최고난도

중학수학 1-1

정답과 풀이

I 수와 연산

01 소인수분해

Lv. 1 개념을 적용하는 핵심 문제 10쪽~13쪽

01 ③	**02** ⑤	**03** ⑤	**04** ②, ③	**05** 2
06 ③	**07** ④	**08** 24	**09** ②	**10** 9
11 2	**12** 20	**13** ②, ⑤	**14** 12	**15** 8
16 16	**17** 18	**18** 4	**19** ②	**20** $\frac{100}{7}$
21 A: 3바퀴, B: 2바퀴		**22** 360초	**23** 15	**24** 84

01 답 ③

약수가 2개인 자연수는 소수이므로 30보다 크고 50보다 작은 자연수 중 소수는 31, 37, 41, 43, 47의 5개이다.

02 답 ⑤

① 소수 중 2는 짝수이다.

② 합성수는 약수가 3개 이상이다.

③ 두 소수 2, 3의 곱은 6이므로 짝수이다.

④ 4의 배수 중 소수는 없다.

03 답 ⑤

소수를 작은 수부터 차례대로 나열하면

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, …

이때 자연수 N보다 작거나 같은 소수가 6개이어야 하므로 N의 값은 13보다 크거나 같고 17보다 작다.

즉, N의 값이 될 수 있는 수는 13, 14, 15, 16이다.

따라서 N의 값이 될 수 없는 것은 ⑤이다.

04 답 ②, ③

② $5+5+5=5\times3$

③ $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3^4}$

05 답 2

2^{41}을 10으로 나누었을 때의 나머지는 2^{41}의 일의 자리의 숫자와 같다.

$2^1=2$, $2^2=4$, $2^3=8$, $2^4=16$, $2^5=32$, …이므로 2의 거듭제곱의 일의 자리의 숫자는 2, 4, 8, 6이 이 순서대로 반복된다.

이때 $41=4\times10+1$이므로 2^{41}을 10으로 나누었을 때의 나머지는 2이다.

Level UP

어떤 자연수를 10으로 나누었을 때의 나머지는 그 수의 일의 자리의 숫자와 같다.

06 답 ③

$1\times2\times3\times\cdots\times10$

$=1\times2\times3\times2^2\times5\times(2\times3)\times7\times2^3\times3^2\times(2\times5)$

$=2^8\times3^4\times5^2\times7$

따라서 $a=8$, $b=4$, $c=2$, $d=7$이므로

$a+b+c-d=8+4+2-7=7$

07 답 ④

$56=2^3\times7$이므로 모든 소인수는 2, 7의 2개이다.

$\therefore a=2$

$198=2\times3^2\times11$이므로 모든 소인수는 2, 3, 11이다.

이때 모든 소인수의 합은 $2+3+11=16$이므로

$b=16$

$\therefore a+b=2+16=18$

08 답 24

$294=2\times3\times7^2$이므로 곱할 수 있는 자연수는

$2\times3\times(\text{자연수})^2$, 즉 $6\times(\text{자연수})^2$의 꼴이다.

따라서 곱할 수 있는 자연수를 작은 수부터 차례대로 나열하면

$6\times1^2=6$, $6\times2^2=24$, $6\times3^2=54$, …이므로 두 번째로 작은 자연수는 24이다.

09 답 ②

① $352=2^5\times11$이므로 약수의 개수는

$(5+1)\times(1+1)=12$

② $192=2^6\times3$이므로 약수의 개수는

$(6+1)\times(1+1)=14$

③ $150=2\times3\times5^2$이므로 약수의 개수는

$(1+1)\times(1+1)\times(2+1)=12$

④ $2^3\times5^2$의 약수의 개수는

$(3+1)\times(2+1)=12$

⑤ $2^2\times3\times7$의 약수의 개수는

$(2+1)\times(1+1)\times(1+1)=12$

따라서 약수의 개수가 나머지 넷과 다른 하나는 ②이다.

10 답 9

분수 $\frac{225}{n}$가 자연수이려면 n은 225의 약수이어야 한다.

이때 $225=3^2\times5^2$이므로 225의 약수의 개수는

$(2+1)\times(2+1)=9$

따라서 자연수 n의 개수는 9이다.

11 답 2

1단계 392의 약수의 개수 구하기

$392=2^3\times7^2$이므로 약수의 개수는

$(3+1)\times(2+1)=12$

2단계 $2\times3\times5^x$의 약수의 개수 구하기

$2\times3\times5^x$의 약수의 개수는

$(1+1)\times(1+1)\times(x+1)=4\times(x+1)$

3단계 x의 값 구하기

이때 $4\times(x+1)=12$이므로

$x+1=3 \qquad \therefore x=2$

단계	채점 기준	비율
❶	392의 약수의 개수를 구했다.	40 %
❷	$2\times3\times5^x$의 약수의 개수를 구했다.	40 %
❸	x의 값을 구했다.	20 %

12 답 20

$35=5\times7$이므로 35와 서로소인 수는 5의 배수도 아니고 7의 배수도 아닌 수이다.

이때 30 이하의 자연수 중 5의 배수는 5, 10, 15, 20, 25, 30의 6개이고 7의 배수는 7, 14, 21, 28의 4개이므로 구하는 수의 개수는

$30-(6+4)=20$

참고 30 이하의 자연수 중 5의 배수이면서 7의 배수인 수는 없으므로 5의 배수 또는 7의 배수인 수의 개수는
(5의 배수의 개수)+(7의 배수의 개수)이다.

13 답 ②, ⑤

두 개 이상의 자연수의 공약수는 그 수들의 최대공약수의 약수이다. 즉, 48과 x의 최대공약수가 24이다.

$48=2^4\times3$이므로

① 48과 $16=2^4$의 최대공약수는 $2^4=16$

② 48과 $24=2^3\times3$의 최대공약수는 $2^3\times3=24$

③ 48과 $60=2^2\times3\times5$의 최대공약수는 $2^2\times3=12$

④ 48과 $96=2^5\times3$의 최대공약수는 $2^4\times3=48$

⑤ 48과 $120=2^3\times3\times5$의 최대공약수는 $2^3\times3=24$

따라서 x의 값이 될 수 있는 것은 ②, ⑤이다.

참고 두 개 이상의 자연수의 공약수는 그 수들의 최대공약수의 약수이므로 48과 x의 공약수가 24의 약수와 같으려면 48과 x의 최대공약수가 24이어야 한다.

14 답 12

1단계 n이 어떤 수인지 알기

두 분수 $\frac{45}{n}$, $\frac{63}{n}$이 모두 자연수가 되려면 자연수 n은 45와 63의 공약수이어야 한다.

2단계 n의 값 중 가장 큰 수 구하기

$45=3^2\times5$, $63=3^2\times7$이므로 n의 값이 가장 클 때는 두 수의 최대공약수인 $3^2=9$일 때이다.

3단계 n의 값이 가장 클 때의 $\frac{45}{n}+\frac{63}{n}$의 값 구하기

따라서 $n=9$이므로

$\frac{45}{n}+\frac{63}{n}=\frac{45}{9}+\frac{63}{9}=5+7=12$

단계	채점 기준	비율
❶	n이 어떤 수인지 파악했다.	20 %
❷	n의 값 중 가장 큰 수를 구했다.	40 %
❸	n의 값이 가장 클 때의 $\frac{45}{n}+\frac{63}{n}$의 값을 구했다.	40 %

15 답 8

어떤 자연수로 92를 나누면 4가 남으므로 어떤 자연수로 $92-4=88$을 나누면 나누어떨어진다.

어떤 자연수로 198을 나누면 6이 남으므로 어떤 자연수로 $198-6=192$를 나누면 나누어떨어진다.

이를 만족시키는 값은 88과 192의 공약수이고, 이 중 가장 큰 자연수는 $88=2^3\times11$과 $192=2^6\times3$의 최대공약수이므로 $2^3=8$이다.

Level UP

●로 ▲를 나누면 ★이 남는다.

⇨ ●로 (▲－★)을 나누면 나누어떨어진다.

⇨ ●는 (▲－★)의 약수이다.

16 답 16

사탕과 젤리를 가능한 한 많은 상자에 똑같이 나누어 담으려면 상자의 개수는 사탕과 젤리의 개수의 최대공약수이어야 한다.

이때 $128=2^7$, $112=2^4\times7$이므로 최대공약수는 $2^4=16$

따라서 필요한 상자의 개수는 16이다.

17 답 18

목장 둘레에 일정한 간격으로 가장 적게 기둥을 박으려면 기둥의 간격은 가로, 세로의 길이의 최대공약수이어야 한다.

이때 $120=2^3\times3\times5$, $150=2\times3\times5^2$이므로 최대공약수는

$2\times3\times5=30$

따라서 가로, 세로에 필요한 기둥의 개수는 각각

$120 \div 30 = 4$, $150 \div 30 = 5$

이므로 필요한 기둥의 개수는 $4 \times 2 + 5 \times 2 = 18$

다른 풀이

목장의 둘레의 길이가 $(120+150) \times 2 = 540$ (m)

이므로 필요한 기둥의 개수는 $540 \div 30 = 18$

18 답 4

세 수 2×5, $2^2 \times 3$, $45 = 3^2 \times 5$의 최소공배수는

$2^2 \times 3^2 \times 5 = 180$

이때 180의 배수는 180, 360, 540, 720, 900, …이므로 800 이하의 공배수는 180, 360, 540, 720의 4개이다.

참고 두 수의 공배수는 최소공배수의 배수와 같다.

19 답 ②

$10 \times x = 2 \times 5 \times x$, $12 \times x = 2^2 \times 3 \times x$, $18 \times x = 2 \times 3^2 \times x$

이므로

세 수의 최대공약수는 $2 \times x$

세 수의 최소공배수는 $2^2 \times 3^2 \times 5 \times x$

이때 세 수의 최소공배수는 $540 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 3$이므로

$x = 3$

따라서 세 수의 최대공약수는

$2 \times x = 2 \times 3 = 6$

20 답 $\frac{100}{7}$

해결 key Point!

두 분수 $\frac{▲}{●}$, $\frac{★}{■}$ 중 어느 것에 곱해도 자연수가 되게 하는 가장 작은 기약분수는 $\frac{(●, ■\text{의 최소공배수})}{(▲, ★\text{의 최대공약수})}$이다.

구하는 분수를 $\frac{a}{b}$라 하고 가장 작은 기약분수이려면

a는 $25 = 5^2$과 $20 = 2^2 \times 5$의 최소공배수이어야 하므로

$a = 2^2 \times 5^2 = 100$

b는 $21 = 3 \times 7$과 $49 = 7^2$의 최대공약수이어야 하므로

$b = 7$

따라서 구하는 가장 작은 기약분수는 $\frac{100}{7}$이다.

21 답 A: 3바퀴, B: 2바퀴

두 톱니바퀴가 처음으로 다시 같은 톱니에서 맞물릴 때까지 돌아간 톱니의 수는 36과 54의 최소공배수이다.

이때 $36 = 2^2 \times 3^2$, $54 = 2 \times 3^3$이므로 최소공배수는

$2^2 \times 3^3 = 108$

따라서 두 톱니바퀴가 처음으로 다시 같은 톱니에서 맞물리려면 각각 A는 $108 \div 36 = 3$(바퀴), B는 $108 \div 54 = 2$(바퀴) 회전해야 한다.

22 답 360초

빨간색, 노란색, 파란색 전구가 켜진 후 다시 켜질 때까지 걸리는 시간은 각각 $7+1=8$(초), $8+1=9$(초), $9+1=10$(초)이므로 세 색깔의 전구가 동시에 켜진 후 처음으로 다시 동시에 켜질 때까지 걸리는 시간은 8, 9, 10의 최소공배수이다.

이때 $8 = 2^3$, $9 = 3^2$, $10 = 2 \times 5$이므로 최소공배수는

$2^3 \times 3^2 \times 5 = 360$

따라서 세 색깔의 전구가 처음으로 다시 동시에 켜질 때까지 걸리는 시간은 360초이다.

23 답 15

두 자연수 A, 91의 최대공약수가 13이고 $91 = 13 \times 7$이므로

$A = 13 \times a$ (a는 7과 서로소)라고 하자.

두 자연수 A, 91의 최소공배수가 182이므로

$13 \times a \times 7 = 182 \quad \therefore a = 2$

따라서 $A = 13 \times 2$이므로 A의 모든 소인수의 합은

$2 + 13 = 15$

24 답 84

두 자리 자연수 A, B의 최대공약수가 6이므로

$A = 6 \times a$, $B = 6 \times b$ (a와 b는 서로소, $a < b$)라고 하자.

두 수 A, B의 최소공배수가 198이므로

$6 \times a \times b = 198 \quad \therefore a \times b = 33$

(i) $a = 1$, $b = 33$일 때

$A = 6 \times 1 = 6$, $B = 6 \times 33 = 198$

이때 6은 한 자리 수, 198은 세 자리 수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a = 3$, $b = 11$일 때

$A = 6 \times 3 = 18$, $B = 6 \times 11 = 66$

(i), (ii)에 의하여 $A = 18$, $B = 66$

$\therefore A + B = 18 + 66 = 84$

Level UP

두 자연수 A, B의 최대공약수가 G이고 최소공배수가 L일 때

(1) $A = a \times G$, $B = b \times G$ (a, b는 서로소)

(2) $L = a \times b \times G$

(3) $A \times B = G \times L$

Lv. 2 사고를 확장하는 실전 문제

14쪽~20쪽

01 ⑤	02 176	03 ②	04 ②	05 ①
06 6	07 510	08 823	09 ⑤	10 27
11 ③	12 50	13 4	14 4	15 ①
16 168	17 ②	18 3600	19 48	20 ②
21 ②	22 49	23 10800	24 196	25 ⑤
26 10	27 6	28 ①	29 ⑤	30 ②
31 103	32 130	33 ②	34 118	35 4명
36 432	37 재학생: 10만 원, 선생님: 30만 원, 졸업생: 18만 원			
38 36	39 36	40 170	41 120	42 10

01 답 ⑤

해결 key Point!

41은 홀수이므로 $p+q^2=$(홀수)를 만족시키는 p와 q의 홀수, 짝수 조합을 찾는다.

$p+q^2=41$에서 41이 홀수이므로 $41=$(짝수)$+$(홀수)의 꼴이어야 한다.
이때 소수 중 짝수인 수는 2뿐이므로 $p=2$ 또는 $q=2$이다.
(i) $p=2$일 때
$2+q^2=41$이므로 $q^2=39$
이때 $39=3\times13$이므로 조건을 만족시키는 q의 값은 없다.
(ii) $q=2$일 때
$p+2^2=41$이므로 $p=37$
이때 37은 홀수인 소수이므로 주어진 조건을 만족시킨다.
(i), (ii)에 의하여 $p=37$, $q=2$이므로
$p-q=37-2=35$

꿀 한줄평

소수 중 짝수인 수는 2뿐이므로 짝수인 소수가 나오면 그 값은 2임을 이용해서 문제를 해결한다.

02 답 176

두 자리 자연수 $10\times a+b$, $10\times b+a$가 모두 소수이므로 일의 자리의 숫자는 짝수도 아니고 5도 아니다.
따라서 a와 b가 될 수 있는 수는 1, 3, 7, 9이다.
이때 X, Y의 합이 가장 크려면
$a=7$, $b=9$ 또는 $a=9$, $b=7$
즉, 조건을 만족시키는 X, Y의 값은 79, 97이므로 구하는 합은
$79+97=176$

03 답 ②

50보다 작은 소수는 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47이고 이 중 서로 다른 두 소수의 합이 50이 되는 경우는
$50=3+47=7+43=13+37=19+31$
따라서 조건을 만족시키는 (a, b)는
$(3, 47)$, $(7, 43)$, $(13, 37)$, $(19, 31)$의 4개이므로 $A=4$
이때 $3\times47=141$, $7\times43=301$, $13\times37=481$,
$19\times31=589$이므로 두 소수의 곱 중 가장 큰 수는 589이다.
$\therefore B=589$
$\therefore A+B=4+589=593$

04 답 ②

$2^1=2$, $2^2=4$, $2^3=8$, $2^4=16$, $2^5=32$, …이므로 2의 거듭제곱의 일의 자리의 숫자는 2, 4, 8, 6이 이 순서대로 반복되고, $2026=4\times506+2$이므로 2^{2026}의 일의 자리의 숫자는 4이다.
$3^1=3$, $3^2=9$, $3^3=27$, $3^4=81$, $3^5=243$, …이므로 3의 거듭제곱의 일의 자리의 숫자는 3, 9, 7, 1이 이 순서대로 반복되고, $2027=4\times506+3$이므로 3^{2027}의 일의 자리의 숫자는 7이다.
$7^1=7$, $7^2=49$, $7^3=343$, $7^4=2401$, $7^5=16807$, …이므로 7의 거듭제곱의 일의 자리의 숫자는 7, 9, 3, 1이 이 순서대로 반복되고, $2028=4\times507$이므로 7^{2028}의 일의 자리의 숫자는 1이다.
따라서 $2^{2026}+3^{2027}+7^{2028}$의 일의 자리의 숫자는
$4+7+1=12$에서 2이다.

