2)(b+2)=3b$

$b^2-4=3b$

$b^2-3b-4=0$

$(b+1)(b-4)=0$

$\therefore b=-1$ 또는 $b=4$

따라서 모든 b의 값의 합은

$-1+4=3$

17 답 ③

해결 key Point!

x에 대한 일차방정식 $ax+b=0$이 근을 갖지 않을 조건은 $a=0$, $b\neq0$임을 이용해야 한다.

$a(ax-1)-(x+1)=0$에서

$a^2x-a-x-1=0$, $(a^2-1)x=a+1$

$\therefore (a+1)(a-1)x=a+1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠이 근을 갖지 않으므로

$(a+1)(a-1)=0$, $a+1\neq0$

$\therefore a=1$

$a=1$을 $[x]^2-(4a-1)[x]-5a+1=0$에 대입하면

$[x]^2-3[x]-4=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

$([x]+1)([x]-4)=0$ $\quad\therefore [x]=-1$ 또는 $[x]=4$

(i) $[x]=-1$일 때, $-1\le x<0$
(ii) $[x]=4$일 때, $4\le x<5$
(i), (ii)에 의하여 ㉡의 해는 $-1\le x<0$, $4\le x<5$이므로 가장 작은 x의 값은 -1이다.

18 답 ②

$3k+\sqrt{2}k=7$에서 $(3+\sqrt{2})k=7$

$$\therefore k=\frac{7}{3+\sqrt{2}}=\frac{7(3-\sqrt{2})}{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})}$$
$$=\frac{7(3-\sqrt{2})}{7}=3-\sqrt{2}$$

이때 $1<\sqrt{2}<2$에서 $-2<-\sqrt{2}<-1$이므로
$1<3-\sqrt{2}<2$
따라서 $3-\sqrt{2}$의 정수 부분은 $a=1$, 소수 부분은
$b=(3-\sqrt{2})-1=2-\sqrt{2}$
$x^2+(2a+b+\sqrt{2})x-(2+\sqrt{2})b=3$에서
$x^2+(2+2-\sqrt{2}+\sqrt{2})x-(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})=3$,
$x^2+4x-2=3$
$x^2+4x-5=0$, $(x+5)(x-1)=0$
$\therefore x=-5$ 또는 $x=1$

19 답 ④

해결 key Point!

주어진 식을 a에 대하여 정리해야 한다.

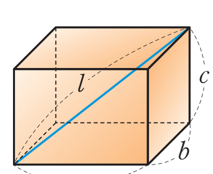
$(a+1)x^2-4x+4-4a=0$을 a에 대하여 정리하면
$(x^2-4)a+x^2-4x+4=0$
$(x+2)(x-2)a+(x-2)^2=0$
$(x-2)\{(x+2)a+(x-2)\}=0$ $\cdots\cdots$ ㉠
이때 $x=-2$이면 ㉠에서 $-4\times(0\times a-4)=16\ne0$이므로 a가 어떤 실수의 값을 갖더라도 성립하지 않는다.
따라서 a가 어떤 실수의 값을 갖더라도 근이 될 수 없는 x의 값은 -2이다.

20 답 $4\sqrt{3}$

해결 key Point!

가로, 세로의 길이와 높이가 각각 a, b, c인 직육면체에서 모서리의 길이의 합은 $4(a+b+c)$, 겉넓이는 $2(ab+bc+ca)$임을 이용해야 한다.

1단계 a, b, c를 이용하여 직육면체의 모서리의 길이의 합, 겉넓이, 대각선의 길이 나타내기



오른쪽 그림과 같이 가로, 세로의 길이와 높이가 각각 a, b, c인 직육면체에서 모서리의 길이의 합 m은
$m=4(a+b+c)$,
겉넓이 S는 $S=2(ab+bc+ca)$
또, 가로, 세로의 길이가 각각 a, b인 직사각형의 대각선 길이는 피타고라스 정리에 의하여 $\sqrt{a^2+b^2}$이고, 직육면체의 높이가 c이므로 대각선의 길이 l은 피타고라스 정리에 의하여
$l=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

2단계 a, b, c를 이용하여 이차방정식의 계수 나타내기

$m=4(a+b+c)$, $S=2(ab+bc+ca)$를
$3x^2-\frac{m}{2}x+\frac{S}{2}=0$에 대입하면
$$3x^2-\frac{4(a+b+c)}{2}x+\frac{2(ab+bc+ca)}{2}=0$$
$\therefore 3x^2-2(a+b+c)x+(ab+bc+ca)=0$

3단계 이차방정식이 중근을 갖기 위한 조건을 a, b, c를 이용하여 나타내기

이 이차방정식이 중근을 가지므로
$2^2(a+b+c)^2-4\times3(ab+bc+ca)=0$,
$(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)=0$
$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca-3ab-3bc-3ca=0$
$\therefore a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

4단계 $\frac{m}{l}$의 값 구하기

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$
$$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$$
$$=\frac{1}{2}(a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2)$$
$$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$$
즉, $a-b=0$ 또는 $b-c=0$ 또는 $c-a=0$이므로 $a=b=c$
따라서 $m=4(a+a+a)=12a$, $l=\sqrt{a^2+a^2+a^2}=\sqrt{3}a$이므로
$$\frac{m}{l}=\frac{12a}{\sqrt{3}a}=4\sqrt{3}$$

단계	채점 기준	비율
❶	a, b, c를 이용하여 직육면체의 모서리의 길이의 합, 겉넓이, 대각선의 길이를 나타냈다.	20 %
❷	a, b, c를 이용하여 이차방정식의 계수를 나타냈다.	20 %
❸	이차방정식이 중근을 갖기 위한 조건을 a, b, c를 이용하여 나타냈다.	30 %
❹	$\frac{m}{l}$의 값을 구했다.	30 %

21 답 -1

해결 key Point!

미지수가 있는 두 이차방정식도 인수분해가 됨을 이용해야 한다.

$x^2+ax+a=x+2$에서
$x^2+(a-1)x+a-2=0$, $(x+1)(x+a-2)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=2-a$

$x^2+ax-4a=4x$에서

$x^2+(a-4)x-4a=0$, $(x-4)(x+a)=0$

$\therefore$ $x=4$ 또는 $x=-a$

두 이차방정식이 공통인 근을 가지므로 $-a=-1$ 또는

$2-a=4$ 또는 $2-a=-a$이다.

(i) $-a=-1$일 때, $a=1$

(ii) $2-a=4$일 때, $a=-2$

(iii) $2-a=-a$일 때, $2=0$이므로 만족시키는 a의 값은 없다.

(i)~(iii)에 의하여 조건을 만족시키는 모든 상수 a의 값의 합은

$1+(-2)=-1$

22 답 $x=1$

해결 key Point!

두 이차방정식의 공통인 근을 $x=\alpha$로 놓고 연립하여 풀어야 한다.

공통인 근을 $x=\alpha$라고 하면

$\alpha^2+a^2\alpha+b^2-2a=0$ ...... ㉠

$\alpha^2-2a\alpha+a^2+b^2=0$ ...... ㉡

㉠$-$㉡을 하면

$a^2\alpha+2a\alpha-2a-a^2=0$, $(a^2+2a)\alpha-(a^2+2a)=0$

$(a^2+2a)(\alpha-1)=0$ $\therefore$ $a^2+2a=0$ 또는 $\alpha=1$

이때 $a^2+2a=0$이면 $a^2=-2a$이므로 ㉠, ㉡이 서로 같다.

즉, 두 개의 공통인 근을 가지므로 모순이다.

$\therefore$ $\alpha=1$

따라서 구하는 공통인 근은 $x=1$이다.

23 답 4

해결 key Point!

주어진 방정식을 인수분해 하여 각각의 근을 구하고 조건에 맞는 공통인 근을 찾아야 한다.

$x^2-(1+p)x+p=0$에서

$(x-1)(x-p)=0$

$\therefore$ $x=1$ 또는 $x=p$ ...... ㉠

$x^2-(q-1)x-q=0$에서

$(x+1)(x-q)=0$

$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=q$ ...... ㉡

$x^2-2(p+2q)x+8pq=0$에서

$(x-2p)(x-4q)=0$

$\therefore$ $x=2p$ 또는 $x=4q$ ...... ㉢

세 이차방정식의 공통인 근이 음수이므로 ㉠에서 공통인 근은

$x=p$

또, $p<0$이므로 ㉢과 ㉠에서 $p\neq 2p$

즉, ㉢에서 공통인 근은 $x=4q$

마찬가지로 $4q<0$이므로 ㉡과 ㉢에서 $q\neq 4q$

따라서 ㉡에서 공통인 근은 $x=-1$이므로

$p=4q=-1$ $\therefore$ $p=-1$, $q=-\frac{1}{4}$

$\therefore$ $\frac{p}{q}=p\times\frac{1}{q}=-1\times(-4)=4$

24 답 ②

해결 key Point!

$2x^2+4mx-m^2=n^2+3n$을

(n에 대한 완전제곱식)$=$(x가 존재하지 않는 식)의 꼴로 변형해야 한다.

$2x^2+4mx-m^2=n^2+3n$에서

$2(x^2+2mx+m^2)-3m^2=n^2+3n$

$2(x+m)^2=3m^2+n^2+3n$

$\therefore$ $(x+m)^2=\frac{1}{2}(3m^2+n^2+3n)$

위의 식이 $(x-2n)^2=n+7$과 같으므로

$m=-2n$ ...... ㉠

$\frac{1}{2}(3m^2+n^2+3n)=n+7$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\frac{1}{2}(12n^2+n^2+3n)=n+7$, $13n^2+3n=2n+14$

$13n^2+n-14=0$, $(13n+14)(n-1)=0$

$\therefore$ $n=-\frac{14}{13}$ 또는 $n=1$

이때 n은 정수가 아닌 유리수이므로 $n=-\frac{14}{13}$

$\therefore$ $m=-2\times\left(-\frac{14}{13}\right)=\frac{28}{13}$

$\therefore$ $m-n=\frac{28}{13}-\left(-\frac{14}{13}\right)=\frac{42}{13}$

따라서 $p=13$, $q=42$이므로

$p+q=13+42=55$

25 답 ①

해결 key Point!

주어진 이차방정식을 완전제곱식의 꼴로 변형해 본다.

$x^2-18x+81-3n=0$에서

$x^2-18x+81=3n$, $(x-9)^2=3n$

$x-9=\pm\sqrt{3n}$ $\therefore$ $x=9\pm\sqrt{3n}$

이때 $x=9\pm\sqrt{3n}$이 자연수가 되려면 $9-\sqrt{3n}$이 자연수이어야 하므로

$9-\sqrt{3n}>0$ $\therefore$ $\sqrt{3n}<9$

양변을 제곱하면

$3n<81$

$\therefore$ $n<27$ ...... ㉠

또, $9-\sqrt{3n}$이 자연수이려면 $\sqrt{3n}$도 자연수이어야 하므로 n은 $3\times$(자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.
따라서 ㉠을 만족시키는 n의 값은 $3\times1^2=3$, $3\times2^2=12$이므로 주어진 이차방정식의 해가 모두 자연수가 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합은
$3+12=15$

꿀 한줄평
주어진 이차방정식의 해가 $x=p\pm\sqrt{q}$일 때, 해가 자연수이면 q가 제곱수이어야 하고 $p>q^2$이어야 한다.

26 답 ①

해결 key Point!
$\sqrt{x^2}=|x|$임을 생각해야 한다.

$\sqrt{x^2}=|x|$이므로 $x^2+\sqrt{x^2}=|x-1|+3$에서
$x^2+|x|=|x-1|+3$
(i) $x<0$일 때
$x^2-x=-(x-1)+3$이므로
$x^2-x=-x+1+3$, $x^2=4$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$
이때 $x<0$이므로 $x=-2$
(ii) $0\le x<1$일 때
$x^2+x=-(x-1)+3$이므로
$x^2+x=-x+1+3$, $x^2+2x-4=0$
$\therefore x=-1\pm\sqrt{5}$
이때 $0\le x<1$이므로 만족시키는 해는 없다.
(iii) $x\ge1$일 때
$x^2+x=x-1+3$이므로
$x^2=2 \quad \therefore x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}$
이때 $x\ge1$이므로 $x=\sqrt{2}$
(i)~(iii)에 의하여 주어진 이차방정식의 해는 $x=-2$ 또는 $x=\sqrt{2}$이므로
$\alpha+\beta=\sqrt{2}-2$

$$\therefore \frac{1}{\alpha+\beta}=\frac{1}{\sqrt{2}-2}=\frac{\sqrt{2}+2}{(\sqrt{2}-2)(\sqrt{2}+2)}=\frac{\sqrt{2}+2}{-2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-1$$

27 답 ③

해결 key Point!
세 정수 a, b, c에 대하여 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$가 유리수가 되려면 b^2-4ac의 값이 0 또는 (정수)^{2}의 꼴이어야 함을 이용해야 한다.

$3x^2-x+a-4=0$에서 $x=\frac{1\pm\sqrt{49-12a}}{6}$
이때 두 근이 유리수가 되려면 $49-12a$의 값이 0 또는 (정수)^{2}의 꼴이어야 하므로
$49-12a=0, 1, 4, 9, 16, 25, 36$
$12a=49, 48, 45, 40, 33, 24, 13$
$\therefore a=\frac{49}{12}, 4, \frac{15}{4}, \frac{10}{3}, \frac{11}{4}, 2, \frac{13}{12}$
이때 a는 자연수이므로 $a=2, 4$
따라서 모든 자연수 a의 값의 합은
$2+4=6$

28 답 -1

해결 key Point!
주어진 이차식이 두 일차식의 곱으로 인수분해 되려면 이차방정식 $2x^2+xy-y^2-x+2y+k=0$의 근호 안의 식이 완전제곱식이 되어야 함을 이용해야 한다.

주어진 식을 x에 대하여 정리하면
$2x^2+(y-1)x-y^2+2y+k=0 \quad \cdots\cdots$ ㉠
근의 공식에 의하여

$$x=\frac{-(y-1)\pm\sqrt{(y-1)^2-4\times2\times(-y^2+2y+k)}}{4}$$
$$=\frac{-y+1\pm\sqrt{9y^2-18y-8k+1}}{4} \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠이 x, y에 대한 일차식으로 인수분해 되므로 ㉠의 근이 y에 대한 일차식이 되어야 한다.
즉, ㉡에서 x의 값은 근호 안의 이차식이 완전제곱식이 되어야 y에 대한 일차식이 되므로 y에 대한 이차방정식 $9y^2-18y-8k+1=0$이 중근을 가져야 한다.
$9y^2-18y-8k+1=0$에서 $y^2-2y+\frac{-8k+1}{9}=0$
이 방정식이 중근을 가져야 하므로
$\frac{-8k+1}{9}=\left(\frac{-2}{2}\right)^2$, $-8k+1=9$
$-8k=8 \quad \therefore k=-1$

29 답 $\frac{7}{9}$

1단계 a의 값 구하기
$1.\dot{6}=\frac{16-1}{9}=\frac{5}{3}$이므로 $x^2-1.\dot{6}x+a=0$에서
$x^2-\frac{5}{3}x+a=0 \quad \cdots\cdots$ ㉠
$x=1.\dot{3}=\frac{13-1}{9}=\frac{4}{3}$를 ㉠에 대입하면
$\left(\frac{4}{3}\right)^2-\frac{5}{3}\times\frac{4}{3}+a=0$, $\frac{16}{9}-\frac{20}{9}+a=0$
$\therefore a=\frac{4}{9}$

2단계 b의 값 구하기

즉, 주어진 이차방정식은 $x^2-\frac{5}{3}x+\frac{4}{9}=0$이므로 양변에 9를 곱하면

$9x^2-15x+4=0$, $(3x-1)(3x-4)=0$

$\therefore x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=\frac{4}{3}$

$\therefore b=\frac{1}{3}$

3단계 $a+b$의 값 구하기

$\therefore a+b=\frac{4}{9}+\frac{1}{3}=\frac{7}{9}$

단계	채점 기준	비율
❶	a의 값을 구했다.	40 %
❷	b의 값을 구했다.	40 %
❸	$a+b$의 값을 구했다.	20 %

30 답 ⑤

해결 key Point!

공통 부분이 생기도록 식을 변형해야 한다.

$$x^4-10x^3+25x^2=x^2(x^2-10x+25)$$
$$=x^2(x-5)^2=(x^2-5x)^2$$

이므로 $x^4-10x^3+25x^2-6x(x-5)=0$에서

$(x^2-5x)^2-6(x^2-5x)=0$

이때 $x^2-5x=A$라고 하면

$A^2-6A=0$, $A(A-6)=0$

$\therefore A=0$ 또는 $A=6$

(i) $A=0$일 때

$x^2-5x=0$이므로

$x(x-5)=0$ $\quad\therefore x=0$ 또는 $x=5$

(ii) $A=6$일 때

$x^2-5x=6$, 즉 $x^2-5x-6=0$이므로

$(x+1)(x-6)=0$ $\quad\therefore x=-1$ 또는 $x=6$

(i), (ii)에 의하여 모든 해의 합은

$-1+0+5+6=10$

31 답 ⑤

해결 key Point!

( )( )( )( )$+k$의 꼴은 공통 부분이 생기도록 2개씩 묶어 전개해야 한다.

$f(n)=181^2$에서

$n(n+1)(n+2)(n+3)+1=181^2$

$$n(n+1)(n+2)(n+3)=181^2-1$$
$$=(181-1)(181+1)$$
$$=180\times182$$

$n(n+1)(n+2)(n+3)=(n^2+3n)(n^2+3n+2)$이므로

$(n^2+3n)(n^2+3n+2)=180\times182$

이때 $n^2+3n=A$라고 하면

$A(A+2)=180\times182$ $\quad\therefore A=180$

즉, $n^2+3n=180$이므로

$n^2+3n-180=0$, $(n+15)(n-12)=0$

$\therefore n=-15$ 또는 $n=12$

이때 n은 자연수이므로 $n=12$

32 답 11

해결 key Point!

$<x>-1=X$라 하고 주어진 등식을 인수분해 한다.

$(<x>-1)^2+2(<x>-1)-8=0$에서 $<x>-1=X$라고 하면

$X^2+2X-8=0$, $(X+4)(X-2)=0$

$\therefore X=-4$ 또는 $X=2$

(i) $X=-4$일 때

$<x>-1=-4$이므로 $<x>=-3$

이때 x 이하의 소수의 개수는 자연수이므로 자연수 x의 값은 없다.

(ii) $X=2$일 때

$<x>-1=2$이므로 $<x>=3$

이때 x 이하의 소수의 개수가 3이므로 자연수 x의 값은 5 또는 6이다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 x의 값의 합은

$5+6=11$

다른 풀이

$(<x>-1)^2+2(<x>-1)-8=0$에서

$<x>^2-2<x>+1+2<x>-2-8=0$

$<x>^2-9=0$, $<x>^2=9$

$\therefore <x>=-3$ 또는 $<x>=3$

(i) $<x>=-3$일 때

x 이하의 소수의 개수는 자연수이므로 자연수 x의 값은 없다.

(ii) $<x>=3$일 때

x 이하의 소수의 개수가 3이므로 자연수 x의 값은 5 또는 6이다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 x의 값의 합은

$5+6=11$

꿀 한줄평

5 이하의 소수는 2, 3, 5이고 6 이하의 소수도 2, 3, 5이므로

$<5>=<6>=3$

또, 7 이하의 소수는 2, 3, 5, 7이므로 $<7>=4$

즉, $x\geq7$인 x에 대하여 $<x>\geq4$이다.

33 답 ④

해결 key Point!

$x^2-6xy+9y^2=(x-3y)^2$을 한 문자로 놓고 식을 변형해야 한다.

$x^2-6xy+9y^2+2x-6y-8=0$에서

$x^2-6xy+9y^2+2(x-3y)-8=0$

$(x-3y)^2+2(x-3y)-8=0$

이때 $x-3y=A$라고 하면

$A^2+2A-8=0$, $(A+4)(A-2)=0$

$A=-4$ 또는 $A=2$ $\quad\therefore x-3y=-4$ 또는 $x-3y=2$

또, $x-3y=(a+6\sqrt{3})-3(1+2\sqrt{3})=a-3$이므로

$a-3=-4$ 또는 $a-3=2$ $\quad\therefore a=-1$ 또는 $a=5$

따라서 모든 a의 값의 합은

$-1+5=4$

34 답 2

해결 key Point!

주어진 조건의 식을 인수분해 하여 두 양수 a, b 사이의 관계식을 구해야 한다.

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}$이므로 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=4$에서

$\frac{a+b}{ab}=4$, $a+b=4ab$

$\therefore (a+b)^2=16(ab)^2$

또, $(a-b)^2=16(ab)^3$이고 $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$이므로

$16(ab)^2=16(ab)^3+4ab$

이때 $ab=A$ $(A>0)$라고 하면

$16A^2=16A^3+4A$

양변을 $4A$로 나누면

$4A=4A^2+1$, $4A^2-4A+1=0$

$(2A-1)^2=0$ $\quad\therefore A=\frac{1}{2}$

따라서 $ab=\frac{1}{2}$이므로

$a+b=4ab=4\times\frac{1}{2}=2$

35 답 ⑤

해결 key Point!

주어진 두 이차방정식을 같은 변끼리 더하여 새로운 이차방정식을 만들어야 한다.

주어진 두 이차방정식의 각 변을 각각 더하면

$x^2+y^2+2xy+2x+2y=99$

$\therefore (x+y)^2+2(x+y)-99=0$

이때 $x+y=A$라고 하면

$A^2+2A-99=0$, $(A+11)(A-9)=0$

$\therefore A=-11$ 또는 $A=9$

$\therefore x+y=-11$ 또는 $x+y=9$

그런데 $x+y>0$이므로 $x+y=9$

36 답 4

$x^2+y^2-x-y+2xy-6=0$에서

$(x+y)^2-(x+y)-6=0$

이때 $x+y=A$라고 하면

$A^2-A-6=0$, $(A+2)(A-3)=0$

$\therefore A=-2$ 또는 $A=3$

(i) $A=-2$일 때

$x+y=-2$이므로

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(-2)^2-2\times\frac{5}{2}=-1$

이를 만족시키는 실수 x, y는 존재하지 않는다.

(ii) $A=3$일 때

$x+y=3$이므로

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=3^2-2\times\frac{5}{2}=4$

(i), (ii)에 의하여 $x^2+y^2=4$

02 이차방정식의 활용

Lv. 1 개념을 적용하는 핵심 문제

77쪽~78쪽

01 ③	02 ⑤	03 ④	04 ④
05 $2x^2+8x-10=0$	06 ②	07 ②	08 ④
09 ⑤	10 ⑤	11 ③	12 2초 후

01 답 ③

$x^2-3x+5=0$에서

$(-3)^2-4\times1\times5=-11<0$

이므로 이차방정식 $x^2-3x+5=0$은 근이 없다.

$\therefore a=0$

$3x^2+7x-2=0$에서

$7^2-4\times3\times(-2)=73>0$

이므로 이차방정식 $3x^2+7x-2=0$은 서로 다른 두 근을 가진다.

$\therefore b=2$

$\therefore a+b=0+2=2$

02 답 ⑤

이차방정식 $2x^2-6x+\frac{k+3}{4}=0$이 서로 다른 두 근을 가지려면

$(-6)^2-4\times2\times\frac{k+3}{4}>0$

$36-2k-6>0$, $-2k>-30$

$\therefore k<15$

03 답 ④

이차방정식 $x^2+2x+4-k=0$은 서로 다른 두 근을 가지므로

$2^2-4\times1\times(4-k)>0$

$4-16+4k>0$, $4k>12$

$\therefore k>3$ …… ㉠

이차방정식 $6x^2-(k+2)x+\frac{3}{8}k=0$은 중근을 가지므로

$\{-(k+2)\}^2-4\times6\times\frac{3}{8}k=0$

$k^2+4k+4-9k=0$, $k^2-5k+4=0$

$(k-1)(k-4)=0$

$\therefore k=1$ 또는 $k=4$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $k=4$

04 답 ④

중근이 $-\frac{3}{2}$이고 x^2의 계수가 4인 이차방정식은

$4\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=0$, $4\left(x^2+3x+\frac{9}{4}\right)=0$

$\therefore 4x^2+12x+9=0$

이때 $-2a=12$, $3b=9$이므로 $a=-6$, $b=3$

$\therefore b-a=3-(-6)=9$

05 답 $2x^2+8x-10=0$

1단계 α, β의 값 구하기

$x^2+5x+6=0$에서

$(x+3)(x+2)=0$ $\therefore x=-3$ 또는 $x=-2$

이때 $\alpha>\beta$이므로 $\alpha=-2$, $\beta=-3$

2단계 $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$의 값 구하기

$\therefore \alpha+\beta=-2-3=-5$,

$\alpha-\beta=-2-(-3)=1$

3단계 $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 2인 이차방정식 구하기

따라서 두 근이 -5, 1이고 x^2의 계수가 2인 이차방정식은

$2(x+5)(x-1)=0$, $2(x^2+4x-5)=0$

$\therefore 2x^2+8x-10=0$

단계	채점 기준	비율
❶	α, β의 값을 구했다.	30 %
❷	$\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$의 값을 구했다.	30 %
❸	$\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 2인 이차방정식을 구했다.	40 %

06 답 ②

$\frac{1}{\sqrt{5}-2}=\frac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}=2+\sqrt{5}$

즉, 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $2+\sqrt{5}$이므로 다른 한 근은 $2-\sqrt{5}$이다.

이때 두 근이 $2-\sqrt{5}$, $2+\sqrt{5}$이고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$\{x-(2-\sqrt{5})\}\{x-(2+\sqrt{5})\}=0$

$x^2-\{(2-\sqrt{5})+(2+\sqrt{5})\}x+(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})=0$

$\therefore x^2-4x-1=0$

따라서 $a=-4$, $b=-1$이므로

$a^2+b^2=(-4)^2+(-1)^2=17$

참고 먼저 주어진 근을 유리화한다.

07 답 ②

두 근이 -3, 5이고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$(x+3)(x-5)=0$

$\therefore x^2-2x-15=0$

이때 도윤이는 b를 바르게 보았으므로 $b=-15$

두 근이 -8, -6이고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$(x+8)(x+6)=0$

$\therefore x^2+14x+48=0$

이때 승아는 a를 바르게 보았으므로 $a=14$

따라서 처음 이차방정식은 $x^2+14x-15=0$이므로

$(x+15)(x-1)=0$

$\therefore x=-15$ 또는 $x=1$

08 답 ④

연속하는 세 홀수를 각각 $x-2$, x, $x+2$라고 하면

$(x-2)^2+x^2+(x+2)^2=155$에서

$3x^2+8=155$, $3x^2=147$

$x^2=49$ $\therefore x=-7$ 또는 $x=7$

이때 $x+2>0$, 즉 $x>-2$이므로 $x=7$

따라서 연속하는 세 홀수는 5, 7, 9이므로 삼각형의 둘레의 길이는

$5+7+9=21$

Level UP

연속하는 세 수에 대한 문제는 다음과 같이 미지수를 정하고 이차방정식을 세운다.
① 연속하는 세 정수 ⇨ $x-1$, x, $x+1$
② 연속하는 세 짝수 (또는 세 홀수) ⇨ $x-2$, x, $x+2$

09 답 ⑤

$\frac{n(n-1)}{2}=78$에서
$n^2-n-156=0$, $(n+12)(n-13)=0$
$\therefore n=-12$ 또는 $n=13$
이때 $n>0$이므로 $n=13$
따라서 이 대회에 참가한 축구팀은 13팀이다.

10 답 ⑤

공이 지면에 떨어지는 것은 공의 높이가 0 m일 때이므로
$80+32t-4t^2=0$, $t^2-8t-20=0$
$(t+2)(t-10)=0$ $\quad\therefore t=-2$ 또는 $t=10$
이때 $t>0$이므로 $t=10$
따라서 공이 지면에 떨어지는 것은 공을 위로 던진 지 10초 후이다.

11 답 ③

전체 학생 수를 x라고 하면 한 학생이 받은 쿠키의 개수는 $(x+3)$이므로
$x(x+3)=270$, $x^2+3x-270=0$
$(x+18)(x-15)=0$ $\quad\therefore x=-18$ 또는 $x=15$
이때 $x>0$이므로 $x=15$
따라서 학생은 모두 15명이다.
참고 (학생 수)×(한 학생이 받은 쿠키의 개수)
=(전체 쿠키의 개수)
임을 이용하여 이차방정식을 세운다.

12 답 2초 후

1단계 출발한 지 x초 후에 △PBQ의 넓이가 12 cm^{2}가 된다고 놓고 x에 대한 이차방정식 세우기
출발한 지 x초 후에 $\overline{PB}=8-x$(cm), $\overline{BQ}=2x$(cm)이므로
△PBQ의 넓이가 12 cm^{2}가 된다고 하면
$\frac{1}{2}\times 2x\times(8-x)=12$ $\quad\therefore x^2-8x+12=0$
2단계 이차방정식 풀기
$(x-2)(x-6)=0$ $\quad\therefore x=2$ 또는 $x=6$
3단계 △PBQ의 넓이가 12 cm^{2}가 되는 것은 출발한 지 몇 초 후인지 구하기
이때 $8-x\le 0$에서 $x\ge 8$, $2x\le 10$에서 $x\le 5$
즉, $0\le x\le 5$이므로 $x=2$
따라서 △PBQ의 넓이가 12 cm^{2}가 되는 것은 출발한 지 2초 후이다.

단계	채점 기준	비율
❶	출발한 지 x초 후에 △PBQ의 넓이가 12 cm^{2}가 된다고 놓고 x에 대한 이차방정식을 세웠다.	40 %
❷	이차방정식을 풀었다.	40 %
❸	△PBQ의 넓이가 12 cm^{2}가 되는 것은 출발한 지 몇 초 후인지 구했다.	20 %

Lv. 2 사고를 확장하는 실전 문제

79쪽～85쪽

01 ④	**02** ③	**03** ②	**04** ①	**05** 16
06 $\frac{1}{2}bc$	**07** 2	**08** ②	**09** ①	
10 $2x^2+21x+49=0$		**11** ④	**12** ①	**13** -14
14 ④	**15** ②	**16** 432	**17** ③	**18** ④
19 ③	**20** 300	**21** ④	**22** 26그루	
23 $(5+\sqrt{37})$시간		**24** 90분	**25** 316	**26** 5
27 $\frac{320}{3}$ m	**28** ②	**29** ②	**30** ①	**31** -720
32 ④	**33** 24 cm	**34** $(6-2\sqrt{5})$ cm		**35** ④
36 $100\sqrt{2}$ m		**37** ①	**38** ②	
39 $4\sqrt{2}$초 후, 10초 후		**40** ③		

01 답 ④

이차방정식 $2x^2+4x+k=0$이 서로 다른 두 근을 가져야 하므로
$4^2-4\times 2\times k>0$, $16-8k>0$
$8k<16$ $\quad\therefore k<2$
즉, 가장 큰 정수 k의 값은 1이다.
따라서 $x=1$이 $(m+1)x^2-(m^2-6)x+13=0$의 근이므로
$m+1-m^2+6+13=0$, $m^2-m-20=0$
$(m+4)(m-5)=0$ $\quad\therefore m=-4$ 또는 $m=5$
이때 $m>0$이므로 $m=5$

02 답 ③

이차방정식 $x^2+(4k+1)x+4k^2-1=0$은 근을 갖지 않으므로
$(4k+1)^2-4\times 1\times(4k^2-1)<0$
$16k^2+8k+1-16k^2+4<0$
$8k+5<0$
$\therefore k<-\frac{5}{8}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

또, 이차방정식 $x^2-(k-3)x+9=0$이 중근을 가지므로

$\{-(k-3)\}^2-4\times1\times9=0$

$k^2-6k+9-36=0$

$k^2-6k-27=0$

$(k+3)(k-9)=0$

$\therefore\ k=-3$ 또는 $k=9$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $k=-3$

03 답 ②

해결 key Point!