05 답 ①

해결 key Point!

n의 모든 약수의 합이 $n+1$이면 n은 소수이다.

조건 (가)를 만족시키는 자연수 n은 약수가 1, n뿐이어야 하므로 n은 소수이다.
또, 조건 (나)에 의하여 n은 20보다 크고 40보다 작은 소수이므로 자연수 n은 23, 29, 31, 37의 4개이다.

06 답 6

해결 key Point!

어떤 수의 제곱이 되려면 소인수분해했을 때 지수가 전부 짝수이어야 한다.

$540=2^2\times3^3\times5$이므로
$x=3\times5\times k^2=15\times k^2$ (k는 자연수)의 꼴이어야 한다.
$k=1$일 때, $x=15\times1^2=15$
$k=2$일 때, $x=15\times2^2=60$
$k=3$일 때, $x=15\times3^2=135$
$k=4$일 때, $x=15\times4^2=240$
$k=5$일 때, $x=15\times5^2=375$
$k=6$일 때, $x=15\times6^2=540$
$k=7$일 때, $x=15\times7^2=735$

$k=8$일 때, $x=15\times8^2=960$

$k=9$일 때, $x=15\times9^2=1215$

따라서 x의 값이 될 수 있는 세 자리 자연수는 135, 240, 375, 540, 735, 960의 6개이다.

07 답 510

$480\times x=y^3$이므로 $480\times x$를 소인수분해했을 때 모든 소인수의 지수가 3의 배수이어야 한다.

$480=2^5\times3\times5$이므로 조건을 만족시키는 가장 작은 x의 값은

$2\times3^2\times5^2=450$

이때 $480\times x=2^6\times3^3\times5^3=216000=60^3=y^3$이므로

$y=60$

$\therefore\ x+y=450+60=510$

08 답 823

해결 key Point!

두 번째로 큰 수를 찾아야 하므로 조건을 만족시키는 수 중 큰 수부터 찾아본다.

1단계 A의 값이 될 수 있는 수 설정하기

두 번째로 큰 수 ABCDE를 찾아야 하므로 A=9라고 하자.

2단계 두 번째로 큰 수 ABCDE 구하기

2의 배수는 일의 자리의 숫자가 짝수이므로 가장 큰 9B의 값은 98이다.

$\therefore$ B=8

3의 배수는 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이고, $9+8=17$이므로 17+C가 3의 배수이어야 한다.

이를 만족시키는 가장 큰 C의 값은 7이다.

$\therefore$ C=7

4의 배수는 끝의 두 자리 수가 4의 배수이어야 하므로 7D가 4의 배수이어야 한다.

이를 만족시키는 가장 큰 7D의 값은 76이므로

D=6

5의 배수는 일의 자리의 숫자가 0 또는 5이므로

조건을 만족시키는 가장 큰 수 ABCDE는 98765, 두 번째로 큰 수 ABCDE는 98760이다.

$\therefore$ E=0

3단계 자연수 k의 값 구하기

따라서 두 번째로 큰 수 ABCDE는 98760이므로 이 수를 소인수분해하면

$98760=2^3\times3\times5\times k=2^3\times3\times5\times823$

$\therefore\ k=823$

단계	채점 기준	비율
❶	A의 값이 될 수 있는 수를 설정했다.	20 %
❷	두 번째로 큰 수 ABCDE를 구했다.	60 %
❸	자연수 k의 값을 구했다.	20 %

Level UP

배수판정법

① 2의 배수: 일의 자리의 숫자가 0 또는 2의 배수인 수
② 3의 배수: 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수인 수
③ 4의 배수: 끝의 두 자리 수가 00 또는 4의 배수인 수
④ 5의 배수: 일의 자리의 숫자가 0 또는 5인 수
⑤ 9의 배수: 각 자리의 숫자의 합이 9의 배수인 수
⑥ 11의 배수: 주어진 수에서 홀수 번째 숫자의 합과 짝수 번째 숫자의 합의 차가 0 또는 11의 배수인 수

09 답 ⑤

해결 key Point!

1부터 30까지의 자연수에서 소인수분해했을 때 2와 3을 소인수로 갖는 수만 생각해야 한다.

1부터 30까지의 자연수 중

2의 배수는 2, 4, 6, 8, …, 30의 15개

$4=2^2$의 배수는 4, 8, 12, …, 28의 7개

$8=2^3$의 배수는 8, 16, 24의 3개

$16=2^4$의 배수는 16의 1개

$\therefore\ a=15+7+3+1=26$

3의 배수는 3, 6, 9, …, 30의 10개

$9=3^2$의 배수는 9, 18, 27의 3개

$27=3^3$의 배수는 27의 1개

$\therefore\ b=10+3+1=14$

$\therefore\ a+b=26+14=40$

10 답 27

$$\begin{aligned}2^5\times3^2\times5^7\times7&=(2^5\times5^5)\times3^2\times5^2\times7\\&=100000\times1575\\&=157500000\end{aligned}$$

따라서 $2^5\times3^2\times5^7\times7$은 9자리 자연수이므로

$n=9$

각 자리의 숫자의 합은 $k=1+5+7+5=18$

$\therefore\ n+k=9+18=27$

11 답 ③

$n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times2\times1$의 천의 자리부터 일의 자리의 숫자까지 모두 0이려면

$n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times2\times1$은 $10000=2^4\times5^4$의 배수이어야 하므로 소인수분해하면 2와 5가 각각 적어도 4개 존재해야 한다.

$2\times4\times6=2^4\times3$이므로 2^4의 배수가 되려면 n의 값은 6 이상이어야 한다.

또, $5\times10\times15\times20=2^3\times3\times5^4$이므로 5^4의 배수가 되려면 n의 값은 20 이상이어야 한다.
한편, $5\times10\times15\times20\times25=2^3\times3\times5^6$이면 주어진 수는 $2^5\times5^5$의 배수가 되어 만의 자리의 숫자가 0이 되므로 조건을 만족시키지 않는다.
따라서 자연수 n의 값은 20 이상 25 미만이고 이 값 중 가장 큰 수는 24, 가장 작은 수는 20이므로 구하는 합은
$24+20=44$

12 답 50

$360=2^3\times3^2\times5$이므로 360의 약수 중 어떤 자연수의 제곱이 되는 수는 $1,\ 2^2,\ 3^2,\ 2^2\times3^2$이다.
따라서 제곱이 되는 모든 수의 합은
$1+2^2+3^2+(2^2\times3^2)=1+4+9+36=50$

13 답 4

N의 약수를 작은 수부터 차례대로 나열하면
$1,\ 2,\ 3,\ 2^2,\ \dots,\ 2^{a-2}\times3^2,\ 2^{a-1}\times3,\ 2^{a-1}\times3^2,\ 2^a\times3^2$
즉, N의 약수는 $2^a\times3^2$을 2^m (m은 a보다 크지 않은 자연수) 또는 3^n (n은 2보다 크지 않은 자연수) 또는 $2^m\times3^n$으로 나눈 수이다.
따라서 N의 약수 중 가장 큰 수는 N
두 번째로 큰 수는 $N\div2$
세 번째로 큰 수는 $N\div3$
네 번째로 큰 수는 $N\div2^2$
다섯 번째로 큰 수는 $N\div(2\times3)$
$\vdots$
이때 $N\div(2\times3)=24$이므로
$N=24\times6=144$
따라서 $N=144=2^4\times3^2$이므로
$a=4$

14 답 4

해결 key Point!
약수의 개수를 구할 때에는 반드시 밑을 소수로 만들어야 한다.

1단계 자연수 m의 값 구하기
$A=2^m\times3^m\times5$이므로 약수의 개수는
$(m+1)\times(m+1)\times(1+1)=18$
$(m+1)\times(m+1)=9=3^2$이므로
$m+1=3 \qquad \therefore m=2$
2단계 자연수 n의 값 구하기
$B=2^n\times15^2=2^n\times3^2\times5^2$이므로 약수의 개수는
$(n+1)\times(2+1)\times(2+1)=36$
$n+1=4 \qquad \therefore n=3$
3단계 $\dfrac{B}{A}$의 약수의 개수 구하기
따라서 $A=2^2\times3^2\times5=180$, $B=2^3\times3^2\times5^2=1800$에서
$\dfrac{B}{A}=\dfrac{1800}{180}=10=2\times5$이므로 $\dfrac{B}{A}$의 약수의 개수는
$(1+1)\times(1+1)=4$

단계	채점 기준	비율
❶	자연수 m의 값을 구했다.	30 %
❷	자연수 n의 값을 구했다.	30 %
❸	$\dfrac{B}{A}$의 약수의 개수를 구했다.	40 %

15 답 ①

A의 약수의 개수가 12이므로
$(a+1)\times(b+1)\times(1+1)=12$
$\therefore (a+1)\times(b+1)=6$
이때 a, b는 자연수이므로
$a+1=2,\ b+1=3$ 또는 $a+1=3,\ b+1=2$
즉, $a=1,\ b=2$ 또는 $a=2,\ b=1$이다.
(i) $a=1,\ b=2$일 때
$A=2\times5^2\times c=50\times c$이므로 A가 100 이하의 자연수가 되는 c의 값은 1, 2
이때 c는 2와 5가 아닌 소수이므로 조건을 만족시키는 c의 값은 없다.
(ii) $a=2,\ b=1$일 때
$A=2^2\times5\times c=20\times c$이므로 A가 100 이하의 자연수가 되는 c의 값은 1, 2, 3, 4, 5
이때 c는 2와 5가 아닌 소수이므로 조건을 만족시키는 c의 값은 3이다.
(i), (ii)에 의하여 $a=2,\ b=1,\ c=3$이므로
$a+b+c=2+1+3=6$
참고 $a+1=1$ 또는 $b+1=1$이면 $a=0$ 또는 $b=0$이므로 a, b가 자연수가 되지 않는다.

16 답 168

$A=2^a\times3^b$ (a, b는 자연수)의 꼴이고 약수의 개수는 12이므로
$(a+1)\times(b+1)=12$
이때 a, b는 자연수이므로
$a+1=2,\ b+1=6$ 또는 $a+1=3,\ b+1=4$
또는 $a+1=4,\ b+1=3$ 또는 $a+1=6,\ b+1=2$
즉, $a=1,\ b=5$ 또는 $a=2,\ b=3$ 또는 $a=3,\ b=2$ 또는 $a=5,\ b=1$이다.
(i) $a=1,\ b=5$일 때
$A=2^1\times3^5=486$
이때 A는 세 자리 자연수이므로 조건을 만족시키지 않는다.
(ii) $a=2,\ b=3$일 때

$A=2^2\times3^3=108$

이때 A는 세 자리 자연수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $a=3$, $b=2$일 때

$A=2^3\times3^2=72$

(iv) $a=5$, $b=1$일 때

$A=2^5\times3^1=96$

(i)~(iv)에 의하여 조건을 만족시키는 모든 A의 값의 합은

$72+96=168$

17 답 ②

해결 key Point!

a의 값을 구한 다음 $a<b$임을 이용하여 가능한 경우를 모두 구하고, 그때의 $a+b+c$의 값을 비교한다.

$2^a\times5^3$의 약수의 개수가 20이므로

$(a+1)\times(3+1)=20$

$a+1=5$　　$\therefore a=4$

즉, $2^{a+2}\times5^{b+1}\times7^c=2^6\times5^{b+1}\times7^c$의 약수의 개수가 294이므로

$(6+1)\times(b+1+1)\times(c+1)=294$

$(b+2)\times(c+1)=42$

이때 $a=4$이고 $a<b$이므로 b는 4보다 큰 자연수이다.

따라서 $b+2=7$, $c+1=6$ 또는 $b+2=14$, $c+1=3$

또는 $b+2=21$, $c+1=2$이므로

$b=5$, $c=5$ 또는 $b=12$, $c=2$ 또는 $b=19$, $c=1$이다.

(i) $b=5$, $c=5$일 때

$a+b+c=4+5+5=14$

(ii) $b=12$, $c=2$일 때

$a+b+c=4+12+2=18$

(iii) $b=19$, $c=1$일 때

$a+b+c=4+19+1=24$

(i)~(iii)에 의하여 $a+b+c$의 값 중 가장 작은 수는 14이다.

18 답 3600

해결 key Point!

45를 1이 아닌 세 자연수의 곱으로 나타내어 본다.

N은 제곱수이므로 x, y, z는 짝수이고 N의 약수의 개수가 45이므로

$(x+1)\times(y+1)\times(z+1)=45$

이때 45를 1이 아닌 세 자연수의 곱으로 나타내면 $3\times3\times5$뿐이므로

$x+1=3$, $y+1=3$, $z+1=5$

또는 $x+1=3$, $y+1=5$, $z+1=3$

또는 $x+1=5$, $y+1=3$, $z+1=3$

즉, $x=2$, $y=2$, $z=4$ 또는 $x=2$, $y=4$, $z=2$

또는 $x=4$, $y=2$, $z=2$이다.

(i) $x=2$, $y=2$, $z=4$일 때

$N=2^x\times3^y\times5^z=2^2\times3^2\times5^4=22500$

(ii) $x=2$, $y=4$, $z=2$일 때

$N=2^x\times3^y\times5^z=2^2\times3^4\times5^2=8100$

(iii) $x=4$, $y=2$, $z=2$일 때

$N=2^x\times3^y\times5^z=2^4\times3^2\times5^2=3600$

(i)~(iii)에 의하여 가장 작은 N의 값은 3600이다.

19 답 48

해결 key Point!

X가 3의 배수이면 X는 3을 소인수로 가져야 한다.

1단계 자연수 X를 소인수분해하기

조건 (가)에서 X는 3을 소인수로 가져야 하고 조건 (다)에서 X의 소인수는 2개이므로 $X=3^m\times p^n$ (p는 3이 아닌 소수, m, n은 자연수)의 꼴이라고 하자.

조건 (나)에서 X의 약수의 개수가 10이므로

$(m+1)\times(n+1)=10$

이때 m, n은 자연수이므로

$m+1=2$, $n+1=5$ 또는 $m+1=5$, $n+1=2$

즉, $m=1$, $n=4$ 또는 $m=4$, $n=1$

따라서 $X=3\times p^4$ 또는 $X=3^4\times p$이다.

2단계 조건을 만족시키는 가장 작은 자연수 X 구하기

$3\times p^4$ 또는 $3^4\times p$가 가장 작은 수이려면 $p=2$일 때이다.

즉, $3\times p^4$일 때, 가장 작은 수는

$3\times2^4=48$

$3^4\times p$일 때, 가장 작은 수는

$3^4\times2=162$

따라서 조건을 만족시키는 가장 작은 자연수 X의 값은 48이다.

단계	채점 기준	비율
❶	자연수 X를 소인수분해했다.	60 %
❷	조건을 만족시키는 가장 작은 자연수 X를 구했다.	40 %

20 답 ②

해결 key Point!

약수의 개수가 3이 되는 수의 특징을 알아야 한다.

약수의 개수가 3인 자연수는 $(소수)^2$의 꼴이어야 하므로 50보다 크고 300보다 작은 $(소수)^2$의 꼴인 수는

$11^2=121$, $13^2=169$, $17^2=289$

따라서 구하는 합은

$121+169+289=579$

꿀 한줄평

a, b가 자연수이고 p, q가 소수일 때 자연수 N에 대하여 $N=p^a\times q^b$의 꼴이면 N의 약수의 개수는 $(a+1)(b+1)$이고 이 수는 4보다 크다.
따라서 약수의 개수가 3이면 $N=p^2$, 즉 (소수)^{2}의 꼴이어야 한다.

21 답 ②

해결 key Point!

약수의 개수가 홀수인 수를 소인수분해했을 때의 특징을 알아야 한다.

약수의 개수가 홀수인 자연수는 (자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.
따라서 (자연수)^{2}의 꼴인 세 자리 자연수는
$10^2=100$, $11^2=121$, $\cdots$, $31^2=961$의 22개이다.

꿀 한줄평

$N=p^a\times q^b\times r^c\times\cdots$ (p, q, r는 소수, a, b, c는 자연수)일 때 약수의 개수를 A라고 하면 $A=(a+1)\times(b+1)\times(c+1)\times\cdots$이다.
이때 A가 홀수이려면 $a+1$, $b+1$, $c+1$, $\cdots$이 모두 홀수이어야 한다. 즉, a, b, c, $\cdots$가 모두 짝수이어야 하고, 지수가 짝수인 수는 (자연수)^{2}의 꼴로 나타낼 수 있다.
따라서 약수의 개수가 홀수이면 (자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.

22 답 49

$N(A)=3$에서 자연수 A의 약수의 개수가 3이므로 $A=p^2$ (p는 소수)의 꼴이어야 한다.
이때 p^2의 약수는 1, p, p^2이므로
$S(A)=1+p+p^2=57$
즉, $p+p^2=56$이고 p는 소수이므로 $p=7$
$\therefore A=7^2=49$

23 답 10800

해결 key Point!

짝수인 약수의 개수와 홀수인 약수의 개수를 더하면 그 수의 약수의 개수와 같다.

$N=2^a\times3^b\times5^c$ (a, b, c는 자연수)이라고 하면 전체 약수의 개수는 $48+12=60$이므로
$(a+1)\times(b+1)\times(c+1)=60$ ⋯⋯ ㉠
한편, N의 홀수인 약수의 개수는 소인수 2를 포함하지 않는 $3^b\times5^c$의 약수의 개수와 같으므로
$(b+1)\times(c+1)=12$ ⋯⋯ ㉡
㉠, ㉡에서 $(a+1)\times12=60$
$a+1=5$ $\quad\therefore a=4$
$\therefore N=2^4\times3^b\times5^c$

또, $b\geq1$, $c\geq1$이므로 ㉡에서
$b+1=2$, $c+1=6$ 또는 $b+1=3$, $c+1=4$ 또는 $b+1=4$, $c+1=3$ 또는 $b+1=6$, $c+1=2$이므로
$b=1$, $c=5$ 또는 $b=2$, $c=3$ 또는 $b=3$, $c=2$ 또는 $b=5$, $c=1$이다.
(i) $b=1$, $c=5$일 때, $N=2^4\times3\times5^5=150000$
(ii) $b=2$, $c=3$일 때, $N=2^4\times3^2\times5^3=18000$
(iii) $b=3$, $c=2$일 때, $N=2^4\times3^3\times5^2=10800$
(iv) $b=5$, $c=1$일 때, $N=2^4\times3^5\times5=19440$
(i)~(iv)에 의하여 주어진 조건을 만족시키는 가장 작은 자연수 N의 값은 10800이다.

참고 N의 약수 중 짝수의 개수는 소인수 2가 소인수 3, 5와 결합하여 만들어진 결과이므로 $a+1=48$이 될 수 없다.

Level UP

$N=2^a\times p^b\times q^c$ (p, q는 서로 다른 홀수인 소수)일 때
(1) 홀수인 약수의 개수: 2를 제외한 $p^b\times q^c$의 약수의 개수이다.
(2) 짝수인 약수의 개수: (전체 약수의 개수)$-$(홀수인 약수의 개수)

24 답 196

약수의 개수가 3인 수는 (소수)^{2}의 꼴이므로 $f(x)=$(소수)^{2}의 꼴이어야 한다.
즉, $f(x)=2^2$, 3^2, 5^2, $\cdots$이다.
(i) $f(x)=2^2=4$일 때
x의 약수의 개수가 4이고 $4=1\times4=2\times2$이므로
$x=p^3$ (p는 소수) 또는 $x=p\times q$ (p, q는 서로 다른 소수)의 꼴이어야 한다.
ⓐ $x=p^3$일 때
200 이하의 자연수 x의 값은
$2^3=8$, $3^3=27$, $5^3=125$
이므로 가장 큰 수는 125이다.
ⓑ $x=p\times q$일 때
$200=2^3\times5^2$, $199=1\times199$, $198=2\times3^2\times11$,
$197=1\times197$, $196=2^2\times7^2$, $195=3\times5\times13$,
$194=2\times97$, $\cdots$이므로 200 이하의 가장 큰 수는 194이다.
(ii) $f(x)=3^2=9$일 때
x의 약수의 개수가 9이고 $9=1\times9=3\times3$이므로
$x=p^8$ (p는 소수) 또는 $x=p^2\times q^2$ (p, q는 서로 다른 소수)의 꼴이어야 한다.
ⓐ $x=p^8$일 때
가장 작은 p^8의 값은 $2^8=256$이므로 조건을 만족시키지 않는다.
ⓑ $x=p^2\times q^2$일 때

200 이하의 자연수 x의 값은

$2^2\times3^2=36$, $2^2\times5^2=100$, $2^2\times7^2=196$

이므로 가장 큰 수는 196이다.

(iii) $f(x)=5^2=25$일 때

x의 약수의 개수가 25이고 $25=1\times25=5\times5$이므로 $x=p^{24}$ (p는 소수) 또는 $x=p^4\times q^4$ (p, q는 서로 다른 소수)의 꼴이어야 한다.

이때 주어진 꼴을 만족시키는 수는 모두 200보다 크므로 조건을 만족시키는 수는 없다.

(i)~(iii)에 의하여 200 이하의 자연수 x 중 가장 큰 수는 196이다.

꿀 한줄평

주어진 문제는 $f(x)=2^2, 3^2, 5^2, \dots$을 만족시키는 200 이하의 가장 큰 자연수 x를 구하는 것이다.

$f(x)$가 될 수 있는 값이 많지만 $f(x)$의 값이 $f(x)=5^2=25$보다 큰 경우 조건을 만족시키는 x의 값은 모두 200보다 크다.

따라서 $f(x)=2^2$, $f(x)=3^2$을 만족시키는 경우만 생각하면 된다.

25 답 ⑤

$6=1\times6=2\times3$이므로 약수의 개수가 6인 수는 p^5 (p는 소수) 또는 $p\times q^2$ (p, q는 서로 다른 소수)의 꼴이어야 한다.

(i) p^5의 꼴일 때

$2^5=32$, $3^5=243$, $\dots$이므로 조건을 만족시키는 p의 값은 2의 1개이다.

(ii) $p\times q^2$의 꼴일 때

ⓐ $q=2$일 때

$100\div2^2=25$이므로 p는 2가 아닌 25 이하의 소수이다.

이때 2가 아닌 25 이하의 소수는 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23이므로 조건을 만족시키는 p의 값은 8개이다.

ⓑ $q=3$일 때

$100\div3^2=11.111\cdots$이므로 p는 3이 아닌 11 이하의 소수이다.

이때 3이 아닌 11 이하의 소수는 2, 5, 7, 11이므로 조건을 만족시키는 p의 값은 4개이다.

ⓒ $q=5$일 때

$100\div5^2=4$이므로 p는 4 이하의 소수이다.

이때 4 이하의 소수는 2, 3이므로 조건을 만족시키는 p의 값은 2개이다.

ⓓ $q=7$일 때

$100\div7^2=2.0408\cdots$이므로 p는 2 이하의 소수이다.

이때 2 이하의 소수는 2뿐이므로 조건을 만족시키는 p의 값은 1개이다.

ⓔ $q=11$일 때

$11^2=121$은 100보다 크므로 조건을 만족시키는 p의 값은 없다.

(i), (ii)에 의하여 구하는 자연수의 개수는

$1+8+4+2+1=16$

다른 풀이

(i) p^5의 꼴일 때

작은 수부터 차례대로 나열하면

$2^5=32$, $3^5=243$, $\dots$이므로 100보다 작은 자연수는 32이다.

(ii) $p\times q^2$의 꼴일 때

ⓐ $p=2$일 때

작은 수부터 차례대로 나열하면

$2\times3^2=18$, $2\times5^2=50$, $2\times7^2=98$, $2\times11^2=242$, $\dots$이므로 100보다 작은 자연수는 18, 50, 98이다.

ⓑ $p=3$일 때

작은 수부터 차례대로 나열하면

$3\times2^2=12$, $3\times5^2=75$, $3\times7^2=147$, $\dots$이므로 100보다 작은 자연수는 12, 75이다.

ⓒ $p=5$일 때

작은 수부터 차례대로 나열하면

$5\times2^2=20$, $5\times3^2=45$, $5\times7^2=245$, $\dots$이므로 100보다 작은 자연수는 20, 45이다.

ⓓ $p=7$일 때

작은 수부터 차례대로 나열하면

$7\times2^2=28$, $7\times3^2=63$, $7\times5^2=175$, $\dots$이므로 100보다 작은 자연수는 28, 63이다.

ⓔ $p=11$일 때

작은 수부터 차례대로 나열하면

$11\times2^2=44$, $11\times3^2=99$, $11\times5^2=275$, $\dots$이므로 100보다 작은 자연수는 44, 99이다.

ⓕ $p=13$일 때

작은 수부터 차례대로 나열하면

$13\times2^2=52$, $13\times3^2=117$, $\dots$이므로 100보다 작은 자연수는 52이다.

ⓖ $p=17$일 때

작은 수부터 차례대로 나열하면

$17\times2^2=68$, $17\times3^2=153$, $\dots$이므로 100보다 작은 자연수는 68이다.

ⓗ $p=19$일 때

작은 수부터 차례대로 나열하면

$19\times2^2=76$, $19\times3^2=171$, $\dots$이므로 100보다 작은 자연수는 76이다.

ⓘ $p=23$일 때

작은 수부터 차례대로 나열하면

$23\times2^2=92$, $23\times3^2=207$, $\dots$이므로 100보다 작은 자연수는 92이다.

ⓙ $p=29$일 때

작은 수부터 차례대로 나열하면

$29\times2^2=116$, …이므로 100보다 작은 자연수는 없다.

(i), (ii)에 의하여 구하는 자연수는 12, 18, 20, 28, 32, 44, 45, 50, 52, 63, 68, 75, 76, 92, 98, 99의 16개이다.

26 답 10

해결 key Point!

스위치를 홀수 번 누르면 마지막에 전구가 켜져 있고, 짝수 번 누르면 마지막에 전구가 꺼져 있다.

1단계 전구가 켜져 있는 경우 파악하기

전구가 켜져 있으려면 스위치를 누른 횟수가 홀수이어야 한다. 이때 전구는 해당 번호의 약수의 개수만큼 스위치가 눌리므로 모든 행동을 마쳤을 때 약수의 개수가 홀수인 번호의 전구만 켜져 있게 된다.

2단계 100 이하의 제곱수 구하기

약수의 개수가 홀수인 수는 제곱수이고, 100 이하의 제곱수는

$1^2=1$, $2^2=4$, $3^3=9$, $4^2=16$, $5^2=25$, $6^2=36$, $7^2=49$, $8^2=64$, $9^2=81$, $10^2=100$

3단계 켜져 있는 전구의 개수 구하기

따라서 100 이하의 제곱수는 10개이므로 켜져 있는 전구의 개수는 10이다.

단계	채점 기준	비율
❶	전구가 켜져 있는 경우를 파악했다.	50 %
❷	100 이하의 제곱수를 구했다.	40 %
❸	켜져 있는 전구의 개수를 구했다.	10 %

27 답 6

$1296=2^4\times3^4$, $3240=2^3\times3^4\times5$이므로 1296과 3240의 최대공약수는 $2^3\times3^4$이다.

1296과 3240의 공약수는 두 수의 최대공약수인 $2^3\times3^4$의 약수이므로 이 중 어떤 자연수의 제곱이 되는 수는

1, $2^2=4$, $3^2=9$, $2^2\times3^2=36$, $3^4=81$, $2^2\times3^4=324$

의 6개이다.

28 답 ①

A, B $(A<B)$의 최대공약수가 12이므로

$A=x\times12$, $B=y\times12$ (x, y는 서로소, $x<y$)라고 하자.

$A\times B=x\times y\times12^2=2160$이므로 $x\times y=15$

따라서 $x=1$, $y=15$ 또는 $x=3$, $y=5$이다.

(i) $x=1$, $y=15$일 때

$A=1\times12=12$, $B=15\times12=180$이므로

$A+B=12+180=192$

(ii) $x=3$, $y=5$일 때

$A=3\times12=36$, $B=5\times12=60$이므로

$A+B=36+60=96$

(i), (ii)에 의하여 $A+B$의 값 중 가장 작은 수는 96이다.

29 답 ⑤

$<x,\ 18>=6$, $<x,\ 30>=6$이므로 x는 6의 배수이다.

즉, $x=6\times k$ (k는 자연수)의 꼴이고 200 이하의 자연수이므로 k는 1 이상 33 이하의 자연수이다.

이때 $18=2\times3^2$이므로 k와 3은 서로소이다.

또, $30=2\times3\times5$이므로 k와 5는 서로소이다.

즉, k는 3의 배수도 아니고, 5의 배수도 아니다.

이때 1 이상 33 이하의 자연수 중

3의 배수는 3, 6, 9, …, 33의 11개

5의 배수는 5, 10, 15, 20, 25, 30의 6개

3과 5의 공배수인 15의 배수는 15, 30의 2개

따라서 k의 개수는 $33-(11+6-2)=18$이므로 구하는 자연수 x의 개수는 18이다.

30 답 ②

세 분수 $\frac{7}{12}\times\frac{m}{n}$, $\frac{14}{45}\times\frac{m}{n}$, $\frac{21}{10}\times\frac{m}{n}$이 자연수이면서

$\frac{m}{n}$의 값이 가장 작으려면

m은 $12=2^2\times3$, $45=3^2\times5$, $10=2\times5$의 최소공배수이므로

$m=2^2\times3^2\times5=180$

n은 7, $14=2\times7$, $21=3\times7$의 최대공약수이므로

$n=7$

$\therefore\ m+n=180+7=187$

31 답 103

조건 (가)에서 $(p+1)$이 8의 배수이면 $(p+1)$은 8로 나누어떨어지므로 p를 8로 나눈 나머지가 7이다.

이 조건을 만족시키는 p는

7, 15, 23, …

조건 (나)에서 $(p+2)$가 5의 배수이면 $(p+2)$는 5로 나누어떨어지므로 p를 5로 나눈 나머지가 3이다.

이 조건을 만족시키는 p는

3, 8, 13, 18, 23, …

8과 5의 최소공배수는 40이므로 두 조건 (가), (나)를 만족시키는 p의 값은

23, $23+40\times1=63$, $23+40\times2=103$, …

따라서 조건을 만족시키는 가장 작은 세 자리 소수 p의 값은 103이다.

32 답 130

최소공배수가 120이므로 세 자연수 a, b, c는 $120=2^3\times3\times5$의 약수이어야 한다.

따라서 120을 제외한 120의 약수를 큰 수부터 차례대로 나열하면

$2^2\times3\times5=60$, $2^3\times5=40$, $2\times3\times5=30$, $2^3\times3=24$, $\cdots$, 1이므로 $a+b+c$의 값 중 가장 큰 수는

$60+40+30=130$

33 답 ②

$36=2^2\times3^2$이고 a와 36의 최소공배수가 $180=2^2\times3^2\times5$이므로 a는 5를 약수로 가지면서 $2^2\times3^2\times5$의 약수이어야 한다.

따라서 a가 될 수 있는 수는 5, 2×5, $2^2\times5$, 3×5, $3^2\times5$, $2\times3\times5$, $2^2\times3\times5$, $2\times3^2\times5$, $2^2\times3^2\times5$의 9개이므로

$M=9$

이때 a가 될 수 있는 모든 수의 합은

$$N=5+2\times5+2^2\times5+3\times5+3^2\times5+2\times3\times5+2^2\times3\times5+2\times3^2\times5+2^2\times3^2\times5$$
$$=5+10+20+15+45+30+60+90+180=455$$

$\therefore\ M+N=9+455=464$

34 답 118

자연수 N을 4로 나누면 2가 남고, 5로 나누면 3이 남고, 6으로 나누면 4가 남으므로 $N+2$를 4, 5, 6으로 나누면 모두 나누어떨어진다.

즉, $N+2$는 4, 5, 6의 공배수이고, 4, 5, 6의 최소공배수는 $2^2\times3\times5=60$이므로 $N+2$는 60의 배수이어야 한다.

$N+2=60$, 120, 180, $\ldots$이므로

$N=58$, 118, 178, $\ldots$

따라서 조건을 만족시키는 가장 작은 세 자리 자연수는 118이다.

꿀 한줄평

두 수를 어떤 수로 나누었을 때, 나머지가 다르지만 "(나누는 수)−(나머지)"가 같다는 것은 "(공배수)−(부족한 수)"라는 의미이다.

즉, N이 4의 배수가 되기 위해 2가 부족하고, 5의 배수가 되기 위해 2가 부족하고, 6의 배수가 되기 위해서도 2가 부족하다는 것은 N에 2를 더한 수인 $N+2$가 4, 5, 6의 공배수가 된다는 것을 의미한다.

35 답 4명

사과는 3개가 남고, 배는 2개가 부족하고, 귤은 2개가 남았으므로 사과 $43-3=40$(개), 배 $50+2=52$(개), 귤 $82-2=80$(개)가 있으면 학생들에게 똑같이 나누어 줄 수 있다.

이때 $40=2^3\times5$, $52=2^2\times13$, $80=2^4\times5$이므로 세 수의 최대공약수는 $2^2=4$

따라서 구하는 학생은 4명이다.

36 답 432

1단계 벽돌의 한 모서리의 길이 구하기

정육면체 모양의 벽돌의 크기가 최대일 때 벽돌의 한 모서리의 길이는 $216=2^3\times3^3$, $144=2^4\times3^2$, $192=2^6\times3$의 최대공약수이므로 $2^3\times3=24\ (\mathrm{cm})$이다.

2단계 필요한 벽돌의 개수 구하기

이때 가로, 세로, 높이에 필요한 벽돌의 개수는 각각

$216\div24=9$, $144\div24=6$, $192\div24=8$

이므로 필요한 벽돌의 개수는 $9\times6\times8=432$

단계	채점 기준	비율
❶	벽돌의 한 모서리의 길이를 구했다.	40 %
❷	필요한 벽돌의 개수를 구했다.	60 %

37 답 재학생: 10만 원, 선생님: 30만 원, 졸업생: 18만 원

밴드부에 모인 찬조금을 x만 원이라고 하면 $\frac{1}{6}\times x$, $\frac{1}{2}\times x$, $\frac{3}{10}\times x$가 모두 자연수가 되어야 하므로 x는 6, 2, 10의 공배수이다.