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 두 근을 가지려면 $b^2-4ac>0$이어야 한다.

이차방정식 $x^2-3x+[a]=0$이 서로 다른 두 근을 가지려면

$(-3)^2-4[a]>0$, $9-4[a]>0$

$-4[a]>-9$ $\quad\therefore\ [a]<\frac{9}{4}$

이때 $[a]$는 정수이므로 가장 큰 $[a]$의 값은 2이다.

따라서 $x=2$가 $x^2-kx+10=0$의 근이므로

$2^2-k\times2+10=0$, $4-2k+10=0$

$-2k=-14$ $\quad\therefore\ k=7$

04 답 ①

$x^2-2(a-b)x+2a^2+2b^2-4ab-2a+2b+1=0$에서

$x^2-2(a-b)x+2(a-b)^2-2(a-b)+1=0$

위의 방정식이 해를 가지려면

$\{-2(a-b)\}^2-4\times1\times\{2(a-b)^2-2(a-b)+1\}\ge0$

이때 $a-b=A$라고 하면

$(-2A)^2-4(2A^2-2A+1)\ge0$, $-4A^2+8A-4\ge0$

$A^2-2A+1\le0$, $(A-1)^2\le0$

$\therefore\ A=1$

$\therefore\ a-b=1$

05 답 16

해결 key Point!

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근이 존재하지 않으려면 $b^2-4ac<0$이어야 한다.

1단계 이차방정식의 근이 존재하지 않을 조건 구하기

이차방정식 $x^2+(a+b)x+ab+1=0$의 근이 존재하지 않으므로

$(a+b)^2-4\times1\times(ab+1)<0$

$a^2+2ab+b^2-4ab-4<0$

$a^2-2ab+b^2<4$

$\therefore\ (a-b)^2<4$ $\cdots\cdots$ ㉠

2단계 $(a-b)^2<4$를 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b) 구하기

a, b의 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6 중 하나이므로 ㉠을 만족시키는 $a-b$의 값은

$a-b=-1$ 또는 $a-b=0$ 또는 $a-b=1$

(i) $a-b=-1$일 때

조건을 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$, $(4, 5)$, $(5, 6)$

의 5개이다.

(ii) $a-b=0$일 때

조건을 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 4)$, $(5, 5)$, $(6, 6)$

의 6개이다.

(iii) $a-b=1$일 때

조건을 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(2, 1)$, $(3, 2)$, $(4, 3)$, $(5, 4)$, $(6, 5)$

의 5개이다.

3단계 조건을 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수 구하기

(i)~(iii)에 의하여 주어진 이차방정식의 근이 존재하지 않도록 하는 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는

$5+6+5=16$

단계	채점 기준	비율
❶	이차방정식의 근이 존재하지 않을 조건을 구했다.	40 %
❷	$(a-b)^2<4$를 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)를 구했다.	40 %
❸	조건을 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수를 구했다.	20 %

06 답 $\frac{1}{2}bc$

$a(1+x^2)+2bx+c(1-x^2)=0$에서

$a+ax^2+2bx+c-cx^2=0$

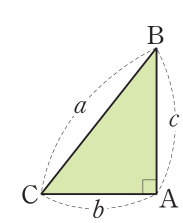
$(a-c)x^2+2bx+a+c=0$

이 이차방정식이 중근을 가지므로

$(2b)^2-4(a-c)(a+c)=0$, $4b^2-4(a^2-c^2)=0$

$b^2-a^2+c^2=0$ $\quad\therefore\ a^2=b^2+c^2$

따라서 이 삼각형은 오른쪽 그림과 같이 $\angle A=90^\circ$인 직각삼각형이므로 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}bc$이다.



07 답 2

해결 key Point!

이차방정식 $cx^2-bx+a=0$에서 $(-b)^2-4ac$의 부호를 확인해야 한다.

$c=-\dfrac{a+b}{7}$에서 $-7c=a+b$

$\therefore -b=a+7c$

이차방정식 $cx^2-bx+a=0$에서

$$\begin{aligned}(-b)^2-4ac&=(a+7c)^2-4ac\\&=a^2+14ac+49c^2-4ac\\&=a^2+10ac+49c^2\\&=(a+5c)^2+24c^2\end{aligned}$$

이때 $c>0$이므로 $(a+5c)^2+24c^2>0$

즉, $(-b)^2-4ac>0$이므로 이차방정식 $cx^2-bx+a=0$의 서로 다른 근의 개수는 2이다.

꿀 한줄평

식의 값을 구하지 못하고 부호만 확인하면 될 때, 그 식을 완전제곱식의 합의 꼴로 변형하면 항상 0 이상임을 알 수 있다. 이때 어느 한 제곱의 식이 0보다 크다면 그 식의 값은 항상 양수이다.

08 답 ②

해결 key Point!

이차방정식의 근의 공식을 이용하여 구한 두 근이 -2와 2 사이에 있도록 하는 조건을 생각해야 한다.

$2x^2-4x-a=0$에서 $x=\dfrac{2\pm\sqrt{4+2a}}{2}$

이때 이차방정식이 근을 가지므로 $2a+4\geq 0$이어야 한다.

즉, $2a\geq -4$이므로 $a\geq -2$ $\cdots\cdots$ ㉠

또, $\dfrac{2-\sqrt{2a+4}}{2}>-2$, $\dfrac{2+\sqrt{2a+4}}{2}<2$이므로

$2-\sqrt{2a+4}>-4$, $2+\sqrt{2a+4}<4$

$\sqrt{2a+4}<6$, $\sqrt{2a+4}<2$

$2a+4<36$, $2a+4<4$

$2a<32$, $2a<0$

즉, $a<16$, $a<0$이므로

$a<0$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $-2\leq a<0$

따라서 조건을 만족시키는 정수 a의 값은 -2, -1이므로 그 합은

$-2+(-1)=-3$

09 답 ①

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 중근 $x=3$을 가지므로

$a(x-3)^2=0$

즉, $a(x-3)^2=ax^2-6ax+9a$이므로

$ax^2+bx+c=ax^2-6ax+9a$

$\therefore b=-6a,\ c=9a$ $\cdots\cdots$ ㉠

$b(2x+1)^2+c(2x+1)+6a=0$에서 $2x+1=A$라고 하면

$bA^2+cA+6a=0$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$-6aA^2+9aA+6a=0$

$-3a(2A^2-3A-2)=0$

$-3a(2A+1)(A-2)=0$

$\therefore A=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $A=2$

즉, $2x+1=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $2x+1=2$이므로

$2x=-\dfrac{3}{2}$ 또는 $2x=1$

$\therefore x=-\dfrac{3}{4}$ 또는 $x=\dfrac{1}{2}$

따라서 모든 해의 합은

$-\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{4}$

10 답 $2x^2+21x+49=0$

일차함수 $y=ax+b$의 그래프에서

$a=(\text{기울기})=-\dfrac{7}{2}$, $b=(y\text{절편})=-7$

따라서 $-\dfrac{7}{2}$, -7을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 2인 이차방정식은

$2\left(x+\dfrac{7}{2}\right)(x+7)=0$, $2\left(x^2+\dfrac{21}{2}x+\dfrac{49}{2}\right)=0$

$\therefore 2x^2+21x+49=0$

11 답 ④

이차항의 계수가 1인 이차식 $P(x)$의 두 근을 α, β라고 하면

$P(x)=(x-\alpha)(x-\beta)=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

또, $P(x)=0$의 두 근의 합이 4, 곱이 3이므로

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=3$

$\therefore P(x)=x^2-4x+3=0$

따라서 $P(x)=15$에서

$x^2-4x+3=15$, $x^2-4x-12=0$

$(x+2)(x-6)=0$ $\quad\therefore x=-2$ 또는 $x=6$

12 답 ①

$(x+p)(x+q)-2=0$에서 $x^2+(p+q)x+pq-2=0$

이 이차방정식의 두 근이 α, β이므로

$(x-\alpha)(x-\beta)=0$, $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

$\therefore \alpha+\beta=-(p+q)$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\alpha\beta=pq-2$ $\cdots\cdots$ ㉡

$(x-\alpha)(x-\beta)+2=0$에서

$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta+2=0$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉡을 ㉢에 대입하면

$x^2-\{-(p+q)\}x+pq-2+2=0$,

$x^2+(p+q)x+pq=0$

$(x+p)(x+q)=0$ $\quad\therefore x=-p$ 또는 $x=-q$

따라서 이차방정식 $(x-\alpha)(x-\beta)+2=0$의 두 근은 $-p$, $-q$이므로 두 근의 합은 $-p-q$이다.

Level UP

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 α, β일 때,
$a(x-\alpha)(x-\beta)=0$이므로 $a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}=0$
$\therefore \alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

13 답 -14

해결 key Point!

두 근의 차가 1이므로 두 근을 α, $\alpha-1$로 놓고 식을 변형해야 한다.

1단계 두 근의 차가 1인 이차방정식 세우기

이차방정식 $x^2-(k+3)x+30=0$의 한 근을 α라고 하면 나머지 한 근은 $\alpha-1$이다.
이때 두 근이 α, $\alpha-1$이고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은
$(x-\alpha)\{x-(\alpha-1)\}=0$
$\therefore x^2-(2\alpha-1)x+\alpha(\alpha-1)=0$

2단계 k의 값 구하기

따라서 $2\alpha-1=k+3$, $\alpha(\alpha-1)=30$이므로
$\alpha^2-\alpha=30$, $\alpha^2-\alpha-30=0$
$(\alpha+5)(\alpha-6)=0 \quad \therefore \alpha=-5$ 또는 $\alpha=6$
(i) $\alpha=-5$일 때
$2\alpha-1=k+3$에서
$-10-1=k+3 \quad \therefore k=-14$
(ii) $\alpha=6$일 때
$2\alpha-1=k+3$에서
$12-1=k+3 \quad \therefore k=8$

3단계 음수 k의 값 구하기

(i), (ii)에 의하여 음수 k의 값은 -14이다.

단계	채점 기준	비율
❶	두 근의 차가 1인 이차방정식을 세웠다.	40 %
❷	k의 값을 구했다.	50 %
❸	음수 k의 값을 구했다.	10 %

14 답 ④

$x^2-7x+12=0$에서
$(x-3)(x-4)=0 \quad \therefore x=3$ 또는 $x=4$
즉, 이차방정식 $x^2-7x+12=0$의 두 근이 3, 4이므로 이차방정식 $ax^2+bx-12=0$의 두 근은 2, 3이다.
이때 두 근이 2, 3이고, x^2의 계수가 a인 이차방정식은
$a(x-2)(x-3)=0$, $a(x^2-5x+6)=0$
$\therefore ax^2-5ax+6a=0$
따라서 $-5a=b$, $6a=-12$이므로
$a=-2$, $b=10$
$\therefore a+b=-2+10=8$

15 답 ②

$mx^2+(3m-5)x-24=0$의 두 근을 α, β라고 하면
$m(x-\alpha)(x-\beta)=0$
$mx^2-m(\alpha+\beta)x+m\alpha\beta=0$
$\therefore 3m-5=-m(\alpha+\beta)$
$m\alpha\beta=-24$
이때 $m>1$이고 $m\alpha\beta=-24<0$이므로
$\alpha\beta<0$
즉, 주어진 이차방정식은 부호가 서로 다른 두 근을 갖는다.
따라서 두 근의 절댓값의 비가 3 : 2이므로 한 근을 $3t$ $(t\neq0)$라고 하면 다른 한 근은 $-2t$이다.
$3m-5=-m(\alpha+\beta)=-m(3t-2t)=-mt$에서
$t=-\frac{3m-5}{m}$ …… ㉠
$m\alpha\beta=m\times(-6t^2)=-24$에서
$t^2=\frac{4}{m}$ …… ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$\left(-\frac{3m-5}{m}\right)^2=\frac{4}{m}$, $(3m-5)^2=4m$
$9m^2-30m+25=4m$, $9m^2-34m+25=0$
$(m-1)(9m-25)=0 \quad \therefore m=1$ 또는 $m=\frac{25}{9}$
이때 $m>1$이므로 $m=\frac{25}{9}$

16 답 432

백의 자리의 숫자를 a, 십의 자리의 숫자를 b, 일의 자리의 숫자를 c라고 하면
$\begin{cases} a\times(10b+c)=(10b+c)+96 & \cdots\cdots ㉠ \\ 10b+c=8a & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉡을 ㉠에 대입하면
$8a^2=8a+96$, $a^2-a-12=0$
$(a+3)(a-4)=0 \quad \therefore a=-3$ 또는 $a=4$
이때 $a>0$이므로 $a=4$
㉡에서 $10b+c=32$이고 b, c는 한 자리 자연수이므로
$b=3$, $c=2$
따라서 구하는 정수는 432이다.

꿀 한줄평

세 자리 자연수는 다음과 같이 표현한다.
$123=1\times100+2\times10+3$
따라서 각 자릿수를 미지수로 놓고 주어진 조건을 이용하여 식을 세운다.

17 답 ③

해결 key Point!

원가가 A원인 물건에 이익을 x % 붙이면 $A\left(1+\frac{x}{100}\right)$원, 할인을 x %하면 $A\left(1-\frac{x}{100}\right)$원임을 이용해야 한다.

서현이가 중고 거래 사이트에 올린 옷의 가격은

$50000\times\left(1+\frac{x}{100}\right)$원

이 정가의 x %를 할인한 가격으로 판매하였더니 2000원의 손해를 봤으므로

$50000\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{x}{100}\right)=50000-2000$,

$1-\frac{x^2}{10000}=\frac{24}{25}$

$\frac{x^2}{10000}=\frac{1}{25}$, $x^2=400$

$\therefore$ $x=-20$ 또는 $x=20$

이때 $x>0$이므로 $x=20$

18 답 ④

$100=A-x$이므로 $A=100+x$

판매가와 원가의 차액이 $\frac{10}{9}$만 원이므로 $B-A=\frac{10}{9}$

$\therefore$ $B=A+\frac{10}{9}=(100+x)+\frac{10}{9}$

또, 판매가 B만 원은 구입가 100만 원에 판매가의 x %의 이익을 붙인 가격이므로

$B=100+\frac{x}{100}\left(100+x+\frac{10}{9}\right)$

즉, $100+x+\frac{10}{9}=100+\frac{x}{100}\left(100+x+\frac{10}{9}\right)$이므로

$x+\frac{10}{9}=x+\frac{x^2}{100}+\frac{x}{90}$

$\frac{x^2}{100}+\frac{x}{90}-\frac{10}{9}=0$

$9x^2+10x-1000=0$, $(9x+100)(x-10)=0$

$\therefore$ $x=-\frac{100}{9}$ 또는 $x=10$

이때 $x>0$이므로 $x=10$

19 답 ③

해결 key Point!

두 번 커피 원액을 넣은 라떼에 남아 있는 커피 원액의 양을 구해야 한다.

완성된 라떼의 유유와 커피 원액의 비가 49 : 51이므로 커피 원액의 양은 $2\times\frac{51}{100}=1.02$(L), 즉 1020 mL이다.

처음 만든 라떼의 커피 원액의 비율은 $\frac{x}{2000}$

또, 처음 만든 라떼에서 x mL 덜어낼 때 덜어내진 커피 원액의 양은 $x\times\frac{x}{2000}=\frac{x^2}{2000}$

따라서 $x-\frac{x^2}{2000}+x=1020$이므로

$x^2-4000x+2040000=0$, $(x-600)(x-3400)=0$

$\therefore$ $x=600$ 또는 $x=3400$

이때 $0<x<2000$이므로 $x=600$

20 답 300

$b=\frac{450}{a}\times100$ …… ㉠

$b-50=\frac{450}{a+150}\times100$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\frac{450}{a}\times100-50=\frac{450}{a+150}\times100$

양변에 $a(a+150)$을 곱하면

$45000(a+150)-50a(a+150)=45000a$,

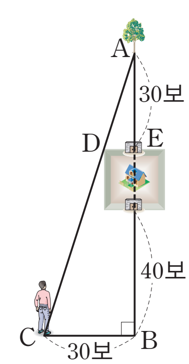
$45000a+6750000-50a^2-7500a=45000a$

$50a^2+7500a-6750000=0$, $a^2+150a-135000=0$

$(a+450)(a-300)=0$ $\quad\therefore$ $a=-450$ 또는 $a=300$

이때 $a>0$이므로 $a=300$

21 답 ④



오른쪽 그림과 같이 나무의 위치를 A, 남문으로 나와서 남쪽으로 40보 간 곳의 위치를 B, B에서 서쪽으로 30보 간 곳의 위치를 C라고 하면 $\overline{AB}\perp\overline{BC}$이므로 △ABC는 직각삼각형이다.

또, 직선 AC와 북문이 있는 담장과의 교점을 D, 담장 북문을 E라고 하면

△AED와 △ABC에서

∠AED=∠ABC=90°,

∠A는 공통이므로

△AED∽△ABC (AA 닮음)

따라서 담장 한 쪽 벽의 길이를 x보라고 하면

$\overline{DE}:\overline{CB}=\overline{AE}:\overline{AB}$에서

$\frac{x}{2}:30=30:(70+x)$, $\frac{x}{2}(70+x)=900$

$70x+x^2=1800$, $x^2+70x-1800=0$

$(x+90)(x-20)=0$ $\quad\therefore$ $x=-90$ 또는 $x=20$

이때 $x>0$이므로 $x=20$

따라서 담장의 한 쪽 벽의 길이는 20보이다.

22 답 26그루

해결 key Point!

일정한 간격인 A m로 나무를 x그루 심으면 나무가 심어진 곳의 길이는 $A\times(x-1)$ m이다.

한 쪽 가로에 심은 나무의 수를 x라고 하면 한 쪽 세로에 심은 나무의 수는 $2x-3$이므로 공원의 가로의 길이는
$10(x-1)$ m, 세로의 길이는 $10(2x-4)$ m이다.
공원의 넓이가 4000 m^2이므로
$10(x-1)\times10(2x-4)=4000$, $2x^2-6x+4=40$
$x^2-3x-18=0$, $(x+3)(x-6)=0$
$\therefore x=-3$ 또는 $x=6$
이때 $x>0$이므로 $x=6$
꼭짓점을 제외한 한 쪽 가로에 심은 나무의 수는
$6-2=4$
꼭짓점을 제외한 한 쪽 세로에 심은 나무의 수는
$2\times6-3-2=7$
따라서 직사각형의 네 꼭짓점에 심은 나무의 수는 4이므로 공원에 심은 나무는
$2\times(4+7)+4=26$(그루)

23 답 $(5+\sqrt{37})$시간

형이 혼자서 칠할 때 걸린 시간을 x시간이라고 하면 동생이 혼자서 칠할 때 걸린 시간은 $(x+2)$시간이다.
총 일의 양을 1이라고 하면 형이 한 시간 동안 일한 양이 $\frac{1}{x}$, 동생이 한 시간 동안 일한 양이 $\frac{1}{x+2}$이므로
$\frac{6}{x}+\frac{6}{x+2}=1$
양변에 $x(x+2)$를 곱하면
$6(x+2)+6x=x(x+2)$, $12x+12=x^2+2x$
$x^2-10x-12=0$　　$\therefore x=5\pm\sqrt{37}$
이때 $x>0$이므로 $x=5+\sqrt{37}$
따라서 형이 혼자서 담벼락에 페인트를 칠하는 데 걸리는 시간은 $(5+\sqrt{37})$시간이다.

24 답 90분

급수통에 가득 채워진 물의 양을 1이라고 하면 분당 급수하는 물의 양은 $\frac{1}{45}$이다.
급수통의 물의 양이 전체 용량의 $\frac{1}{2}$이 되는데 걸리는 시간을 t분이라고 하면 분당 빼내는 물의 양은 $\frac{1}{2t}$이다.
따라서 90분 중 t분 동안 전체 용량의 $\frac{1}{2}$의 물을 빼내고 $(90-t)$분 동안 물을 빼내면서 동시에 급수를 하여 수조에 물을 가득 채웠으므로
$\frac{1}{2}+(90-t)\left(\frac{1}{45}-\frac{1}{2t}\right)=1$
$\therefore \frac{(90-t)(2t-45)}{90t}=\frac{1}{2}$
이때 $t\neq0$이므로 양변에 $90t$를 곱하면
$(90-t)(2t-45)=45t$, $-2t^2+225t-4050=45t$
$2t^2-180t+4050=0$, $t^2-90t+2025=0$
$(t-45)^2=0$　　$\therefore t=45$
따라서 급수통에 가득 찬 물을 모두 빼내는 데 걸리는 시간은
$2t=90$분이다.

25 답 316

해결 key Point!

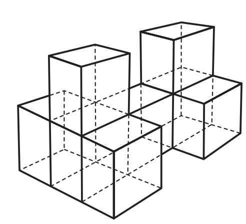
A, B, C 부분의 타일의 개수를 모두 x로 나타내야 한다.

C 부분의 세로의 길이는 x이고 가로의 길이는 $x+11$이므로
C 부분의 흰색 타일의 개수는 $x(x+11)$
B 부분의 색깔이 있는 타일의 개수는
$2\{x+(x+11)\}+4=4x+26$
A 부분의 흰색 타일의 개수는 B 부분의 색깔이 있는 타일의 개수보다 4개가 더 필요하므로 $4x+30$이다.
이때 전체 타일이 390개이므로
$4x+30+4x+26+x(x+11)=386$, $x^2+19x-330=0$
$(x+30)(x-11)=0$　　$\therefore x=-30$ 또는 $x=11$
이때 $x>0$이므로 $x=11$
따라서 색깔이 있는 타일의 개수가
$4x+26=4\times11+26=70$
이므로 흰색 타일의 개수는
$386-70=316$

26 답 5

해결 key Point!

주어진 입체도형의 모습을 예측하여 블록이 사용된 총 개수를 구해야 한다.



앞면, 옆면, 윗면에서 바라본 모양을 보고 입체도형의 모양을 나타내 보면 오른쪽 그림과 같다.
이때 블록 한 개의 부피는
$x(x+1)(x+2)$이고, 완성된 입체도형의 블록의 개수는 8이므로
$8x(x+1)(x+2)=8x^3+23x^2+20x+5$
$8x^3+24x^2+16x=8x^3+23x^2+20x+5$

$x^2-4x-5=0$, $(x+1)(x-5)=0$

$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=5$

이때 $x>0$이므로 $x=5$

27 답 $\frac{320}{3}$ m

1단계 트랙의 둘레의 길이를 미지수로 놓고 두 자동차의 이동 거리를 미지수를 이용하여 나타내기

트랙의 둘레의 길이를 $2x$ m라고 하면 두 자동차가 첫 번째 만났을 때의 A, B 두 개의 원격 자동차의 이동 거리는 각각 $(100-x)$ m, 100 m이다.

또, 이 자동차들이 두 번째 만났을 때의 두 자동차 A, B의 이동 거리는 각각 $(2x-60)$ m, $(3x-60)$ m이다.

2단계 자동차가 움직인 거리의 비를 이용하여 방정식 세우기

두 사람의 속력이 일정하므로 같은 시간 동안 움직인 거리의 비도 같다.

즉, $(100-x):100=(2x-60):(3x-60)$이므로

$(100-x)(3x-60)=100(2x-60)$

$-3x^2+360x-6000=200x-6000$

$3x^2-160x=0$

3단계 주행 트랙의 둘레의 길이 구하기

$x(3x-160)=0$ $\quad\therefore$ $x=0$ 또는 $x=\frac{160}{3}$

이때 $x>0$이므로 $x=\frac{160}{3}$

따라서 주행 트랙의 둘레의 길이는

$2x=2\times\frac{160}{3}=\frac{320}{3}$ (m)

단계	채점 기준	비율
❶	트랙의 둘레의 길이를 미지수로 놓고 두 자동차의 이동 거리를 미지수를 이용하여 나타냈다.	30 %
❷	자동차가 움직인 거리의 비를 이용하여 방정식을 세웠다.	40 %
❸	주행 트랙의 둘레의 길이를 구했다.	30 %

꿀 한줄평

두 자동차의 이동 거리를 기준으로 식을 세워야 하므로 트랙의 길이를 x가 아닌 $2x$로 놓고 식을 세우면 편하다.

28 답 ②

상류로 올라갈 때의 속력을 x km/시라고 하면 이 배가 하류로 내려갈 때의 속력은 $(x+2)$ km/시이다.

이 배가 나루터를 왕복하는 데 7시간 30분, 즉 $\frac{15}{2}$시간이 걸렸으므로

$\frac{18}{x}+\frac{18}{x+2}=\frac{15}{2}$

양변에 $2x(x+2)$를 곱하면

$36(x+2)+36x=15x(x+2)$, $72x+72=15x^2+30x$

$15x^2-42x-72=0$, $5x^2-14x-24=0$

$(5x+6)(x-4)=0$ $\quad\therefore$ $x=-\frac{6}{5}$ 또는 $x=4$

이때 $x>0$이므로 $x=4$

따라서 배가 상류로 올라갈 때의 속력은 4 km/시이다.

29 답 ②

$20+50t-5t^2=100$에서

$5t^2-50t+80=0$, $t^2-10t+16=0$

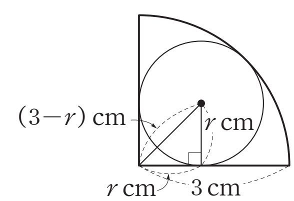
$(t-2)(t-8)=0$ $\quad\therefore$ $t=2$ 또는 $t=8$

따라서 물로켓이 지면으로부터 100 m 이상인 위치에 있었던 시간은 2초부터 8초까지이므로 6초 동안 있었다.

30 답 ①

해결 key Point!

부채꼴의 중심과 사분원의 중심을 이은 선분을 빗변으로 하는 직각삼각형을 만든다.



오른쪽 그림과 같이 내접하는 원의 반지름의 길이를 r cm라고 하면 피타고라스 정리에 의하여

$r^2+r^2=(3-r)^2$,

$2r^2=9-6r+r^2$

$r^2+6r-9=0$ $\quad\therefore$ $r=-3\pm3\sqrt{2}$

이때 $r>0$이므로 원의 반지름의 길이는 $(-3+3\sqrt{2})$ cm이다.

31 답 -720

직각삼각형 ABC의 넓이에서

$\frac{1}{2}\times3\times4=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\frac{12}{5}$, $6=\frac{6}{5}\overline{BC}$

$\therefore$ $\overline{BC}=5$

이때 $\overline{BH}=\alpha$, $\overline{CH}=\beta$이므로

$\alpha+\beta=\overline{BC}=5$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

또, $\overline{AB}^2=\overline{BH}\times\overline{BC}$이므로

$3^2=5\alpha$ $\quad\therefore$ $\alpha=\frac{9}{5}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\frac{9}{5}+\beta=5$ $\quad\therefore$ $\beta=\frac{16}{5}$

$\therefore$ $\alpha\beta=\frac{9}{5}\times\frac{16}{5}=\frac{144}{25}$

α, β를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 5인 이차방정식은

$5(x-\alpha)(x-\beta)=0$, $5\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}=0$

$5x^2-5(\alpha+\beta)x+5\alpha\beta=0$, $5x^2-5\times5x+5\times\frac{144}{25}=0$

$\therefore\ 5x^2-25x+\frac{144}{5}=0$

따라서 $a=-25$, $b=\frac{144}{5}$이므로

$ab=-25\times\frac{144}{5}=-720$

32 답 ④

해결 key Point!

사각형의 꼭짓점의 좌표를 모두 한 문자로 나타내야 한다.

$y=2x$, $y=-\frac{1}{2}x+5$를 연립하여 풀면

$2x=-\frac{1}{2}x+5$, $\frac{5}{2}x=5$

$\therefore\ x=2$

$\therefore\ y=2\times2=4$

즉, 두 함수 $y=2x$, $y=-\frac{1}{2}x+5$의 교점 P의 좌표는 $(2,\ 4)$

또, $y=-\frac{1}{2}x+5$에 $y=0$을 대입하면

$0=-\frac{1}{2}x+5$, $\frac{1}{2}x=5$

$\therefore\ x=10$

즉, 함수 $y=-\frac{1}{2}x+5$가 x축과 만나는 점 Q의 좌표는 $(10,\ 0)$

$\therefore\ \triangle OPQ=\frac{1}{2}\times10\times4=20$

점 A의 x좌표를 t라고 하면 $A(t,\ 2t)$이므로 $\overline{AB}=\overline{DC}=2t$

즉, 점 D의 y좌표는 $2t$이므로 $2t=-\frac{1}{2}x+5$에서

$\frac{1}{2}x=5-2t$, $x=10-4t$

$\therefore\ D(10-4t,\ 2t)$

$\therefore\ \overline{BC}=\underbrace{(10-4t)}_{\text{점 C의 }x\text{좌표}}-\overbrace{t}^{\text{점 B의 }x\text{좌표}}=10-5t$

따라서 $\square ABCD=2t(10-5t)=20t-10t^2$이고,

사각형 ABCD의 넓이가 삼각형 OPQ의 넓이의 $\frac{1}{4}$배이므로

$20t-10t^2=20\times\frac{1}{4}$, $2t^2-4t+1=0$

$\therefore\ t=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$

이때 $\overline{AB}=2t>2$에서 $t>1$이므로 $t=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

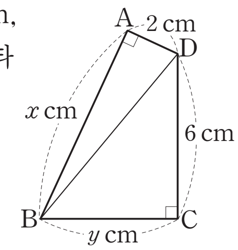
$\therefore\ \overline{AB}=2\times\frac{2+\sqrt{2}}{2}=2+\sqrt{2}$

33 답 24 cm

해결 key Point!

대각선을 그어 피타고라스 정리를 이용하여 $\overline{AB}$와 $\overline{BC}$ 사이의 관계를 구해야 한다.

1단계 이차방정식 세우기



$\square ABCD$에서 $\overline{BD}$를 긋고 $\overline{AB}=x$ cm, $\overline{BC}=y$ cm라고 하면 $\triangle ABD$에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{BD}^2=x^2+4$

$\triangle BCD$에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{BD}^2=y^2+36$

즉, $x^2+4=y^2+36$이므로

$x^2-y^2=32$ $\quad\therefore\ (x+y)(x-y)=32$

2단계 이차방정식 풀기

이때 x, y는 자연수이므로

$x+y>x-y$

$\therefore\ \begin{cases}x+y=32\\x-y=1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x+y=16\\x-y=2\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x+y=8\\x-y=4\end{cases}$

(ⅰ) $\begin{cases}x+y=32\\x-y=1\end{cases}$일 때

두 식을 연립하여 풀면 $x=\frac{33}{2}$, $y=\frac{31}{2}$

이때 x, y는 자연수가 아니므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $\begin{cases}x+y=16\\x-y=2\end{cases}$일 때

두 식을 연립하여 풀면 $x=9$, $y=7$

(ⅲ) $\begin{cases}x+y=8\\x-y=4\end{cases}$일 때

두 식을 연립하여 풀면 $x=6$, $y=2$

3단계 $\square ABCD$의 둘레의 최대 길이 구하기

(ⅰ)~(ⅲ)에 의하여 $\square ABCD$의 둘레의 길이가 최대일 때에는 $x=9$, $y=7$일 때이므로 $\square ABCD$의 둘레의 최대 길이는

$x+y+2+6=9+7+2+6=24$(cm)

단계	채점 기준	비율
❶	이차방정식을 세웠다.	40 %
❷	이차방정식을 풀었다.	40 %
❸	$\square ABCD$의 둘레의 최대 길이를 구했다.	20 %

34 답 $(6-2\sqrt{5})$ cm

해결 key Point!