$6=2\times3$, 2, $10=2\times5$의 최소공배수는 $2\times3\times5=30$이고 30의 배수 중 50 이상 70 이하인 수는 60이므로 $x=60$

따라서 재학생, 선생님, 졸업생이 낸 찬조금은 각각

$\frac{1}{6}\times60=10$(만 원), $\frac{1}{2}\times60=30$(만 원), $\frac{3}{10}\times60=18$(만 원)이다.

38 답 36

$24=2^3\times3$, $60=2^2\times3\times5$이고 세 자연수 24, 60, A의 최대공약수는 $12=2^2\times3$, 최소공배수는 $360=2^3\times3^2\times5$이므로 A는 $2^2\times3$의 배수이고 3^2을 약수로 가지면서 $2^3\times3^2\times5$의 약수이어야 한다.

따라서 가장 작은 자연수 A는 $2^2\times3^2=36$이다.

39 답 36

해결 key Point!

두 수 A, B의 최대공약수와 최소공배수의 곱은 두 수 A, B의 곱과 같다.

두 자연수 A, B의 최대공약수가 G이고 최소공배수가 L일 때 $A\times B=G\times L$이므로

$[24,\ x]=(24$와 x의 최대공약수$)\times(24$와 x의 최소공배수$)$

$=24\times x$

즉, $24\times x=864$이므로 $x=36$

40 답 170

세 자연수 a, b, c를 $a=2\times n$, $b=5\times n$, $c=9\times n$ (n은 자연수)이라고 하면 a, b, c의 최소공배수는 $2\times3^2\times5\times n$이다.
즉, $2\times3^2\times5\times n=900$이므로 $90n=900$
$\therefore n=10$
따라서 $a=2\times10=20$, $b=5\times10=50$, $c=9\times10=90$이고
a, b, c의 최대공약수 $G=n=10$이므로
$a+b+c+G=20+50+90+10=170$

41 답 120

a, b $(a<b)$의 최대공약수가 6이므로
$a=x\times6$, $b=y\times6$ (x, y는 서로소, $x<y$)이라고 하자.
a, b의 최소공배수가 180이므로
$180=x\times y\times6$ $\quad\therefore x\times y=30$
따라서 $x=1$, $y=30$ 또는 $x=2$, $y=15$ 또는
$x=3$, $y=10$ 또는 $x=5$, $y=6$이다.
(i) $x=1$, $y=30$일 때
$a=1\times6=6$, $b=30\times6=180$이므로
$a+b=6+180=186$
(ii) $x=2$, $y=15$일 때
$a=2\times6=12$, $b=15\times6=90$이므로
$a+b=12+90=102$
(iii) $x=3$, $y=10$일 때
$a=3\times6=18$, $b=10\times6=60$이므로
$a+b=18+60=78$
(iv) $x=5$, $y=6$일 때
$a=5\times6=30$, $b=6\times6=36$이므로
$a+b=30+36=66$
(i)~(iv)에 의하여 $a+b$의 값 중 가장 큰 수는 186, 가장 작은 수는 66이므로
$M=186$, $m=66$
$\therefore M-m=186-66=120$

42 답 10

해결 key Point!

최대공약수의 지수는 두 수의 소인수의 지수 중 작은 쪽이고, 최소공배수의 지수는 두 수의 소인수의 지수 중 큰 쪽이다.

$M=72=2^3\times3^2$, $N=2^a\times3^b$이고 조건 (가)에서 최대공약수 G는 약수의 개수가 $6=3\times2=2\times3$이므로
$G=2^2\times3$ 또는 $G=2\times3^2$이다.
(i) $G=2^2\times3$일 때
$M=2^3\times3^2$이므로 $N=2^2\times3$이어야 한다.
즉, $a=2$, $b=1$, $L=2^3\times3^2$이고 L의 약수의 개수는
$(3+1)\times(2+1)=12$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.
(ii) $G=2\times3^2$일 때
$M=2^3\times3^2$이므로 $N=2\times3^b$ $(b\ge2)$이어야 한다.
즉, $a=1$, $b\ge2$, $L=2^3\times3^b$이고 L의 약수의 개수는
$(3+1)\times(b+1)=4\times(b+1)$
조건 (나)에서 $4\times(b+1)=40$이므로
$b+1=10$ $\quad\therefore b=9$
(i), (ii)에 의하여 $a=1$, $b=9$이므로
$a+b=1+9=10$

02 정수와 유리수

Lv. 1 개념을 적용하는 핵심 문제

21쪽~23쪽

01 ①, ⑤	02 2	03 ⑤	04 2	05 ②
06 ③	07 9	08 $+1.1$	09 ③, ⑤	10 12
11 $a=-7$, $b=7$		12 ①, ④	13 ⑤	14 ④
15 ③	16 5	17 5.5	18 $b<a<c$	

01 답 ①, ⑤

① 5분 전이므로 -5분이다.
⑤ 3 kg 증가이므로 $+3$ kg이다.

02 답 2

양의 정수는 $+\frac{9}{3}=+3$, 10의 2개이므로 $a=2$
음의 유리수는 -4, $-\frac{2}{4}$, -0.6의 3개이므로 $b=3$
정수가 아닌 유리수는 $\frac{1}{5}$, $-\frac{2}{4}$, -0.6의 3개이므로 $c=3$
$\therefore a+b-c=2+3-3=2$

03 답 ⑤

① 0과 음의 정수는 자연수가 아니다.
② 0은 정수이다.
③ 정수는 유리수이다.
④ 정수는 양의 정수, 0, 음의 정수로 이루어져 있다.

04 답 2

-3, 0은 정수이므로
$<-3>=0$, $<0>=0$

$+1.9$, $-\frac{7}{4}$은 정수가 아닌 유리수이므로

$<+1.9>=1$, $\left\langle -\frac{7}{4} \right\rangle=1$

$\therefore <-3>+<0>+<+1.9>+\left\langle -\frac{7}{4} \right\rangle$

$=0+0+1+1=2$

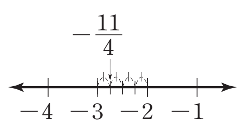
05 답 ②

주어진 수를 수직선에 나타내면 왼쪽에서부터 차례대로

-5, $-\frac{5}{3}$, -0.1, 0, 3, $\frac{9}{2}$

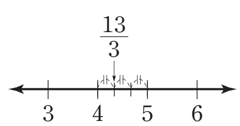
따라서 왼쪽에서 두 번째에 있는 수는 $-\frac{5}{3}$, 오른쪽에서 세 번째에 있는 수는 0이다.

06 답 ③



$-\frac{11}{4}$을 수직선에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 수직선에서 $-\frac{11}{4}$에 가장 가까운 정수는 -3이다.

$\therefore a=-3$



$\frac{13}{3}$을 수직선에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 수직선에서 $\frac{13}{3}$에 가장 가까운 정수는 4이다.

$\therefore b=4$

07 답 9

해결 key Point!

수직선에서 두 수를 나타내는 두 점으로부터 같은 거리에 있는 점이 나타내는 수는 두 점의 한가운데에 있는 점이 나타내는 수이다.

1단계 두 점 A, C 사이의 거리 구하기

두 점 A, C가 나타내는 수는 각각 -3, 5이므로 두 점 A, C 사이의 거리는 8이다.

2단계 두 점 A, B 사이의 거리 구하기

이때 두 점 A, B 사이의 거리는

$\frac{1}{2}\times 8=4$

3단계 점 D가 나타내는 수 구하기

따라서 점 D는 점 C에서 오른쪽으로 4만큼 떨어져 있으므로 점 D가 나타내는 수는 9이다.

단계	채점 기준	비율
❶	두 점 A, C 사이의 거리를 구했다.	30 %
❷	두 점 A, B 사이의 거리를 구했다.	30 %
❸	점 D가 나타내는 수를 구했다.	40 %

08 답 $+1.1$

주어진 수를 절댓값이 작은 수부터 차례대로 나열하면

$+\frac{4}{7}$, -0.9, $+1.1$, $-\frac{5}{2}$, 3, -8

따라서 세 번째에 오는 수는 $+1.1$이다.

09 답 ③, ⑤

① 절댓값이 가장 작은 수는 0이다.

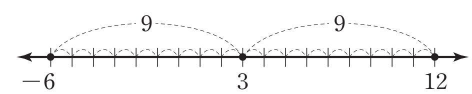
② -1, 1은 절댓값이 1로 같지만 두 수는 서로 다른 수이다.

④ $|a|=a$이면 a는 0 또는 양수이다.

10 답 12

a의 절댓값이 6이므로 $a=-6$ 또는 $a=6$

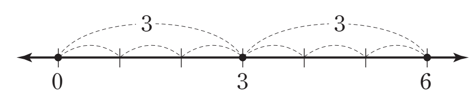
(i) $a=-6$일 때



a와 3을 나타내는 점 사이의 거리가 9이므로

$b=3+9=12$

(ii) $a=6$일 때



a와 3을 나타내는 점 사이의 거리가 3이므로

$b=3-3=0$

이때 b는 양수가 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 $b=12$

11 답 $a=-7$, $b=7$

해결 key Point!

절댓값이 같고 부호가 반대인 두 수를 나타내는 두 점 사이의 거리를 a라고 하면 두 수는 $\frac{a}{2}$, $-\frac{a}{2}$이다.

두 조건 (가), (나)에서 a, b를 나타내는 점은 원점으로부터 각각 $14\times\frac{1}{2}=7$만큼 떨어진 점이다.

조건 (다)에서 a는 0 또는 음수이므로

$a=-7$, $b=7$

12 답 ①, ④

주어진 문장을 부등식으로 나타내면 다음과 같다.

① $-2\le x<1.7$

② $-2<x\le 1.7$

③ $-2\le x\le 1.7$

④ $-2\le x<1.7$

⑤ $-2<x\le 1.7$

따라서 $-2 \le x < 1.7$을 나타내는 것은 ①, ④이다.

13 답 ⑤

①, ②, ③, ④ $<$ ⑤ $>$

따라서 □ 안에 알맞은 부등호가 나머지 넷과 다른 하나는 ⑤이다.

14 답 ④

$-\frac{7}{4}=-\frac{14}{8}$와 $\frac{3}{8}$ 사이에 있는 정수가 아닌 유리수 중 기약분수로 나타낼 때 분모가 8인 것은

$-\frac{13}{8}$, $-\frac{11}{8}$, $-\frac{9}{8}$, $-\frac{7}{8}$, $-\frac{5}{8}$, $-\frac{3}{8}$, $-\frac{1}{8}$, $\frac{1}{8}$

의 8개이다.

15 답 ③

$a \le x \le 5$를 만족시키는 정수 x가 7개이려면 x는 -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5이어야 하므로

$a=-1$

$1 \le y < b$를 만족시키는 정수 y가 3개이려면 y는 1, 2, 3이어야 하므로

$b=4$

$\therefore |b|-|a|=|4|-|-1|=4-1=3$

16 답 5

1단계 a의 값 구하기

-2.6보다 크거나 같은 음의 정수는 -2, -1의 2개이므로

$a=2$

2단계 b의 값 구하기

$\frac{11}{12}$ 이상이고 3보다 작거나 같은 자연수는 1, 2, 3의 3개이므로 $b=3$

3단계 $a+b$의 값 구하기

$\therefore a+b=2+3=5$

단계	채점 기준	비율
❶	a의 값을 구했다.	40 %
❷	b의 값을 구했다.	40 %
❸	$a+b$의 값을 구했다.	20 %

17 답 5.5

주어진 수를 작은 수부터 차례대로 나열하면

$-\frac{19}{4}$, -3.4, -2.1, $\frac{7}{4}$, 4.8, $\frac{13}{2}$

이므로 세 번째에 오는 수는 -2.1이다.

$\therefore a=-2.1$

주어진 수의 절댓값을 작은 수부터 차례대로 나열하면

$\left|\frac{7}{4}\right|$, $|-2.1|$, $|-3.4|$, $\left|-\frac{19}{4}\right|$, $|4.8|$, $\left|\frac{13}{2}\right|$

이므로 세 번째에 오는 수는 -3.4이다.

$\therefore b=-3.4$

$\therefore |a|+|b|=|-2.1|+|-3.4|$

$=2.1+3.4=5.5$

18 답 $b<a<c$

조건 (가)에서

$a>1$, $c>1$

조건 (나)에서 a, b의 절댓값이 같고 부호는 다르므로

$b<1<a$

조건 (다)에서 $|b|<c$이고, 이때 a와 b의 절댓값이 같으므로

$a<c$

따라서 서로 다른 세 수 a, b, c의 대소 관계는

$b<a<c$

Lv. 2 사고를 확장하는 실전 문제

24쪽~28쪽

01 ③	02 20	03 $\frac{5}{2}$	04 3	05 ③
06 14	07 ③	08 ①	09 ④	10 14
11 $\frac{3}{2}$	12 ⑤	13 9	14 $a=-2$, $b=6$	
15 24	16 ⑤	17 ③	18 $(6, -18)$, $(-6, 18)$	
19 ①	20 78	21 88	22 ④	23 50
24 24	25 ①, ②	26 ②	27 $z<y<x$	
28 55	29 ④	30 ⑤		

01 답 ③

ㄱ. 유리수는 양의 유리수, 0, 음의 유리수의 세 가지로 이루어져 있다.

ㄴ. (유리수)$=\frac{\text{(정수)}}{\text{(0이 아닌 정수)}}$이므로 분모 b가 0이 아니라는 조건이 있어야 한다.

ㄹ. 절댓값이 1보다 작은 유리수는 -1과 1 사이의 모든 분수이므로 무수히 많지만 정수는 0의 1개이다.

02 답 20

해결 key Point!

정수가 아닌 유리수 중 분모가 7인 수의 개수의 규칙을 알아본다.

0보다 크고 x보다 작거나 같은 정수가 아닌 유리수 중 분모가 7인 수는

(ⅰ) $x=1$일 때

$\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$의 6개

(ⅱ) $x=2$일 때

$\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \cdots, \frac{6}{7}, \frac{8}{7}, \frac{9}{7}, \cdots, \frac{13}{7}$의 12개

(ⅲ) $x=3$일 때

$\frac{1}{7}, \cdots, \frac{6}{7}, \frac{8}{7}, \cdots, \frac{13}{7}, \frac{15}{7}, \cdots, \frac{20}{7}$의 18개

$\vdots$

따라서 x의 값이 1씩 커질 때마다 분모가 7인 정수가 아닌 유리수는 6개씩 증가한다.

이때 $120=6\times20$이므로 $x=20$

03 답 $\frac{5}{2}$

-5, 0은 자연수가 아닌 정수이고, $\frac{7}{4}$은 정수가 아닌 유리수이므로

$<-5>=2$, $<0>=2$, $\left\langle\frac{7}{4}\right\rangle=3$

따라서 $<-5>+\left\langle a-\frac{3}{2}\right\rangle+<0>+\left\langle\frac{7}{4}\right\rangle=8$에서

$2+\left\langle a-\frac{3}{2}\right\rangle+2+3=8$, $7+\left\langle a-\frac{3}{2}\right\rangle=8$

$\therefore \left\langle a-\frac{3}{2}\right\rangle=1$

즉, $a-\frac{3}{2}$은 자연수이다.

따라서 $a-\frac{3}{2}\geq1$이어야 하므로 가장 작은 유리수 a의 값은 $\frac{5}{2}$이다.

04 답 3

4와 a를 나타내는 점 사이의 거리가 5이므로 a를 나타내는 점은 4를 나타내는 점으로부터 5만큼 떨어져 있다.

즉, $a=-1$ 또는 $a=9$이다.

(ⅰ) $a=-1$일 때

a를 나타내는 점은 1을 나타내는 점에서 왼쪽으로 2만큼 떨어져 있으므로 b를 나타내는 점은 1을 나타내는 점에서 오른쪽으로 2만큼 떨어져 있다.

$\therefore b=3$

(ⅱ) $a=9$일 때

a를 나타내는 점은 1을 나타내는 점에서 오른쪽으로 8만큼 떨어져 있으므로 b를 나타내는 점은 1을 나타내는 점으로부터 왼쪽으로 8만큼 떨어져 있다.

$\therefore b=-7$

이때 b는 음수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

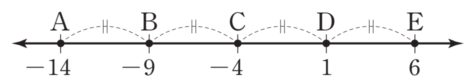
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$b=3$

05 답 ③

두 점 B, E 사이의 거리는 $|-9|+|6|=15$이고, 두 점 B, E 사이에 두 점 C, D가 같은 간격으로 놓여 있으므로 이웃하는 두 점 사이의 거리는 $\frac{15}{3}=5$이다.

즉, 세 점 A, C, D가 나타내는 수는 각각 -14, -4, 1이다.



ㄱ. 음수를 나타내는 점은 점 A, B, C의 3개이다.