$\overline{BP}$의 길이를 미지수로 놓고 등식을 만들어야 한다.

1단계 $\overline{QD}$를 $\overline{BP}$로 나타내기

$\overline{BP}=x$ cm라고 하면

$\triangle ABP=\frac{1}{2}\times2\times x=x$

$\triangle AQD=\frac{1}{2}\times4\times\overline{QD}=2\overline{QD}$

$\triangle ABP=\triangle AQD$에서

$x=2\overline{QD}$ $\quad\therefore\ \overline{QD}=\frac{x}{2}$ cm

2단계 $\overline{BP}$의 길이 구하기

$\overline{PC}=\overline{BC}-\overline{PC}=4x$, $\overline{CQ}=\overline{CD}-\overline{QD}=2-\frac{x}{2}$이므로

$\triangle PCQ=\frac{1}{2}(4-x)\left(2-\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{4}(4-x)^2$

$\triangle ABP=\triangle PCQ$에서

$x=\frac{1}{4}(4-x)^2$, $4x=16-8x+x^2$

$x^2-12x+16=0 \qquad \therefore x=6\pm2\sqrt{5}$

이때 $x<4$이므로 $\overline{BP}=x=(6-2\sqrt{5})$ cm

단계	채점 기준	비율
❶	$\overline{QD}$를 $\overline{BP}$로 나타냈다.	40 %
❷	$\overline{BP}$의 길이를 구했다.	60 %

35 답 ④

해결 key Point!

$\overline{BP}=\overline{DQ}$이므로 피타고라스 정리를 이용하여 삼각형의 한 변의 길이를 구해야 한다.

$\overline{BP}=\sqrt{\overline{AP}^2-\overline{AB}^2}$, $\overline{DQ}=\sqrt{\overline{AQ}^2-\overline{AD}^2}$

이때 $\triangle APQ$가 정삼각형이므로 $\overline{AP}=\overline{AQ}$

$\therefore \overline{BP}=\overline{DQ}$

$\overline{BP}=\overline{DQ}=x$라 하고 정삼각형 APQ의 한 변의 길이를 y라고 하면 $\triangle AQD$에서 피타고라스 정리에 의하여 $y^2=x^2+1$

$\triangle PCQ$에서 피타고라스 정리에 의하여

$y^2=(1-x)^2+(1-x)^2=2(1-x)^2$

$\quad=2-4x+2x^2$

즉, $x^2+1=2-4x+2x^2$이므로

$x^2-4x+1=0 \qquad \therefore x=2\pm\sqrt{3}$

이때 $0<x<1$이므로 $x=2-\sqrt{3}$

따라서 정삼각형 APQ의 넓이는

$\square ABCD-\triangle AQD-\triangle ABP-\triangle PCQ$

$=1-\frac{x}{2}-\frac{x}{2}-\frac{(1-x)^2}{2}$

$=\frac{2-x-x-1+2x-x^2}{2}$

$=\frac{1}{2}(1-x^2)$

$=\frac{1}{2}\{1-(2-\sqrt{3})^2\}$

$=\frac{1}{2}\{1-(7-4\sqrt{3})\}$

$=2\sqrt{3}-3$

참고 정삼각형의 한 변의 길이가 a일 때, 그 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$이므로

이를 이용하면

$\overline{AP}^2=x^2+1=(2-\sqrt{3})^2+1=8-4\sqrt{3}$

따라서 정삼각형 APQ의 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4}\overline{AP}^2=\frac{\sqrt{3}}{4}(8-4\sqrt{3})=2\sqrt{3}-3$

36 답 $100\sqrt{2}$

해결 key Point!

가로의 길이를 x m, 세로의 길이를 y m로 놓고 관계식을 만들어야 한다.

직사각형의 가로의 길이를 x m, 세로의 길이를 y m라고 하면

$2x+2y=800 \qquad \therefore x+y=400$

원의 지름이 300 m이고, 경기장의 넓이가 가장 클 때 직사각형의 대각선은 원의 지름과 같다.

피타고라스 정리에 의하여

$x^2+y^2\le90000$, $(x+y)^2-2xy\le90000$

$160000-2xy\le90000$, $-2xy\le-70000$

$\therefore xy\ge35000$

즉, $xy=35000$일 때 경기장의 넓이가 최소가 된다.

$x+y=400$에서 $y=400-x$이므로

$x(400-x)=35000$, $x^2-400x+35000=0$

$\therefore x=200\pm50\sqrt{2}$

$\therefore x=200-50\sqrt{2}$, $y=200+50\sqrt{2}$ 또는

$\quad x=200+50\sqrt{2}$, $y=200-50\sqrt{2}$

따라서 직사각형의 가로와 세로의 길이의 차는

$200+50\sqrt{2}-(200-50\sqrt{2})=100\sqrt{2}$(m)

37 답 ①

정문에서 P 지점까지의 거리를 x m라고 하면 P 지점에서 현관까지의 거리는 $\sqrt{(100-x)^2+80^2}=\sqrt{x^2-200x+16400}$

준영이가 정문에서 현관까지 가는 데 1분 30초, 즉 90초가 걸렸으므로

$\frac{x}{1}+\frac{\sqrt{x^2-200x+16400}}{2}=90$

$2x+\sqrt{x^2-200x+16400}=180$

$\sqrt{x^2-200x+16400}=180-2x$

양변을 제곱하면

$x^2-200x+16400=4x^2-720x+32400$

$3x^2-520x+16000=0$, $(x-40)(3x-400)=0$

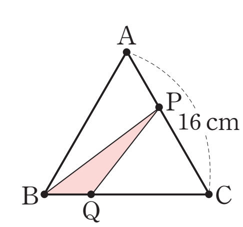
$\therefore x=40$ 또는 $x=\frac{400}{3}$

이때 $180-2x\ge0$에서

$-2x\ge-180 \qquad \therefore x\le90$

따라서 $x=40$이므로 정문에서 P 지점까지의 거리는 40 m이다.

38 답 ②



점 P는 점 B에서 출발하여 점 A를 통과하여 점 C까지 2 cm/s의 속력으로 이동하고 $8<x<16$이므로 점 P는 $\overline{AC}$ 위에 있다.

이때 $\overline{BP}=x$ cm,

$\overline{PC}=(32-2x)$ cm이고 점 P에서 변 BC에 내린 수선의 발은 한 변의 길이가 $\overline{PC}$인 정삼각형의 높이와 같다.

즉, 한 변의 길이가 x인 정삼각형의 높이가 $\frac{\sqrt{3}}{2}x$이므로

$$(\triangle\text{BPQ의 높이})=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{PC}=\frac{\sqrt{3}}{2}(32-2x)$$
$$=\sqrt{3}(16-x)$$

$$\therefore\ \triangle\text{BPQ}=\frac{1}{2}\times x\times\sqrt{3}(16-x)$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}(-x^2+16x)$$

삼각형 BPQ의 넓이가 $24\sqrt{3}$ cm^{2}이므로

$\frac{\sqrt{3}}{2}(-x^2+16x)=24\sqrt{3}$, $x^2-16x+48=0$

$(x-4)(x-12)=0$ $\quad\therefore x=4$ 또는 $x=12$

이때 $8<x<16$이므로 $x=12$

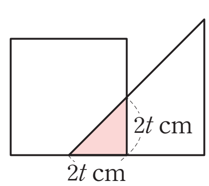
39 답 $4\sqrt{2}$초 후, 10초 후

해결 key Point!

삼각형이 움직이며 사각형과 겹칠 때 생기는 모양에 따라 넓이를 각각 t로 나타내야 한다.

두 도형이 겹치기 시작하고부터 겹치는 부분의 넓이는 삼각형, 오각형, 사각형의 순서로 만들어진다. t초 후의 겹치는 부분의 넓이를 S cm^{2}라고 하면

(i) $0\le t\le 6$일 때



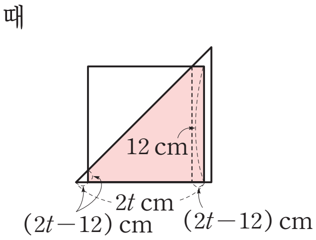
$S=\frac{1}{2}\times 2t\times 2t=2t^2$이므로

$2t^2=64$, $t^2=32$

$\therefore t=\pm\sqrt{32}=\pm 4\sqrt{2}$

이때 $0\le t\le 6$이므로 $t=4\sqrt{2}$

(ii) $6<t\le 7$일 때



$$S=\underbrace{\frac{1}{2}\times\{(2t-12)+12\}\times\{12-(2t-12)\}}_{\text{두 도형이 겹친 부분 중 사다리꼴의 넓이}}$$
$$+\underbrace{12\times(2t-12)}_{\text{사다리꼴의 제외한 남은 직사각형의 넓이}}$$
$$=\frac{1}{2}\times 2t\times(24-2t)+12\times(2t-12)$$
$$=24t-2t^2+24t-144=-2t^2+48t-144$$

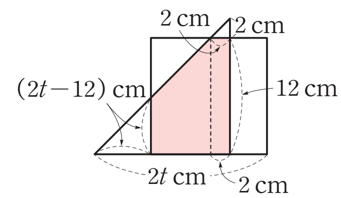
이므로

$-2t^2+48t-144=64$, $2t^2-48t+208=0$

$t^2-24t+104=0$ $\quad\therefore t=12\pm 2\sqrt{10}$

이때 $6<t\le 7$이므로 만족시키는 근은 존재하지 않는다.

(iii) $7\le t<12$일 때



$$S=\frac{1}{2}\times\{(2t-12)+12\}\times\{14-(2t-12)-2\}$$
$$+2\times 12$$
$$=\frac{1}{2}\times 2t\times(24-2t)+24$$
$$=-2t^2+24t+24$$

이므로

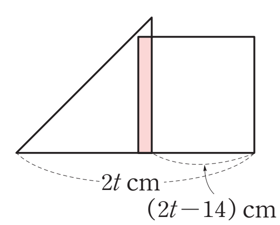
$-2t^2+24t+24=64$, $2t^2-24t-40=0$

$t^2-12t+20=0$, $(t-2)(t-10)=0$

$\therefore t=2$ 또는 $t=10$

이때 $7\le t<12$이므로 $t=10$

(iv) $12\le t\le 13$일 때



$$S=\{12-(2t-14)\}\times 12$$
$$=(26-2t)\times 12=-24t+312$$

이므로

$-24t+312=64$, $24t=248$

$\therefore t=\frac{31}{3}$

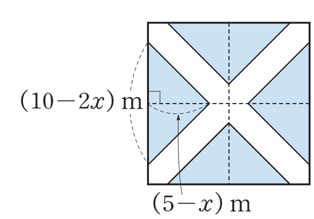
이때 $12\le t\le 13$이므로 만족시키는 근은 존재하지 않는다.

(i)~(iv)에 의하여 사각형 A와 삼각형 B가 겹치는 부분의 넓이가 64 cm^{2}가 되는 것은 두 도형이 겹치기 시작하고부터 $4\sqrt{2}$초 후와 10초 후이다.

40 답 ③

해결 key Point!

삼각형 모양의 꽃밭 네 부분의 넓이를 x로 나타내야 한다.



오른쪽 그림과 같이 산책로의 폭은 일정하고, 산책로에 의하여 네 부분으로 나누어진 꽃밭의 넓이도 모두 같다.

산책로의 넓이가 꽃밭의 넓이

의 $\frac{1}{4}$배이므로 산책로의 넓이는 정사각형 모양의 토지의 넓이의 $\frac{1}{5}$배이다.

즉, $\frac{1}{2}\times(10-2x)\times(5-x)\times4=10\times10\times\frac{1}{5}$이므로

$4\times(5-x)^2=20$, $(5-x)^2=5$

$x^2-10x+25=5$, $x^2-10x+20=0$

$\therefore x=5\pm\sqrt{5}$

이때 $0<x<5$이므로 $x=5-\sqrt{5}$

Lv. X 상위 1%에 도달하는 심화 문제

87쪽~89쪽

01 -4	**02** 256	**03** 24	**04** $x^2-11x-1=0$	
05 34	**06** $\sqrt{2}$	**07** 20 L	**08** $\sqrt{5}$ cm	**09** 2

01 답 -4

해결 key Point!

a와 x 모두 정수이므로 $AB=$(정수)의 꼴로 변형시켜야 한다.

$x^2+4x+7=x^2+4x+4+3=(x+2)^2+3$이므로

$x^2+4x+7=a^2$에서

$(x+2)^2+3=a^2$, $a^2-(x+2)^2=3$

$\therefore (a+x+2)(a-x-2)=3$

이때 a와 x 모두 정수이므로

$\begin{cases} a+x+2=-3 \\ a-x-2=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} a+x+2=-1 \\ a-x-2=-3 \end{cases}$ 또는

$\begin{cases} a+x+2=1 \\ a-x-2=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} a+x+2=3 \\ a-x-2=1 \end{cases}$

(i) $\begin{cases} a+x+2=-3 \\ a-x-2=-1 \end{cases}$일 때

두 식을 연립하여 풀면 $x=-3$, $a=-2$

(ii) $\begin{cases} a+x+2=-1 \\ a-x-2=-3 \end{cases}$일 때

두 식을 연립하여 풀면 $x=-1$, $a=-2$

(iii) $\begin{cases} a+x+2=1 \\ a-x-2=3 \end{cases}$일 때

두 식을 연립하여 풀면 $x=-3$, $a=2$

(iv) $\begin{cases} a+x+2=3 \\ a-x-2=1 \end{cases}$일 때

두 식을 연립하여 풀면 $x=-1$, $a=2$

(i)~(iv)에 의하여 구하는 정수인 해는 $x=-3$ 또는 $x=-1$이므로 그 합은

$-3+(-1)=-4$

Level UP

미지수의 개수보다 방정식의 개수가 적어 해가 여러 개 나올 수 있는 방정식에서 '정수' 조건을 추가하여 방정식의 해를 구하는 방법은 다음과 같다.

[1단계] 주어진 식을 $AB=$(정수)의 꼴로 변형시킨다.

[2단계] 곱해서 정수가 되는 A, B의 모든 경우를 구하여 각각의 해를 구한다.

02 답 256

해결 key Point!

두 이차방정식의 공통인 근을 α로 놓고 두 식을 연립하여 m, n에 대한 식을 만들어야 한다.

두 이차방정식의 공통인 근을 α라고 하면

$(m-1)\alpha^2-(m^2+2)\alpha+m^2+2m=0$ ...... ㉠

$(n-1)\alpha^2-(n^2+2)\alpha+n^2+2n=0$ ...... ㉡

㉠$\times(n-1)$, ㉡$\times(m-1)$을 하면

$(n-1)(m-1)\alpha^2-(n-1)(m^2+2)\alpha+(n-1)(m^2+2m)=0$ ...... ㉢

$(m-1)(n-1)\alpha^2-(m-1)(n^2+2)\alpha+(m-1)(n^2+2n)=0$ ...... ㉣

㉢$-$㉣을 하면

$-(n-1)(m^2+2)\alpha+(n-1)(m^2+2m)$
$+(m-1)(n^2+2)\alpha-(m-1)(n^2+2n)=0$

$-m^2n\alpha-2n\alpha+m^2\alpha+2\alpha+m^2n+2mn-m^2-2m$
$+mn^2\alpha+2m\alpha-n^2\alpha-2\alpha-mn^2-2mn+n^2+2n=0$

$-m^2n\alpha-2n\alpha+m^2\alpha+m^2n-m^2-2m+mn^2\alpha+2m\alpha$
$-n^2\alpha-mn^2+n^2+2n=0$

$-mn\alpha(m-n)+2\alpha(m-n)+(m+n)(m-n)\alpha$
$+mn(m-n)-(m+n)(m-n)-2(m-n)=0$

$(m-n)\{-mn\alpha+2\alpha+(m+n)\alpha+mn$
$-(m+n)-2\}=0$

$(m-n)[-\{mn-2-(m+n)\}\alpha+mn$
$-(m+n)-2]=0$

$\therefore (m-n)(-\alpha+1)(mn-m-n-2)=0$

이때 $m\neq n$이므로 $-\alpha+1=0$ 또는 $mn-m-n-2=0$

$-\alpha+1=0$, 즉 $\alpha=1$이면 ㉠, ㉡에서

$m-1-(m^2+2)+m^2+2m=0$,

$n-1-(n^2+2)+n^2+2n=0$

$3m-3=0$, $3n-3=0$

$\therefore m=1$, $n=1$

따라서 ㉠, ㉡의 x^2의 계수가 0이 되므로 조건을 만족시키지 않는다.

즉, $mn-m-n-2=0$이므로

$mn-m-n+1=3$, $(m-1)(n-1)=3$

이때 m, n은 자연수이고 $m>n$이므로

$m-1=3$, $n-1=1$

$\therefore\ m=4$, $n=2$

$$\begin{aligned}\therefore\ \frac{m^n+n^m}{\frac{1}{m^n}+\frac{1}{n^m}}&=(m^n+n^m)\div\left(\frac{1}{m^n}+\frac{1}{n^m}\right)\\&=(m^n+n^m)\div\frac{m^n+n^m}{m^nn^m}\\&=(m^n+n^m)\times\frac{m^nn^m}{m^n+n^m}\\&=m^nn^m=4^2\times2^4\\&=2^4\times2^4=2^8=256\end{aligned}$$

03 답 24

해결 key Point!

이차방정식이 정수인 근을 가지려면 근의 공식의 근호 안의 식이 완전제곱식이어야 함을 이용해야 한다.

$x^2-(k+2)x+4k=0$에서

$$\begin{aligned}x&=\frac{-\{-(k+2)\}\pm\sqrt{\{-(k+2)\}^2-4\times1\times4k}}{2}\\&=\frac{k+2\pm\sqrt{k^2-12k+4}}{2}\end{aligned}$$

주어진 이차방정식이 서로 다른 두 개의 정수인 근을 가져야 하므로 $k^2-12k+4=m^2$ (m은 자연수)이어야 한다.

이때 k는 정수이므로 k에 대한 이차방정식

$k^2-12k+4-m^2=0$ …… ㉠

도 정수인 근을 가져야 한다.

따라서 $k^2-12k+4-m^2=0$에서

$$\begin{aligned}k&=-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-1\times(4-m^2)}\\&=6\pm\sqrt{m^2+32}\end{aligned}$$

이므로 $m^2+32=n^2$ (n은 자연수)이어야 한다.

$n^2-m^2=32$에서 $(n+m)(n-m)=32$

이때 m, n은 자연수이므로

$\begin{cases}n+m=8\\n-m=4\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}n+m=16\\n-m=2\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}n+m=32\\n-m=1\end{cases}$

(i) $\begin{cases}n+m=8\\n-m=4\end{cases}$일 때

두 식을 연립하여 풀면 $n=6$, $m=2$

이때 ㉠에서 $k^2-12k=0$

$k(k-12)=0$ $\quad\therefore\ k=0$ 또는 $k=12$

(ii) $\begin{cases}n+m=16\\n-m=2\end{cases}$일 때

두 식을 연립하여 풀면 $n=9$, $m=7$

이때 ㉠에서 $k^2-12k-45=0$

$(k+3)(k-15)=0$ $\quad\therefore\ k=-3$ 또는 $k=15$

(iii) $\begin{cases}n+m=32\\n-m=1\end{cases}$일 때

두 식을 연립하여 풀면 $n=\frac{33}{2}$, $m=\frac{31}{2}$

이때 m, n이 자연수가 아니므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(i)~(iii)에 의하여 주어진 조건을 만족시키는 모든 k의 값은 -3, 0, 12, 15이므로 그 합은

$-3+0+12+15=24$

꿀 한줄평

두 자연수 m, n에 대한 방정식 $m^2+32=n^2$을 풀기 위하여 $n^2-m^2=(n+m)(n-m)=32$가 되는 경우를 모두 찾는다. 이때 $n+m>n-m$이므로 $(n+m)(n-m)=32$를 만족시키는 경우는 $\begin{cases}n+m=8\\n-m=4\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}n+m=16\\n-m=2\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}n+m=32\\n-m=1\end{cases}$이다.

04 답 $x^2-11x-1=0$

해결 key Point!

$x^2-x-1=0$의 두 근이 α, β이므로 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구하고 $\alpha^2-\alpha-1=0$, $\beta^2-\beta-1=0$이 성립함을 이용해야 한다.

두 근이 α, β이고 최고차항의 계수가 1인 이차방정식은

$(x-\alpha)(x-\beta)=0$, 즉 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

$\therefore\ \alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-1$

두 근이 α^n, β^n이고 최고차항의 계수가 1인 이차방정식은

$(x-\alpha^n)(x-\beta^n)=0$, 즉 $x^2-(\alpha^n+\beta^n)x+\alpha^n\beta^n=0$

$\therefore\ a_n=\alpha^n+\beta^n$, $b_n=\alpha^n\beta^n=(\alpha\beta)^n=(-1)^n$

또, α, β가 방정식 $x^2-x-1=0$의 근이므로

$\alpha^2-\alpha-1=0$, $\beta^2-\beta-1=0$

두 방정식의 양변에 α^n, β^n을 각각 곱하면

$\alpha^{n+2}-\alpha^{n+1}-\alpha^n=0$, $\beta^{n+2}-\beta^{n+1}-\beta^n=0$

위의 두 식의 각 변을 각각 더하면

$\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}-\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}-\alpha^n-\beta^n=0$,

$\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}=\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}+\alpha^n+\beta^n$

$\therefore\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$

이때 $a_1=\alpha+\beta=1$, $a_2=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=3$이므로

$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$에서

$a_3=a_2+a_1=3+1=4$,

$a_4=a_3+a_2=4+3=7$,

$a_5=a_4+a_3=7+4=11$,

$b_5=(-1)^5=-1$

따라서 α^5, β^5을 두 근으로 하는 이차방정식은

$x^2-(\alpha^5+\beta^5)x+\alpha^5\beta^5=0$, $x^2-a_5x+b_5=0$

$\therefore\ x^2-11x-1=0$

참고 α, β가 이차방정식 $x^2-x-1=0$의 근이므로 $\alpha^2-\alpha-1=0$, $\beta^2-\beta-1=0$

$\alpha^2=\alpha+1$, $\beta^2=\beta+1$
$\alpha^3=\alpha\alpha^2=\alpha(\alpha+1)=\alpha^2+\alpha=2\alpha+1$,
$\alpha^4=\alpha\alpha^3=\alpha(2\alpha+1)=2\alpha^2+\alpha=3\alpha+2$,
$\alpha^5=\alpha\alpha^4=\alpha(3\alpha+2)=3\alpha^2+2\alpha=5\alpha+3$
마찬가지로 $\beta^5=\beta\beta^4=5\beta+3$이므로 $\alpha^5+\beta^5=5(\alpha+\beta)+6$임을 이용해도 된다.

05 답 34

해결 key Point!

두 근 α, β가 정수라는 조건과 이차방정식의 계수 p, q가 소수라는 조건을 모두 만족시키는 α, β, p, q의 값을 찾아야 한다.

두 근이 α, β이고 최고차항의 계수가 1인 이차방정식은
$(x-\alpha)(x-\beta)=0$, 즉 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$
따라서 $x^2+8px-q^2=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$이므로
$\alpha+\beta=-8p$, $\alpha\beta=-q^2$
이때 α, β가 모두 정수이고 $\alpha\beta=-q^2$이므로 α, β는
$-q$ 또는 q, -1 또는 q^2, $-q^2$ 또는 1이다.

(i) $\alpha=-q$, $\beta=q$ 또는 $\alpha=q$, $\beta=-q$일 때
$\alpha+\beta=-q+q=0$이므로
$-8p=0$ $\quad\therefore p=0$
이때 p가 소수이어야 하므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $\alpha=-1$, $\beta=q^2$ 또는 $\alpha=q^2$, $\beta=-1$일 때
$\alpha+\beta=q^2-1$이므로
$q^2-1=-8p$ $\quad\therefore (q+1)(q-1)=-8p$
이때 $(q+1)(q-1)>0$, $-8p<0$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $\alpha=1$, $\beta=-q^2$ 또는 $\alpha=-q^2$, $\beta=1$일 때
$\alpha+\beta=1-q^2$이므로
$1-q^2=-8p$ $\quad\therefore (1+q)(1-q)=-8p$
따라서 $(1+q)(1-q)$는 짝수이어야 하므로 q는 홀수이다.
즉, q는 3 이상의 소수이므로 $1+q\ge4$
이때 p는 소수이므로 $-8p$를 두 정수의 곱으로 나타내면
$-1\times8p$, $-2\times4p$, $-4\times2p$, $-8\times p$, $1\times(-8p)$,
$2\times(-4p)$, $4\times(-2p)$, $8\times(-p)$
이므로 $1+q$가 될 수 있는 수는 4, 8, $2p$, $4p$, $8p$이다.

ⓐ $1+q=4$일 때
$q=3$이므로 $1-q=1-3=-2$
$(1+q)(1-q)=4\times(-2)=-8$이므로
$-8=-8p$ $\quad\therefore p=1$
이때 p가 소수이어야 하므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

ⓑ $1+q=8$일 때
$q=7$이므로 $1-q=1-7=-6$
$(1+q)(1-q)=8\times(-6)=-48$이므로
$-48=-8p$ $\quad\therefore p=6$
이때 p가 소수이어야 하므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

ⓒ $1+q=2p$일 때
$(1+q)(1-q)=2p(1-q)$이므로
$2p(1-q)=-8p$, $1-q=-4$
$\therefore q=5$
$1+q=2p$에서
$6=2p$ $\quad\therefore p=3$

ⓓ $1+q=4p$일 때
$(1+q)(1-q)=4p(1-q)$이므로
$4p(1-q)=-8p$, $1-q=-2$
$\therefore q=3$
$1+q=4p$에서
$4=4p$ $\quad\therefore p=1$
이때 p가 소수이어야 하므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

ⓔ $1+q=8p$일 때
$(1+q)(1-q)=8p(1-q)$이므로
$8p(1-q)=-8p$, $1-q=-1$
$\therefore q=2$
이때 q는 홀수이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(i)~(iii)에 의하여 $p=3$, $q=5$
즉, 주어진 이차방정식은 $x^2+24x-25=0$이므로
$(x+25)(x-1)=0$ $\quad\therefore x=-25$ 또는 $x=1$
따라서 두 근은 -25, 1이므로
$|\alpha-\beta|=|-25-1|=26$
$\therefore |\alpha-\beta|+p+q=26+3+5=34$

Level UP

소수는 항상 양수이고, 짝수인 소수는 2뿐이다. 즉, 소수 p가 홀수이면 $p\ge3$, 짝수이면 $p=2$이다.

06 답 $\sqrt{2}$

해결 key Point!

두 근이 α, β인 이차방정식을 만들고 주어진 이차방정식과 계수를 비교해야 한다.

이차방정식 $(a^2+1)x^2-4ax+2=0$은 상수항이 0이 아니므로 0을 근으로 갖지 않는다.
$\therefore \alpha\ne0$, $\beta\ne0$
$(a^2+1)x^2-4ax+2=0$에서 $a^2+1\ne0$이므로 양변을 a^2+1로 나누면
$$x^2-\frac{4a}{a^2+1}x+\frac{2}{a^2+1}=0$$

두 근이 α, β이고 최고차항의 계수가 1인 이차방정식은
$(x-\alpha)(x-\beta)=0$, 즉 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

따라서 $\alpha+\beta=\frac{4a}{a^2+1}$, $\alpha\beta=\frac{2}{a^2+1}$ …… ㉠

이고 조건 (가)에 의하여 $\alpha>0$, $\beta>0$이므로

$\alpha+\beta=\frac{4a}{a^2+1}>0$

$4a>0$ $\therefore a>0$

조건 (나)에 의하여 주어진 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가지므로

$(-4a)^2-4\times(a^2+1)\times2>0$, $16a^2-8a^2-8>0$

$8a^2-8>0$, $a^2-1>0$

$(a+1)(a-1)>0$

이때 $a+1>0$이므로 $a-1>0$

$\therefore a>1$

또, 조건 (나)에 의하여 $\alpha+\beta=\alpha+3\alpha=4\alpha$이므로 ㉠에서

$4\alpha=\frac{4a}{a^2+1}$ $\therefore \alpha=\frac{a}{a^2+1}$ …… ㉡

$\alpha\beta=\alpha\times3\alpha=3\alpha^2$이므로

$3\alpha^2=\frac{2}{a^2+1}$ …… ㉢

㉡을 ㉢에 대입하면

$3\left(\frac{a}{a^2+1}\right)^2=\frac{2}{a^2+1}$, $\frac{3a^2}{a^2+1}=2$

$3a^2=2a^2+2$, $a^2=2$

$\therefore a=-\sqrt{2}$ 또는 $a=\sqrt{2}$

이때 $a>1$이므로 $a=\sqrt{2}$

Level UP

이차방정식의 한 근이 0이면 다른 한 근을 α라고 할 때, 최고차항의 계수가 a인 이차방정식은 $ax(x-\alpha)=0$, 즉 $ax^2-a\alpha x=0$
따라서 한 근이 0이면 이차방정식의 상수항은 0이다.

07 답 20 L

해결 key Point!

소금물 농도가 N이었던 처음 50 L의 소금물에서 x L만큼의 소금물을 덜어내고 그 만큼의 물을 채운 후의 소금물의 농도는
$\left(1-\frac{x}{50}\right)N$임을 이용해야 한다.

처음 소금물의 농도를 N이라고 하면 처음 50 L의 소금물에 담긴 소금의 양은 $50N$이고, 한 바가지의 부피를 x L라고 하면 처음 덜어낸 소금의 양은 xN이므로 한 바가지의 소금물을 덜어내고 통에 남은 소금의 양은 $50N-xN=(50-x)N$

이때 첫 번째 과정 후 소금물의 농도를 N_1이라고 하면

$N_1=\frac{(50-x)N}{50}=\left(1-\frac{x}{50}\right)N$

두 번째 과정 후 남은 소금의 양은 $50N_1-xN_1=(50-x)N_1$

두 번째 과정 후 소금물의 농도를 N_2라고 하면

$$N_2=\frac{(50-x)N_1}{50}=\frac{(50-x)\left(1-\frac{x}{50}\right)N}{50}=\left(1-\frac{x}{50}\right)^2N$$

두 번째 과정 후 소금물의 농도가 처음 농도의 36 %이므로

$N_2=\frac{36}{100}N$

즉, $\left(1-\frac{x}{50}\right)^2N=\frac{36}{100}N$이므로

$\left(1-\frac{x}{50}\right)^2=\frac{9}{25}$, $1-\frac{x}{50}=\pm\frac{3}{5}$

$\frac{x}{50}=\frac{2}{5}$ 또는 $\frac{x}{50}=\frac{8}{5}$

$\therefore x=20$ 또는 $x=80$

이때 $x<50$이므로 $x=20$

따라서 덜어낸 한 바가지의 부피는 20 L이다.

꿀 한줄평

농도는 용액 전체의 양에 대한 용질의 양에 대한 백분율은

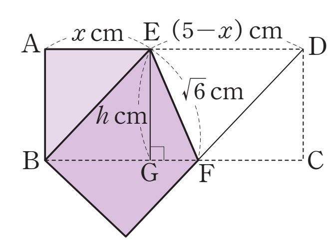
$N(\%)=\frac{(\text{용질의 양})}{(\text{용액의 양})}\times100$

임을 이용한다.

08 답 $\sqrt{5}$ cm

해결 key Point!

엇각, 접은 각, 접은 선 등을 이용하여 서로 합동인 이등변삼각형을 찾아야 한다.



오른쪽 그림과 같이 접은 선의 양 끝점을 각각 E, F, 점 E에서 선분 BC로 내린 수선의 발을 G라고 하자.

$\angle$BFE$=\angle$DEF (엇각),

$\angle$BEF$=\angle$DEF (접은 각)

이므로 $\angle$BEF$=\angle$BFE

즉, $\triangle$BEF는 이등변삼각형이고 마찬가지로

$\angle$DEF$=\angle$DFE이므로 $\triangle$DEF도 이등변삼각형이다.

$\overline{AE}=x$ cm, $\overline{EG}=h$ cm라고 하면 $\triangle$BFE와 $\triangle$DFE에서

$\overline{EF}$는 공통, $\overline{BF}=\overline{DF}$ (접은 선),

$\angle$BFE$=\angle$DEF$=\angle$DFE이므로

$\triangle$BFE$\equiv\triangle$DFE (SAS 합동)

따라서 $\overline{BF}=\overline{DF}=\overline{DE}=\overline{BE}=(5-x)$ cm이고

$\overline{BG}=\overline{AE}=x$ cm이므로

$\overline{FG}=\overline{BF}-\overline{BG}=5-x-x=5-2x$(cm)

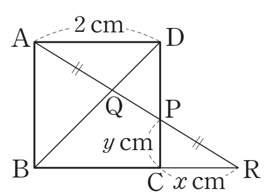
직각삼각형 EFG에서 피타고라스 정리에 의하여

$h^2=(\sqrt{6})^2-(5-2x)^2=-4x^2+20x-19$
직각삼각형 BEG에서 피타고라스 정리에 의하여
$h^2=(5-x)^2-x^2=25-10x$
즉, $-4x^2+20x-19=25-10x$이므로
$4x^2-30x+44=0$, $2x^2-15x+22=0$
$(x-2)(2x-11)=0$ $\quad\therefore x=2$ 또는 $x=\frac{11}{2}$
이때 $x<5$이므로 $x=2$
따라서 $h^2=25-10x=25-10\times 2=5$에서 $h=\sqrt{5}$이므로 세로의 길이는 $\sqrt{5}$ cm이다.

09 답 2

해결 key Point!

$\triangle$QDA$\backsim\triangle$QBR, $\triangle$PCR$\backsim\triangle$PDA임을 이용해야 한다.



오른쪽 그림과 같이 두 직선 AD, BR가 평행하므로 $\triangle$QDA와 $\triangle$QBR에서
$\angle$QAD$=\angle$QRB (엇각),
$\angle$AQD$=\angle$RQB (맞꼭지각)이므로 $\triangle$QDA$\backsim\triangle$QBR (AA 닮음)
즉, $\overline{AD}:\overline{RB}=\overline{AQ}:\overline{RQ}$에서
$2:(x+2)=\overline{AQ}:\overline{RQ}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
또, 두 직선 AD, BR가 평행하므로 $\triangle$PCR와 $\triangle$PDA에서
$\angle$PAD$=\angle$PRC (엇각), $\angle$APD$=\angle$RPC (맞꼭지각)
이므로 $\triangle$PCR$\backsim\triangle$PDA (AA 닮음)
즉, $\overline{RC}:\overline{AD}=\overline{RP}:\overline{AP}$에서
$x:2=\overline{RP}:\overline{AP}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡
이때 $\overline{AQ}=\overline{RP}$이므로
$\overline{AP}=\overline{AQ}+\overline{QP}=\overline{RP}+\overline{QP}=\overline{RQ}$
㉠, ㉡에서
$x:2=\overline{RP}:\overline{AP}=\overline{AQ}:\overline{RQ}=2:(x+2)$
$x(x+2)=4$, $x^2+2x-4=0$
$\therefore x=-1\pm\sqrt{5}$
이때 $x>0$이므로 $\overline{CR}=x=-1+\sqrt{5}$
또, $\triangle$PCR와 $\triangle$PDA에서
$\overline{CP}:\overline{CR}=\overline{DP}:\overline{DA}$이므로
$y:(-1+\sqrt{5})=(2-y):2$
$2y=(-1+\sqrt{5})(2-y)$
$y=-2+2\sqrt{5}-(-1+\sqrt{5})y$
$(1+\sqrt{5})y=-2+2\sqrt{5}$
$\therefore y=\frac{-2+2\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}=\frac{(-2+2\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}$
$=\frac{-12+4\sqrt{5}}{-4}=3-\sqrt{5}$
$\therefore x+y=(-1+\sqrt{5})+(3-\sqrt{5})=2$

Lv. Master 실력을 완성하는 대단원 평가

90쪽~94쪽

01 ②, ⑤	02 ③, ④	03 ③	04 ④	05 ①
06 ②	07 ④	08 ④	09 ①	10 ⑤
11 ②	12 ③	13 ④	14 ③	15 ③
16 -3	17 $-12\sqrt{6}$	18 -2	19 4	20 20 %
21 $\frac{33}{50}$	22 5	23 11명		

01 답 ②, ⑤

해결 key Point!

x에 대한 이차방정식은 $ax^2+bx+c=0$ (a, b, c는 상수, $a\neq 0$)의 꼴이어야 한다.

$(a^2-3a)x^2-ax+1=4x^2+5x$에서
$(a^2-3a-4)x^2-(a+5)x+1=0$이므로
$a^2-3a-4\neq 0$, $(a+1)(a-4)\neq 0$
$\therefore a\neq -1$, $a\neq 4$
따라서 상수 a의 값이 될 수 없는 것은 ②, ⑤이다.

02 답 ③, ④

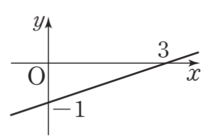
어떤 수를 x라고 하면
$(x-3)^2+9=2(x+3)$이므로
$x^2-6x+18=2x+6$, $x^2-8x+12=0$
$(x-2)(x-6)=0$ $\quad\therefore x=2$ 또는 $x=6$
따라서 어떤 수는 2 또는 6이다.

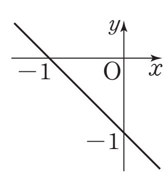
03 답 ③

$(x-1)*(x+4)=(x-1)(x+4)-(x-1)-(x+4)$
$=x^2+3x-4-x+1-x-4$
$=x^2+x-7$
$|x*2|=|2x-x-2|=|x-2|$
즉, $(x-1)*(x+4)+|x*2|+1=0$에서
$x^2+x-7+|x-2|+1=0$
$\therefore x^2+x-6+|x-2|=0$
(i) $x<2$일 때
$x^2+x-6-(x-2)=0$이므로
$x^2-4=0$, $(x+2)(x-2)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$
이때 $x<2$이므로 $x=-2$
(ii) $x\geq 2$일 때
$x^2+x-6+x-2=0$이므로
$x^2+2x-8=0$, $(x+4)(x-2)=0$
$\therefore x=-4$ 또는 $x=2$
이때 $x\geq 2$이므로 $x=2$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 주어진 방정식 해는 $x=-2$ 또는 $x=2$이므로 모든 x의 값의 합은
$-2+2=0$

04 답 ④
$<x^2>+<x>-6=0$에서
$(<x>+3)(<x>-2)=0$
$\therefore <x>=-3$ 또는 $<x>=2$
이때 $<x>$의 값은 양수이므로 $<x>=2$
따라서 약수의 개수가 2인 자연수는 소수이므로 15 이하의 자연수 x는 2, 3, 5, 7, 11, 13의 6개이다.

05 답 ①
직선 $mx+3y=-3$이 점 $(2m+2,\ -m^2)$을 지나므로
$m(2m+2)+3(-m^2)=-3$, $2m^2+2m-3m^2=-3$
$m^2-2m-3=0$, $(m+1)(m-3)=0$
$\therefore m=-1$ 또는 $m=3$
(ⅰ) $m=-1$일 때
$-x+3y=-3$, 즉 $y=\frac{1}{3}x-1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제2사분면을 지나지 않는다.


(ⅱ) $m=3$일 때
$3x+3y=-3$, 즉 $y=-x-1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제2사분면을 지난다.


(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $m=-1$

06 답 ②
해결 key Point!
$(a-b)^2-2(a-b)-24=0$에서 $a-b$의 값을 구해야 한다.

$(a-b)^2-2(a-b)-24=0$에서 $a-b=A$라고 하면
$A^2-2A-24=0$, $(A+4)(A-6)=0$
$A=-4$ 또는 $A=6$
$\therefore a-b=-4$ 또는 $a-b=6$
이때 $a>b$이므로 $a-b=6$
$\therefore a^2+b^2=(a-b)^2+2ab=6^2+2\times(-3)$
$=36-6=30$
참고 $a>b$이면 $a-b>0$

07 답 ④
해결 key Point!
$[x]=n$ (n은 정수)이면 $n\le x<n+1$임을 이용하여 범위를 나누어야 한다.

$x^2-[x]x-2=0$에서
(ⅰ) $1<x<2$일 때
$[x]=1$이므로
$x^2-x-2=0$, $(x+1)(x-2)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$
이때 $1<x<2$이므로 만족시키는 해가 없다.
(ⅱ) $2\le x<3$일 때
$[x]=2$이므로
$x^2-2x-2=0$ $\quad\therefore x=1\pm\sqrt{3}$
이때 $2\le x<3$이므로 $x=1+\sqrt{3}$
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 주어진 이차방정식의 해는 $x=1+\sqrt{3}$이다.

08 답 ④
$x^2-7x+2a=0$이 중근을 가지므로
$2a=\left(\frac{-7}{2}\right)^2=\frac{49}{4}$ $\quad\therefore a=\frac{49}{8}$
따라서 $x^2-7x+\frac{49}{4}=0$에서
$\left(x-\frac{7}{2}\right)^2=0$ $\quad\therefore x=\frac{7}{2}$

09 답 ①
$x^2-5x-36=0$에서
$(x+4)(x-9)=0$ $\quad\therefore x=-4$ 또는 $x=9$
$3x^2+11x-4=0$에서
$(x+4)(3x-1)=0$ $\quad\therefore x=-4$ 또는 $x=\frac{1}{3}$
즉, 두 이차방정식 $x^2-5x-36=0$, $3x^2+11x-4=0$의 공통인 근은 $x=-4$이다.
따라서 $x^2-ax+8=0$의 한 근이 $x=-4$이므로
$(-4)^2-a\times(-4)+8=0$, $16+4a+8=0$
$4a=-24$ $\quad\therefore a=-6$

10 답 ⑤
$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$에서
$x^2-(a+b)x+ab+x^2-(b+c)x+bc$
$+x^2-(c+a)x+ca=0$
$3x^2-2(a+b+c)x+ab+bc+ca=0$
이 이차방정식이 중근을 가지므로
$\{-2(a+b+c)\}^2-4\times3(ab+bc+ca)=0$
$(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)=0$
$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$
양변에 2를 곱하면
$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca=0$
$a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2=0$
$\therefore (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

따라서 $a-b=0$, $b-c=0$, $c-a=0$이므로 $a=b=c$
즉, a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 정삼각형이다.

11 답 ②

$x^2-85x+n=0$의 소수인 두 근을 p, q $(p<q)$라고 하면
$(x-p)(x-q)=0$
즉, $x^2-(p+q)x+pq=0$이므로 $p+q=85$
이때 85는 홀수이므로 $p+q=85$이려면 두 소수 p, q 중 하나는 반드시 짝수이어야 한다.
이때 짝수인 소수는 2뿐이므로 $p=2$
$2+q=85$에서 $q=83$
따라서 $x^2-85x+n=0$의 두 근은 2와 83이므로 두 근의 차는
$83-2=81$

꿀 한줄평
(짝수)+(짝수)=(짝수), (홀수)+(홀수)=(짝수),
(홀수)+(짝수)=(홀수), (짝수)+(홀수)=(홀수)이고, 짝수인 소수는 2뿐임을 이용하면 두 근을 모두 구할 수 있다.

12 답 ③

해결 key Point!
두 근의 범위를 만족시키는 한 자리 자연수 a, b, c의 값을 찾아야 한다.

이차방정식 $ax^2-bx+3c=0$의 두 근이 α, β이므로
$a(x-\alpha)(x-\beta)=0$에서 $a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}=0$
$\therefore ax^2-a(\alpha+\beta)x+a\alpha\beta=0$
즉, $-b=-a(\alpha+\beta)$, $3c=a\alpha\beta$이므로
$\alpha+\beta=\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{3c}{a}$
한편, $1<\alpha<2$, $5<\beta<6$에서 $6<\alpha+\beta<8$이므로
$6<\dfrac{b}{a}<8$
이때 $a>0$이므로 $6a<b<8a$ ...... ㉠
b는 한 자리 자연수이므로 ㉠을 만족시키는 a의 값은 $a=1$
따라서 $6<b<8$이므로 $b=7$
또, $5<\alpha\beta<12$이므로 $\alpha\beta=\dfrac{3c}{a}$에서
$5<\dfrac{3c}{a}<12$, $5a<3c<12a$
즉, $5<3c<12$이고 c는 한 자리 자연수이므로
$c=2$ 또는 $c=3$
(i) $a=1$, $b=7$, $c=2$일 때
$x^2-7x+6=0$에서
$(x-1)(x-6)=0$ $\therefore x=1$ 또는 $x=6$
따라서 $\underbrace{\text{주어진 조건}}_{1<\alpha<2,\ 5<\beta<6}$을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=1$, $b=7$, $c=3$일 때
$x^2-7x+9=0$에서 $x=\dfrac{7\pm\sqrt{13}}{2}$
$3<\sqrt{13}<4$에서
$-4<-\sqrt{13}<-3$, $3<7-\sqrt{13}<4$
$\dfrac{3}{2}<\dfrac{7-\sqrt{13}}{2}<2$ $\therefore 1<\dfrac{7-\sqrt{13}}{2}<2$
$10<7+\sqrt{13}<11$, $5<\dfrac{7+\sqrt{13}}{2}<\dfrac{11}{2}$
$\therefore 5<\dfrac{7+\sqrt{13}}{2}<6$
따라서 주어진 조건을 만족시킨다.
(i), (ii)에 의하여 $a=1$, $b=7$, $c=3$이므로
$a+b+c=1+7+3=11$

Level UP
이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 α, β일 때,
$a(x-\alpha)(x-\beta)=0$이므로 $a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}=0$에서
$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$가 성립한다.

13 답 ④

해결 key Point!
직사각형 모양의 종이의 윗변과 아랫변이 각각 색종이의 가로, 세로의 길이로 나타내야 한다.

색종이의 짧은 변의 길이를 x cm라고 하면 긴 변의 길이는
$(3x-1)\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3x-1}{2}$(cm)
이때 직사각형 모양의 종이의 넓이가 27 cm^2이므로
$3x\times\left(\dfrac{3x-1}{2}+x\right)=27$, $\dfrac{9x^2-3x}{2}+3x^2=27$
$9x^2-3x+6x^2=54$, $15x^2-3x-54=0$
$5x^2-x-18=0$, $(5x+9)(x-2)=0$
$\therefore x=-\dfrac{9}{5}$ 또는 $x=2$
이때 $x>0$이므로 $x=2$
따라서 색종이의 짧은 변의 길이는 2 cm, 긴 변의 길이는
$\dfrac{3\times2-1}{2}=\dfrac{5}{2}$(cm)이므로 색종이 한 장의 둘레의 길이는
$2\times\left(2+\dfrac{5}{2}\right)=9$(cm)

참고 (1) (직사각형 모양의 종이의 가로의 길이)
=(색종이의 짧은 변의 길이)×3
=(색종이의 긴 변의 길이)×2+1
(2) (직사각형 모양의 종이의 세로의 길이)
=(색종이의 긴 변의 길이)+(색종이의 짧은 변의 길이)

14 답 ③

해결 key Point!

물받이의 밑변의 가로의 길이는 40−2×(물받이의 높이)임을 이용해야 한다.

물받이의 높이를 x cm라고 하면 밑변의 길이는 $(40-2x)$ cm이므로

$x(40-2x)=168$, $40x-2x^2=168$

$x^2-20x+84=0$, $(x-6)(x-14)=0$

$\therefore x=6$ 또는 $x=14$

이때 $40-2x>20$이므로

$2x<20 \qquad \therefore x<10$

따라서 물받이의 높이는 6 cm이다.

참고 (물받이의 밑변의 길이)+2×(물받이의 높이)=40

이므로

(물받이의 밑변의 길이)=40−2×(물받이의 높이)

15 답 ③

해결 key Point!

두 근이 각각 α, β와 $|\alpha|$, $|\beta|$인 이차방정식을 만들고 주어진 이차방정식과 계수를 비교해야 한다.

두 근이 α, β이고 최고차항의 계수가 1인 이차방정식은

$(x-\alpha)(x-\beta)=0$, 즉 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$이므로

$\alpha+\beta=-p$, $\alpha\beta=q$

마찬가지로 두 근이 $|\alpha|$, $|\beta|$이고 최고차항의 계수가 1인 이차방정식은 $(x-|\alpha|)(x-|\beta|)=0$

즉, $x^2-(|\alpha|+|\beta|)x+|\alpha||\beta|=0$이므로

$|\alpha|+|\beta|=p-q$, $|\alpha||\beta|=|\alpha\beta|=4p+q$

(i) $\alpha\beta\ge0$일 때

$|\alpha\beta|=\alpha\beta$이므로

$4p+q=q$, $4p=0$

$\therefore p=0$

이때 $\alpha+\beta=-p=0$이므로 $\beta=-\alpha$

즉, α, β의 부호가 다르므로 $\alpha\beta\ge0$에 모순이다.

(ii) $\alpha\beta<0$일 때

$|\alpha\beta|=-\alpha\beta$이므로

$4p+q=-q$, $2q=-4p$

$\therefore q=-2p$

이때 $\alpha>\beta$이므로 $\alpha>0$, $\beta<0$이어야 한다.

즉, $|\alpha|+|\beta|=p-q$에서 $\alpha-\beta=p-(-2p)=3p$

두 식 $\alpha-\beta=3p$, $\alpha+\beta=-p$를 연립하여 풀면

$\alpha=p$, $\beta=-2p$

$\alpha\beta=q=-2p$이고 $\alpha\beta=p(-2p)=-2p^2$이므로

$-2p^2=-2p$, $p^2-p=0$

$p(p-1)=0 \qquad \therefore p=0$ 또는 $p=1$

이때 $p=0$이면 $\alpha=\beta$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$\therefore p=1$, $q=-2$

(i), (ii)에 의하여 $p-q=1-(-2)=3$

꿀 한줄평

$\alpha\beta\ge0$이면 두 수의 부호가 같고 $\alpha\beta<0$이면 두 수의 부호가 다르다.

이때 $\alpha>\beta$이므로 $\alpha\beta<0$이면 $\alpha>0$, $\beta<0$

또, $\alpha+\beta=0$이면 $\beta=-\alpha$이므로 $\alpha=\beta=0$ 또는 $\alpha\beta<0$이어야 한다.

마찬가지로 $\alpha>\beta$이므로 $\alpha\ne\beta$

즉, $\alpha>\beta$일 때 $\alpha+\beta=0$이면 $\alpha\beta<0$이어야 한다.

16 답 −3

$x^2+(a+1)x-2a=0$의 x의 계수와 상수항을 서로 바꾸면

$x^2-2ax+a+1=0$

$x=3$이 $x^2-2ax+a+1=0$의 근이므로

$9-6a+a+1=0$, $-5a=-10$

$\therefore a=2$

따라서 처음 이차방정식은 $x^2+3x-4=0$이므로

$(x+4)(x-1)=0 \qquad \therefore x=-4$ 또는 $x=1$

따라서 두 근의 합은

$-4+1=-3$

17 답 $-12\sqrt{6}$

$\dfrac{(x+1)(x-3)}{5}=0.4x(x+2)$의 양변에 5를 곱하면

$(x+1)(x-3)=2x(x+2)$, $x^2-2x-3=2x^2+4x$

$x^2+6x+3=0 \qquad \therefore x=-3\pm\sqrt{6}$

이때 $\alpha>\beta$이므로 $\alpha=-3+\sqrt{6}$, $\beta=-3-\sqrt{6}$

$\alpha+\beta=(-3+\sqrt{6})+(-3-\sqrt{6})=-6$,

$\alpha-\beta=(-3+\sqrt{6})-(-3-\sqrt{6})=2\sqrt{6}$

$\therefore \alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=-6\times2\sqrt{6}=-12\sqrt{6}$

18 답 −2

이차방정식 $(-2k+3)x^2+(2k+4)x+k+2=0$이 중근을 가지므로

$(2k+4)^2-4(-2k+3)(k+2)=0$

$4k^2+16k+16+8k^2+4k-24=0$

$12k^2+20k-8=0$, $3k^2+5k-2=0$

$(k+2)(3k-1)=0 \qquad \therefore k=-2$ 또는 $k=\dfrac{1}{3}$

(i) $k=-2$일 때

$(-k+4)x^2+(2k-1)x+k+3=0$, 즉

$6x^2-5x+1=0$에서 $(3x-1)(2x-1)=0$

$\therefore x=\dfrac{1}{3}$ 또는 $x=\dfrac{1}{2}$

(ii) $k=\frac{1}{3}$일 때

$(-k+4)x^2+(2k-1)x+k+3=0$, 즉

$\frac{11}{3}x^2-\frac{1}{3}x+\frac{10}{3}=0$에서 $11x^2-x+10=0$이므로

$(-1)^2-4\times11\times10=-439<0$

따라서 근은 없다.

(i), (ii)에 의하여 $k=-2$

19 답 4

$x^2+mx+m-6=0$의 정수인 두 근을 α, β라고 하면

$x^2+mx+m-6=(x-\alpha)(x-\beta)=0$

$(x-\alpha)(x-\beta)=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$이므로

$\alpha+\beta=-m$, $\alpha\beta=m-6$

이때 $\alpha+\beta+\alpha\beta=-m+m-6=-6$에서

$\alpha+\beta+\alpha\beta+1=-5$

$(\alpha+1)(\beta+1)=-5$

$\therefore \begin{cases}\alpha+1=-5\\ \beta+1=1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}\alpha+1=-1\\ \beta+1=5\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}\alpha+1=1\\ \beta+1=-5\end{cases}$

또는 $\begin{cases}\alpha+1=5\\ \beta+1=-1\end{cases}$

즉, $\begin{cases}\alpha=-6\\ \beta=0\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}\alpha=-2\\ \beta=4\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=-6\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}\alpha=4\\ \beta=-2\end{cases}$

이므로 정수 $m=-(\alpha+\beta)$의 값은

$-(-6+0)=6$ 또는 $-(-2+4)=-2$

따라서 모든 정수 m의 값의 합은

$6+(-2)=4$

Level UP

$AB=k$ (A, B는 정수)의 조건이 주어지면 $A\times B=k$를 만족시키는 모든 A, B의 값을 구해 본다.

이때 $AB=k$의 꼴이 되도록 주어진 식을 적절히 변형하여 두 정수의 곱이 상수가 되는 꼴을 만든다.

20 답 20 %

해당 도시의 수목원의 입장료를 a, 방문객 수를 b라고 하면 입장료를 x % 인상한 후의 입장료는 $a\left(1+\frac{x}{100}\right)$, 방문객 수는 $b\left(1-\frac{x}{200}\right)$이므로 총 수입액은

$a\left(1+\frac{x}{100}\right)\times b\left(1-\frac{x}{200}\right)=ab\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{x}{200}\right)$

입장료를 인상한 후의 총 수입액이 $ab\left(1+\frac{8}{100}\right)$이어야 하므로

$ab\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{x}{200}\right)=ab\left(1+\frac{8}{100}\right)$

$1+\frac{x}{200}-\frac{x^2}{20000}=1+\frac{8}{100}$

$x^2-100x+1600=0$, $(x-20)(x-80)=0$

$\therefore x=20$ 또는 $x=80$

이때 입장료를 한 번 인상할 때 50 % 이상은 인상할 수 없으므로 입장료는 20 % 인상해야 한다.

Level UP

기존 a원인 요금을

x % 인상하면 $a\left(1+\frac{x}{100}\right)$원

x % 인하하면 $a\left(1-\frac{x}{100}\right)$원

21 답 $\frac{33}{50}$

해결 key Point!

$6x^2-5ax+a^2=(2x-a)(3x-a)$이므로 1부터 50까지의 숫자 중 2 또는 3의 배수인 숫자들을 찾아야 한다.

$6x^2-5ax+a^2=0$에서

$(2x-a)(3x-a)=0$ $\quad\therefore x=\frac{a}{2}$ 또는 $x=\frac{a}{3}$

이때 이차방정식이 적어도 하나의 정수인 해를 가지려면 a는 2의 배수 또는 3의 배수이어야 한다.

1부터 50까지의 자연수 중 2의 배수는 2, 4, 8, …, 50의 25개, 3의 배수는 3, 6, 9, …, 48의 16개이고 2의 배수이고 3의 배수인 6의 배수는 6, 12, 18, …, 48의 8개이다.

따라서 2의 배수 또는 3의 배수가 적힌 공의 개수는

$25+16-8=33$이므로 구하는 확률은 $\frac{33}{50}$이다.

22 답 5

해결 key Point!

처음 두 그릇 A, B에 있는 소금의 양을 각각 구해야 한다.

1단계 두 그릇에 있는 각각의 소금의 양 구하기

물을 넣기 전 A 그릇에 있는 소금의 양은

$10\times\frac{30}{100}=3$(g)

가열하기 전 B 그릇에 있는 소금의 양은

$50\times\frac{2}{100}=1$(g)

2단계 두 그릇에 있는 각각의 소금물의 농도를 x로 나타내기

A 그릇에는 x g의 물을 넣었으므로 A 그릇의 소금물 농도는

$\frac{3}{x+10}\times100=\frac{300}{x+10}$(%)

B 그릇은 가열하여 x g의 물을 증발시킨 후 $2x$ g의 소금을 넣었으므로 B 그릇의 소금물 농도는

$\frac{1+2x}{50-x+2x}\times100=\frac{100(1+2x)}{50+x}$(%)

3단계 x의 값 구하기

두 그릇 A, B의 소금물의 농도가 서로 같으므로

$\frac{300}{x+10}=\frac{100(1+2x)}{50+x}$, $\frac{3}{x+10}=\frac{1+2x}{50+x}$

$3(50+x)=(x+10)(1+2x)$, $150+3x=2x^2+21x+10$

$2x^2+18x-140=0$, $x^2+9x-70=0$

$(x+14)(x-5)=0$ $\therefore x=-14$ 또는 $x=5$

이때 $x>0$이므로 $x=5$

단계	채점 기준	배점
❶	두 그릇에 있는 각각의 소금의 양을 구했다.	2점
❷	두 그릇에 있는 각각의 소금물의 농도를 x로 나타냈다.	2점
❸	x의 값을 구했다.	3점

23 답 11명

1단계 눈인사의 횟수가 n각형에서의 대각선의 개수와 같음을 파악하기

동아리의 구성원 n명이 큰 원탁에 둘러 앉은 경우 이웃하지 않은 사람과 눈인사를 나눈 횟수는 n각형에서의 대각선의 개수와 같다.

이때 n각형의 대각선의 개수가 $\frac{n(n-3)}{2}$이므로

$\frac{n(n-3)}{2}=44$

2단계 n의 값 구하기

$n(n-3)=88$에서

$n^2-3n-88=0$, $(n+8)(n-11)=0$

$\therefore n=-8$ 또는 $n=11$

3단계 동아리 구성원의 수 구하기

이때 $x>0$이므로 $n=11$

따라서 동아리의 구성원은 11명이다.

단계	채점 기준	배점
❶	눈인사의 횟수가 n각형에서의 대각선의 개수와 같음을 파악했다.	2점
❷	n의 값을 구했다.	3점
❸	동아리 구성원의 수를 구했다.	2점

꿀 한줄평

서로 이웃한 사람끼리 악수를 하고, 나머지 사람들과 눈인사를 하므로 n명 중 본인과 이웃한 2명을 제외한 모든 사람과 눈인사를 해야 한다. 따라서 n명을 n각형의 점으로 생각하면 눈인사의 횟수가 n각형의 대각선의 개수와 같음을 이해할 수 있다.

Ⅳ 이차함수

01 이차함수의 그래프

Lv. 1 개념을 적용하는 **핵심 문제**

98쪽~100쪽

01 ②	02 ④	03 ⑤	04 5	05 ②
06 ④	07 ②	08 ①	09 ②	10 ④
11 ⑤	12 ④	13 13	14 ⑤	15 ③
16 ④	17 ③	18 ⑤		

01 답 ②

ㄱ. $y=x(x+3)=x^2+3x$이므로 이차함수이다.

ㄴ. $y=70x$이므로 일차함수이다.

ㄷ. $y=(x\times x)\times 6=6x^2$이므로 이차함수이다.

ㄹ. $y=\frac{1}{2}\times\{x+(x+5)\}\times 8=8x+20$이므로 일차함수이다.

ㅁ. $y=\frac{x(x-3)}{2}=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x$이므로 이차함수이다.

따라서 y가 x에 대한 이차함수인 것은 ㄱ, ㄷ, ㅁ이다.

02 답 ④

$f(-1)=10$이므로

$a+2+5=10$ $\therefore a=3$

$\therefore f(x)=3x^2-2x+5$

$f(2)=b$이므로 $b=12-4+5=13$

$\therefore b-a=13-3=10$

03 답 ⑤

⑤ 이차함수 $y=x^2$의 그래프와 x축에 대하여 대칭이다.

참고 (ⅰ) 두 이차함수 $y=x^2$과 $y=-x^2$의 그래프는 각각 y축에 대하여 대칭이다.

(ⅱ) 두 이차함수 $y=x^2$과 $y=-x^2$의 그래프는 서로 x축에 대하여 대칭이다.

04 답 5

1단계 a의 값 구하기

이차함수 $y=-\frac{1}{3}x^2$의 그래프와 x축에 대하여 대칭인 그래프의 식은 $y=\frac{1}{3}x^2$이므로 $a=\frac{1}{3}$

2단계 m의 값 구하기

이차함수 $y=\frac{1}{3}x^2$의 그래프가 점 $(m, 2m-3)$을 지나므로

$2m-3=\frac{1}{3}m^2$, $\frac{1}{3}m^2-2m+3=0$

$m^2-6m+9=0$, $(m-3)^2=0$

$\therefore m=3$

3단계 $6a+m$의 값 구하기

$\therefore 6a+m=6\times\frac{1}{3}+3=5$

단계	채점 기준	비율
❶	a의 값을 구했다.	40 %
❷	m의 값을 구했다.	40 %
❸	$6a+m$의 값을 구했다.	20 %

05 답 ②

□ABCD가 평행사변형이므로 $\overline{AD}/\!/\overline{BC}$

즉, 두 점 A, D의 y좌표는 4로 같다.

또, $\overline{AD}=\overline{BC}=6-(-2)=8$이고 이차함수 $y=ax^2$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 두 점 A, D와 y축 사이의 거리는 $8\times\frac{1}{2}=4$

$\therefore A(-4, 4)$, $D(4, 4)$

따라서 점 $D(4, 4)$가 이차함수 $y=ax^2$의 그래프 위의 점이므로

$4=16a \qquad \therefore a=\frac{1}{4}$

Level UP

□ABCD가 평행사변형이므로 $\overline{AD}/\!/\overline{BC}$, $\overline{AD}=\overline{BC}$임을 이용하면 꼭짓점 D의 좌표를 구할 수 있다.