ㄴ. 점 A가 나타내는 수는 -14이고, 점 D가 나타내는 수는 1이므로 두 점 A, D 사이의 거리는 15이다.

ㄷ. 선분 CD를 6등분했을 때 각 점 사이의 간격은 $\frac{5}{6}$이므로 점 C에 가장 가까운 점은 -4에서 오른쪽으로 $\frac{5}{6}$만큼 이동한 점이고, $\frac{5}{6}<1$이므로 -3의 왼쪽에 있다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

06 답 14

두 조건 (나), (다)에서 점 B는 점 A와 점 C로부터 같은 거리에 있는 점이고 점 C는 점 B와 점 D로부터 같은 거리에 있는 점이고, 조건 (라)에서 점 D는 점 A보다 오른쪽에 있으므로 수직선에서 네 점 A, B, C, D의 위치는 왼쪽부터 차례대로 A, B, C, D이고 각 점 사이의 거리는 같다.

조건 (라)에서 점 A와 점 D 사이의 거리는 12이므로 네 점 A, B, C, D 각 점 사이의 거리는 $\frac{1}{12}\times3=4$이다.

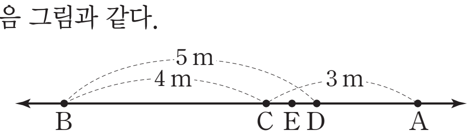
조건 (가)에서 점 A가 나타내는 수는 -3이므로 세 점 B, C, D가 나타내는 수는 각각 1, 5, 9이다.

따라서 점 C와 점 D가 나타내는 수의 합은

$5+9=14$

07 답 ③

5명의 학생 A, B, C, D, E의 위치를 수직선에 점으로 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 앞에 서 있는 학생부터 차례대로 나열하면 A, D, E, C, B이므로 E는 앞에서부터 세 번째에 서 있다.

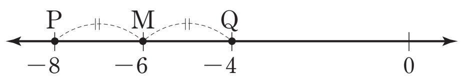
08 답 ①

점 P는 -3을 나타내는 점으로부터 거리가 5만큼 떨어진 점

이므로 점 P가 나타내는 수는 -8 또는 2이고, 점 M은 0을 나타내는 점으로부터 거리가 6만큼 떨어진 점이므로 점 M이 나타내는 수는 -6 또는 6이다.

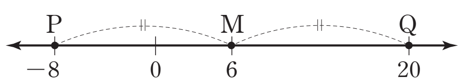
(ⅰ) 점 P가 나타내는 수가 -8일 때

점 M이 나타내는 수가 -6이면



두 점 P, M 사이의 거리는 2이므로 두 점 P, Q 사이의 거리는 4이다. $\therefore x=4$

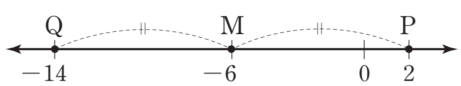
또, 점 M이 나타내는 수가 6이면



두 점 P, M 사이의 거리는 14이므로 두 점 P, Q의 거리는 28이다. $\therefore x=28$

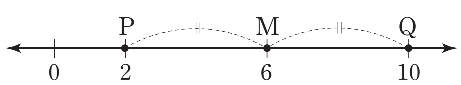
(ⅱ) 점 P가 나타내는 수가 2일 때

점 M이 나타내는 수가 -6이면



두 점 P, M 사이의 거리는 8이므로 두 점 P, Q 사이의 거리는 16이다. $\therefore x=16$

또, 점 M이 나타내는 수가 6이면



두 점 P, M 사이의 거리는 4이므로 두 점 P, Q 사이의 거리는 8이다. $\therefore x=8$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 가능한 모든 x의 값의 합은

$4+28+16+8=56$

09 답 ④

해결 key Point!

절댓값이 $a\ (a>0)$인 수는 $+a,\ -a$의 2개이다.

절댓값이 0인 수는 0

절댓값이 1인 수는 $1,\ -1$

절댓값이 2인 수는 $2,\ -2$

⋮

즉, 절댓값이 k인 수는

$k=0$일 때, 0의 1개, $k>0$일 때 $k,\ -k$의 2개이다.

따라서 절댓값이 n 이하인 정수의 개수는 $1+n\times2$이므로

$1+n\times2=33,\ n\times2=32$

$\therefore n=16$

10 답 14

1단계 a의 값 구하기

-2.4보다 크지 않은 정수는 $-3,\ -4,\ -5,\ \cdots$

이 중 가장 큰 수는 -3이므로

$a=[-2.4]=-3$

2단계 b의 값 구하기

-8보다 크지 않은 정수는 $-8,\ -9,\ -10,\ \cdots$

이 중 가장 큰 수는 -8이므로

$b=[-8]=-8$

3단계 c의 값 구하기

3.7보다 크지 않은 정수는 $3,\ 2,\ 1,\ \cdots$

이 중 가장 큰 수는 3이므로

$c=[3.7]=3$

4단계 $|a|+|b|+|c|$의 값 구하기

$$\therefore |a|+|b|+|c|=|-3|+|-8|+|3|$$
$$=3+8+3=14$$

단계	채점 기준	비율
❶	a의 값을 구했다.	25 %
❷	b의 값을 구했다.	25 %
❸	c의 값을 구했다.	25 %
❹	$\lvert a\rvert+\lvert b\rvert+\lvert c\rvert$의 값을 구했다.	25 %

11 답 $\frac{3}{2}$

$-\frac{7}{4}=-\frac{35}{20},\ -\frac{9}{5}=-\frac{36}{20}$이므로 $-\frac{7}{4}>-\frac{9}{5}$

$\therefore \left(-\frac{7}{4}\right)\bigstar\left(-\frac{9}{5}\right)=\left|-\frac{9}{5}\right|=\frac{9}{5}$

$\frac{5}{3}=\frac{25}{15},\ \frac{9}{5}=\frac{27}{15}$이므로 $\frac{5}{3}<\frac{9}{5}$

$\therefore \frac{5}{3}\bigstar\frac{9}{5}=\left|\frac{5}{3}\right|=\frac{5}{3}$

$\frac{3}{2}=\frac{9}{6},\ \frac{5}{3}=\frac{10}{6}$이므로 $\frac{3}{2}<\frac{5}{3}$

$\therefore \frac{3}{2}\bigstar\frac{5}{3}=\left|\frac{3}{2}\right|=\frac{3}{2}$

$$\therefore \frac{3}{2}\bigstar\left[\frac{5}{3}\bigstar\left\{\left(-\frac{7}{4}\right)\bigstar\left(-\frac{9}{5}\right)\right\}\right]=\frac{3}{2}\bigstar\left(\frac{5}{3}\bigstar\frac{9}{5}\right)$$
$$=\frac{3}{2}\bigstar\frac{5}{3}=\frac{3}{2}$$

12 답 ⑤

$|a|\ge0,\ |b|\ge0$이므로 가능한 $|a|,\ |b|$의 값은 $0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 100$이다.

따라서 $|a|+|b|=100$을 만족시키는 $|a|,\ |b|$의 값은

(ⅰ) $|a|=0,\ |b|=100$일 때

$|a|=0$에서 $a=0$, $|b|=100$에서 $b=100$ 또는 $b=-100$이므로 조건을 만족시키는 $(a,\ b)$는 $(0,\ 100)$, $(0,\ -100)$의 2개이다.

(ⅱ) $|a|=1,\ |b|=99$일 때

$|a|=1$에서 $a=1$ 또는 $a=-1$, $|b|=99$에서 $b=99$ 또

는 $b=-99$이므로 조건을 만족시키는 (a, b)는 $(1, 99)$, $(1, -99)$, $(-1, 99)$, $(-1, -99)$의 4개이다.

(iii) $|a|=2$, $|b|=98$일 때

$|a|=2$에서 $a=2$ 또는 $a=-2$, $|b|=98$에서 $b=98$ 또는 $b=-98$이므로 조건을 만족시키는 (a, b)는 $(2, 98)$, $(2, -98)$, $(-2, 98)$, $(-2, -98)$의 4개이다.

⋮

즉, $|a|=0$ 또는 $|b|=0$일 때, (a, b)는 2개, $|a|\neq0$이고 $|b|\neq0$일 때, (a, b)는 4개이다.

$|a|\neq0$인 수는 $|a|=1, 2, 3, \cdots, 99$의 99개이므로 조건을 만족시키는 (a, b)의 개수는

$2\times2+4\times99=400$

13 답 9

조건 (가)에 의하여 절댓값이 x 이하인 정수 중 3으로 나누어떨어지는 수 13개는 음수 6개, 0, 양수 6개이므로

$-3\times6, \cdots, -3\times1, 0, 3\times1, \cdots, 3\times6$

$\therefore 18\leq x<21$

조건 (나)에 의하여 절댓값이 x 이하인 정수 중 5로 나누어떨어지는 수 9개는 음수 4개, 0, 양수 4개이므로

$-5\times4, \cdots, -5\times1, 0, 5\times1, \cdots, 5\times4$

$\therefore 20\leq x<25$

따라서 두 조건 (가), (나)를 만족시키는 정수 x의 값은 20이다.

또, 조건 (다)에서 절댓값이 y 이하인 정수의 개수가 23이면 음수 11개, 0, 양수 11개이므로

$y=11$

$\therefore |x-y|=|20-11|=9$

Level UP

$|n|\leq x$(x는 정수)인 정수 n은 $-x, -x+1, \cdots, 0, \cdots, x-1, x$의 $(2x+1)$개이다.

k로 나누어떨어지는 정수 n은 $\cdots, -2k, -k, 0, k, 2k, \cdots$이므로 $|n|\leq x$인 정수 n 중 k로 나누어떨어지는 수의 개수는 $\{2\times(x$를 k로 나눈 몫$)+1\}$이다.

14 답 $a=-2$, $b=6$

해결 key Point!

$|a|+|b|=8$, $3\times|a|=|b|$를 만족시키는 $|a|$, $|b|$의 값을 생각해야 한다.

1단계 $|a|$, $|b|$의 값 구하기

$|a|+|b|=8$, $3\times|a|=|b|$이므로 $|a|=2$, $|b|=6$

2단계 a, b의 부호 구하기

또, $a<b$이고 a, b의 부호가 다르므로 $a<0$, $b>0$

3단계 a, b의 값 구하기

따라서 구하는 a, b의 값은

$a=-2$, $b=6$

단계	채점 기준	비율
❶	$\|a\|$, $\|b\|$의 값을 구했다.	40 %
❷	a, b의 부호를 구했다.	20 %
❸	a, b의 값을 구했다.	40 %

15 답 24

조건 (가)에서 $|x|=7$이므로 $x=-7$ 또는 $x=7$

조건 (나)에서 두 점 x, y는 6을 나타내는 점으로부터 같은 거리에 있으므로

(i) $x=-7$일 때

x를 나타내는 점은 6을 나타내는 점으로부터 왼쪽으로 13만큼 떨어져 있으므로 y를 나타내는 점은 6을 나타내는 점으로부터 오른쪽으로 13만큼 떨어져 있다.

$\therefore y=19$

(ii) $x=7$일 때

x를 나타내는 점은 6을 나타내는 점으로부터 오른쪽으로 1만큼 떨어져 있으므로 y를 나타내는 점은 6을 나타내는 점으로부터 왼쪽으로 1만큼 떨어져 있다.

$\therefore y=5$

(i), (ii)에 의하여 조건을 만족시키는 y의 값은 5, 19이므로 구하는 합은

$5+19=24$

16 답 ⑤

절댓값이 같은 두 수 a, b를 나타내는 두 점은 원점으로부터 각각 $20\times\frac{1}{2}=10$만큼 떨어져 있으므로 두 수 a, b는 -10, 10이다.

두 수 -10, 10을 나타내는 두 점 사이의 거리를 10등분하는 점 사이의 간격은 모두 $20\times\frac{1}{10}=2$이므로 9개의 점이 나타내는 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

$-8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8$

따라서 오른쪽에서 7번째에 있는 점이 나타내는 수는 -4이다.

17 답 ③

① 음의 정수를 나타내는 점은 A뿐이므로 1개이다.

② 점 C가 나타내는 수의 절댓값이 가장 작다.

③ 두 점 A와 D가 나타내는 두 수 사이에 있는 정수는 -2, -1, 0의 3개이다.

④ 점 F가 나타내는 수의 절댓값은 3, 점 C가 나타내는 수의 절댓값은 $\frac{1}{3}$이므로 점 F가 나타내는 수의 절댓값은 점 C가 나타내는 수의 절댓값의 9배이다.

⑤ 점 B와 점 E는 0을 나타내는 점으로부터 같은 거리만큼 떨어져 있으므로 점 B와 점 E가 나타내는 수의 절댓값은 같다.

따라서 옳은 것은 ③이다.

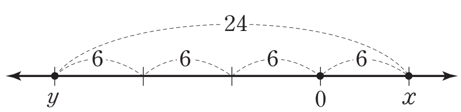
18 답 (6, −18), (−6, 18)

x, y는 부호가 다르고 조건 (가)에서 $3\times|x|=|y|$이므로 수직선에서 0을 나타내는 점과 y를 나타내는 점 사이의 거리는 0을 나타내는 점과 x를 나타내는 점 사이의 거리의 3배이다.

즉, 0은 x와 y를 4등분하는 점 중 x에 가장 가까운 점이다.

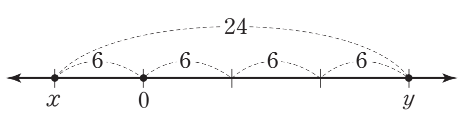
이때 $\frac{24}{4}=6$이므로

(i) $x>0$, $y<0$일 때



∴ $x=6$, $y=-18$

(ii) $x<0$, $y>0$일 때



∴ $x=-6$, $y=18$

(i), (ii)에 의하여 (x, y)는 $(6, -18)$, $(-6, 18)$이다.

19 답 ①

a를 나타내는 점이 수직선에서 0을 나타내는 점으로부터의 거리가 4이므로 $|a|=4$

$|b|=|-6|=6$이고 $|a|+|b|+|c|=13$이므로

$4+6+|c|=13$

$10+|c|=13$ ∴ $|c|=3$

이때 c는 양의 정수이므로 $c=3$

20 답 78

조건 (나)에서 B의 약수의 개수는 3이므로 $B=p^2$ (p는 소수)의 꼴이어야 한다.

조건 (가)에서 $B\times|A-B|=108$이므로 B는 108의 약수이어야 하고, $108=2^2\times3^3$이므로 B는 2^2 또는 3^2이다.

(i) $B=2^2=4$일 때

$B\times|A-B|=4\times|A-4|=108$이므로 $|A-4|=27$

즉, $A-4=27$ 또는 $A-4=-27$이므로

$A=31$ 또는 $A=-23$

(ii) $B=3^2=9$일 때

$B\times|A-B|=9\times|A-9|=108$이므로 $|A-9|=12$

즉, $A-9=12$ 또는 $A-9=-12$이므로

$A=21$ 또는 $A=-3$

(i), (ii)에 의하여 조건을 만족시키는 A의 값은 -23, -3, 21, 31이므로 모든 $|A|$의 값의 합은

$|-23|+|-3|+|21|+|31|=23+3+21+31=78$

21 답 88

해결 key Point!

수의 범위가 $|c|$만 나왔으므로 $|c|$의 값으로 나누어 생각해야 한다.

조건 (라)에서 $2<|c|<10$이고 c는 정수이므로

$|c|=3, 4, 5, \dots, 9$

조건 (가)에서 $|b|$는 $|a|$의 약수이므로 $|a|=|b|\times k$ (k는 자연수)의 꼴로 나타낼 수 있고, 조건 (다)에서

$\frac{|a|}{|b|}=\frac{|b|\times k}{|b|}=k$와 $|c|$의 최대공약수가 1이므로 k와 $|c|$는 서로소이다.

이때 $|a|<20$이므로

$|b|\times k<20$

조건 (나)에서 $|b|=|c|+2$이므로

(i) $|c|=3$일 때

$|b|=5$이고, $5\times k<20$을 만족시키는 자연수 k의 값은 1, 2, 3이다.

그런데 k와 $|c|$는 서로소이어야 하므로 k의 값은 1, 2의 2개이다.

(ii) $|c|=4$일 때

$|b|=6$이고, $6\times k<20$을 만족시키는 자연수 k의 값은 1, 2, 3이다.

그런데 k와 $|c|$는 서로소이어야 하므로 k의 값은 1, 3의 2개이다.

(iii) $|c|=5$일 때

$|b|=7$이고, $7\times k<20$을 만족시키는 자연수 k의 값은 1, 2이다.

1과 2는 모두 $|c|$와 서로소이므로 k의 값은 2개이다.

(iv) $|c|=6$일 때

$|b|=8$이고, $8\times k<20$을 만족시키는 자연수 k의 값은 1, 2이다.

그런데 k와 $|c|$는 서로소이어야 하므로 k의 값은 1의 1개이다.

(v) $|c|=7$일 때

$|b|=9$이고, $9\times k<20$을 만족시키는 자연수 k의 값은 1, 2이다.