06 답 ④

이차함수 $y=ax^2-3$의 그래프를 y축의 방향으로 q만큼 평행이동하면 $y=ax^2-3+q$

이 이차함수의 그래프와 $y=4x^2+1$의 그래프가 일치하므로

$a=4$, $-3+q=1$

$\therefore q=4$

이차함수 $y=4x^2+1$의 그래프가 점 $\left(-\frac{1}{2}, b\right)$를 지나므로

$b=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2+1=2$

$\therefore a-b+q=4-2+4=6$

07 답 ②

주어진 그래프는 이차함수 $y=-2x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 그래프의 식은

$f(x)=-2(x+3)^2$

따라서 $f(1)=-2(1+3)^2=-32$,

$f(-4)=-2(-4+3)^2=-2$이므로

$f(1)-f(-4)=-32-(-2)=-30$

Level UP

주어진 그래프의 꼭짓점의 좌표는 꼭짓점이

(1) x축 위에 있으면 ⇨ (y좌표)$=0$

(2) y축 위에 있으면 ⇨ (x좌표)$=0$

(3) 원점이면 ⇨ (x좌표)$=0$, (y좌표)$=0$

08 답 ①

$y=-5x^2+20$에 $y=0$을 대입하면

$-5x^2+20=0$, $5x^2=20$

$x^2=4 \qquad \therefore x=-2$ 또는 $x=2$

이때 $a<b$이므로 $a=-2$, $b=2$

즉, $y=-2(x-2)^2$이고, 이 식에 $x=0$을 대입하면

$y=-2\times(-2)^2=-8$

따라서 이차함수 $y=-2(x-2)^2$의 그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표는 -8이다.

09 답 ②

이차함수 $y=\frac{1}{6}x^2-6$의 그래프가 이차함수 $y=a(x-p)^2$의 그래프의 꼭짓점 $(p, 0)$을 지나므로

$0=\frac{1}{6}p^2-6$, $\frac{1}{6}p^2=6$

$p^2=36 \qquad \therefore p=-6$ 또는 $p=6$

이때 $p>0$이므로 $p=6$

이차함수 $y=a(x-6)^2$의 그래프가 이차함수 $y=\frac{1}{6}x^2-6$의 그래프의 꼭짓점 $(0, -6)$을 지나므로

$-6=36a \qquad \therefore a=-\frac{1}{6}$

$\therefore ap=-\frac{1}{6}\times6=-1$

10 답 ④

이차함수 $y=-(x+2p)^2-3p^2$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-2p, -3p^2)$

이 점이 직선 $y=x-8$ 위에 있으므로

$-3p^2=-2p-8$, $3p^2-2p-8=0$

$(3p+4)(p-2)=0 \qquad \therefore p=-\frac{4}{3}$ 또는 $p=2$

이때 p는 정수이므로 $p=2$

11 답 ⑤

이차함수 $y=2(x+1)^2+k-7$의 그래프는 아래로 볼록하므로 제1, 2, 3사분면만을 지나려면 꼭짓점은 제3사분면 위에 있고 y축과의 교점이 x축 또는 x축의 위쪽에 위치해야 한다.

(i) 꼭짓점의 좌표는 $(-1, k-7)$이므로

$k-7<0 \qquad \therefore k<7$

(ii) $y=2(x+1)^2+k-7$에 $x=0$을 대입하면

$y=2+k-7=k-5\geq 0 \qquad \therefore k\geq 5$

(i), (ii)에 의하여 $5\leq k<7$

12 답 ④

이차함수 $y=\frac{1}{5}x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\frac{1}{5}(x+2)^2+1$

ㄴ. 아래로 볼록한 포물선이다.

ㄷ. 축의 방정식은 $x=-2$이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ, ㅁ이다.

13 답 13

1단계 평행이동한 후의 이차함수의 식 구하기

이차함수 $y=a(x+3)^2$의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 $b+2$만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=a(x+3-5)^2+b+2$

$=a(x-2)^2+b+2$

$=ax^2-4ax+4a+b+2$

2단계 a, b, k의 값 구하기

이 이차함수의 그래프와 이차함수 $y=3x^2-kx+k$의 그래프가 일치하므로

$a=3$, $-4a=-k$, $4a+b+2=k$

$k=4a=12$이므로

$12+b+2=12 \qquad \therefore b=-2$

3단계 $a+b+k$의 값 구하기

$\therefore a+b+k=3+(-2)+12=13$

단계	채점 기준	비율
❶	평행이동한 후의 이차함수의 식을 구했다.	40 %
❷	a, b, k의 값을 구했다.	40 %
❸	$a+b+k$의 값을 구했다.	20 %

14 답 ⑤

두 점 A, H의 좌표는 각각 $(p, p-5)$, $(p, 0)$이므로

$\overline{\mathrm{OH}}=p$, $\overline{\mathrm{AH}}=p-5$

$\triangle$OHA의 넓이가 12이므로

$\frac{1}{2}p(p-5)=12$, $p(p-5)=24$

$p^2-5p-24=0$, $(p+3)(p-8)=0$

$\therefore p=-3$ 또는 $p=8$

이때 점 A는 제1사분면 위의 점이므로 $p=8$

참고 점 A에서 x축에 내린 수선의 발이 H이므로

$\triangle\mathrm{OHA}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OH}}\times\overline{\mathrm{AH}}$

15 답 ③

구하는 이차함수의 식을 $y=a(x-p)^2+q$라고 하면 조건 (가)에 의하여 $a>0$이고, 조건 (나)에 의하여 $|a|=5$이므로 $a=5$

또, 꼭짓점의 좌표는 (p, q)이고, 조건 (다)에 의하여 $p>0$, $q<0$

따라서 조건을 만족시키는 포물선을 그래프로 하는 이차함수의 식은 ③이다.

16 답 ④

그래프가 아래로 볼록하므로 $a>0$

꼭짓점 (p, q)가 제3사분면 위에 있으므로 $p<0$, $q<0$

① $a>0$이므로 $-a<0$

② $p<0$

③ $p<0$, $q<0$이므로 $p+q<0$

④ $p<0$, $q<0$이므로 $pq>0$

이때 $a>0$이므로 $a+pq>0$

⑤ 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프의 y절편이 음수이므로 $x=0$을 대입한 값은 음수이다.

$\therefore ap^2+q<0$

따라서 부호가 나머지 넷과 다른 하나는 ④이다.

Level UP

(1) $x>0$, $y>0$이면 $xy>0$, $x+y>0$

(2) $x>0$, $y<0$이면 $xy<0$, $x-y>0$

(3) $x<0$, $y>0$이면 $xy<0$, $x-y<0$

(4) $x<0$, $y<0$이면 $xy>0$, $x+y<0$

17 답 ③

그래프가 위로 볼록하므로 $a<0$

꼭짓점 (p, q)가 제1사분면 위에 있으므로 $p>0$, $q>0$

따라서 이차함수 $y=(x-a+p)^2-q$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(a-p, -q)$이고 $a-p<0$, $-q<0$이므로 꼭짓점은 제3사분면 위에 있다.

18 답 ⑤

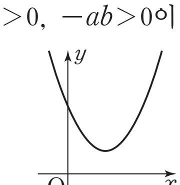
그래프가 오른쪽 위로 향하므로 $a>0$

y절편이 음수이므로 $b<0$

이때 이차함수 $y=a(x+b)^2-ab$의 그래프는 $a>0$이므로 아래로 볼록하다.

또, 꼭짓점의 좌표는 $(-b, -ab)$이고 $-b>0$, $-ab>0$이므로 꼭짓점은 제1사분면 위에 있다.

따라서 이차함수 $y=a(x+b)^2-ab$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 제3, 4사분면을 지나지 않는다.



Lv. 2 사고를 확장하는 실전 문제

101쪽~105쪽

01 ①	**02** ②	**03** $\frac{3}{4}$	**04** ⑤	**05** ④
06 ④	**07** 12	**08** 8	**09** 2	**10** ①
11 ⑤	**12** ④	**13** ②	**14** 6	**15** $\frac{1}{4}$
16 ⑤	**17** ⑤	**18** 제4사분면		**19** ②
20 $g(x)=-2x^2+8x-4$			**21** ③	**22** 17
23 12	**24** ②			

01 답 ①

해결 key Point!

$2f(x)+f(1-x)=3x^2$에서 x 대신에 $1-x$를 대입한 뒤, 연립해서 풀어야 한다.

$2f(x)+f(1-x)=3x^2$ …… ㉠

x 대신에 $1-x$를 ㉠에 대입하면

$2f(1-x)+f(x)=3(1-x)^2$ …… ㉡

$2\times$㉠$-$㉡을 하면

$3f(x)=6x^2-3(x-1)^2=3x^2+6x-3$

$\therefore f(x)=x^2+2x-1$

$\therefore f(3)=3^2+2\times3-1=14$

다른 풀이

$2f(x)+f(1-x)=3x^2$에 $x=3$을 대입하면

$2f(3)+f(-2)=27$ …… ㉠

$2f(x)+f(1-x)=3x^2$에 $x=-2$를 대입하면

$2f(-2)+f(3)=12$ …… ㉡

$2\times$㉠$-$㉡을 하면

$3f(3)=42 \quad \therefore f(3)=14$

02 답 ②

해결 key Point!

이차함수의 그래프 위에 있는 점 B와 점 F의 좌표를 a로 나타내야 한다.

점 B의 좌표는 $(a,\ a^2)$이고 $\overline{AB}=2\overline{AE}=a$에서

$\overline{AE}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}a$이므로 점 F의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2}a,\ \frac{1}{4}a^2\right)$이다.

$\therefore \overline{AG}=\overline{OA}-\overline{OG}=a^2-\frac{1}{4}a^2=\frac{3}{4}a^2$

정사각형 ABCD와 직사각형 EFGA의 넓이가 같으므로

$a^2=\frac{1}{2}a\times\frac{3}{4}a^2,\ a^2=\frac{3}{8}a^3$

$a^2\left(\frac{3}{8}a-1\right)=0 \qquad \therefore a=0$ 또는 $a=\frac{8}{3}$

이때 $a>0$이므로 $a=\frac{8}{3}$

따라서 정사각형 ABCD의 넓이는 $a^2=\frac{64}{9}$이다.

03 답 $\frac{3}{4}$

해결 key Point!

삼각형 AOB와 삼각형 APB의 넓이가 같아지려면 두 삼각형의 밑변이 같으므로 직선 AB와 직선 OP가 평행해야 한다.

1단계 직선 OP의 기울기 구하기

두 삼각형 AOB와 APB의 넓이가 같아지려면 두 삼각형의 밑변이 선분 AB로 같으므로 직선 AB와 직선 OP가 평행해야 한다.

따라서 직선 OP의 기울기는 $\frac{1}{2}$이다.

2단계 $a+b$의 값 구하기

이때 두 점 $O(0,\ 0)$, $P(a,\ b)$를 지나는 직선의 방정식은 $y=\frac{1}{2}x$이므로 점 P는 $y=x^2$의 그래프와 $y=\frac{1}{2}x$의 그래프의 교점이다.

즉, $x^2=\frac{1}{2}x$에서

$x^2-\frac{1}{2}x=0,\ x\left(x-\frac{1}{2}\right)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

이때 점 P는 원점이 아니므로 $x=\frac{1}{2}$

따라서 점 P의 좌표는 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$이므로

$a+b=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

단계	채점 기준	비율
❶	직선 OP의 기울기를 구했다.	30 %
❷	$a+b$의 값을 구했다.	70 %

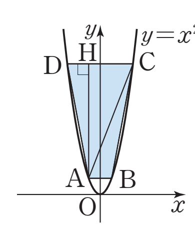
04 답 ⑤

해결 key Point!

네 점 A, B, C, D가 모두 이차함수 $y=x^2$ 위의 점이고, 삼각형 ABC와 삼각형 ACD의 높이가 같음을 이용해야 한다.

삼각형 ABC와 삼각형 ACD의 높이는 같고 넓이의 비가 1 : 2이므로 두 밑변의 길이의 비는 $\overline{AB}:\overline{CD}=1:2$

점 A의 좌표를 $(-a,\ a^2)\ (a>0)$이라고 하면 점 C의 좌표는 $(2a,\ 4a^2)$



오른쪽 그림과 같이 점 A에서 선분 CD에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$H(-a,\ 4a^2)$

삼각형 AHC가 직각삼각형이고

$\overline{CH}=3a,\ \overline{AH}=3a^2$이므로 피타고라스

정리에 의하여

$\overline{AC}=\sqrt{(3a)^2+(3a^2)^2}=\sqrt{9a^2+9a^4}=3a\sqrt{1+a^2}$

즉, $3a\sqrt{1+a^2}=6\sqrt{5}$이므로 $a\sqrt{1+a^2}=2\sqrt{5}$

이 식의 양변을 제곱하면

$a^2(1+a^2)=20$, $a^4+a^2-20=0$

$a^2=t$라고 하면

$t^2+t-20=0$, $(t+5)(t-4)=0$

$\therefore t=-5$ 또는 $t=4$

이때 $t>0$이므로 $t=4$

즉, $a^2=4$이고 $a>0$이므로 $a=2$

$\therefore B(2, 4)$, $C(4, 16)$

따라서 사다리꼴 ABCD의 높이는 $16-4=12$이다.

05 답 ④

해결 key Point!

$\overline{AP}:\overline{PB}=2:1$이면 점 P의 x좌표의 값과 점 A의 x좌표의 값의 비는 $1:3$임을 이용해야 한다.

$y=-\frac{1}{2}x+k$에 $y=0$을 대입하면

$0=-\frac{1}{2}x+k$, $\frac{1}{2}x=k$

$\therefore x=2k$

$\therefore A(2k, 0)$

즉, 직선 $y=-\frac{1}{2}x+k$의 x절편이 $2k$이고 $\overline{AP}:\overline{PB}=2:1$이면 (점 P의 x좌표의 값)$=\frac{1}{3}\times$(점 A의 x좌표의 값)이므로 점 P의 x좌표의 값은 $\frac{1}{3}\times 2k=\frac{2}{3}k$

따라서 $P\left(\frac{2}{3}k, \frac{4}{9}k^2\right)$이고 점 P는 직선 $y=-\frac{1}{2}x+k$ 위의 점이므로

$\frac{4}{9}k^2=-\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}k+k$, $\frac{4}{9}k^2-\frac{2}{3}k=0$

$4k^2-6k=0$, $2k(2k-3)=0$

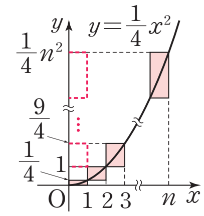
$\therefore k=0$ 또는 $k=\frac{2}{3}$

이때 $k\neq 0$이므로 $k=\frac{2}{3}$

06 답 ④

해결 key Point!

각 직사각형을 평행이동하여 한 줄로 세우면 가로의 길이가 1, 세로의 길이가 $\frac{1}{4}n^2$인 직사각형이 됨을 이용해야 한다.



계단 모양으로 나열된 n개의 모든 직사각형을 모두 y축으로 옮기면 모든 직사각형을 합친 도형은 오른쪽 그림과 같이 가로의 길이가 1이고 세로의 길이가 $\frac{1}{4}n^2$인 직사각형이 된다.

따라서 계단 모양으로 나열된 n개의 모든 직사각형의 넓이의 합이 144이므로

$1\times\frac{1}{4}n^2=144$, $n^2=576$

$\therefore n=-24$ 또는 $n=24$

이때 $n>0$이므로 $n=24$

07 답 12

해결 key Point!

점 A의 x좌표를 k로 놓고 점 C의 좌표를 k로 나타내야 한다.

제1사분면 위의 점 A의 x좌표를 k $(k>0)$라고 하면 점 A는 이차함수 $y=x^2$의 그래프 위에 있으므로 $A(k, k^2)$

점 B의 x좌표는 점 A의 x좌표와 같고 $\overline{AB}=1$이므로

$B(k, k^2-1)$

점 C의 y좌표는 점 B의 y좌표와 같고 $\overline{BC}=\overline{AB}=1$이므로

$C(k+1, k^2-1)$

이때 점 C는 이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프 위의 점이므로

$C\left(k+1, \frac{1}{2}(k+1)^2\right)$

즉, $k^2-1=\frac{1}{2}(k+1)^2$이므로

$2k^2-2=k^2+2k+1$, $k^2-2k-3=0$

$(k+1)(k-3)=0$ $\quad\therefore k=-1$ 또는 $k=3$

이때 $k>0$이므로 $k=3$

따라서 점 A의 좌표는 $(3, 9)$이므로 점 A의 x좌표와 y좌표의 합은

$3+9=12$

08 답 8

해결 key Point!

p, q를 a로 나타내야 한다.

두 점 A, B의 y좌표가 12이므로 $y=ax^2$ $(a>0)$에서

$12=ax^2$, $x^2=\frac{12}{a}$

$\therefore x=-\sqrt{\frac{12}{a}}$ 또는 $x=\sqrt{\frac{12}{a}}$

이때 $a>0$이므로 $p=-\sqrt{\frac{12}{a}}$, $q=\sqrt{\frac{12}{a}}$

$\therefore$ (삼각형 AOB의 넓이)$=\frac{1}{2}\times\left\{\sqrt{\frac{12}{a}}-\left(-\sqrt{\frac{12}{a}}\right)\right\}\times 12$

$=12\sqrt{\frac{12}{a}}=\sqrt{\frac{2^6\times 3^3}{a}}$

삼각형 AOB의 넓이가 자연수가 되려면 a는 $2^6\times 3^3$의 약수 중 $3\times$(자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.
따라서 자연수 a는 $a=3$, $a=3\times 2^2$, $a=3\times 2^4$, $a=3\times 2^6$, $a=3^3$, $a=2^2\times 3^3$, $a=2^4\times 3^3$, $a=2^6\times 3^3$의 8개이다.

09 답 2

1단계 점 C의 x좌표 구하기
점 C의 x좌표를 t라고 하면 $\overline{BC}=2t$, $\overline{CG}=2\times 9=18$이므로 사각형 BFGC의 넓이는 $2t\times 18=36t$
한편, $\overline{AB}=\overline{CD}=3$에서 $\overline{AD}=2(t+3)$이므로 사각형 AEHD의 넓이는 $2(t+3)\times 18=36(t+3)$
사각형 AEHD의 넓이가 사각형 BFGC의 넓이의 2배이므로
$36(t+3)=2\times 36t$, $t+3=2t$
$\therefore t=3$

2단계 a, c의 값 구하기
즉, 점 C의 좌표는 $(3, 9)$이고 이 점은 이차함수 $y=ax^2$의 그래프 위의 점이므로
$9=9a \qquad \therefore a=1$
이때 두 이차함수 $y=ax^2$, $y=cx^2$의 그래프는 x축에 대하여 대칭이므로 $c=-1$

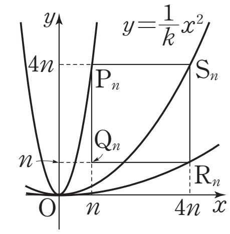
3단계 b, d의 값 구하기
또, $\overline{AB}=\overline{CD}=3$이므로 점 D의 좌표는 $(6, 9)$
이 점은 $y=bx^2$의 그래프 위의 점이므로
$9=36b \qquad \therefore b=\frac{1}{4}$
이때 두 이차함수 $y=bx^2$, $y=dx^2$의 그래프는 x축에 대하여 대칭이므로 $d=-\frac{1}{4}$

4단계 $a+b-c+d$의 값 구하기
$\therefore a+b-c+d=1+\frac{1}{4}-(-1)+\left(-\frac{1}{4}\right)=2$

단계	채점 기준	비율
❶	점 C의 x좌표를 구했다.	30 %
❷	a, c의 값을 구했다.	30 %
❸	b, d의 값을 구했다.	30 %
❹	$a+b-c+d$의 값을 구했다.	10 %

10 답 ①

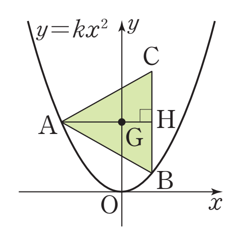
해결 key Point!
양수 k에 대하여 이차함수 $y=\frac{1}{k}x^2$의 그래프에서 $\frac{1}{k}$의 값이 클수록 그래프의 폭이 좁아짐을 이용해야 한다.



정사각형 A_n에 대하여 이차함수 $y=\frac{1}{k}x^2$의 그래프가 점 $P_n(n, 4n)$을 지날 때 $\frac{1}{k}$의 값이 최대이고, 점 $R_n(4n, n)$을 지날 때 $\frac{1}{k}$의 값이 최소이다.
이차함수 $y=\frac{1}{k}x^2$의 그래프가 점 $P_n(n, 4n)$을 지날 때
$4n=\frac{1}{k}n^2 \qquad \therefore \frac{1}{k}=\frac{4}{n}$
또, 이차함수 $y=\frac{1}{k}x^2$의 그래프가 점 $R_n(4n, n)$을 지날 때
$n=\frac{1}{k}(4n)^2 \qquad \therefore \frac{1}{k}=\frac{1}{16n}$
즉, $\frac{1}{16n}<\frac{1}{k}<\frac{4}{n}$일 때, 이차함수 $y=\frac{1}{k}x^2$의 그래프와 정사각형 A_n이 서로 다른 두 점에서 만난다.
$n=8$일 때, $\frac{1}{128}<\frac{1}{k}<\frac{1}{2}$이므로 $2<k<128$
따라서 조건을 만족시키는 자연수 k는 3, 4, 5, …, 127의 125개이므로
$f(8)=125$

11 답 ⑤

해결 key Point!
꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라고 할 때, $\overline{AG}:\overline{GH}=2:1$임을 이용해야 한다.



오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라고 하면 점 $G(0, p)$는 $\overline{AH}$ 위에 있고 점 G가 정삼각형 ABC의 무게중심이므로
$\overline{CH}=\overline{BH}=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$
$\triangle CAH$에서 피타고라스 정리에 의하여
$\overline{AH}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{3})^2}=3$
따라서 $\overline{AG}=\frac{2}{3}\overline{AH}=2$, $\overline{GH}=\frac{1}{3}\overline{AH}=1$이므로
$A(-2, p)$, $B(1, p-\sqrt{3})$
이때 두 점 A, B는 이차함수 $y=kx^2$의 그래프 위의 점이므로
$p=4k \qquad \cdots\cdots ㉠$
$p-\sqrt{3}=k \qquad \cdots\cdots ㉡$
㉠을 ㉡에 대입하면
$4k-\sqrt{3}=k$, $3k=\sqrt{3}$
$\therefore k=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $p=\frac{4\sqrt{3}}{3}$
$\therefore p+k=\frac{4\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$

12 답 ④

해결 key Point!

$f(x)=ax^2+c$에서 a와 c의 부호에 따라
$y=|f(x)|=\begin{cases} f(x) & (f(x)\ge 0) \\ -f(x) & (f(x)<0) \end{cases}$의 그래프를 생각해야 한다.

가장 큰 a의 값을 구해야 하므로 $a>0$인 경우만 생각한다.
이차함수 $f(x)=ax^2+c$의 꼭짓점의 좌표는 $(0, c)$이고
$-1<x\le 1$이므로 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(0)=c$, 최댓값은 $f(1)=a+c$이다.
이때 $|f(x)|\le 2$이면 $-2\le f(x)\le 2$이므로 $c\ge -2$
$a+c\le 2$ $\quad\therefore a\le 2-c$
즉, a의 값이 최대가 되려면 c의 값이 최소가 되어야 하므로
$c=-2$
$\therefore a\le 4$
따라서 가장 큰 a의 값은 4이다.

13 답 ②

점 P는 이차함수 $y=-x^2-1$의 그래프 위의 점이므로
$P(a, -a^2-1)$이라고 하자.
이때 $\overline{PQ}=4$이므로 $Q(a+4, -a^2-1)$
점 Q는 일차함수 $y=-x+1$의 그래프 위의 점이므로
$-a^2-1=-(a+4)+1$, $a^2-a-2=0$
$(a+1)(a-2)=0$ $\quad\therefore a=-1$ 또는 $a=2$
따라서 점 P는 제4사분면 위의 점이므로 점 P의 x좌표는 2이다.

14 답 6

해결 key Point!

정사각형의 넓이를 이용하여 점 P의 좌표를 구해야 한다.

사각형 AQBP는 넓이가 18인 정사각형이므로 정사각형의 한 변의 길이를 p라고 하면 $p^2=18$
이때 $p>0$이므로 $p=3\sqrt{2}$
삼각형 OBP가 직각이등변삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여
$a^2+a^2=(3\sqrt{2})^2$, $2a^2=18$
$a^2=9$ $\quad\therefore a=-3$ 또는 $a=3$
이때 $a>0$이므로 $a=3$
따라서 이차함수 $f(x)=\frac{1}{n}(x+3)^2$의 그래프가 점 $P(0, 3)$을 지나므로
$3=\frac{1}{n}(0+3)^2$, $3=\frac{9}{n}$
$\therefore n=3$
$\therefore a+n=3+3=6$

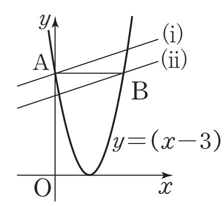
15 답 $\frac{1}{4}$

해결 key Point!

두 점 A, B의 좌표를 구한 뒤, 직선 $y=\frac{x}{3}+a$가 두 점 A, B를 지날 때의 a의 값을 구해야 한다.

1단계 점 B의 좌표 구하기
$y=(x-3)^2$에서 $x=0$이면 $y=9$이므로 $A(0, 9)$
점 B의 y좌표가 9이므로
$(x-3)^2=9$, $x^2-6x+9=9$
$x^2-6x=0$, $x(x-6)=0$
$\therefore x=0$ 또는 $x=6$
$\therefore B(6, 9)$

2단계 a의 값 구하기
직선 $y=\frac{x}{3}+a$가 선분 AB와 만나려면
(i) 직선 $y=\frac{x}{3}+a$가 점 $A(0, 9)$를 지날 때
$9=0+a$ $\quad\therefore a=9$
(ii) 직선 $y=\frac{x}{3}+a$가 점 $B(6, 9)$를 지날 때
$9=2+a$ $\quad\therefore a=7$



(i), (ii)에 의하여 a의 값의 범위는 $7\le a\le 9$
이때 정팔면체 모양의 주사위에는 숫자 9가 없으므로 a의 값이 7, 8이면 직선 $y=\frac{x}{3}+a$가 선분 AB와 만난다.

3단계 직선 $y=\frac{x}{3}+a$가 선분 AB와 만날 확률 구하기
따라서 구하는 확률은
$\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

단계	채점 기준	비율
❶	점 B의 좌표를 구했다.	40 %
❷	a의 값을 구했다.	40 %
❸	직선 $y=\frac{x}{3}+a$가 선분 AB와 만날 확률을 구했다.	20 %

16 답 ⑤

해결 key Point!

선분 AB의 길이는 주어진 두 이차함수의 그래프의 꼭짓점 사이의 거리임을 이용해야 한다.

두 이차함수 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2$, $y=\frac{1}{2}\left(x-\frac{5}{3}\right)^2$의 그래프는 평행이동하여 포개어질 수 있고 선분 AB는 x축과 평행하므로 선분 AB의 길이는 두 그래프의 꼭짓점 사이의 거리와 같다.

$y=\frac{1}{2}(x+1)^2$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-1,\ 0)$

$y=\frac{1}{2}\left(x-\frac{5}{3}\right)^2$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $\left(\frac{5}{3},\ 0\right)$

따라서 선분 AB의 길이는

$\frac{5}{3}-(-1)=\frac{5}{3}+1=\frac{8}{3}$

17 답 ⑤

해결 key Point!

선분 PQ의 중점이 원점임을 이용해야 한다.

이차함수 $y=x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=(x+1)^2-2$

이 이차함수의 그래프와 직선 $y=mx$가 두 점 P, Q에서 만나므로 두 점 P, Q의 x좌표를 각각 α, β라고 하면

$(\alpha+1)^2-2=m\alpha$, $(\beta+1)^2-2=m\beta$

$\therefore\ \alpha^2+(2-m)\alpha-1=0$ …… ㉠

$\beta^2+(2-m)\beta-1=0$ …… ㉡

이때 선분 PQ의 길이를 이등분하는 점이 원점이므로

$\frac{\alpha+\beta}{2}=0 \qquad \therefore\ \alpha+\beta=0$

$\therefore\ \beta=-\alpha$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$\alpha^2-(2-m)\alpha-1=0$ …… ㉣

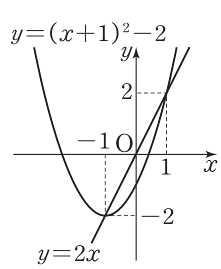
㉠－㉣을 하면

$2(2-m)\alpha=0 \qquad \therefore\ \alpha=0$ 또는 $m=2$

$\alpha=0$일 때, 이차함수 $y=(x+1)^2-2$와 직선 $y=mx$는 한 점에서 만나므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

$\therefore\ m=2$

참고 이차함수 $y=(x+1)^2-2$의 그래프와 직선 $y=2x$는 오른쪽 그림과 같다.



18 답 제4사분면

해결 key Point!

주어진 이차함수의 꼭짓점의 좌표를 구한 후 그 꼭짓점의 x좌표와 y좌표의 부호를 알아봐야 한다.

이차함수 $y=-5(x+a-3)^2+7a-21$의 축의 방정식은

$x=-a+3$

축이 y축의 오른쪽에 위치하므로

$-a+3>0 \qquad \therefore\ a<3$

이차함수 $y=-5(x+a-3)^2+7a-21$의 꼭짓점의 좌표는 $(-a+3,\ 7a-21)$이므로 $a<3$에서

$7a<21 \qquad \therefore\ 7a-21<0$

따라서 꼭짓점 $(-a+3,\ 7a-21)$은 제4사분면 위에 있다.

19 답 ②

이차함수 $y=-4(x-2)^2+16$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(2,\ 16)$이므로 $y=-4(x-2)^2+16$의 그래프는 $y=-4x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 16만큼 평행이동한 것이다.

두 이차함수 $y=-4x^2$, $y=-4(x-2)^2+16$의 그래프의 교점의 x좌표는 $-4x^2=-4(x-2)^2+16$에서

$-4x^2=-4x^2+16x$, $16x=0$

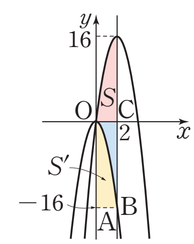
$\therefore\ x=0$

$y=-4x^2$에 $x=0$을 대입하면 $y=0$

즉, 오른쪽 그림과 같이 영역 S와 S'의 넓이가 같다.

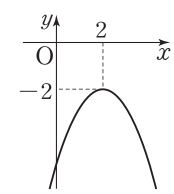
따라서 구하는 넓이는 □OABC의 넓이와 같으므로

$2\times16=32$



20 답 $g(x)=-2x^2+8x-4$

이차함수 $f(x)=2(x-2)^2+2$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(2,\ 2)$이므로 점 $(2,\ 2)$를 중심으로 $y=f(x)$의 그래프를 180° 회전시키면 꼭짓점은 그대로이고 위로 볼록인 그래프가 된다.



따라서 이 그래프의 함수식은 $y=-2(x-2)^2+2$이고, 이 그래프를 y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 함수가 $g(x)$이므로

$g(x)=-2(x-2)^2+2+k \qquad \therefore\ y=-2x^2+8x-6+k$

이때 $g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 두 점 A, B의 좌표를 각각 $(\alpha,\ 0)$, $(\beta,\ 0)$이라고 하면 α, β는

$-2x^2+8x-6+k=0$의 두 근이다. 즉,

$$\begin{aligned}-2x^2+8x-6+k&=-2(x-\alpha)(x-\beta)\\&=-2\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}\\&=-2x^2+2(\alpha+\beta)x-2\alpha\beta\end{aligned}$$

이므로 $8=2(\alpha+\beta)$, $-6+k=-2\alpha\beta$

$\therefore\ \alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=\frac{6-k}{2}$

$$\begin{aligned}\therefore\ \overline{AB}&=|\alpha-\beta|\\&=\sqrt{(\alpha-\beta)^2}\\&=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}\\&=\sqrt{4^2-4\times\frac{6-k}{2}}\\&=\sqrt{4+2k}\end{aligned}$$

즉, $\sqrt{4+2k}=2\sqrt{2}$이므로

$4+2k=8$, $2k=4$

$\therefore k=2$

$\therefore g(x)=-2x^2+8x-4$

Level UP

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 α, β일 때,
$a(x-\alpha)(x-\beta)=a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}=0$이므로
$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$이다.