1과 2는 모두 $|c|$와 서로소이므로 k의 값은 2개이다.

(vi) $|c|=8$일 때

$|b|=10$이고, $10\times k<20$을 만족시키는 자연수 k의 값은 1이다.

1은 $|c|$와 서로소이므로 k의 값은 1개이다.

(vii) $|c|=9$일 때

$|b|=11$이고, $11\times k<20$을 만족시키는 자연수 k의 값은 1이다.

1은 $|c|$와 서로소이므로 k의 값은 1개이다.

(i)~(vii)에 의하여 조건을 만족시키는 $(|a|, |b|, |c|)$의 개수는

$2+2+2+1+2+1+1=11$

이고, 이때 각각의 $(|a|, |b|, |c|)$에 대하여 (a, b, c)는 부호가 다른 8개가 존재하므로 조건을 만족시키는 (a, b, c)의 개수는

$8\times 11=88$

참고 $(|a|, |b|, |c|)$에 대하여 (a, b, c)를 나타내면
$(+, +, +), (+, +, -), (+, -, +), (-, +, +),$
$(+, -, -), (-, +, -), (-, -, +), (-, -, -)$
의 8개가 있다.

22 답 ④

해결 key Point!

수직선에서 $|x-a|$는 두 수 x, a를 나타내는 두 점 사이의 거리를 의미한다.

$|x+3|+|x|+\left|x-\frac{5}{3}\right|+|x-6|$은 수직선에서 x를 나타내는 점으로부터 -3, 0, $\frac{5}{3}$, 6을 나타내는 각 점 사이의 거리를 모두 더한 값이다.

네 점으로부터의 거리의 합이 가장 작은 값이 나오려면 x는 두 번째와 세 번째 수인 0과 $\frac{5}{3}$ 사이의 수이어야 한다.

이때 0과 $\frac{5}{3}$ 사이에 정수는 1뿐이므로 $x=1$

23 답 50

해결 key Point!

세 분수의 분자를 모두 같게 만든다.

세 분수의 분자를 60으로 같게 하면

$\frac{60}{96}<\frac{60}{n}<\frac{60}{45}$ $\quad\therefore 45<n<96$

따라서 자연수 n은 46, 47, …, 95의 50개이다.

Level UP

부등식을 만족시키는 자연수 n의 개수 구하기

두 자연수 a, b에 대하여

(1) $a\le n\le b$일 때, 자연수 n의 개수는 $b-a+1$

(2) $a\le n<b$일 때, 자연수 n의 개수는 $b-a$

(3) $a<n\le b$일 때, 자연수 n의 개수는 $b-a$

(4) $a<n<b$일 때, 자연수 n의 개수는 $b-a-1$

24 답 24

1단계 a의 값 구하기

$\frac{10}{a}$, $\frac{15}{a}$가 모두 정수이므로 a는 10과 15의 공약수이다. 즉, a는 최대공약수 5의 약수인 1 또는 5이다.

2단계 b의 값 구하기

(i) $a=1$일 때

$\frac{1}{2}\le|b|<\frac{5}{2}$이고 b는 정수이므로 $|b|=1, 2$

따라서 b의 값은 -2, -1, 1, 2의 4개이므로 (a, b), 즉 $(1, b)$의 개수는 4이다.

(ii) $a=5$일 때

$\frac{1}{2}\le\frac{|b|}{5}<\frac{5}{2}$에서 $\frac{5}{10}\le\frac{2\times|b|}{10}<\frac{25}{10}$

즉, $5\le 2\times|b|<25$이고 b는 정수이므로

$|b|=3, 4, 5, \dots, 12$

따라서 b의 값은 -12, -11, …, -3, 3, …, 11, 12의 20개이므로 (a, b), 즉 $(5, b)$의 개수는 20이다.

3단계 (a, b)의 개수 구하기

(i), (ii)에 의하여 (a, b)의 개수는

$4+20=24$

단계	채점 기준	비율
❶	a의 값을 구했다.	40 %
❷	b의 값을 구했다.	40 %
❸	(a, b)의 개수를 구했다.	20 %

25 답 ①, ②

해결 key Point!

$a>b$일 때, $|a|<|b|$를 만족시키는 a, b의 조건을 찾는다.

a, b의 부호가 같고 $a>b$일 때 $|a|<|b|$가 성립하므로 a, b는 모두 음수이다.

또, $|a|$의 약수의 개수가 2이면 $|a|$는 소수이므로

$3<|a|<8$에서 $|a|=5, 7$

따라서 a의 값은 -7 또는 -5이다.

26 답 ②

두 조건 (가), (나)를 만족시키는 0이 아닌 a의 값은

±7, ±14, ±21, ±28, ±35, ±42, ±49이다.

조건 (다)에서 $|a|$와 12는 서로소이고 $12=2^2\times3$이므로 a는 2의 배수도 아니고 3의 배수도 아니어야 한다.

따라서 a의 값은 ±7, ±35, ±49이므로 정수 a의 개수는 6이다.

27 답 $z<y<x$

조건 (다)에서 -1보다 작은 정수 중 절댓값이 가장 작은 수는

-2이다.

$\therefore z=-2$

조건 (나)에서 두 수 z와 1을 나타내는 점으로부터 같은 거리에 있는 점이 나타내는 수는 -2와 1의 한가운데에 있는 수이므로 $-\frac{1}{2}$이다.

$\therefore y=-\frac{1}{2}$

이때 조건 (가)를 만족시키는 x의 값은 -2, 2이고, x, y, z는 서로 다른 세 수이므로 $x=2$

$\therefore z<y<x$

28 답 55

조건 (나)에서 a는 3의 배수도 아니고 짝수도 아니므로 $0<a\le 12$를 만족시키는 정수 a의 값은 1, 5, 7, 11이다.

조건 (가)에서

(ⅰ) $a=1$일 때

$|10-1|\le|1+2|$, 즉 $|9|\le|3|$이므로 성립하지 않는다.

(ⅱ) $a=5$일 때

$|10-5|\le|5+2|$, 즉 $|5|\le|7|$이므로 성립한다.

(ⅲ) $a=7$일 때

$|10-7|\le|7+2|$, 즉 $|3|\le|9|$이므로 성립한다.

(ⅳ) $a=11$일 때

$|10-11|\le|11+2|$, 즉 $|-1|\le|13|$이므로 성립한다.

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 조건을 만족시키는 a의 값은 5, 7, 11이다.

이 중 가장 큰 수는 11, 가장 작은 수는 5이므로

$M=11$, $m=5$

$\therefore M\times m=11\times 5=55$

29 답 ④

ㄱ. $|a|>|b+2|$이지만 a, b의 대소 관계는 알 수 없다.

ㄴ. $a=-3$일 때, $|b+2|<3$이므로 b가 정수이면 $|b+2|$의 값은 0, 1, 2이다.

즉, $b+2$의 값은 -2, -1, 0, 1, 2이므로 정수 b의 값은 -4, -3, -2, -1, 0의 5개이다.

ㄷ. $a=3$, $b=-4$이면 $|a|=3$, $|b+2|=2$이므로

$|a|>|b+2|$이지만 a가 b보다 원점에 가깝다.

ㄹ. 절댓값의 성질에 의하여 절댓값은 항상 0 또는 양수이므로

$|a|>|b+2|\ge 0$

$\therefore |a|+|b+2|>0$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

30 답 ⑤

조건 (가)에서 $-2<x<-1$이므로 $1<\frac{b}{a}<2$

$a=1$일 때, $1<b<2$이므로 b의 값은 없다.

$a=2$일 때, $1<\frac{b}{2}<2$, 즉 $2<b<4$이므로 $b=3$

$a=3$일 때, $1<\frac{b}{3}<2$, 즉 $3<b<6$이므로 $b=4$, 5

$a=4$일 때, $1<\frac{b}{4}<2$, 즉 $4<b<8$이므로 $b=5$, 6, 7

$a=5$일 때, $1<\frac{b}{5}<2$, 즉 $5<b<10$이므로 $b=6$, 7, 8, 9

$a=6$일 때, $1<\frac{b}{6}<2$, 즉 $6<b<12$이므로 $b=7$, 8, 9

$a=7$일 때, $1<\frac{b}{7}<2$, 즉 $7<b<14$이므로 $b=8$, 9

$a=8$일 때, $1<\frac{b}{8}<2$, 즉 $8<b<16$이므로 $b=9$

$a=9$일 때, $1<\frac{b}{9}<2$, 즉 $9<b<18$이므로 조건을 만족시키는 b의 값은 없다.

이때 조건 (나)에서 $-\frac{b}{a}$는 기약분수이므로 만들 수 있는 서로 다른 유리수 x는

$-\frac{3}{2}$, $-\frac{4}{3}$, $-\frac{5}{3}$, $-\frac{5}{4}$, $-\frac{7}{4}$, $-\frac{6}{5}$, $-\frac{7}{5}$, $-\frac{8}{5}$, $-\frac{9}{5}$, $-\frac{7}{6}$, $-\frac{8}{7}$, $-\frac{9}{7}$, $-\frac{9}{8}$

의 13개이다.

참고 $-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2}$, $-\frac{8}{6}=-\frac{4}{3}$, $-\frac{9}{6}=-\frac{3}{2}$이므로 이 수들은 x가 기약분수라는 조건을 만족시키지 않는다.

03 정수와 유리수의 계산

Lv. 1 개념을 적용하는 핵심 문제

29쪽~32쪽

01 ⑤	02 ④	03 ②	04 $\frac{7}{15}$	05 2
06 22	07 ②	08 -2	09 2 cm	10 ③
11 ⑤	12 ②	13 $\frac{3}{2}$	14 $\left(-\frac{3}{4}\right)^2$	15 ③, ⑤
16 $-\frac{1}{3}$	17 ③	18 $\frac{5}{3}$	19 $-\frac{12}{25}$	20 ③
21 ②	22 3	23 6계단	24 ③	

01 답 ⑤

① $(+9)+(-6)=+3$

② $(+5)-(+7)=(+5)+(-7)=-2$

③ $(-0.4)+(-2.1)=-2.5$

④ $\left(-\frac{3}{2}\right)+\left(+\frac{2}{3}\right)=\left(-\frac{9}{6}\right)+\left(+\frac{4}{6}\right)=-\frac{5}{6}$

⑤ $\left(+\frac{4}{5}\right)-\left(-\frac{1}{4}\right)=\left(+\frac{16}{20}\right)+\left(+\frac{5}{20}\right)=+\frac{21}{20}$

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

02 답 ④

$A=\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{2}{5}\right)=\left(-\frac{5}{10}\right)+\left(-\frac{4}{10}\right)=-\frac{9}{10}$

$B=(-0.2)-\left(+\frac{3}{2}\right)=\left(-\frac{1}{5}\right)+\left(-\frac{3}{2}\right)$

$=\left(-\frac{2}{10}\right)+\left(-\frac{15}{10}\right)=-\frac{17}{10}$

$\therefore A-B=\left(-\frac{9}{10}\right)-\left(-\frac{17}{10}\right)=\left(-\frac{9}{10}\right)+\left(+\frac{17}{10}\right)$

$=+\frac{8}{10}=+\frac{4}{5}$

03 답 ②

① $\frac{5}{6}-\frac{7}{2}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}-3=\frac{5}{6}-\frac{18}{6}=-\frac{13}{6}$

② $-5+2-3=-6$

③ $-2+7-4+0.1=1.1$

④ $0.8+2-3=-0.2$

⑤ $\frac{2}{5}+\frac{1}{9}-1=\frac{18}{45}+\frac{5}{45}-\frac{45}{45}=-\frac{22}{45}$

따라서 옳은 것은 ②이다.

04 답 $\frac{7}{15}$

$\frac{2}{3}-\square+\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$에서 $\frac{2}{3}-\square=\frac{1}{5}$

$\therefore \square=\frac{2}{3}-\frac{1}{5}=\frac{10}{15}-\frac{3}{15}=\frac{7}{15}$

05 답 2

$A=-2-\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{6}{3}+\left(+\frac{1}{3}\right)=-\frac{5}{3}$

$B=\frac{3}{4}+\frac{1}{12}=\frac{9}{12}+\frac{1}{12}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$

따라서 $-\frac{5}{3}<x<\frac{5}{6}$를 만족시키는 정수 x는 -1, 0의 2개이다.

06 답 22

a의 절댓값이 7이므로 $a=7$ 또는 $a=-7$

b의 절댓값이 4이므로 $b=4$ 또는 $b=-4$

이때 $a-b$의 값은

$a=7$, $b=4$일 때, $7-4=3$

$a=7$, $b=-4$일 때, $7-(-4)=7+4=11$

$a=-7$, $b=4$일 때, $-7-4=-11$

$a=-7$, $b=-4$일 때, $-7-(-4)=-7+4=-3$

따라서 $a-b$의 값 중 가장 큰 수는 11, 가장 작은 수는 -11이므로 $M=11$, $m=-11$

$\therefore M-m=11-(-11)=11+(+11)=22$

07 답 ②

$\left(-\frac{4}{5}\right)+\left(+\frac{7}{6}\right)-(+1)-\left(-\frac{1}{5}\right)$

$=\left(-\frac{4}{5}\right)+\left(+\frac{7}{6}\right)+(-1)+\left(+\frac{1}{5}\right)$

$=\left\{\left(-\frac{4}{5}\right)+\left(+\frac{1}{5}\right)\right\}+\left\{\left(+\frac{7}{6}\right)+(-1)\right\}$

$=\left\{\left(-\frac{4}{5}\right)+\left(+\frac{1}{5}\right)\right\}+\left\{\left(+\frac{7}{6}\right)+\left(-\frac{6}{6}\right)\right\}$

$=\left(-\frac{3}{5}\right)+\left(+\frac{1}{6}\right)$

$=\left(-\frac{18}{30}\right)+\left(+\frac{5}{30}\right)=-\frac{13}{30}$

08 답 -2

1단계 한 줄에 놓인 세 수의 합 구하기

왼쪽 세로 줄에 놓인 세 수의 합은

$(-5)+2+(-3)=-6$

2단계 A의 값 구하기

왼쪽 아래에서 오른쪽 위로 놓인 대각선의 세 수의 합은

$(-3)+(-2)+A=-6$이므로

$(-5)+A=-6$ $\quad\therefore A=-1$

3단계 B의 값 구하기

왼쪽 위에서 오른쪽 아래로 놓인 대각선의 세 수의 합은

$(-5)+(-2)+B=-6$이므로

$(-7)+B=-6$ $\quad\therefore B=1$

4단계 $A-B$의 값 구하기

$\therefore A-B=-1-1=-2$

단계	채점 기준	비율
❶	한 줄에 놓인 세 수의 합을 구했다.	30 %
❷	A의 값을 구했다.	30 %
❸	B의 값을 구했다.	30 %
❹	$A-B$의 값을 구했다.	10 %

09 답 2 cm

A의 키를 a cm라고 하면

조건 (가)에서 C의 키는 $(a-12)$ cm

조건 (다)에서 B의 키는 $(a-12)+9=a-3$ (cm)

조건 (나)에서 D의 키는 $(a-3)+5=a+2$ (cm)

따라서 A와 D의 키의 차는

$(a+2)-a=2\,(\mathrm{cm})$

참고 서로 다른 두 수의 차는 큰 수에서 작은 수를 뺀 값이다.

10 답 ③

$(-1)+(-1)^2+(-1)^3+\cdots+(-1)^{100}$
$=\{(-1)+1\}+\{(-1)+1\}+\cdots+\{(-1)+1\}$
$=0+0+\cdots+0=0$

11 답 ⑤

① $(+8)\times(+3)=+(8\times3)=+24$
② $(+5)\times(-7)=-(5\times7)=-35$
③ $(+19)\times0=0$
④ $(-2)\times(+6)=-(2\times6)=-12$
⑤ $(-4)\times(-11)=+(4\times11)=+44$
따라서 계산 결과가 가장 큰 것은 ⑤이다.

12 답 ②

$a\times(b+c)=a\times b+a\times c$
$\quad=6+(-9)=-3$

13 답 $\frac{3}{2}$

주어진 네 유리수 중 서로 다른 세 수를 뽑아 곱한 값이 가장 크려면 결과값이 양수이어야 하므로 곱해지는 세 수 중 음수가 2개이어야 한다.
즉, (양수)×(음수)×(음수)의 꼴이어야 한다.
이때 양수는 절댓값이 큰 수이어야 하므로 구하는 값은
$4\times\left(-\frac{1}{6}\right)\times\left(-\frac{9}{4}\right)=+\left(4\times\frac{1}{6}\times\frac{9}{4}\right)=\frac{3}{2}$

Level UP

① 세 수의 곱이 양수인 경우
(양수)×(양수)×(양수), (양수)×(음수)×(음수)
② 세 수의 곱이 음수인 경우
(양수)×(양수)×(음수), (음수)×(음수)×(음수)
이때 계산 결과가 가장 크거나 가장 작으려면 절댓값이 더 큰 수를 곱해야 한다.