21 답 ③

이차함수 $y=\frac{1}{3}(x+5)^2+k$의 그래프의 축의 방정식은

$x=-5$이고 $\overline{AB}=12$이므로

$A(-5-6, 0)$, $B(-5+6, 0)$, 즉 $A(-11, 0)$, $B(1, 0)$

$y=\frac{1}{3}(x+5)^2+k$의 그래프가 점 $B(1, 0)$을 지나므로

$0=\frac{1}{3}(1+5)^2+k \qquad \therefore k=-12$

22 답 17

해결 key Point!

주어진 두 이차함수의 그래프가 꼭짓점에 대하여 대칭임을 이용하여 함수 $y=g(x)$의 그래프의 식을 구해야 한다.

이차함수 $f(x)=-(x-1)^2+1$의 그래프의 꼭짓점이

$A(1, 1)$이므로 이차함수 $y=g(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표도 $(1, 1)$이다.

즉, $g(x)=a(x-1)^2+1=ax^2-2ax+a+1$이므로

$b=-2a$, $c=a+1$

이때 $g(0)=c=a+1$이므로 $B(0, a+1)$

점 C는 점 B와 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로 $C(2, a+1)$

두 점 A, C를 지나는 직선은 기울기가 $\frac{a+1-1}{2-1}=a$이므로

직선의 방정식을 $y=ax+n$ (n은 상수)이라고 하면 이 직선이 점 $(1, 1)$을 지나므로

$1=a+n \qquad \therefore n=1-a$

$\therefore y=ax+1-a$

이 직선의 y절편이 $1-a$이므로 $D(0, 1-a)$

$\overline{BC}=2$, $\overline{BD}=(a+1)-(1-a)=2a$이고 삼각형 BDC의 넓이가 8이므로

$\frac{1}{2}\times2\times2a=8$, $2a=8$

$\therefore a=4$

따라서 $b=-8$, $c=5$이므로 $g(x)=4x^2-8x+5$

$\therefore g(3)=4\times3^2-8\times3+5=17$

23 답 12

$y=-(x-1)^2+6$에 $x=0$을 대입하면

$y=-(-1)^2+6=5 \qquad \therefore B(0, 5)$

$\therefore k=5$

또, 이차함수 $y=-(x-1)^2+6$에서 점 C는 점 B와 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로 점 C의 좌표는 $(2, 5)$

$\overline{BC}=2$이므로 $\overline{AB}:\overline{BC}=2:1$에서

$\overline{AB}=2\overline{BC}=4 \qquad \therefore A(-4, 5)$

두 점 $A(-4, 5)$, $B(0, 5)$가 이차함수

$y=-(x-p)^2+q$의 그래프 위의 점이므로

$5=-(-4-p)^2+q$, $5=-p^2+q$

$-(-4-p)^2+q=-p^2+q$, $-16-8p-p^2+q=-p^2+q$

$8p=-16 \qquad \therefore p=-2$

$5=-(-2)^2+q$에서 $q=9$

$\therefore k+p+q=5+(-2)+9=12$

다른 풀이

두 점 $A(-4, 5)$, $B(0, 5)$는 직선 $x=p$에 대칭이므로

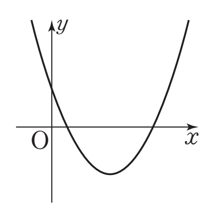
$p=\frac{-4+0}{2}=-2$

즉, $y=-(x+2)^2+q$의 그래프가 점 $(0, 5)$를 지나므로

$5=-2^2+q \qquad \therefore q=9$

24 답 ②

이차함수 $y=a(x+p)^2+q$의 그래프가 제1사분면, 제2사분면, 제4사분면만을 지나려면 오른쪽 그림과 같이 아래로 볼록하고 꼭짓점 $(-p, q)$가 제4사분면에 있어야 한다.



따라서 $a>0$, $-p>0$, $q<0$이어야 하므로

$a>0$, $p<0$, $q<0$

02 이차함수의 활용

Lv. 1 개념을 적용하는 핵심 문제 106쪽~108쪽

01 ②	02 ④	03 ③	04 ③	05 $\frac{3}{2}$
06 ④	07 ①	08 ③	09 ③	10 ①
11 ③	12 ⑤	13 ④	14 ⑤	15 ①
16 128	17 ③	18 6초		

01 답 ②

$y=x^2-2ax+b$

$=x^2-2ax+a^2-a^2+b$

$=(x-a)^2-a^2+b$

이므로 이차함수 $y=x^2-2ax+b$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(a,\ -a^2+b)$

$y=\frac{1}{2}x^2+4x+a-b$

$=\frac{1}{2}(x^2+8x+16-16)+a-b$

$=\frac{1}{2}(x+4)^2-8+a-b$

이므로 이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2+4x+a-b$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-4,\ -8+a-b)$

두 그래프의 꼭짓점이 서로 일치하므로

$a=-4,\ -a^2+b=-8+a-b$

$-a^2+b=-8+a-b$에서

$-16+b=-8-4-b,\ 2b=4$

$\therefore\ b=2$

$\therefore\ a+b=-4+2=-2$

02 답 ④

이차함수 $y=-6x^2+4x+a$의 그래프가 점 $\left(-\frac{1}{3},\ 0\right)$을 지나므로

$0=-\frac{2}{3}-\frac{4}{3}+a \qquad \therefore\ a=2$

$y=-6x^2+4x+2$에 $y=0$을 대입하면

$0=-6x^2+4x+2,\ 0=-2(3x^2-2x-1)$

$0=-2(3x+1)(x-1) \qquad \therefore\ x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=1$

즉, $y=-6x^2+4x+2$의 그래프가 x축과 만나는 다른 한 점의 좌표는 $(1,\ 0)$이다.

또, $y=-6x^2+4x+2$에 $x=0$을 대입하면 $y=2$이므로 그래프가 y축과 만나는 점의 좌표는 $(0,\ 2)$이다.

03 답 ③

$y=2x^2-5x+3a$

$=2\left(x^2-\frac{5}{2}x+\frac{25}{16}-\frac{25}{16}\right)+3a$

$=2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{8}+3a$

이 이차함수의 그래프가 아래로 볼록하고 x축과 만나지 않으므로 꼭짓점의 y좌표는 양수이어야 한다.

즉, $-\frac{25}{8}+3a>0$이므로

$3a>\frac{25}{8} \qquad \therefore\ a>\frac{25}{24}$

또, 이 이차함수의 그래프가 점 $(a,\ 3a^2-8)$을 지나므로

$3a^2-8=2a^2-5a+3a,\ a^2+2a-8=0$

$(a+4)(a-2)=0 \qquad \therefore\ a=-4$ 또는 $a=2$

이때 $a>\frac{25}{24}$이므로 $a=2$

04 답 ③

$y=-\frac{1}{4}x^2-ax-\frac{1}{3}$

$=-\frac{1}{4}(x^2+4ax+4a^2-4a^2)-\frac{1}{3}$

$=-\frac{1}{4}(x+2a)^2+a^2-\frac{1}{3}$

이 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=-\frac{1}{4}(x+2a+4)^2+a^2-\frac{1}{3}$이므로 이 이차함수의 축의 방정식은 $x=-2a-4$ …… ㉠

이 그래프가 $x<2$일 때 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하고, $x>2$일 때 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 축의 방정식은 $x=2$이다.

따라서 ㉠에서 $-2a-4=2$이므로

$-2a=6 \qquad \therefore\ a=-3$

05 답 $\frac{3}{2}$

1단계 점 A의 좌표 구하기

$y=-2x^2-4x+3$

$=-2(x^2+2x+1-1)+3$

$=-2(x+1)^2+5$

이므로 $y=-2x^2-4x+3$의 그래프의 꼭짓점 A는 $\mathrm{A}(-1,\ 5)$

2단계 점 B의 좌표 구하기

$y=-2x^2-4x+3$에 $x=0$을 대입하면 $y=3$

$\therefore\ \mathrm{B}(0,\ 3)$

3단계 삼각형 AOB의 넓이 구하기

$\therefore\ \triangle\mathrm{AOB}=\frac{1}{2}\times3\times1=\frac{3}{2}$

단계	채점 기준	비율
❶	점 A의 좌표를 구했다.	40 %
❷	점 B의 좌표를 구했다.	40 %
❸	삼각형 AOB의 넓이를 구했다.	20 %

06 답 ④

그래프가 위로 볼록하므로 $a<0$

축이 y축의 오른쪽에 있으므로

$ab<0 \qquad \therefore\ b>0$

y축과의 교점이 x축의 위쪽에 있으므로 $c>0$

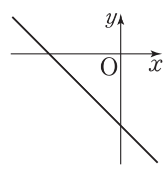
③ $y=ax^2+bx+c$에 $x=1$을 대입하면 $a+b+c=0$
④ $y=ax^2+bx+c$에 $x=-1$을 대입하면 $a-b+c<0$
⑤ $y=ax^2+bx+c$에 $x=2$를 대입하면 $4a+2b+c<0$
따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

Level UP

주어진 이차함수를 $f(x)=ax^2+bx+c$라고 하면
(1) $x=-1$일 때의 함숫값은 음수이므로
$f(-1)<0 \quad \therefore a-b+c<0$
(2) $x=1$일 때의 함숫값은 0이므로
$f(1)=0 \quad \therefore a+b+c=0$
(3) $x=2$일 때의 함숫값은 음수이므로
$f(2)<0 \quad \therefore 4a+2b+c<0$

07 답 ①

$y=ax^2+bx-c$의 그래프가 아래로 볼록하므로 $a>0$
축이 y축의 오른쪽에 있으므로
$ab<0 \quad \therefore b<0$
y축과의 교점이 x축의 아래쪽에 있으므로
$-c<0 \quad \therefore c>0$
따라서 $-a<0$, $bc<0$이므로 일차함수
$y=-ax+bc$의 그래프는 오른쪽 그림과
같이 제1사분면을 지나지 않는다.



08 답 ③

$y=ax^2+bx+c$의 그래프가 위로 볼록하므로 $a<0$
축이 y축의 왼쪽에 있으므로
$ab>0 \quad \therefore b<0$
y축과의 교점이 x축의 위쪽에 있으므로 $c>0$
즉, $y=cx^2+bx+a$의 그래프는 $c>0$이므로 아래로 볼록하고 $bc<0$이므로 축은 y축의 오른쪽에 있다.
또, $a<0$이므로 y축과의 교점은 x축의 아래쪽에 있다.
따라서 $y=cx^2+bx+a$의 그래프로 알맞은 것은 ③이다.

09 답 ③

$y=-2x^2+16x-21$
$=-2(x^2-8x+16-16)-21$
$=-2(x-4)^2+11$
이 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(4, 11)$이므로 구하는 이차함수의 식을 $y=a(x-4)^2+11$ (a는 상수)이라고 하자.
이 그래프가 점 $(2, 7)$을 지나므로
$7=4a+11$, $4a=-4$
$\therefore a=-1$
따라서 구하는 이차함수의 식은
$y=-(x-4)^2+11$
$=-x^2+8x-16+11$
$=-x^2+8x-5$

10 답 ①

축의 방정식이 $x=-1$이므로 구하는 이차함수의 식을
$y=a(x+1)^2+q$ (a, q는 상수)라고 하자.
이 그래프가 두 점 $(-2, -1)$, $(1, 8)$을 지나므로
$-1=a+q$ …… ㉠
$8=4a+q$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $q=-4$
따라서 $y=3(x+1)^2-4$의 그래프가 점 $\left(-\frac{1}{3}, k\right)$를 지나므로
$k=3\times\left(\frac{2}{3}\right)^2-4=-\frac{8}{3}$

11 답 ③

그래프가 점 $(0, 9)$를 지나므로 구하는 이차함수의 식을
$y=ax^2+bx+9$ (a, b는 상수)라고 하자.
이 그래프가 두 점 $(-3, -12)$, $(-1, 4)$를 지나므로
$-12=9a-3b+9$, $4=a-b+9$
$\therefore 3a-b=-7$ …… ㉠
$a-b=-5$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=4$
즉, 구하는 이차함수의 식은
$y=-x^2+4x+9$
$=-(x^2-4x+4-4)+9$
$=-(x-2)^2+13$
① 위로 볼록한 포물선이다.
② $y=-x^2+4x+9$에 $x=4$, $y=11$을 대입하면
$11\neq-4^2+4\times4+9$
즉, 점 $(4, 11)$을 지나지 않는다.
③ 꼭짓점의 좌표는 $(2, 13)$이다.
④ 이차함수 $y=x^2$의 그래프와 폭이 같다.
⑤ x^2항의 계수가 다르므로 평행이동하여 이차함수
$y=(x+5)^2+1$의 그래프와 포갤 수 없다.
따라서 옳은 것은 ③이다.

12 답 ⑤

주어진 그래프의 꼭짓점의 x좌표가 -4이므로 축의 방정식은 $x=-4$이다.
이때 이 그래프가 x축과 만나는 두 점 사이의 거리가 6이므로 축에서 x축과 만나는 두 점 사이의 거리는 $6\times\frac{1}{2}=3$이다.
즉, x축과 만나는 두 점의 좌표는 각각 $(-4-3, 0)$, $(-4+3, 0)$, 즉 $(-7, 0)$, $(-1, 0)$이고 x^2의 계수가 $\frac{1}{3}$이

므로 이차함수의 식은

$y=\frac{1}{3}(x+7)(x+1)$

$=\frac{1}{3}(x^2+8x+7)$

$=\frac{1}{3}x^2+\frac{8}{3}x+\frac{7}{3}$

따라서 $a=\frac{8}{3}$, $b=\frac{7}{3}$이므로

$a+b=\frac{8}{3}+\frac{7}{3}=5$

Level UP

축의 방정식이 $x=p$인 이차함수의 그래프가 x축과 만나는 두 점 사이의 거리가 a일 때

(1) 축에서 x축과 만나는 두 점 사이의 거리는 $a\times\frac{1}{2}=\frac{a}{2}$

(2) x축과 만나는 두 점의 좌표는 각각 $\left(p-\frac{a}{2}, 0\right)$, $\left(p+\frac{a}{2}, 0\right)$

13 답 ④

$y=-2x^2+8ax-7$

$=-2(x^2-4ax+4a^2-4a^2)-7$

$=-2(x-2a)^2+8a^2-7$

이 이차함수의 최댓값이 $8a^2-7$이므로

$8a^2-7=2a-4$, $8a^2-2a-3=0$

$(2a+1)(4a-3)=0$ $\quad\therefore a=-\frac{1}{2}$ 또는 $a=\frac{3}{4}$

이때 a는 음수이므로 $a=-\frac{1}{2}$

14 답 ⑤

조건 (다)에 의하여 $a>0$이므로 조건 (가)에 의하여 $a=\frac{1}{3}$

두 조건 (나), (다)에 의하여 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-1, -6)$

즉, 주어진 조건을 만족시키는 그래프를 나타내는 이차함수의 식은

$y=\frac{1}{3}(x+1)^2-6$

$=\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{17}{3}$

따라서 $b=\frac{2}{3}$, $c=-\frac{17}{3}$이므로

$\frac{b+c}{a}=(b+c)\div a=\left\{\frac{2}{3}+\left(-\frac{17}{3}\right)\right\}\div\frac{1}{3}=-5\times3=-15$

15 답 ①

$y=-3x^2+6ax+12a-1$

$=-3(x^2-2ax+a^2-a^2)+12a-1$

$=-3(x-a)^2+3a^2+12a-1$

이 이차함수의 최댓값이 $3a^2+12a-1$이므로

$M=3a^2+12a-1$

$=3(a^2+4a+4-4)-1$

$=3(a+2)^2-13$

따라서 M의 최솟값은 -13이다.

16 답 128

1단계 x, y에 대한 관계식 구하기

$x+y=16$이므로 $y=16-x$

2단계 x^2+y^2의 최솟값 구하기

$\therefore x^2+y^2=x^2+(16-x)^2$

$=2x^2-32x+256$

$=2(x^2-16x+64-64)+256$

$=2(x-8)^2+128$

따라서 x^2+y^2의 최솟값은 128이다.

단계	채점 기준	비율
❶	x, y에 대한 관계식을 세웠다.	30 %
❷	x^2+y^2의 최솟값을 구했다.	70 %

17 답 ③

새로운 삼각형의 넓이를 y cm^{2}라고 하면

$y=\frac{1}{2}(6+x)(10-x)$

$=-\frac{1}{2}(x^2-4x-60)$

$=-\frac{1}{2}(x^2-4x+4-4)+30$

$=-\frac{1}{2}(x-2)^2+32$

따라서 새로운 삼각형의 넓이의 최댓값은 32 cm^{2}이다.

18 답 6초

$h=12t-t^2$

$=-(t^2-12t+36-36)$

$=-(t-6)^2+36$

따라서 골프공의 높이는 $t=6$일 때 최댓값 36을 갖으므로 골프공이 최고 높이에 도달할 때까지 걸리는 시간은 6초이다.

Lv. 2 사고를 확장하는 실전 문제

109쪽~114쪽

01 ⑤	02 ④	03 ④	04 10	05 ①
06 ⑤	07 $(-4, 8)$	08 40	09 ①	10 ④
11 2	12 10	13 ①	14 ②	15 ③
16 ①	17 ④	18 ③	19 ④	20 4
21 $\frac{9}{8}$	22 ④	23 12	24 ③	25 ②
26 ②	27 ⑤	28 162 m^2	29 20	30 ④

01 답 ⑤

이차함수 $f(x)=ax^2-bx+54$에서 $f(3)=0$이므로

$0=9a-3b+54$

$\therefore\ 3a-b=-18$ …… ㉠

$f(9)=0$이므로

$0=81a-9b+54$

$\therefore\ 9a-b=-6$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=24$

최대공약수가 2이고 최소공배수가 $24=2^3\times3$인 두 수를 P, Q라고 하면

$P=2\times p,\ Q=2\times q$ (p, q는 서로소)

이때 $PQ=2\times p\times 2\times q=4pq=2\times 24$

즉, $4pq=48$이므로

$pq=12=2^2\times 3$

p, q는 서로소이므로 $p=3,\ q=4$ 또는 $p=4,\ q=3$이다.

$\therefore\ P=6,\ Q=8$ 또는 $P=8,\ Q=6$

따라서 두 수의 합은

$6+8=14$

Level UP

두 수 A, B에 대하여 최대공약수가 G이고 최소공배수가 L이면

(1) $A=G\times a,\ B=G\times b$ (a, b는 서로소)

(2) $A\times B=G\times L$

02 답 ④

해결 key Point!

$f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$라 하고 $f(x^2)=f(x)f(-x)$에 대입하여 a, b, c의 조건을 찾아야 한다.

$f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$라고 하면

$f(x^2)=ax^4+bx^2+c,\ f(-x)=ax^2-bx+c$이므로

$$\begin{aligned}f(x)f(-x)&=(ax^2+bx+c)(ax^2-bx+c)\\&=\{(ax^2+c)+bx\}\{(ax^2+c)-bx\}\\&=(ax^2+c)^2-(bx)^2\\&=a^2x^4+(2ac-b^2)x^2+c^2\end{aligned}$$

이때 $f(x^2)=f(x)f(-x)$이므로

$a=a^2,\ b=2ac-b^2,\ c=c^2$

$a=a^2$에서

$a^2-a=0,\ a(a-1)=0$

$\therefore\ a=0$ 또는 $a=1$

이때 $a\neq0$이므로 $a=1$

$c=c^2$에서

$c^2-c=0,\ c(c-1)=0$

$\therefore\ c=0$ 또는 $c=1$

(i) $c=0$일 때

$b=2ac-b^2$에서

$b^2+b=0,\ b(b+1)=0$

$\therefore\ b=-1$ 또는 $b=0$

(ii) $c=1$일 때

$b=2ac-b^2$에서

$b^2+b-2=0,\ (b+2)(b-1)=0$

$\therefore\ b=-2$ 또는 $b=1$

(i), (ii)에 의하여 a, b, c의 값과 함수 $f(x)$는 다음과 같다.

a	b	c	$f(x)$
1	-1	0	x^2-x
1	0	0	x^2
1	-2	1	x^2-2x+1
1	1	1	x^2+x+1

따라서 구하는 이차함수 $f(x)$의 개수는 4이다.

03 답 ④

조건 (가)에서 $f(2)=-3$이므로

$f(2)=8+2a+b=-3\quad\therefore\ 2a+b=-11$ …… ㉠

$g(3)=22$이므로

$g(3)=18+3p+q=22\quad\therefore\ 3p+q=4$ …… ㉡

조건 (나)에 의하여 $f(-x)=g(x)$이므로

$f(-x)=2(-x)^2+a(-x)+b=2x^2+px+q$

$\therefore\ a=-p,\ b=q$ …… ㉢

이를 ㉠에 대입하면 $-2p+q=-11$ …… ㉣

㉡, ㉣을 연립하며 풀면 $p=3,\ q=-5$

따라서 $a=-3,\ b=-5$이므로

$ab-pq=-3\times(-5)-3\times(-5)=30$

다른 풀이

조건 (가)에서 $f(2)=-3$이므로

$f(2)=8+2a+b=-3\quad\therefore\ 2a+b=-11$ …… ㉠

$g(3)=22$이므로

$g(3)=18+3p+q=22\quad\therefore\ 3p+q=4$ …… ㉡

조건 (나)에 의하여 $f(-3)=g(3)=22$이므로

$18-3a+b=22\quad\therefore\ 3a-b=-4$ …… ㉢

$g(-2)=f(2)=-3$이므로

$8-2p+q=-3\quad\therefore\ 2p-q=11$ …… ㉣

㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-3,\ b=-5$

㉡, ㉣을 연립하여 풀면 $p=3,\ q=-5$

$\therefore\ ab-pq=-3\times(-5)-3\times(-5)=30$

꿀 한줄평

함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이면 직선 $x=0$이 대칭축이 되고 $f(-x)=f(x)$가 성립한다.

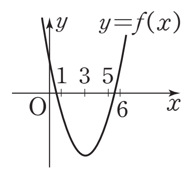
04 답 10

해결 key Point!

$f(x)=x^2-6x+a=(x-3)^2+a-9$의 그래프의 개형을 이용해야 한다.

$f(x)=x^2-6x+a=(x-3)^2+a-9$이므로 그래프의 축의 방정식은 $x=3$이다.

따라서 $f(n)=n^2-6n+a<0$을 만족시키는 자연수가 5개가 되려면 오른쪽 그림과 같이 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 0과 1 사이, 5와 6 사이에 있어야 한다.



즉, $f(0)>0$, $f(1)<0$이고, $f(5)<0$, $f(6)>0$이어야 하므로

$a>0$, $a-5<0$

$\therefore 0<a<5$

따라서 $f(n)<0$을 만족시키는 자연수 n의 개수가 5가 되도록 하는 모든 정수 a의 값은 1, 2, 3, 4이므로 그 합은

$1+2+3+4=10$

05 답 ①

$y=x^2-4kx+4k^2-k-6$

$\quad=(x-2k)^2-k-6$

이 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(2k, -k-6)$

점 $(2k, -k-6)$이 제3사분면 위에 있으므로

$2k<0$, $-k-6<0$

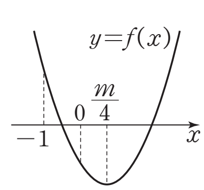
$\therefore k<0$, $k>-6$

따라서 $-6<k<0$이므로 실수 k의 값이 될 수 없는 것은 ①이다.

06 답 ⑤

$m>1$이므로 $f(x)=2x^2-mx+\frac{3}{4}m-3$의 그래프의 축의 방정식은 $x=\frac{m}{4}>\frac{1}{4}>0$

이때 x축과 만나는 두 점 중 한 점의 x좌표가 -1과 0 사이에 있으므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, $f(-1)>0$, $f(0)<0$이어야 하므로

$f(-1)=2+m+\frac{3}{4}m-3>0$에서

$\frac{7}{4}m>1 \qquad \therefore m>\frac{4}{7}$

$f(0)=\frac{3}{4}m-3<0$에서

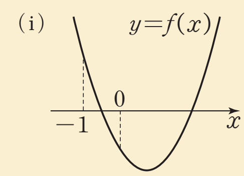
$\frac{3}{4}m<3 \qquad \therefore m<4$

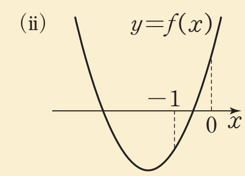
따라서 $1<m<4$이므로 $a=1$, $b=4$

$\therefore a+b=1+4=5$

꿀 한줄평

주어진 조건을 이용하여 이차함수의 그래프의 개형을 추측해야 한다. 이 그래프가 x축과 만나는 두 점의 x좌표가 α, β이고 $-1<\alpha<0$이므로 그래프가 될 수 있는 경우는 다음 그림과 같이 두 가지 경우가 있다.





이때 축의 방정식 $x=\frac{m}{4}$에서 $\frac{m}{4}>\frac{1}{4}>0$이어야 하므로 이를 만족시키는 경우는 (i)뿐이다.

07 답 $(-4, 8)$

1단계 점 A의 좌표 구하기

$y=-x^2-4x+12$

$\quad=-(x^2+4x+4-4)+12$

$\quad=-(x+2)^2+16$

이 그래프의 꼭짓점 A의 좌표는 $(-2, 16)$

2단계 두 점 B, C의 좌표 구하기

또, 그래프와 x축과의 교점의 x좌표는 $-x^2-4x+12=0$에서

$x^2+4x-12=0$, $(x+6)(x-2)=0$

$\therefore x=-6$ 또는 $x=2$

$\therefore B(-6, 0)$, $C(2, 0)$

3단계 삼각형 BCD의 넓이 구하기

따라서 $\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\{2-(-6)\}\times16=64$이고 직선 l이 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하므로

$\triangle BCD=\frac{1}{2}\triangle ABC=\frac{1}{2}\times64=32$

4단계 점 D의 좌표 구하기

점 D의 좌표를 (a, b)라고 하면

$\triangle BCD=\frac{1}{2}\times8\times b=4b$이므로

$4b=32 \qquad \therefore b=8$

$\therefore D(a, 8)$

한편, 직선 AB의 기울기가 $\frac{0-16}{-6-(-2)}=4$이므로

$y=4x+n$ (n은 상수)이라고 하면 이 직선이 점 $B(-6, 0)$을 지나므로

$0=-24+n \qquad \therefore n=24$

따라서 직선 AB의 방정식은 $y=4x+24$이고 점 $D(a,\ 8)$이 이 직선 위에 있으므로

$8=4a+24,\ 4a=-16$

$\therefore\ a=-4$

$\therefore\ D(-4,\ 8)$

단계	채점 기준	비율
❶	점 A의 좌표를 구했다.	20 %
❷	두 점 B, C의 좌표를 구했다.	30 %
❸	삼각형 BCD의 넓이를 구했다.	20 %
❹	점 D의 좌표를 구했다.	30 %

08 답 40

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축 위의 두 점 $B(1,\ 0)$, $C(6,\ 0)$을 지나므로 이차함수의 식은 $y=a(x-1)(x-6)$

이때 삼각형 ABC의 넓이가 10이므로

$\frac{1}{2}\times5\times6a=10,\ 15a=10$

$\therefore\ a=\frac{2}{3}$

따라서 $y=\frac{2}{3}(x-1)(x-6)$이고 $x=9$일 때

$y=\frac{2}{3}\times8\times3=16$이므로 점 D의 좌표는 $(9,\ 16)$

$\therefore\ \triangle BCD=\frac{1}{2}\times5\times16=40$

09 답 ①

$f(x)=ax^2+bx+c$의 그래프는 위로 볼록한 포물선이므로 $a<0$

축이 y축 오른쪽에 있으므로 $b>0$

y축과의 교점이 x축의 아래쪽에 있으므로 $c<0$

따라서 $f(-1)=a-b+c<0$이고 $c-b<0,\ 1-a>0$이므로

$|f(-1)|-\sqrt{(c-b)^2}-\sqrt{(1-a)^2}$

$=|a-b+c|-|c-b|-|1-a|$

$=-(a-b+c)-\{-(c-b)\}-(1-a)$

$=-a+b-c+c-b-1+a$

$=-1$

Level UP

$\sqrt{a^2}$의 성질

(1) $a\geq0$이면 $\sqrt{a^2}=a$

(2) $a<0$이면 $\sqrt{a^2}=-a$

10 답 ④

해결 key Point!

두 일차함수의 그래프를 통하여 네 상수 $a,\ b,\ c,\ d$의 부호를 파악해야 한다.

$y=ax+b$의 그래프는 기울기가 음수이고 y절편이 양수이므로 $a<0,\ b>0$이다.

$y=cx+d$의 그래프는 기울기와 y절편이 모두 양수이므로 $c>0,\ d>0$이다.

따라서 $y=(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$에서 $ac<0$이므로 이 이차함수의 그래프는 위로 볼록한 포물선이다.

이때 $y=(ax+b)(cx+d)$에서 $y=0$을 대입하면

$0=(ax+b)(cx+d)\qquad\therefore\ x=-\frac{b}{a}$ 또는 $x=-\frac{d}{c}$

따라서 이차함수 $y=(ax+b)(cx+d)$의 x절편이 $-\frac{b}{a}>0$, $-\frac{d}{c}<0$이므로 구하는 이차함수의 그래프는 ④이다.

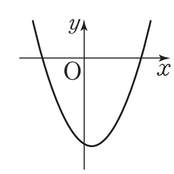
참고 $y=(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$에서 $bd>0$임을 알 수 있지만 $ad<0,\ bc>0$이므로 $ad+bc$의 값의 부호를 알 수 없다.

11 답 2

꼭짓점의 좌표가 $(4,\ -48)$이므로 이차함수의 식은

$y=a(x-4)^2-48=ax^2-8ax+16a-48$

꼭짓점이 제4사분면에 있으므로 이 그래프가 모든 사분면을 지나려면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, 아래로 볼록해야 하므로

$a>0\qquad\cdots\cdots$ ㉠

또, y축과의 교점이 x축의 아래쪽에 있어야 하므로

$16a-48<0,\ 16a<48$

$\therefore\ a<3\qquad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $0<a<3$이므로 정수 a는 1, 2의 2개이다.

12 답 10

해결 key Point!

그래프의 축과 x축과의 교점을 이용하여 식을 세워야 한다.

1단계 $a,\ b$의 값 구하기

$y=ax^2-bx+2c$의 그래프의 축의 방정식은 $x=\frac{b}{2a}$이고

$\frac{5}{2}<\frac{b}{2a}<\frac{7}{2}$이므로 $5<\frac{b}{a}<7$

이때 $a,\ b$가 한 자리의 자연수이므로

$5a<b<7a\qquad\cdots\cdots$ ㉠

㉠을 만족시키는 $a,\ b$의 값은 $a=1,\ b=6$이다.

$\therefore\ y=x^2-6x+2c$

$=x^2-6x+9-9+2c$

$=(x-3)^2+2c-9$

2단계 c의 값 구하기

또, 이 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 꼭짓점의 y좌표가 음수이어야 한다.