14 답 $\left(-\frac{3}{4}\right)^2$

$\frac{(-3)^2}{4}=\frac{9}{4}$, $-\frac{3}{4^2}=-\frac{3}{16}$, $\left(-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$,
$-\left(-\frac{3}{4}\right)^2=-\frac{9}{16}$
이때 이 수들의 대소를 비교하면
$\frac{(-3)^2}{4}>\left(-\frac{3}{4}\right)^2>-\frac{3}{4^2}>-\left(-\frac{3}{4}\right)^2$
이므로 큰 것부터 차례대로 나열할 때, 두 번째에 오는 수는 $\left(-\frac{3}{4}\right)^2$이다.

15 답 ③, ⑤

$a>0$, $b<0$이므로
① $a+b$의 부호는 알 수 없다.
② $-b>0$이므로 $a-b>0$
③ $-a<0$이므로 $b-a<0$
④ $a\times b<0$
따라서 옳은 것은 ③, ⑤이다.

16 답 $-\frac{1}{3}$

1단계 보이는 세 수의 역수 구하기
$-1\frac{1}{5}=-\frac{6}{5}$의 역수는 $-\frac{5}{6}$,
$\frac{1}{3}$의 역수는 3,
$-0.4=-\frac{2}{5}$의 역수는 $-\frac{5}{2}$이다.
2단계 보이지 않는 세 면에 적힌 수의 합 구하기
따라서 보이지 않는 세 면에 적힌 수의 합은
$\left(-\frac{5}{6}\right)+3+\left(-\frac{5}{2}\right)=\left(-\frac{5}{6}\right)+\left(+\frac{18}{6}\right)+\left(-\frac{15}{6}\right)$
$\quad=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3}$

단계	채점 기준	비율
❶	보이는 세 수의 역수를 구했다.	50 %
❷	보이지 않는 세 면에 적힌 수의 합을 구했다.	50 %

Level UP

두 수 a, b에 대하여 $a\times b=1$일 때, a의 역수는 b이고 b의 역수는 a이다.

17 답 ③

$A=\left(+\frac{5}{24}\right)\div\left(-\frac{15}{16}\right)\times\left(-\frac{9}{8}\right)$
$\quad=\left(+\frac{5}{24}\right)\times\left(-\frac{16}{15}\right)\times\left(-\frac{9}{8}\right)$
$\quad=+\left(\frac{5}{24}\times\frac{16}{15}\times\frac{9}{8}\right)=+\frac{1}{4}$
따라서 A에 가장 가까운 정수는 0이다.

18 답 $\frac{5}{3}$

어떤 수를 A라고 하면 $A\div\left(-\frac{5}{6}\right)=\frac{12}{5}$
$\therefore\ A=\frac{12}{5}\times\left(-\frac{5}{6}\right)=-2$

따라서 바르게 계산한 값은

$-2\times\left(-\frac{5}{6}\right)=\frac{5}{3}$

19 답 $-\frac{12}{25}$

$a\times(-3)=15$에서

$a=15\div(-3)=15\times\left(-\frac{1}{3}\right)=-5$

$b\div\left(-\frac{4}{5}\right)=-3$에서

$b=-3\times\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{12}{5}$

$\therefore\ b\div a=\frac{12}{5}\div(-5)=\frac{12}{5}\times\left(-\frac{1}{5}\right)=-\frac{12}{25}$

20 답 ③

$\frac{4}{3}-\left[\frac{2}{5}-(-1)\div\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{5}{2}\right\}\right]$

$=\frac{4}{3}-\left\{\frac{2}{5}-(-1)\div\left(\frac{1}{4}\times\frac{5}{2}\right)\right\}$

$=\frac{4}{3}-\left\{\frac{2}{5}-(-1)\div\frac{5}{8}\right\}$

$=\frac{4}{3}-\left\{\frac{2}{5}-(-1)\times\frac{8}{5}\right\}$

$=\frac{4}{3}-\left(\frac{2}{5}+\frac{8}{5}\right)=\frac{4}{3}-2$

$=\frac{4}{3}-\frac{6}{3}=-\frac{2}{3}$

따라서 주어진 식의 계산 순서를 차례대로 나열하면 ㉣, ㉤, ㉢, ㉡, ㉠이다.

21 답 ②

$\left(-\frac{4}{9}\right)\div\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^2-(-2)\times\left\{\frac{5}{3}+(-1)\right\}\right]$

$=\left(-\frac{4}{9}\right)\div\left[\frac{1}{9}-(-2)\times\left\{\frac{5}{3}+(-1)\right\}\right]$

$=\left(-\frac{4}{9}\right)\div\left[\frac{1}{9}-(-2)\times\left\{\frac{5}{3}+\left(-\frac{3}{3}\right)\right\}\right]$

$=\left(-\frac{4}{9}\right)\div\left\{\frac{1}{9}-(-2)\times\frac{2}{3}\right\}$

$=\left(-\frac{4}{9}\right)\div\left\{\frac{1}{9}-\left(-\frac{4}{3}\right)\right\}$

$=\left(-\frac{4}{9}\right)\div\left(\frac{1}{9}+\frac{4}{3}\right)$

$=\left(-\frac{4}{9}\right)\div\left(\frac{1}{9}+\frac{12}{9}\right)$

$=\left(-\frac{4}{9}\right)\div\frac{13}{9}$

$=\left(-\frac{4}{9}\right)\times\frac{9}{13}=-\frac{4}{13}$

22 답 3

$-\frac{4}{3}-\left\{-2+\frac{3}{2}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^2\div\left(-\frac{1}{12}\right)\right\}$

$=-\frac{4}{3}-\left\{-2+\frac{3}{2}\times\frac{1}{9}\div\left(-\frac{1}{12}\right)\right\}$

$=-\frac{4}{3}-\left\{-2+\frac{3}{2}\times\frac{1}{9}\times(-12)\right\}$

$=-\frac{4}{3}-\{-2+(-2)\}$

$=-\frac{4}{3}-(-4)$

$=-\frac{4}{3}+\frac{12}{3}=\frac{8}{3}$

따라서 계산한 결과에 가장 가까운 정수는 3이다.

23 답 6계단

가위바위보에서 수민이는 6번 이기고 4번 졌고, 서연이는 4번 이기고 6번 졌다.

수민이는 처음보다

$6\times2+4\times(-1)=12+(-4)=8$(계단)

서연이는 처음보다

$4\times2+6\times(-1)=8+(-6)=2$(계단)

위에 있게 되므로 수민이는 서연이보다 $8-2=6$(계단) 위에 있게 된다.

24 답 ③

동전을 4번 던져서 얻을 수 있는 점수는 다음과 같다.

(ⅰ) 앞면이 4번 나오는 경우

$4\times5=20$(점)

(ⅱ) 앞면이 3번, 뒷면이 1번 나오는 경우

$3\times5+1\times(-2)=15+(-2)=13$(점)

(ⅲ) 앞면이 2번, 뒷면이 2번 나오는 경우

$2\times5+2\times(-2)=10+(-4)=6$(점)

(ⅳ) 앞면이 1번, 뒷면이 3번 나오는 경우

$1\times5+3\times(-2)=5+(-6)=-1$(점)

(ⅴ) 뒷면이 4번 나오는 경우

$4\times(-2)=-8$(점)

(ⅰ)~(ⅴ)에 의하여 동전을 4번 던져서 얻을 수 있는 점수가 아닌 것은 ③이다.

Lv. 2 사고를 확장하는 실전 문제

33쪽~39쪽

01 -8	02 ②	03 400	04 ③	05 ④
06 ④	07 9	08 $-\frac{5}{2}$	09 7	10 0
11 12	12 61	13 2	14 $\frac{1}{4}$	15 $\frac{14}{3}$
16 -3	17 $\frac{3}{5}$	18 14	19 $\frac{7}{44}$	20 ③
21 9	22 $-\frac{1}{4}$	23 ④	24 $\frac{5}{9}$	25 $-\frac{1}{4}$
26 56	27 $\frac{1}{a^3}$	28 ③, ④	29 ⑤	30 $a-b$
31 ④	32 6, 4, 0, -10		33 8	34 ③
35 $\frac{55}{36}$	36 ①	37 28	38 ③	39 420 cm^2
40 19	41 $\frac{41}{45}$	42 7		

01 답 -8

정수 x에 대하여 $|x|<4$이므로

$x=-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$

(ⅰ) $x=-3$일 때

$y=-3-|-3|+1=-3-3+1=-5$

(ⅱ) $x=-2$일 때

$y=-2-|-2|+1=-2-2+1=-3$

(ⅲ) $x=-1$일 때

$y=-1-|-1|+1=-1-1+1=-1$

(ⅳ) $x=0$일 때

$y=0-|0|+1=1$

(ⅴ) $x=1$일 때

$y=1-|1|+1=1-1+1=1$

(ⅵ) $x=2$일 때

$y=2-|2|+1=2-2+1=1$

(ⅶ) $x=3$일 때

$y=3-|3|+1=3-3+1=1$

(ⅰ)~(ⅶ)에 의하여 가능한 y의 값은 $-5,\ -3,\ -1,\ 1$이므로 구하는 합은

$(-5)+(-3)+(-1)+1=-8$

02 답 ②

$|x|=8$이므로 $x=8$ 또는 $x=-8$

$|y|=11$이므로 $y=11$ 또는 $y=-11$

x가 양수이고 y가 음수일 때, 즉 $x=8,\ y=-11$일 때, $x-y$의 값이 가장 크므로

$M=8-(-11)=8+11=19$

x가 음수이고 y가 음수일 때, 즉 $x=-8,\ y=-11$일 때, $x+y$의 값이 가장 작으므로

$m=-8+(-11)=-8-11=-19$

$\therefore\ M+m=19+(-19)=0$

03 답 400

해결 key Point!

A와 B의 값을 구하는 것보다는 $A-B$의 값을 확인한다.

1단계 3의 배수인 수의 합 구하기

1부터 600까지의 자연수 중 3의 배수는

$3,\ 6,\ 9,\ \cdots,\ 600$

이므로 $A=3+6+9+\cdots+600$

2단계 3으로 나누었을 때 나머지가 1인 수의 합 구하기

1부터 600까지의 자연수 중 3으로 나누었을 때 나머지가 1인 수는

$1,\ 4,\ 7,\ \cdots,\ 598$

이므로 $B=1+4+7+\cdots+598$

3단계 $A-B$의 값 구하기

$$\begin{aligned}\therefore\ A-B&=(3+6+9+\cdots+600)-(1+4+7+\cdots+598)\\&=(3-1)+(6-4)+(9-7)+\cdots+(600-598)\\&=\underbrace{2+2+2+\cdots+2}_{200\text{개}}\\&=2\times200=400\end{aligned}$$

단계	채점 기준	비율
❶	3의 배수인 수의 합을 식으로 나타냈다.	20 %
❷	3으로 나누었을 때 나머지가 1인 수의 합을 식으로 나타냈다.	20 %
❸	$A-B$의 값을 구했다.	60 %

04 답 ③

$|y|=3$이므로 $y=-3$ 또는 $y=3$

$|x|-|y|=1$에서 $|x|=4$이므로 $x=-4$ 또는 $x=4$

즉, $x=4,\ y=3$ 또는 $x=4,\ y=-3$ 또는 $x=-4,\ y=3$ 또는 $x=-4,\ y=-3$이다.

(ⅰ) $x=4,\ y=3$일 때

$|x-y|=|4-3|=1$

(ⅱ) $x=4,\ y=-3$일 때

$|x-y|=|4-(-3)|=7$

(ⅲ) $x=-4,\ y=3$일 때

$|x-y|=|-4-3|=|-7|=7$

(ⅳ) $x=-4,\ y=-3$일 때

$|x-y|=|-4-(-3)|=|-1|=1$

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 $|x-y|$의 값 중 가장 큰 수는 7, 가장 작은 수는 1이므로 $M=7,\ m=1$

$\therefore\ M+m=7+1=8$

05 답 ④

$-\frac{4}{3}+a=-\frac{1}{2}$이므로

$a=-\frac{1}{2}-\left(-\frac{4}{3}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{4}{3}=-\frac{3}{6}+\frac{8}{6}=\frac{5}{6}$

$a+b=\frac{1}{4}$이므로 $\frac{5}{6}+b=\frac{1}{4}$

$\therefore\ b=\frac{1}{4}-\frac{5}{6}=\frac{3}{12}-\frac{10}{12}=-\frac{7}{12}$

$b+\frac{5}{6}=c$이므로

$c=-\frac{7}{12}+\frac{5}{6}=-\frac{7}{12}+\frac{10}{12}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

$d=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=-\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}$

$\frac{1}{4}+c=e$이므로

$e=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

$d+e=f$이므로

$f=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{1}{4}$

06 답 ④

3	1	A	B	C	D	…

$3+A=1$이므로 $A=-2$

$1+B=A$이므로 $1+B=-2$　　$\therefore\ B=-3$

$A+C=B$이므로 $-2+C=-3$　　$\therefore\ C=-1$

$B+D=C$이므로 $-3+D=-1$　　$\therefore\ D=2$

D의 오른쪽에 있는 수를 순서대로 a, b, c라고 하면

3	1	-2	-3	-1	2	a	b	c	…

$-1+a=2$이므로 $a=3$

$2+b=a$이므로 $2+b=3$　　$\therefore\ b=1$

$a+c=b$이므로 $3+c=1$　　$\therefore\ c=-2$

⋮

따라서 위의 그림에 적히는 수는 3, 1, -2, -3, -1, 2의 6개의 수가 이 순서대로 반복된다.

이때 $50=6\times8+2$이므로 50번째 칸에 적히는 수는 1이다.

07 답 9

세 번째 적히는 수는 $B-A$

네 번째 적히는 수는 $(B-A)-B=-A$

다섯 번째 적히는 수는 $-A-(B-A)=-B$

여섯 번째 적히는 수는 $-B-(-A)=A-B$

일곱 번째 적히는 수는 $(A-B)-(-B)=A$

여덟 번째 적히는 수는 $A-(A-B)=B$

즉, A, B, $B-A$, $-A$, $-B$, $A-B$의 6개의 수가 이 순서대로 반복된다.

또, 반복되는 6개의 수의 합은

$A+B+(B-A)+(-A)+(-B)+(A-B)=0$

이때 $700=6\times116+4$이므로 처음부터 700번째 칸까지 적힌 수의 합은 처음부터 네 번째 칸까지 적힌 수의 합과 같다.

…	A	B	$B-A$	$-A$

700번째 칸에 적힌 수는 네 번째 칸에 적힌 수와 같고 그 수가 -4이므로

$-A=-4$　　$\therefore\ A=4$

처음부터 700번째 칸까지 적힌 수의 합이 14이므로

$A+B+(B-A)+(-A)=14$에서

$-4+2B=14$, $2B=18$　　$\therefore\ B=9$

08 답 $-\frac{5}{2}$

1단계 이웃한 두 수 사이의 거리 구하기

수직선에서 $-\frac{5}{2}$와 $\frac{3}{4}$ 사이의 거리는

$\frac{3}{4}-\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{4}+\frac{10}{4}=\frac{13}{4}$

이때 이웃한 두 수 사이의 거리가 모두 같으므로 그 거리는

$\frac{13}{4}\div4=\frac{13}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{13}{16}$

2단계 a, b, c의 값 구하기

따라서 a, b, c의 값은

$a=-\frac{5}{2}+\frac{13}{16}=-\frac{40}{16}+\frac{13}{16}=-\frac{27}{16}$

$b=-\frac{27}{16}+\frac{13}{16}=-\frac{14}{16}=-\frac{7}{8}$

$c=-\frac{7}{8}+\frac{13}{16}=-\frac{14}{16}+\frac{13}{16}=-\frac{1}{16}$

3단계 $a+b-c$의 값 구하기

$$\begin{aligned}\therefore\ a+b-c&=-\frac{27}{16}+\left(-\frac{7}{8}\right)-\left(-\frac{1}{16}\right)\\&=-\frac{27}{16}+\left(-\frac{14}{16}\right)+\left(+\frac{1}{16}\right)\\&=-\frac{40}{16}=-\frac{5}{2}\end{aligned}$$

단계	채점 기준	비율
❶	이웃한 두 수 사이의 거리를 구했다.	30 %
❷	a, b, c의 값을 구했다.	50 %
❸	$a+b-c$의 값을 구했다.	20 %

09 답 7

$<-1.2>=-2$, $<-4>=-5$, $<2.01>=2$,

$[-2.3]=-2$, $[0.5]=1$, $<0>=-1$이므로

$3\times<-1.2>-<-4>+2\times<2.01>-[-2.3]$
$+[0.5]-<0>$

$=3\times(-2)-(-5)+2\times2-(-2)+1-(-1)$

$=-6+5+4+2+1+1=7$

10 답 0

해결 key Point!

지수가 홀수인지 짝수인지 알아본다.

n이 홀수이므로 $n+1$, $n+3$은 짝수이고, $n+2$, $n+4$는 홀수이다.

$\therefore (-1)^{n+1}-(-1)^{n+2}-(-1)^{n+3}+(-1)^{n+4}$

$=1-(-1)-1+(-1)$

$=1+1-1-1$

$=0$

Level UP

n이 홀수이면

$n+1$, $n+3$, $n+5$, …는 짝수, $n+2$, $n+4$, $n+6$, …은 홀수이므로 n의 값을 몰라도 $(-1)^n$, $(-1)^{n+1}$, $(-1)^{n+2}$, …의 값이 -1인지 1인지 알 수 있다.