즉, $2c-9<0$이므로 $c<\frac{9}{2}$

이때 $f(x)=x^2-6x+2c$라고 하면 $f(1)>0$이므로

$1-6+2c>0$, $2c>5$

$\therefore c>\frac{5}{2}$

$f(2)<0$이므로

$4-12+2c<0$, $2c<8$

$\therefore c<4$

$f(4)<0$이므로

$16-24+2c<0$, $2c<8$

$\therefore c<4$

$f(5)>0$이므로

$25-30+2c>0$, $2c>5$

$\therefore c>\frac{5}{2}$

즉, $\frac{5}{2}<c<4$이고 c는 한 자리의 자연수이므로 $c=3$

3단계 $a+b+c$의 값 구하기

$\therefore a+b+c=1+6+3=10$

단계	채점 기준	비율
❶	a, b의 값을 구했다.	50 %
❷	c의 값을 구했다.	40 %
❸	$a+b+c$의 값을 구했다.	10 %

13 답 ①

해결 key Point!

$A(p,\ q)$, $\overline{BC}=2\overline{AD}$이므로 축의 방정식이 $x=2p$임을 이용하여 점 C와 점 D의 좌표를 구해야 한다.

사다리꼴 ABCD에서 $\overline{AD}/\!/\overline{BC}$, $\overline{BC}=2\overline{AD}$이고

$A(p,\ q)$이므로 이차함수 $y=ax^2+bx$의 그래프는 직선 $x=2p$에 대하여 대칭이다.

또, $\overline{BC}=2\overline{AD}=4p$이므로 $\overline{AD}=2p$

사다리꼴 ABCD의 넓이가 24이므로

$24=\frac{1}{2}(2p+4p)q$, $24=3pq$

$\therefore pq=8$

이때 $1<p<q$이고, p, q는 자연수이므로 $p=2$, $q=4$

점 C의 좌표는 $(4p,\ 0)$, 즉 $(8,\ 0)$이므로 이차함수 $f(x)$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표가 0, 8이다.

$\therefore f(x)=ax(x-8)$

이차함수 $f(x)$의 그래프가 점 $A(2,\ 4)$를 지나므로

$4=-12a \qquad \therefore a=-\frac{1}{3}$

따라서 $y=-\frac{1}{3}x(x-8)=-\frac{1}{3}x^2+\frac{8}{3}x$이므로 $b=\frac{8}{3}$

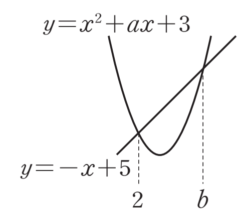
$\therefore f(7)=-\frac{1}{3}\times 7^2+\frac{8}{3}\times 7=\frac{7}{3}$

14 답 ②

해결 key Point!

이차함수 $y=x^2+ax+3$의 그래프가 직선 $y=x-5$보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위가 $2<x<b$이면 이차함수의 그래프와 직선이 만나는 교점의 x좌표가 2, b이다.

주어진 조건을 만족시키는 이차함수 $y=x^2+ax+3$의 그래프와 직선 $y=x-5$는 오른쪽 그림과 같다.



즉, $y=x^2+ax+3$의 그래프와 $y=x-5$의 그래프가 두 점에서 만나고 교점의 x좌표가 2 또는 b이다.

따라서 $x^2+ax+3=x-5$, 즉 $x^2+(a-1)x+8=0$의 두 근이 2, b이므로

$4+2(a-1)+8=0$, $2a+10=0$

$2a=-10 \qquad \therefore a=-5$

따라서 $x^2-6x+8=0$이므로

$(x-2)(x-4)=0 \qquad \therefore x=2$ 또는 $x=4$

이때 $b>2$이므로 $b=4$

$\therefore ab=-5\times 4=-20$

15 답 ③

해결 key Point!

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 1, 3이므로 이를 이용하여 이차함수의 식을 세워야 한다.

이차함수 $f(x)=ax^2+bx+ab+1$의 그래프가 아래로 볼록하므로 $a>0$이고 x축과 두 점 $(1,\ 0)$, $(3,\ 0)$에서 만나므로 이 이차함수의 식은

$f(x)=a(x-1)(x-3)$

$\quad\ =a(x^2-4x+3)$

$\quad\ =ax^2-4ax+3a$

따라서 $b=-4a$, $ab+1=3a$이므로

$a\times(-4a)+1=3a$, $4a^2+3a-1=0$

$(a+1)(4a-1)=0 \qquad \therefore a=-1$ 또는 $a=\frac{1}{4}$

이때 $a>0$이므로 $a=\frac{1}{4}$

$\therefore b=-4\times\frac{1}{4}=-1$

따라서 $f(x)=\frac{1}{4}(x-1)(x-3)$이므로

$f(2)=\frac{1}{4}\times 1\times(-1)=-\frac{1}{4}$

16 답 ①

해결 key Point!

a의 값의 범위를 구해야 한다.

$x^2-5x+4=0$에서

$(x-1)(x-4)=0 \qquad \therefore x=1$ 또는 $x=4$

또, 이차함수 $y=x^2-5x+4$의 그래프와 y축과의 교점의 y좌표가 4이므로 점 P는 점 $(0, 4)$에서 출발하여 점 $(1, 0)$을 지나 점 $(4, 0)$까지 움직인다.

점 $\mathrm{P}(a, b)$는 $y=x^2-5x+4$의 그래프 위의 점이므로

$b=a^2-5a+4$

즉, $5a+b+1=5a+(a^2-5a+4)+1=a^2+5$

이때 $0\le a\le 4$이므로 $5a+b+1$의 최댓값은 $a=4$일 때

$16+5=21$이다.

17 답 ④

ㄱ. $f(0)<0$, $g(0)>0$이므로 $f(0)<g(0)$

ㄴ. $y=g(x)$의 그래프는 위로 볼록하고 x축과 -2, 5에서 만나므로 축의 방정식은

$x=\dfrac{-2+5}{2}=\dfrac{3}{2}$

따라서 $y=g(x)$는 $x=\dfrac{3}{2}$에서 최댓값을 가지므로

$g(x)\le g\left(\dfrac{3}{2}\right)$

ㄷ. $f(4)=g(4)$이고 $f(-2)=g(-2)=0$이므로

$f(4)-f(-2)=g(-2)+g(4)$

ㄹ. $f(x)-g(x)=0$, 즉 $f(x)=g(x)$를 만족시키는 x의 값은 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 교점의 x좌표와 같으므로

$x=-2$ 또는 $x=4$

따라서 방정식 $f(x)-g(x)=0$의 모든 해의 합은

$-2+4=2$

따라서 옳은 것은 ㄷ, ㄹ이다.

18 답 ③

$2x+y=-3$에서 $y=-2x-3 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

㉠을 $2x^2+y^2$에 대입하면

$$\begin{aligned}2x^2+y^2&=2x^2+(-2x-3)^2\\&=2x^2+4x^2+12x+9\\&=6x^2+12x+9\\&=6(x^2+2x+1-1)+9\\&=6(x+1)^2+3\end{aligned}$$

따라서 $2x^2+y^2$은 $x=-1$일 때 최솟값 3을 갖는다.

19 답 ④

해결 key Point!

이차함수 $y=x^2+(a-4)x-1$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표는 방정식 $x^2+(a-4)x-1=0$의 두 근임을 이용해야 한다.

이차함수 $y=x^2+(a-4)x-1$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표를 α, β라고 하면

$y=(x-\alpha)(x-\beta)=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$

이므로 $\alpha+\beta=-a+4$, $\alpha\beta=-1$

이차함수 $y=x^2+(a-4)x-1$의 그래프와 x축과의 두 교점 사이의 거리는 $|\alpha-\beta|$이므로

$$\begin{aligned}|\alpha-\beta|&=\sqrt{(\alpha-\beta)^2}\\&=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}\\&=\sqrt{(-a+4)^2+4}\end{aligned}$$

따라서 $|\alpha-\beta|$는 최솟값 $\sqrt{4}=2$를 갖고, 그때의 실수 a의 값은 4이다.

20 답 4

해결 key Point!

이차함수 $f(x)=-x^2+ax+b$의 그래프와 일차함수 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표가 방정식 $f(x)=g(x)$의 두 근임을 이용해야 한다.

1단계 방정식 $f(x)=g(x)$의 두 근 구하기

두 함수 $f(x)=-x^2+ax+b$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 x좌표가 2, 6이므로 2, 6은 방정식 $f(x)=g(x)$의 두 근이다.

2단계 $f(x)-g(x)$의 식 구하기

이때 $f(x)-g(x)$의 이차항의 계수가 -1이므로

$f(x)-g(x)=-(x-2)(x-6)$

3단계 $f(x)-g(x)$의 최댓값 구하기

$$\begin{aligned}f(x)-g(x)&=-(x-2)(x-6)\\&=-x^2+8x-12\\&=-(x^2-8x+16-16)-12\\&=-(x-4)^2+4\end{aligned}$$

따라서 함수 $f(x)-g(x)$는 $x=4$일 때 최댓값 4를 갖는다.

단계	채점 기준	비율
❶	방정식 $f(x)=g(x)$의 두 근을 구했다.	30 %
❷	$f(x)-g(x)$의 식을 구했다.	40 %
❸	$f(x)-g(x)$의 최댓값을 구했다.	30 %

21 답 $\dfrac{9}{8}$

해결 key Point!

점 $(p+q, pq)$가 나타내는 함수의 그래프 위의 점 (x, y)에 대하여 $x=p+q$, $y=pq$임을 이용해야 한다.

점 (p, q)가 일차함수 $y=-2x-3$의 그래프 위의 점이므로

$q=-2p-3$ …… ㉠

$\therefore p+q=p+(-2p-3)=-p-3,$

$pq=p(-2p-3)=-2p^2-3p$

즉, 점 $(p+q, pq)$가 나타내는 함수의 그래프 위의 점 (x, y)에 대하여

$x=-p-3 \quad \therefore p=-x-3$ …… ㉡

$y=-2p^2-3p$ …… ㉢

㉡을 ㉢에 대입하면

$y=-2(-x-3)^2-3(-x-3)$

$=-2x^2-9x-9$

$=-2\left(x^2+\frac{9}{2}x+\frac{81}{16}-\frac{81}{16}\right)-9$

$=-2\left(x+\frac{9}{4}\right)^2+\frac{9}{8}$

따라서 $x=-\frac{9}{4}$일 때 최댓값 $\frac{9}{8}$를 갖는다.

22 답 ④

해결 key Point!

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$이 접하려면 방정식 $ax^2+bx+c=mx+n$이 중근을 가져야 함을 생각해야 한다.

두 이차함수 $f(x)=x^2+ax$, $g(x)=x^2+bx$의 그래프와 동시에 접하는 직선의 방정식을 $y=mx+n$ (m, n은 상수)이라고 하자.

이차함수 $f(x)=x^2+ax$의 그래프와 직선 $y=mx+n$이 접하려면 방정식 $x^2+ax=mx+n$, 즉 $x^2+(a-m)x-n=0$이 중근을 가져야 하므로

$(a-m)^2+4n=0$ …… ㉠

이어야 한다.

마찬가지로 이차함수 $g(x)=x^2+bx$의 그래프와 직선 $y=mx+n$이 접하려면 방정식 $x^2+bx=mx+n$, 즉 $x^2+(b-m)x-n=0$이 중근을 가져야 하므로

$(b-m)^2+4n=0$ …… ㉡

이어야 한다.

㉠$-$㉡을 하면

$(a-m)^2-(b-m)^2=0,\ a^2-b^2-2(a-b)m=0$

$(a+b)(a-b)-2(a-b)m=0,\ (a-b)(a+b-2m)=0$

$\therefore a-b=0$ 또는 $a+b-2m=0$

이때 $a\neq b$이므로

$a+b-2m=0 \quad \therefore m=\frac{a+b}{2}$

$-5\le a\le -1,\ 1\le b\le 8$이므로

$-4\le a+b\le 7 \quad \therefore -2\le m\le \frac{7}{2}$

따라서 직선의 기울기의 최댓값은 $\frac{7}{2}$, 최솟값은 -2이므로 그 합은

$\frac{7}{2}+(-2)=\frac{3}{2}$

Level UP

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 서로 다른 근의 개수

(1) $b^2-4ac>0$ ⇨ 서로 다른 두 근을 갖는다.

(2) $b^2-4ac=0$ ⇨ 중근을 갖는다.

(3) $b^2-4ac<0$ ⇨ 근이 없다.

23 답 12

1단계 p의 값 구하기

$f(x)=(x-p)^2-4(x-p)+q$

$=x^2-2px+p^2-4x+4p+q$

$=x^2-2(p+2)x+p^2+4p+q$

$=\{x-(p+2)\}^2+q-4$

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로

$p+2=2 \quad \therefore p=0$

2단계 q의 값 구하기

즉, $f(x)=(x-2)^2+q-4$이고 $f(x)$의 최솟값이 8이므로

$q-4=8 \quad \therefore q=12$

3단계 $p+q$의 값 구하기

$\therefore p+q=0+12=12$

단계	채점 기준	비율
❶	p의 값을 구했다.	40 %
❷	q의 값을 구했다.	40 %
❸	$p+q$의 값을 구했다.	20 %

24 답 ③

해결 key Point!

두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 그래프의 교점을 구해야 한다.

$f(x)=g(x)$에서

$x^2-3x=4x-10,\ x^2-7x+10=0$

$(x-2)(x-5)=0 \quad \therefore x=2$ 또는 $x=5$

따라서 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 그래프가 만나는 교점의 x좌표가 2, 5이므로 두 교점의 좌표는 $(2, -2)$, $(5, 10)$이다.

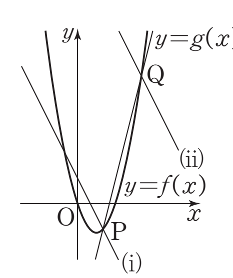
이때 $y=-2x+a$의 그래프가 선분 PQ와 한 점에서 만나므로 $\mathrm{P}(2, -2)$, $\mathrm{Q}(5, 10)$이라고 하면

(i) $y=-2x+a$의 그래프가 점 $\mathrm{P}(2, -2)$를 지날 때

$-2=(-2)\times 2+a$

$\therefore a=2$

(ii) $y=-2x+a$의 그래프가 점 $\mathrm{Q}(5, 10)$을 지날 때



$10=(-2)\times5+a \qquad \therefore a=20$

(i), (ii)에 의하여 $2\le a\le 20$일 때 함수 $y=-2x+a$의 그래프가 선분 PQ와 한 점에서 만난다.

따라서 a의 최댓값은 20, 최솟값은 2이므로 그 합은

$20+2=22$

25 답 ②

이차함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값이 4이므로

$f(x)=a(x-1)^2+4\ (a>0)$

라 하고 $g(x)$는 $x=-1$에서 최댓값이 -5이므로

$g(x)=b(x+1)^2-5\ (b<0)$

라고 하면

$$\begin{aligned}f(x)-g(x)&=a(x-1)^2+4-\{b(x+1)^2-5\}\\&=ax^2-2ax+a+4-(bx^2+2bx+b-5)\\&=(a-b)x^2-2(a+b)x+a-b+9\end{aligned}$$

이므로

$3=a-b,\ -2=-2(a+b),\ 12=a-b+9$

즉, $a-b=3$, $a+b=1$이므로 두 식을 연립하여 풀면

$a=2,\ b=-1$

따라서 $f(x)=2(x-1)^2+4$, $g(x)=-(x+1)^2-5$이므로

$f(2)+g(-2)=6+(-6)=0$

다른 풀이

$f(x)$는 $x=1$에서 최솟값 4이므로

$f(x)=a(x-1)^2+4\ (a>0)$라고 하면

$f(1)=4,\ f(-1)=4a+4$

$g(x)$는 $x=-1$에서 최댓값 -5이므로

$g(x)=b(x+1)^2-5\ (b<0)$라고 하면

$g(1)=4b-5,\ g(-1)=-5$

$\therefore f(1)-g(1)=4-(4b-5)=9-4b$ …… ㉠

$f(-1)-g(-1)=(4a+4)-(-5)=4a+9$ …… ㉡

이때 $f(x)-g(x)=3x^2-2x+12$이므로

$f(1)-g(1)=3-2+12=13$ …… ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$9-4b=13,\ 4b=-4$

$\therefore b=-1$

또, $f(-1)-g(-1)=3+2+12=17$ …… ㉣

㉣을 ㉡에 대입하면

$4a+9=17,\ 4a=8$

$\therefore a=2$

따라서 $f(x)=2(x-1)^2+4$, $g(x)=-(x+1)^2-5$이므로

$f(2)+g(-2)=6+(-6)=0$

26 답 ②

이차함수 $y=ax^2+bx+c$가 $x=1$에서 최댓값이 8이므로 이 이차함수의 그래프는 꼭짓점의 좌표가 $(1,\ 8)$이고 위로 볼록한 포물선이다.

즉, 이차함수의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.

이때 그래프가 x축과 만나는 두 점 사이의 거리가 4이므로 이차함수의 그래프는 x축과 두 점 $\left(1-\frac{4}{2},\ 0\right)$, $\left(1+\frac{4}{2},\ 0\right)$, 즉 $(-1,\ 0)$, $(3,\ 0)$에서 만난다.

따라서 $y=a(x+1)(x-3)$이고 이 이차함수의 그래프가 점 $(1,\ 8)$을 지나므로

$8=-4a \qquad \therefore a=-2$

따라서 $y=-2(x+1)(x-3)=-2x^2+4x+6$이므로

$a=-2,\ b=4,\ c=6$

$\therefore a-b-c=-2-4-6=-12$

27 답 ⑤

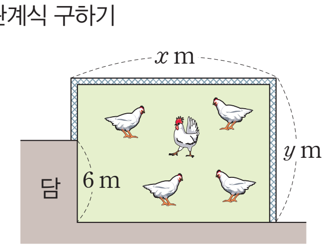
$\overline{AP}=x$ cm라고 하면 $\overline{BP}=(20-x)$ cm이고 두 도형의 넓이의 합을 $y\ \text{cm}^2$라고 하면

$$\begin{aligned}y&=x^2+\frac{1}{2}(20-x)^2\\&=x^2+\frac{1}{2}x^2-20x+200\\&=\frac{3}{2}x^2-20x+200\\&=\frac{3}{2}\left(x^2-\frac{40}{3}x+\frac{400}{9}-\frac{400}{9}\right)+200\\&=\frac{3}{2}\left(x-\frac{20}{3}\right)^2+\frac{400}{3}\end{aligned}$$

따라서 두 도형의 넓이의 합의 최솟값은 $\frac{400}{3}$이고 그때의 x의 값은 $x=\frac{20}{3}$, 즉 $\overline{AP}=\frac{20}{3}$ cm이다.

28 답 $162\ \text{m}^2$

1단계 가로, 세로의 길이에 대한 관계식 구하기



오른쪽 그림과 같이 닭장의 가로의 길이를 x m, 세로의 길이를 y m라고 하면 담이 포함된 닭장의 세로 부분에 사용된 철망의 길이는 $(y-6)$ m이다.

이때 철망의 길이가 30 m이므로

$y+x+(y-6)=30,\ x+2y=36$

$\therefore x=36-2y$

2단계 이차함수의 식 세우기

닭장의 넓이를 $S\ \text{m}^2$라고 하면

$S=xy$

$=(36-2y)y$

$=36y-2y^2$

$=-2(y^2-18y+81-81)$

$=-2(y-9)^2+162$

3단계 닭장의 최대 넓이 구하기

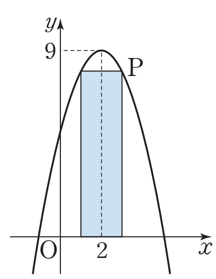
따라서 닭장의 최대 넓이는 162 m^2이다.

단계	채점 기준	비율
❶	가로, 세로의 길이에 대한 관계식을 구했다.	40 %
❷	이차함수의 식을 세웠다.	50 %
❸	닭장의 최대 넓이를 구했다.	10 %

29 답 20

해결 key Point!

$y=-x^2+4x+5$의 그래프 위의 한 점을 $P(t, -t^2+4t+5)$라 하고 직사각형의 둘레의 길이를 식으로 나타내야 한다.



$y=-x^2+4x+5=-(x-2)^2+9$

이 그래프 위의 한 점을 $P(t, -t^2+4t+5)$ $(t>0)$라고 하면 직사각형은 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로 가로의 길이는 $2(t-2)$, 세로의 길이는 $-t^2+4t+5$이다.

따라서 이 직사각형의 둘레의 길이는

$2\times\{2(t-2)+(-t^2+4t+5)\}=2(-t^2+6t+1)$

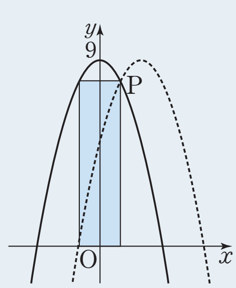
$=-2(t^2-6t)+2$

$=-2(t^2-6t+9-9)+2$

$=-2(t-3)^2+20$

이므로 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은 $t=3$일 때 20이다.

Level UP



$y=-x^2+4x+5=-(x-2)^2+9$

이므로 구하는 직사각형은 오른쪽 그림과 같이 이차항의 계수가 같은 $y=-x^2+9$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형에 내접하고 한 변이 x축과 겹치는 직사각형과 모양이 같다.

따라서 점 P의 좌표를 $(t, -t^2+9)$라 하고 직사각형의 둘레의 길이를 구하면

$2\times\{2t+(-t^2+9)\}=2(-t^2+2t+9)$

$=-2(t^2-2t+1-1)+18$

$=-2(t-1)^2+20$

따라서 최댓값은 20으로 같고 최댓값을 갖는 t의 값만 다르다.

30 답 ④

해결 key Point!

한 달 판매 이익은 (한 개에 대한 이익)×(월 판매 개수)이고 이익을 최대로 하는 가격을 찾아야 하므로 이익에 대한 식을 세워야 한다.

젤리 한 개의 판매 가격을 x원 올리면 한 개에 대한 이익은 $(50+x)$원이고 젤리의 월 판매 개수는 $(4500-30x)$이다.

따라서 한 달 판매 이익을 y원이라고 하면

$y=(50+x)(4500-30x)$

$=225000+3000x-30x^2$

$=-30(x^2-100x+2500-2500)+225000$

$=-30(x-50)^2+300000$

이므로 판매 가격을 50원 올릴 때, 즉 한 개의 판매 가격이 400원일 때 한 달 판매 이익이 최대가 된다.

꿀 한줄평

이익이 최대일 때를 구하는 것이므로 판매액을 기준으로 식을 세우면 안 됨에 유의한다.

한 달 판매액을 y라고 하면

$y=(350+x)(4500-30x)$

$=1575000-6000x-30x^2$

$=-30(x^2+200x+10000-10000)+1575000$

$=-30(x+100)^2+1875000$

즉, x원 올릴 때 월 판매액은 항상 감소한다.

따라서 (이익)=(판매액)−(원가)이므로

(이익)$=(350+x)(4500-30x)-300(4500-30x)$

$=(350+x-300)(4500-30x)$

$=(50+x)(4500-30x)$

Lv. X 상위 1%에 도달하는 심화 문제

116쪽~117쪽

01 36개 **02** 16 **03** 5 **04** 2 **05** 1

06 $\frac{11}{216}$

01 답 36개

이차함수 $y=x^2$의 그래프와 만나는 직선 위의 두 점을 $A(\alpha, \alpha^2)$, $B(\beta, \beta^2)$이라고 할 때, 이 두 점을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta-\alpha}=\frac{(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)}{\beta-\alpha}=\alpha+\beta$ $(\alpha\neq\beta)$

이때 직선의 방정식을 $y=(\alpha+\beta)x+p$라고 하면 이 직선이 점 $A(\alpha, \alpha^2)$을 지나므로

$\alpha^2=(\alpha+\beta)\alpha+p$ $\quad\therefore p=-\alpha\beta$

$\therefore y=(\alpha+\beta)x-\alpha\beta$

즉, 두 점 $P_i(i, i^2)$, $Q_j(-j, j^2)$ $(i, j=1, 2, 3, \cdots, 10$이고 $i\neq j)$을 연결하여 만들어진 직선의 방정식은 $\alpha=i$, $\beta=-j$이므로

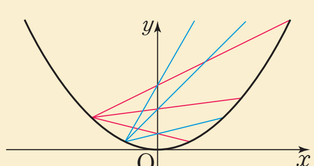
$y=\{i+(-j)\}x-i(-j)$ $\quad\therefore y=(i-j)x+ij$

이때 ij의 값은 다음 표와 같다.

j \ i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2		6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6		12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12		20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20		30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30		42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42		56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56		72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72		90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	

따라서 ij의 값은 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 27, 28, 30, 32, 35, 36, 40, 42, 45, 48, 50, 54, 56, 60, 63, 70, 72, 80, 90이므로 y절편이 될 수 있는 수는 36개이다.

꿀 한줄평



이 문제는 이차함수 $y=x^2$ 위의 x좌표가 -10 이상 10 이하인 0이 아닌 정수 중 양수와 음수인 점을 각각 하나씩 택하여 만든 두 점을 이은 직선의 y절편이 될 수 있는 값을 구하는 것이다. 이때 같은 y절편의 값을 가지는 직선이 있으므로 모든 경우 $10\times9=90$(가지)의 y절편의 값을 구하여 중복이 되는 값을 제외하고 y절편이 될 수 있는 값을 모두 세어야 한다.

02 답 16

해결 key Point!

$[x]=n$일 때, n의 값에 따라 x의 값의 범위를 나누어서 풀어야 한다.

⋮

$-1\leq x<0$이면 $[x]=-1$이므로 $g(x)=x-3$

$0\leq x<1$이면 $[x]=0$이므로 $g(x)=x$

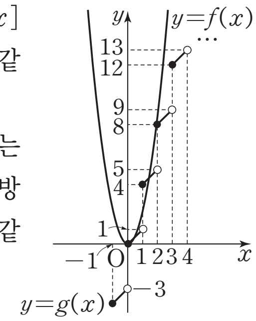
$1\leq x<2$이면 $[x]=1$이므로 $g(x)=x+3$

$2\leq x<3$이면 $[x]=2$이므로 $g(x)=x+6$

$3\leq x<4$이면 $[x]=3$이므로 $g(x)=x+9$

⋮

따라서 $f(x)=2x^2$과 $g(x)=x+3[x]$의 그래프를 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



이때 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 $0\leq x<3$에서 만나고 교점의 개수가 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근의 개수와 같다.

(i) $0\leq x<1$일 때, $2x^2=x$에서

$2x^2-x=0$, $x(2x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\dfrac{1}{2}$

(ii) $1\leq x<2$일 때, $2x^2=x+3$에서

$2x^2-x-3=0$, $(x+1)(2x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=\dfrac{3}{2}$

이때 $1\leq x<2$이므로 $x=\dfrac{3}{2}$

(iii) $2\leq x<3$일 때, $2x^2=x+6$에서

$2x^2-x-6=0$, $(2x+3)(x-2)=0$

$\therefore x=-\dfrac{3}{2}$ 또는 $x=2$

이때 $2\leq x<3$이므로 $x=2$

(i)~(iii)에 의하여 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 0, $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{3}{2}$, 2의 4개이고 그 합은 $0+\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}+2=4$

따라서 $p=4$, $q=4$이므로

$pq=4\times4=16$

꿀 한줄평

$[x]$는 x의 범위를 $k\leq x<k+1$ (k는 정수)로 나누면 $[x]=k$로 표현할 수 있다. 따라서 구간을 나누어 $[x]$를 상수로 나타내어 함수 $y=g(x)$의 그래프를 그려 문제를 해결한다.

03 답 5

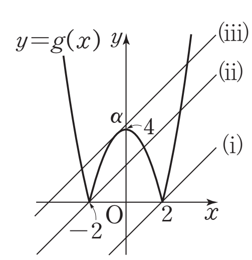
해결 key Point!

함수 $y=g(x)$의 그래프를 그리고 기울기가 1인 직선 $f(x)=x+t$를 그려 $h(t)$를 구해야 한다.

함수

$$g(x)=\begin{cases} x^2-4 & (x<-2,\ x>2) \\ 4-x^2 & (-2\leq x\leq 2) \end{cases}$$

의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같다.



이때 오른쪽 그림에서 $y=f(x)$의 그래프가 (i), (ii), (iii)인 경우를 기준으로 $h(t)$의 값이 변한다.

(i) $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프와 점 $(2, 0)$에서 만날 때

$0=2+t$에서 $t=-2$

(ⅱ) $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프와 점 $(-2,\ 0)$에서 만날 때

$0=-2+t$에서 $t=2$

(ⅲ) $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프와 접할 때

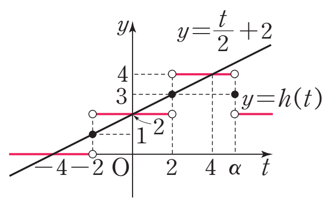
두 그래프가 접할 때의 $y=f(x)$의 그래프의 y절편을 α라 고 하면 $\alpha>4$이다.

(ⅰ)~(ⅲ)에 의하여

$$h(t)=\begin{cases} 0 & (t<-2) \\ 1 & (t=-2) \\ 2 & (-2<t<2 \text{ 또는 } t>\alpha) \\ 3 & (t=2 \text{ 또는 } t=\alpha) \\ 4 & (2<t<\alpha) \end{cases}$$

이므로 함수 $y=h(t)$의 그래프와 직선 $y=\frac{t}{2}+2$를 그리면 오른쪽 그림과 같다.

따라서 구하는 점의 개수는 5이다.



꿀 한줄평

이 문제는 두 함수의 그래프가 만나는 점의 좌표를 구하는 것이 아닌 만나는 점의 개수만 구하면 되는 문제이다. 따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프와 접할 때의 교점의 좌표를 구하지 않고 대략적인 범위만 구해도 된다. 왜냐하면 $h(t)=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$이고, $y=\frac{t}{2}+2$의 값은 $t>4$이면 함숫값이 4를 초과하므로 $t\le4$인 경우의 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수만 구하면 되기 때문이다.

04 답 2

해결 key Point!

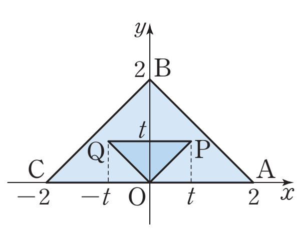
좌표평면에서 t의 값의 범위에 따라 변하는 겹치는 부분의 넓이를 나누어 생각해야 한다.

(ⅰ) $0<t<1$일 때

오른쪽 그림에서 두 점 P, Q가 삼각형 ABC의 내부에 있으므로

$f(t)=\triangle\text{OPQ}$

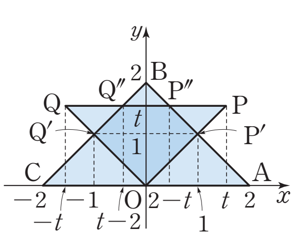
$=\frac{1}{2}\times2t\times t=t^2$



(ⅱ) $1\le t<2$일 때

오른쪽 그림과 같이 두 점 P, Q가 삼각형 ABC의 내부에 있지 않으므로 겹치는 부분은 오각형이 된다.

이때 $\text{P}'(1,\ 1)$, $\text{Q}'(-1,\ 1)$



이라 하고, 두 점 $\text{P}(t,\ t)$와 $\text{Q}(-t,\ t)$를 이은 직선과 두 직선 AB, BC가 만나는 점을 각각 P″, Q″이라고 하면

$\text{P}''(2-t,\ t)$, $\text{Q}''(t-2,\ t)$

$\therefore\ f(t)=\square\text{OP}'\text{BQ}'-\triangle\text{P}''\text{BQ}''$

$=\frac{1}{2}\times2\times2-\frac{1}{2}\times2(2-t)\times(2-t)$

$=2-(2-t)^2$

$=-t^2+4t-2$

$=-(t^2-4t+4-4)-2$

$=-(t-2)^2+2$

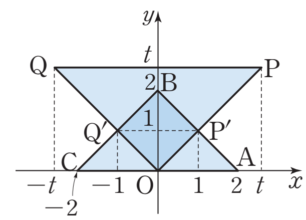
(ⅲ) $t\ge2$일 때

두 점 P, Q의 y좌표가 점 B의 y좌표보다 크므로

$f(t)=\square\text{OP}'\text{BQ}'$

$=\frac{1}{2}\times2\times2$

$=2$

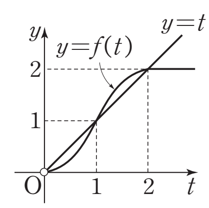


(ⅰ)~(ⅲ)에 의하여

$$f(t)=\begin{cases} t^2 & (0<t<1) \\ -(t-2)^2+2 & (1\le t<2) \\ 2 & (t\ge2) \end{cases}$$

이므로 함수 $y=f(t)$의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같다.

따라서 양수 t에 대하여 함수 $y=f(t)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수는 2이다.



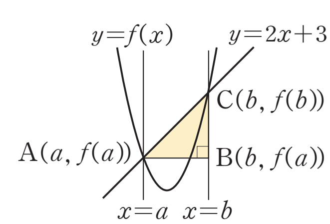
참고 함수 $y=f(t)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점은 $(1,\ 1)$, $(2,\ 2)$이다.

05 답 1

해결 key Point!

삼각형 ABC가 직각삼각형이므로 삼각형 ABC의 넓이를 a, b를 이용하여 나타내 봐야 한다.

이차함수 $f(x)=x^2-x+k$의 그래프와 직선 $y=2x+3$이 두 점에서 만나도록 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같다.



$\overline{\text{AB}}=b-a$,

$\overline{\text{BC}}=f(b)-f(a)$

$=(2b+3)-(2a+3)$

$=2(b-a)$

이므로

$\triangle\text{ABC}=\frac{1}{2}\times(b-a)\times2(b-a)$

$=(b-a)^2$

이때 삼각형 ABC의 넓이가 16이므로 $(b-a)^2=16$

이때 $b-a>0$이므로 $b-a=4$ ······ ㉠

한편, 이차함수 $f(x)=x^2-x+k$의 그래프와 직선 $y=2x+3$의 두 교점의 x좌표가 a, b이므로 a, b는 이차방정식 $x^2-x+k=2x+3$, 즉 $x^2-3x+k-3=0$의 두 근이다.

두 근이 a, b이고 이차항의 계수가 1인 이차방정식은

$(x-a)(x-b)=0$ $\quad\therefore x^2-(a+b)x+ab=0$

따라서 $-3=-(a+b)$, $k-3=ab$이므로

$a+b=3$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{7}{2}$

따라서 $ab=-\frac{1}{2}\times\frac{7}{2}=-\frac{7}{4}=k-3$이므로 $k=\frac{5}{4}$

즉, $f(x)=x^2-x+\frac{5}{4}$이므로

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}+\frac{5}{4}=1$

Level UP

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라고 할 때,
$a(x-\alpha)(x-\beta)=0$이므로 $a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}=0$이다.

06 답 $\frac{11}{216}$

해결 key Point!

a가 자연수이므로 이차함수 $y=ax^2+bx+c+3$의 그래프가 x축과 만나려면 함수의 최솟값이 0보다 작거나 같아야 함을 이용해야 한다.

$$y=ax^2+bx+c+3$$
$$=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}\right)+c+3$$
$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4a(c+3)}{4a}$$

이 이차함수의 그래프가 x축과 만나려면 최솟값이 0보다 작거나 같아야 하므로

$-\frac{b^2-4a(c+3)}{4a}\le 0$, $b^2-4a(c+3)\ge 0$

$\therefore b^2\ge 4a(c+3)$

이때 a, b, c가 1부터 6까지의 자연수이므로 $4a(c+3)$의 최솟값은 16이다.
$a=1$, $c=1$을 대입한 값

$\therefore b^2\ge 4a(c+3)\ge 16$

따라서 $4\le b\le 6$이므로 각각의 경우를 순서쌍 (a, b, c)로 나타내면

(i) $b=4$일 때

$16\le 4a(c+3)\le 16$

$4a(c+3)=16$, 즉 $a(c+3)=4$이므로 $a=1$, $c=1$

따라서 순서쌍 (a, b, c)는 $(1, 4, 1)$의 1가지

(ii) $b=5$일 때

$16\le 4a(c+3)\le 25$에서 $4\le a(c+3)\le\frac{25}{4}$

$a=1$이면

$4\le c+3\le\frac{25}{4}$ $\quad\therefore 1\le c\le\frac{13}{4}$

즉, $a=1$, $c=1$ 또는 $a=1$, $c=2$ 또는 $a=1$, $c=3$

따라서 순서쌍 (a, b, c)는 $(1, 5, 1)$, $(1, 5, 2)$, $(1, 5, 3)$의 3가지

(iii) $b=6$일 때

$16\le 4a(c+3)\le 36$에서 $4\le a(c+3)\le 9$

$a=1$이면

$4\le c+3\le 9$ $\quad\therefore 1\le c\le 6$

즉, $a=1$, $c=1$ 또는 $a=1$, $c=2$ 또는 $a=1$, $c=3$ 또는 $a=1$, $c=4$ 또는 $a=1$, $c=5$ 또는 $a=1$, $c=6$

$a=2$이면

$4\le 2(c+3)\le 9$, $2\le c+3\le\frac{9}{2}$

$\therefore -1\le c\le\frac{3}{2}$

즉, $a=2$, $c=1$

따라서 순서쌍 (a, b, c)는 $(1, 6, 1)$, $(1, 6, 2)$, $(1, 6, 3)$, $(1, 6, 4)$, $(1, 6, 5)$, $(1, 6, 6)$, $(2, 6, 1)$의 7가지

(i)~(iii)에 의하여 주어진 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 $1+3+7=11$이고 서로 다른 세 개의 주사위 A, B, C를 던져서 나오는 모든 경우의 수는 $6^3=216$이므로 구하는 확률은 $\frac{11}{216}$이다.

Level UP

사건 A 또는 사건 B가 일어날 확률
두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않을 때
사건 A가 일어날 확률을 p, 사건 B가 일어날 확률을 q라고 하면
(사건 A 또는 사건 B가 일어날 확률)$=p+q$

Lv. Master 실력을 완성하는 대단원 평가 118쪽~122쪽

01 ②, ⑤	02 ⑤	03 ③	04 ①	05 ④
06 ②	07 ②	08 ③	09 ⑤	10 ①
11 ③	12 ③	13 ①	14 ④	15 ④
16 6	17 4	18 -4	19 4	20 -6
21 $\frac{3}{8}$	22 3 : 4	23 54 m^2		

01 답 ②, ⑤

해결 key Point!

함수 $y=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)가 x에 대한 이차함수이려면 $a\neq0$이어야 한다.

$y=(5a-a^2)x^2-3x+14x^2$
$=-(a^2-5a-14)x^2-3x$
$=-(a+2)(a-7)x^2-3x$

이 함수가 x에 대한 이차함수이려면 $-(a+2)(a-7)\neq0$이어야 하므로

$a+2\neq0$이고 $a-7\neq0$ $\quad\therefore a\neq-2$이고 $a\neq7$

따라서 a의 값이 될 수 없는 것은 ②, ⑤이다.

Level UP

$(x-a)(x-b)=0$이면 $x=a$ 또는 $x=b$이지만
$(x-a)(x-b)\neq0$이면 $x\neq a$이고 $x\neq b$임에 주의한다.

02 답 ⑤

$y=x^2$에 $y=36$을 대입하면

$x^2=36 \quad\therefore x=\pm6$

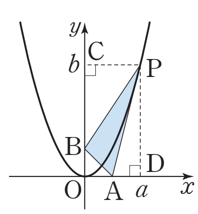
$\therefore$ B$(-6, 36)$, D$(6, 36)$

$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}=6$이므로 A$(-12, 36)$, E$(12, 36)$

$y=ax^2$의 그래프가 점 A$(-12, 36)$을 지나므로

$36=144a \quad\therefore a=\frac{1}{4}$

03 답 ③



오른쪽 그림과 같이 점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 C, x축에 내린 수선의 발을 D라고 하면

C$(0, b)$, D$(a, 0)$

또, 점 P(a, b)는 이차함수 $y=x^2$의 그래프 위의 점이므로 $b=a^2$

삼각형 APB의 넓이를 S라고 하면

$S=\square$ODPC$-(\triangle$OAB$+\triangle$BPC$+\triangle$ADP$)$

$=ab-\left\{\frac{1}{2}\times1\times1+\frac{1}{2}\times a\times(b-1)+\frac{1}{2}\times(a-1)\times b\right\}$

$=ab-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}ab-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}ab-\frac{1}{2}b\right)$

$=ab-\left(\frac{1}{2}+ab-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b\right)$

$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$

$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}a^2$

$S=\frac{11}{2}$이므로

$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}a^2=\frac{11}{2}$, $a^2+a-12=0$

$(a+4)(a-3)=0 \quad\therefore a=-4$ 또는 $a=3$

이때 $a>0$이므로 $a=3$

따라서 $b=3^2=9$이므로

$\frac{b}{a}=\frac{9}{3}=3$

다른 풀이

삼각형 APB의 넓이를 S라고 하면

$S=\square$OAPC$-(\triangle$OAB$+\triangle$BPC$)$

$=\frac{1}{2}\times(1+a)\times b-\left\{\frac{1}{2}\times1\times1+\frac{1}{2}\times a\times(b-1)\right\}$

$=\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}ab-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}ab-\frac{1}{2}a\right)$

$=\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}$

04 답 ①

해결 key Point!

이차함수 $y=ax^2+q$ (a, q는 상수)가 모든 x의 값에 대하여 y의 값이 음수가 되려면 $a<0$, $q<0$이어야 한다.

이차함수 $y=(2a+1)x^2$의 그래프를 y축의 방향으로 $a+5$만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=(2a+1)x^2+a+5$

이때 모든 x의 값에 대하여 y의 값이 음수가 되어야 하므로

$2a+1<0$, $a+5<0$

$\therefore a<-\frac{1}{2}$, $a<-5$

따라서 $a<-5$이므로 정수 a의 최댓값은 -6이다.

05 답 ④

이차함수 $y=a(x+4)^2-2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=a(x+4-p)^2-2+q$

이 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-4+p, -2+q)$이므로

$-4+p=-1$, $-2+q=2$

$\therefore p=3$, $q=4$

따라서 이차함수 $y=a(x+1)^2+2$의 그래프가 점 $(-3, -6)$을 지나므로

$-6=4a+2$, $4a=-8$

$\therefore a=-2$

$\therefore a+p+q=-2+3+4=5$

06 답 ②

해결 key Point!

두 이차함수의 그래프 사이의 관계를 생각해야 한다.

이차함수 $y=2x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼 평행이동한 그래프의 식은

$f(x)=2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$

또, 이차함수 $y=2x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{3}{2}$만큼, y축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼 평행이동한 그래프의 식은

$g(x)=2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$

함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로

$f(1)=g(0)$, $f(2)=g(1)$, $f(3)=g(2)$, $\cdots$, $f(12)=g(11)$

$$\therefore \frac{g(1)\times g(2)\times\cdots\times g(12)}{f(1)\times f(2)\times\cdots\times f(12)}$$
$$=\frac{g(1)\times g(2)\times\cdots\times g(12)}{g(0)\times g(1)\times g(2)\times\cdots\times g(11)}$$
$$=\frac{g(12)}{g(0)}$$

이때 $g(0)=2\times\left(0+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}=5$,

$g(12)=2\times\left(12+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}=365$이므로

$\frac{g(12)}{g(0)}=\frac{365}{5}=73$

07 답 ②

해결 key Point!

꼭짓점의 좌표가 $(p,\ q)$인 이차함수는 $y=a(x-p)^2+q$임을 이용해야 한다.

주어진 이차함수 그래프의 꼭짓점 P의 좌표가 $(b,\ 4)$이므로 구하는 이차함수의 식을 $y=a(x-b)^2+4$ (a는 상수)라 하자.

이때 이 그래프가 두 점 $(0,\ 0)$, $(4,\ 3)$을 지나므로

$0=ab^2+4$, $ab^2=-4$

$\therefore a=-\frac{4}{b^2}$ $\cdots\cdots$ ㉠

$3=a(4-b)^2+4$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

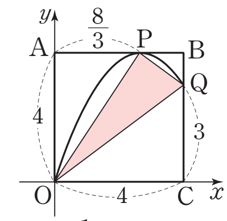
$3=-\frac{4}{b^2}(4-b)^2+4$, $3b^2=-64+32b-4b^2+4b^2$

$3b^2-32b+64=0$, $(3b-8)(b-8)=0$

$\therefore b=\frac{8}{3}$ 또는 $b=8$

이때 $b<4$이므로 $b=\frac{8}{3}$

오른쪽 그림과 같이 세 점 $(0,\ 4)$, $(4,\ 4)$, $(4,\ 0)$을 각각 A, B, C라고 하면



$\triangle$POQ$=\square$AOCB$-\triangle$AOP$-\triangle$BPQ$-\triangle$QOC

$=4\times4-\frac{1}{2}\times\frac{8}{3}\times4-\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times1-\frac{1}{2}\times4\times3$

$=16-\frac{16}{3}-\frac{2}{3}-6=4$

08 답 ③

그래프가 x축과 두 점 $(-4,\ 0)$, $(2,\ 0)$에서 만나므로 꼭짓점의 x좌표는 $\frac{-4+2}{2}=-1$

$\therefore p=-1$

또, 꼭짓점이 직선 $y=6$ 위에 있으므로 꼭짓점의 y좌표는 6이다.

$\therefore q=6$

이때 이차함수 $y=a(x+1)^2+6$의 그래프가 점 $(2,\ 0)$을 지나므로

$0=9a+6$, $9a=-6$

$\therefore a=-\frac{2}{3}$

$\therefore a+p+q=-\frac{2}{3}+(-1)+6=\frac{13}{3}$

Level UP

이차함수의 그래프가 x축과 두 점 $(a,\ 0)$, $(b,\ 0)$에서 만난다.

⇨ 축의 방정식은 $x=\frac{a+b}{2}$

⇨ 꼭짓점의 x좌표는 $\frac{a+b}{2}$

09 답 ⑤

주어진 그래프가 두 점 $(4,\ 0)$, $(0,\ 3)$을 지나므로

$a=\frac{0-3}{4-0}=-\frac{3}{4}$, $b=3$

$\therefore y=-\frac{3}{4}x^2+3x-1$

$=-\frac{3}{4}(x^2-4x+4-4)-1$

$=-\frac{3}{4}(x-2)^2+2$

따라서 축의 방정식은 $x=2$이다.

Level UP

일차함수의 그래프의 x절편이 m, y절편이 n이다.

⇨ 일차함수의 그래프가 두 점 $(m,\ 0)$, $(0,\ n)$을 지난다.

⇨ (기울기)$=\dfrac{0-n}{m-0}=-\dfrac{n}{m}$, ($y$절편)$=n$

⇨ $y=-\dfrac{n}{m}x+n$

10 답 ①

해결 key Point!

주어진 이차함수의 그래프와 두 일차함수의 그래프의 교점의 좌표를 구해야 한다.

이차함수 $y=x^2-4x+3$의 그래프와 일차함수 $y=x-1$의 그래프의 교점의 x좌표는 $x^2-4x+3=x-1$에서

$x^2-5x+4=0$, $(x-1)(x-4)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=4$

점 A가 x축 위에 있으므로 $\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{B}(4,\ 3)$

또, 이차함수 $y=x^2-4x+3$의 그래프와 일차함수 $y=x+3$의 그래프의 교점의 x좌표는 $x^2-4x+3=x+3$에서

$x^2-5x=0$, $x(x-5)=0$

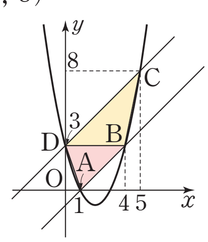
$\therefore\ x=0$ 또는 $x=5$

점 D는 y축 위에 있으므로 $\mathrm{D}(0,\ 3)$, $\mathrm{C}(5,\ 8)$

$\therefore\ \square\mathrm{ABCD}=\triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{BCD}$

$=\dfrac{1}{2}\times4\times3+\dfrac{1}{2}\times4\times5$

$=6+10=16$



11 답 ③

해결 key Point!

$\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}$임을 이용하여 a와 b 사이의 관계식을 구해야 한다.

주어진 그래프는 아래로 볼록하므로 $a>0$

축이 y축의 왼쪽에 있으므로

$ab>0$ $\quad\therefore\ b>0$

$m<0$에서 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}=-m$이므로 $\mathrm{A}(-m,\ 0)$

또, 점 $\mathrm{B}(0,\ m)$은 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프 위의 점이므로 $c=m$

마찬가지로 $\mathrm{A}(-m,\ 0)$도 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프 위의 점이므로

$am^2-bm+m=0$, $m(am-b+1)=0$

이때 $m\neq0$이므로

$am-b+1=0$ $\quad\therefore\ b=am+1$

$\therefore\ ab=a(am+1)$

$=ma^2+a$

$=m\left(a^2+\dfrac{1}{m}a+\dfrac{1}{4m^2}-\dfrac{1}{4m^2}\right)$

$=m\left(a+\dfrac{1}{2m}\right)^2-\dfrac{1}{4m}$

이때 $m<0$이므로 ab는 $a=-\dfrac{1}{2m}$일 때 최댓값 $-\dfrac{1}{4m}$을 갖는다.

12 답 ③

해결 key Point!

이차함수의 그래프가 x좌표가 3인 점에서 x축과 접하면 이차함수의 꼭짓점의 좌표가 $(3,\ 0)$임을 이용해야 한다.

이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$의 그래프가 x좌표가 3인 점에서 x축과 접하므로 꼭짓점의 좌표가 $(3,\ 0)$이다.

즉, $f(x)=a(x-3)^2=ax^2-6ax+9a$이므로

$b=-6a$, $c=9a$

또, $g(x)=bx^2+cx+6a=-6ax^2+9ax+6a$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표는 $-6ax^2+9ax+6a=0$에서

$-3a(2x^2-3x-2)=0$, $-3a(2x+1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=2$

$\therefore\ \alpha=-\dfrac{1}{2}$, $\beta=2$

따라서 $-\dfrac{1}{2}\le x\le2$를 만족시키는 정수 x는 0, 1, 2의 3개이다.

13 답 ①

해결 key Point!

이차함수 $f(x)=ax^2+2bx+c$의 그래프의 축의 위치에 따라 범위를 나누어서 풀어야 한다.

$f(x)=ax^2+2bx+c$가 $x\ge0$인 모든 x에 대하여 $f(x)>0$이므로 그래프는 아래로 볼록한 포물선이다.

$\therefore\ a>0$

ㄱ. $f(0)>0$이므로 $f(0)=c>0$

ㄴ, ㄷ. $f(x)=ax^2+2bx+c$

$=a\left(x+\dfrac{2b}{a}x+\dfrac{b^2}{a^2}-\dfrac{b^2}{a^2}\right)+c$

$=a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)^2-\dfrac{b^2-ac}{a}$

(i) $-\dfrac{b}{a}>0$ 즉, $ab<0$일 때

$x\ge0$에서 최솟값은 $f\left(-\dfrac{b}{a}\right)$이므로

$f\left(-\dfrac{b}{a}\right)=-\dfrac{b^2-ac}{a}>0$에서 $b^2-ac<0$

(ii) $-\frac{b}{a}<0$, 즉 $ab>0$일 때

$x\geq 0$에서 최솟값은 $f(0)$이므로 $f(0)=c>0$

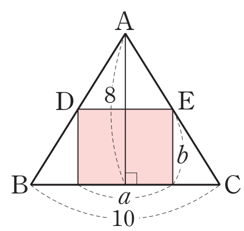
(i), (ii)에 의하여 $ab<0$, $b^2-ac<0$ 또는 $ab>0$, $c>0$이므로 반드시 $ab>0$, $b^2-ac<0$이라고 할 수 없다.

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

14 답 ④

해결 key Point!

삼각형의 닮음을 이용하여 직사각형의 가로와 세로의 길이 사이의 관계식을 구해야 한다.



오른쪽 그림과 같이 직사각형 모양의 밭의 가로와 세로의 길이를 각각 a, b라고 하면

$0<a<10$, $0<b<8$

두 삼각형 ABC, ADE에서

$\angle$A는 공통, $\overline{BC}\,/\!/\,\overline{DE}$이므로

$\angle ABC=\angle ADE$

$\therefore$ $\triangle ABC \backsim \triangle ADE$ (AA 닮음)

즉, $10 : a=8 : (8-b)$이므로

$10(8-b)=8a$, $80-10b=8a$

$10b=-8a+80 \qquad \therefore b=-\frac{4}{5}a+8$

직사각형의 넓이를 S라고 하면

$$\begin{aligned} S&=ab \\ &=a\left(-\frac{4}{5}a+8\right) \\ &=-\frac{4}{5}a^2+8a \\ &=-\frac{4}{5}(a^2-10a+25-25) \\ &=-\frac{4}{5}(a-5)^2+20 \end{aligned}$$

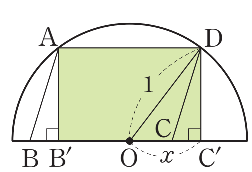
따라서 밭의 최대 넓이는 $a=5$일 때 20이다.

15 답 ④

해결 key Point!

반원 위에 있는 네 개의 점을 연결한 사각형이 평행사변형이 되기 위한 조건을 생각해야 한다.

한 꼭짓점만 지름 위에 있는 반원에 내접하는 사각형은 평행사변형이 될 수 없다.



또, 한 변이 지름 위에 있는 평행사변형 ABCD의 넓이는 오른쪽 그림과 같이 선분 BC를 선분 B′C′으로 옮겨서 만든 직사각형 AB′C′D의 넓이와 같다.

즉, 반지름의 길이가 1인 반원에 내접하는 평행사변형의 넓이의 최댓값은 직사각형의 넓이의 최댓값과 같다.

$\overline{OC'}=x$라고 하면 $\overline{B'C'}=2x$이고 삼각형 DOC′에서 피타고라스 정리에 의하여 $\overline{DC'}=\sqrt{1-x^2}$

$\therefore$ $\square ABCD=\square AB'C'D=2x\sqrt{1-x^2}=2\sqrt{x^2(1-x^2)}$

$x^2=t$라고 하면 $2\sqrt{x^2(1-x^2)}=2\sqrt{t(1-t)}=2\sqrt{t-t^2}$

근호 안의 식을 $f(t)=t-t^2$이라고 하면 $f(t)$가 최대일 때 $\square$ABCD의 넓이가 최대가 되므로

$$\begin{aligned} f(t)&=t-t^2 \\ &=-(t^2-t) \\ &=-\left(t^2-\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right) \\ &=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4} \end{aligned}$$

따라서 $t=x^2=\frac{1}{2}$일 때 $f(t)$는 최댓값 $\frac{1}{4}$을 가지고 그때의 평행사변형의 넓이는

$2\sqrt{\frac{1}{4}}=2\times\frac{1}{2}=1$

16 답 6

이차함수 $y=\frac{1}{4}(x-3)^2-5$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\frac{1}{4}(x-3-m)^2-5+n$

이때

$$\begin{aligned} y&=\frac{1}{4}x^2-3x+7 \\ &=\frac{1}{4}(x^2-12x+36-36)+7 \\ &=\frac{1}{4}(x-6)^2-2 \end{aligned}$$

이므로

$-3-m=-6$, $-5+n=-2$

따라서 $m=3$, $n=3$이므로

$m+n=3+3=6$

17 답 4

조건 (가)에 의하여 이차함수 $f(x)$의 x^2의 계수는 2이다.

$\therefore$ $a=2$

조건 (나)에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=\frac{1}{2}$이므로 $y=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+q$ (q는 상수)라고 하자.

조건 (다)에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(-1, 3)$을 지나므로

$3=\frac{9}{2}+q \qquad \therefore q=-\frac{3}{2}$

$\therefore$ $y=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{2}=2x^2-2x-1$

따라서 $a=2,\ b=-2,\ c=-1$이므로

$a+bc=2+(-2)\times(-1)=4$

18 답 -4

선분 AB는 x축과 평행하고 $\overline{AB}=6$이므로

$\overline{AP}=\overline{PQ}=\overline{QB}=2$

$\therefore$ P$(2,\ 2)$, Q$(4,\ 2)$

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 축에 대하여 대칭이므로 꼭짓점의 x좌표는 $\frac{2+4}{2}=3$이고 꼭짓점의 y좌표는 4이다.

따라서 $y=a(x-3)^2+4$이고 이 그래프가 점 P$(2,\ 2)$를 지나므로

$2=a+4 \qquad \therefore a=-2$

$\therefore y=-2(x-3)^2+4$

$\quad=-2x^2+12x-14$

따라서 $a=-2,\ b=12,\ c=-14$이므로

$a+b+c=-2+12+(-14)=-4$

19 답 4

조건 (가)에 의하여 $f(x)=ax(x-2)$ (a는 상수)라고 하면 조건 (나)에 의하여 이차방정식 $ax(x-2)-6(x-2)=0$, 즉 $(ax-6)(x-2)=0$의 실근의 개수가 1이므로 $ax-6=0$의 근이 $x=2$이어야 한다.

$2a-6=0$에서

$2a=6 \qquad \therefore a=3$

즉, $f(|x|)=3|x|(|x|-2)$이고 이 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표는 $3|x|(|x|-2)=0$에서

$|x|=0$ 또는 $|x|-2=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

따라서 $y=f(|x|)$의 그래프가 x축과 만나는 원점이 아닌 점의 x좌표가 $-2,\ 2$이므로 두 점 사이의 거리는

$2-(-2)=4$

Level UP

(i) $x\ge0$일 때

$3|x|(|x|-2)=3x(x-2)=3x^2-6x$

$\qquad=3(x^2-2x+1-1)=3(x-1)^2-3$

(ii) $x<0$일 때

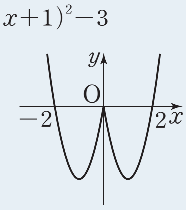
$3|x|(|x|-2)=-3x(-x-2)=3x^2+6x$

$\qquad=3(x^2+2x+1-1)=3(x+1)^2-3$

(i), (ii)에 의하여

$f(|x|)=\begin{cases}3(x-1)^2-3 & (x\ge0)\\ 3(x+1)^2-3 & (x<0)\end{cases}$이므로

$y=f(|x|)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



20 답 -6

해결 key Point!

이차함수 $y=x^2-3x$의 그래프와 일차함수 $y=4x-10$의 그래프의 두 교점의 좌표를 구해야 한다.

이차함수 $y=x^2-3x$의 그래프와 일차함수 $y=4x-10$의 그래프의 교점의 x좌표는 $x^2-3x=4x-10$에서

$x^2-7x+10=0,\ (x-2)(x-5)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=5$

이때 y의 값은 각각 $-2,\ 10$이므로 두 점 P, Q의 좌표는 $(2,\ -2),\ (5,\ 10)$이다.

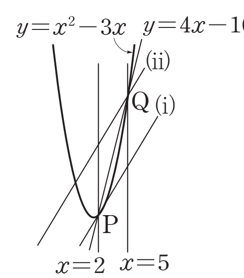
(i) $y=2x+b$의 그래프가 점 $(2,\ -2)$를 지날 때

$-2=2\times2+b$에서 $b=-6$

(ii) $y=2x+b$의 그래프가 점 $(5,\ 10)$을 지날 때

$10=2\times5+b$에서 $b=0$

(i), (ii)에 의하여 오른쪽 그림과 같이 일차함수 $y=2x+b$의 그래프가 선분 PQ와 만나도록 하는 b의 값의 범위는 $-6\le b\le0$이므로 b의 최댓값은 0, 최솟값은 -6이다.



따라서 b의 최댓값과 최솟값의 합은

$0+(-6)=-6$

21 답 $\frac{3}{8}$

$f(x)=2x^2-8ax+6a-1$

$\quad=2(x^2-4ax+4a^2-4a^2)+6a-1$

$\quad=2(x-2a)^2-8a^2+6a-1$

$f(x)$의 최솟값은 $x=2a$일 때 $g(a)=-8a^2+6a-1$이므로

$g(a)=-8a^2+6a-1$

$\quad=-8\left(a^2-\frac{3}{4}a+\frac{9}{64}-\frac{9}{64}\right)-1$

$\quad=-8\left(a-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{1}{8}$

따라서 $g(a)$는 최댓값 $\frac{1}{8}$을 갖고 그때의 상수 a의 값은 $\frac{3}{8}$이다.

22 답 $3:4$

1단계 두 점 A, B의 좌표 구하기

$y=\frac{1}{2}x^2-2x-6$에 $y=0$을 대입하면

$\frac{1}{2}x^2-2x-6=0,\ x^2-4x-12=0$

$(x+2)(x-6)=0 \qquad \therefore x=-2$ 또는 $x=6$

$\therefore$ A$(-2,\ 0)$, B$(6,\ 0)$

2단계 두 점 C, D의 좌표 구하기

$y=\frac{1}{2}x^2-2x-6$에 $x=0$을 대입하면 $y=-6$

$\therefore$ C$(0,\ -6)$

$$\begin{aligned} y&=\frac{1}{2}x^2-2x-6 \\ &=\frac{1}{2}(x^2-4x+4-4)-6 \\ &=\frac{1}{2}(x-2)^2-8 \end{aligned}$$

이므로 D$(2,\ -8)$

3단계 $\triangle$ACB : $\triangle$ADB를 간단한 자연수의 비로 나타내기

$\triangle$ACB와 $\triangle$ADB는 밑변이 선분 AB로 같으므로

$\triangle$ACB : $\triangle$ADB$=|$(점 C의 y좌표)$|$: $|$(점 D의 y좌표)$|$

$=6:8=3:4$

단계	채점 기준	배점
❶	두 점 A, B의 좌표를 구했다.	2점
❷	두 점 C, D의 좌표를 구했다.	2점
❸	$\triangle$ACB : $\triangle$ADB를 간단한 자연수의 비로 나타냈다.	3점

23 답 54 m^2

해결 key Point!

피구장을 만들 때 가로, 세로뿐만 아니라 가운데 선도 그어야 함을 알아야 한다.

1단계 피구장의 세로의 길이를 가로의 길이에 대한 식으로 나타내기

피구장의 가로의 길이를 x m, 세로의 길이를 y m라고 하면 종이테이프는 가로 라인을 긋는 데 $3x$ m가 필요하고 세로 라인을 긋는 데 $2y$ m가 필요하므로

$3x+2y=36$

$2y=36-3x$

$\therefore\ y=\frac{1}{2}(36-3x)$

2단계 피구장의 넓이를 이차함수 형태로 나타내기

$x>0,\ y>0$이므로

$\frac{1}{2}(36-3x)>0$

$36-3x>0$

$3x<36$

$\therefore\ x<12$

즉, $0<x<12$이고 피구장의 넓이를 $f(x)$라고 하면

$$\begin{aligned} f(x)&=xy \\ &=x\times\frac{1}{2}(36-3x) \\ &=\frac{1}{2}(-3x^2+36x) \end{aligned}$$

3단계 피구장의 최대 넓이 구하기

$$\begin{aligned} f(x)&=\frac{1}{2}(-3x^2+36x) \\ &=-\frac{3}{2}(x^2-12x) \\ &=-\frac{3}{2}(x^2-12x+36-36) \\ &=-\frac{3}{2}(x-6)^2+54 \end{aligned}$$

따라서 피구장의 최대 넓이는 54 m^{2}이다.

단계	채점 기준	배점
❶	피구장의 세로의 길이를 가로의 길이에 대한 식으로 나타냈다.	2점
❷	피구장의 넓이를 이차함수의 형태로 나타냈다.	3점
❸	피구장의 최대 넓이를 구했다.	2점

MEMO

MEMO

MEMO

MEMO