11 답 12

$a\times b\div c$의 값이 가장 크려면 양수이어야 하므로 뽑힌 세 수 중 음수가 2개이어야 한다.

이때 a와 b의 절댓값이 크고 c의 절댓값은 작을수록 $a\times b\div c$의 값이 커지고 네 수의 절댓값의 대소를 비교하면

$\left|\frac{1}{4}\right|<\left|-\frac{1}{2}\right|<|-2|<|3|$이다.

$a=3$, $b=-2$, $c=\frac{1}{4}$이면 음수가 한 개이므로 $a\times b\div c$의 값이 음수가 되어 가장 큰 값이 아니다.

따라서 $a=3$, $b=-2$, $c=-\frac{1}{2}$일 때, $a\times b$와 c의 부호가 같으므로 가장 큰 값이 되고

$a\times b\div c=3\times(-2)\div\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=3\times(-2)\times(-2)=12$

12 답 61

$A\div\left(-\frac{7}{9}\right)\times 4\div\left(-\frac{2}{3}\right)=B$에서

$A\times\left(-\frac{9}{7}\right)\times 4\times\left(-\frac{3}{2}\right)=B$

$A\times\frac{54}{7}=B$

이때 B가 양의 정수가 되려면 A는 7의 배수이어야 하고, $A+B$의 값 중 가장 작은 수를 구해야 하므로

$A=7$

따라서 $B=7\times\frac{54}{7}=54$이므로

$A+B=7+54=61$

13 답 2

1단계 A의 값 구하기

$A=\frac{1}{3}-\left\{\frac{5}{6}\div\left(-\frac{5}{2}\right)+(-1)^{2027}\right\}$

$=\frac{1}{3}-\left\{\frac{5}{6}\times\left(-\frac{2}{5}\right)+(-1)\right\}$

$=\frac{1}{3}-\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{5}{3}$

2단계 B의 값 구하기

$B=(-2)^2+\left[\frac{7}{2}\div\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\left(-\frac{27}{8}\right)\right\}\right]$

$=4+\left[\frac{7}{2}\div\left\{\left(-\frac{1}{8}\right)+\left(-\frac{27}{8}\right)\right\}\right]$

$=4+\left\{\frac{7}{2}\times\left(-\frac{2}{7}\right)\right\}$

$=4+(-1)=3$

3단계 정수 x의 값 구하기

따라서 $\frac{5}{3}<x<3$을 만족시키는 정수 x의 값은 2이다.

단계	채점 기준	비율
❶	A의 값을 구했다.	40 %
❷	B의 값을 구했다.	40 %
❸	정수 x의 값을 구했다.	20 %

14 답 $\frac{1}{4}$

$1\frac{1}{2}\diamond\left(-\frac{5}{6}\right)=\left\{\frac{3}{2}+\left(-\frac{5}{6}\right)\right\}\times\frac{1}{2}$

$=\left\{\frac{9}{6}+\left(-\frac{5}{6}\right)\right\}\times\frac{1}{2}$

$=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

$(-2)\diamond\frac{7}{3}=\left\{(-2)+\frac{7}{3}\right\}\times\frac{1}{2}$

$=\left\{\left(-\frac{6}{3}\right)+\frac{7}{3}\right\}\times\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

$\therefore \left\{1\frac{1}{2}\diamond\left(-\frac{5}{6}\right)\right\}\diamond\left\{(-2)\diamond\frac{7}{3}\right\}$

$=\frac{1}{3}\diamond\frac{1}{6}=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)\times\frac{1}{2}$

$=\left(\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\right)\times\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

15 답 $\frac{14}{3}$

$\frac{1}{3}\blacksquare\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}-\left(\frac{2}{6}+\frac{3}{6}\right)$

$=\frac{1}{6}-\frac{5}{6}=-\frac{4}{6}=-\frac{2}{3}$

$a▼b=\frac{a}{b}+2=a\div b+2$이므로

$\left(\frac{1}{3}■\frac{1}{2}\right)▼\left(-\frac{1}{4}\right)=\left(-\frac{2}{3}\right)▼\left(-\frac{1}{4}\right)$

$=\left(-\frac{2}{3}\right)\div\left(-\frac{1}{4}\right)+2$

$=\left(-\frac{2}{3}\right)\times(-4)+2$

$=\frac{8}{3}+2=\frac{14}{3}$

16 답 -3

$(a-b)\times c$의 값이 가장 작으려면 $a-b$의 값과 c의 값의 부호가 달라야 하고 $|a-b|$, $|c|$의 값은 커야 한다.

즉, $a-b>0$, $c<0$ 또는 $a-b<0$, $c>0$이다.

이때 원 A에 있는 수는 모두 음수이고, 원 B에 있는 수는 모두 양수이므로 $a<0$, $b>0$에서 $a-b<0$이므로 $c>0$이어야 한다.

$\therefore c=0.5$

$|a-b|$의 값은 $a=-2$, $b=4$일 때 가장 크므로 구하는 값은

$(a-b)\times c=(-2-4)\times 0.5$

$=-6\times 0.5=-3$

17 답 $\frac{3}{5}$

$A=-\frac{5}{6}-\frac{2}{3}=-\frac{5}{6}-\frac{4}{6}$

$=-\frac{9}{6}=-\frac{3}{2}$

$|x+1|=\frac{3}{2}$이므로

$x+1=\frac{3}{2}$ 또는 $x+1=-\frac{3}{2}$

$\therefore x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=-\frac{5}{2}$

x의 값 중 가장 작은 수는 $-\frac{5}{2}$이므로

$B=-\frac{5}{2}$

$\therefore A\div B=\left(-\frac{3}{2}\right)\div\left(-\frac{5}{2}\right)$

$=\left(-\frac{3}{2}\right)\times\left(-\frac{2}{5}\right)=\frac{3}{5}$

18 답 14

1단계 a, b, m의 값 구하기

$a=-1\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\div\left(-\frac{6}{5}\right)$

$=-\frac{3}{2}\times\frac{3}{4}\times\left(-\frac{5}{6}\right)=\frac{15}{16}$

$b=(-2)^3\times\frac{5}{6}\div\left(-\frac{2}{3}\right)^2$

$=-8\times\frac{5}{6}\div\frac{4}{9}$

$=-8\times\frac{5}{6}\times\frac{9}{4}=-15$

$m=(-3)^2\div\frac{36}{5}-\left(-\frac{3}{4}\right)^2$

$=9\times\frac{5}{36}-\frac{9}{16}$

$=\frac{5}{4}-\frac{9}{16}=\frac{11}{16}$

2단계 n의 값 구하기

$a+b=m+n$이므로 $\frac{15}{16}+(-15)=\frac{11}{16}+n$

$\therefore n=\left(\frac{15}{16}-\frac{11}{16}\right)+(-15)$

$=\frac{1}{4}+(-15)$

$=\frac{1}{4}+\left(-\frac{60}{4}\right)=-\frac{59}{4}$

3단계 n보다 작지 않은 음의 정수의 개수 구하기

따라서 $n=-\frac{59}{4}=-14.75$이므로 n보다 작지 않은 음의 정수는 -14, -13, -12, $\cdots$, -1의 14개이다.

단계	채점 기준	비율
❶	a, b, m의 값을 구했다.	40 %
❷	n의 값을 구했다.	40 %
❸	n보다 작지 않은 음의 정수의 개수를 구했다.	20 %

19 답 $\frac{7}{44}$

$\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\cdots+\frac{1}{110}$

$=\frac{1}{4\times5}+\frac{1}{5\times6}+\frac{1}{6\times7}+\cdots+\frac{1}{10\times11}$

$=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)$

$=\frac{1}{4}+\left(-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)+\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)+\left(-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\right)$

$+\cdots+\left(-\frac{1}{10}+\frac{1}{10}\right)-\frac{1}{11}$

$=\frac{1}{4}-\frac{1}{11}=\frac{11}{44}-\frac{4}{44}=\frac{7}{44}$

20 답 ③

$|3\times a|=9$이므로 $3\times a=9$ 또는 $3\times a=-9$

$\therefore a=3$ 또는 $a=-3$

$|b-4|=3$이므로 $b-4=3$ 또는 $b-4=-3$

$\therefore b=7$ 또는 $b=1$

따라서 $a-b$의 값이 가장 크려면 a의 값이 가장 크고 b의 값이 가장 작아야 하므로 $a=3$, $b=1$

$\therefore a-b=3-1=2$

$a-b$의 값이 가장 작으려면 a의 값이 가장 작고 b의 값이 가장 커야 하므로

$a=-3$, $b=7$

$\therefore a-b=-3-7=-10$

따라서 구하는 합은

$2+(-10)=-8$

21 답 9

두 정수 x, y에 대하여 $x\times(y-4)=-24$이므로 x와 $y-4$의 부호가 다르다.

이때 $x<y$, $|x|\le|y|$이므로

$x<0$, $y>0$

따라서 $y-4>0$, 즉 $y>4$이어야 하고 $y-4$가 24의 약수이어야 하므로

$y-4=1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$

즉, $y=5, 6, 7, 8, 10, 12, 16, 28$이고 y는 3의 배수이므로

$y=6, 12$이다.

(ⅰ) $y=6$일 때

$x\times(6-4)=-24$, $2\times x=-24$

$\therefore x=-12$

이때 $|-12|\ge|6|$이므로 $|x|\le|y|$를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $y=12$일 때

$x\times(12-4)=-24$, $8\times x=-24$

$\therefore x=-3$

이때 $|-3|\le|12|$이므로 $|x|<|y|$를 만족시킨다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$x=-3$, $y=12$

$\therefore x+y=-3+12=9$

22 답 $-\frac{1}{4}$

$(-1)^2-\left[\frac{4}{3}+\square\div\left\{\left(-\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{9}{8}-2\right\}\right]=-\frac{1}{2}$에서

$1-\left\{\frac{4}{3}+\square\div\left(\frac{4}{9}\times\frac{9}{8}-2\right)\right\}=-\frac{1}{2}$

$1-\left\{\frac{4}{3}+\square\div\left(\frac{1}{2}-2\right)\right\}=-\frac{1}{2}$

$1-\left\{\frac{4}{3}+\square\div\left(-\frac{3}{2}\right)\right\}=-\frac{1}{2}$

$-\left\{\frac{4}{3}+\square\times\left(-\frac{2}{3}\right)\right\}=-\frac{3}{2}$

$\frac{4}{3}+\square\times\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{3}{2}$

$\square\times\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{3}{2}-\frac{4}{3}=\frac{9}{6}-\frac{8}{6}=\frac{1}{6}$

$\therefore \square=\frac{1}{6}\div\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{6}\times\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{4}$

23 답 ④

어떤 유리수를 $\square$라고 하면 유진이가 잘못 계산한 값은

$\square\times\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{11}{18}$이므로

$\square\times\frac{4}{9}=-\frac{11}{18}+\frac{3}{2}$, $\square\times\frac{4}{9}=\frac{16}{18}$

$\therefore \square=\frac{16}{18}\times\frac{9}{4}=2$

따라서 유진이가 바르게 계산하면

$$\left\{2-\left(-\frac{3}{2}\right)\right\}\times\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{2}=\left\{2-\left(-\frac{3}{2}\right)\right\}\times\frac{4}{9}+\frac{1}{2}$$
$$=\frac{7}{2}\times\frac{4}{9}+\frac{1}{2}$$
$$=\frac{14}{9}+\frac{1}{2}$$
$$=\frac{28}{18}+\frac{9}{18}=\frac{37}{18}$$

24 답 $\frac{5}{9}$

1단계 A, B의 값 구하기

$A=11.5\times(-8.4)-3\times9.5+11.5\times11.4$

$=11.5\times(-8.4)+11.5\times11.4-3\times9.5$

$=11.5\times\{(-8.4)+11.4\}-3\times9.5$

$=11.5\times3-3\times9.5$

$=3\times(11.5-9.5)$

$=3\times2=6$

$B=3-3\times\left\{\frac{5}{6}+\left(-\frac{1}{2}\right)\div\left(-\frac{3}{4}\right)\times\frac{1}{2}\right\}$

$=3-3\times\left\{\frac{5}{6}+\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{4}{3}\right)\times\frac{1}{2}\right\}$

$=3-3\times\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{3}\right)=3-3\times\frac{7}{6}$

$=3-\frac{7}{2}=-\frac{1}{2}$

2단계 a, b, c의 값 구하기

a는 $-0.12=-\frac{3}{25}$의 역수이므로 $a=-\frac{25}{3}$

b는 B의 역수이므로 $b=-2$

c는 A의 역수이므로 $c=\frac{1}{6}$

3단계 $a\div\frac{5}{b}\times c$의 값 구하기

$\therefore a\div\frac{5}{b}\times c=-\frac{25}{3}\div\left(-\frac{5}{2}\right)\times\frac{1}{6}$

$=-\frac{25}{3}\times\left(-\frac{2}{5}\right)\times\frac{1}{6}=\frac{5}{9}$

단계	채점 기준	비율
❶	A, B의 값을 구했다.	30 %
❷	a, b, c의 값을 구했다.	40 %
❸	$a\div\frac{5}{b}\times c$의 값을 구했다.	30 %

25 답 $-\frac{1}{4}$

계산기 A에 $-\frac{3}{2}$을 입력했을 때 계산된 값은

$$-\frac{3}{2}\div 2+3=-\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}+3$$
$$=-\frac{3}{4}+3$$
$$=-\frac{3}{4}+\frac{12}{4}=\frac{9}{4}$$

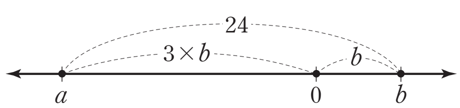
이 값을 계산기 B에 입력했을 때 계산된 값은

$\frac{9}{4}-\frac{5}{2}=\frac{9}{4}-\frac{10}{4}=-\frac{1}{4}$

따라서 최종적으로 계산된 값은 $-\frac{1}{4}$이다.

26 답 56

주어진 조건을 만족시키는 두 정수 a, b를 수직선에 나타내면 다음과 같다.



이때 $b=24\div 4=6$이므로

$a=-(3\times b)=-(3\times 6)=-18$

$$\therefore\ -2a+\frac{b}{3}-\frac{a\times b}{6}=-2\times(-18)+\frac{6}{3}-\frac{-18\times 6}{6}$$
$$=36+2+18=56$$

27 답 $\frac{1}{a^3}$

$-1<a<0$이므로 $-1<a<0<a^2<1$

또, a의 역수 $\frac{1}{a}$의 값의 범위는 $\frac{1}{a}<-1$

마찬가지로 a^2의 역수 $\frac{1}{a^2}$의 값의 범위는 $\frac{1}{a^2}>1$

$\therefore\ \frac{1}{a}<a<a^2<\frac{1}{a^2}$

따라서 가장 큰 수는 $\frac{1}{a^2}$, 가장 작은 수는 $\frac{1}{a}$이므로 구하는 곱은

$\frac{1}{a^2}\times\frac{1}{a}=\frac{1}{a^3}$

다른 풀이

$a=-\frac{1}{2}$이라고 하면

$a^2=\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

a의 역수 $\frac{1}{a}=-2$

a의 제곱의 역수 $\frac{1}{a^2}=4$

$\therefore\ \frac{1}{a}<a<a^2<\frac{1}{a^2}$

28 답 ③, ④

$a<b<c$, $b\times c<0$이므로 $a<b<0<c$

이때 $a+c<0$이므로 $|a|>|c|$이고, $b+c>0$이므로 $|c|>|b|$

$\therefore\ |a|>|c|>|b|$

① $a<0$, $b<0$이므로 $a\times b>0$

② $a<b$이므로 $b-a>0$

③ $|a|>|c|>|b|$이므로 $|a|>|b|$

④ $|c|>|b|$이므로 $|b|-|c|<0$

⑤ $|a|>|c|$이므로 $|a|-|c|>0$

따라서 옳지 않은 것은 ③, ④이다.

29 답 ⑤

$a+b=0$에서 a와 b의 부호는 다르고 $|a|=|b|$이다.

$a\times c<0$에서 a와 c의 부호는 다르므로 b와 c의 부호는 같다.

또, $c\times d>1$에서 c와 d의 부호는 같으므로 a, b, c, d 중 a만 부호가 다르고 나머지 수의 부호는 같다.

즉 a, b, c, d의 부호를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	b	c	d
+	−	−	−
−	+	+	+

① $\frac{b}{c}>0$

② $b\times d>0$

③ $b<0$, $c<0$, $d<0$일 때, $c+d<0$이므로 $b\times(c+d)>0$
$b>0$, $c>0$, $d>0$일 때, $c+d>0$이므로 $b\times(c+d)>0$

④ $b<0$, $c<0$, $d<0$일 때, $|c|>|b|$에서 $c-b<0$이므로 $d\times(c-b)>0$
$b>0$, $c>0$, $d>0$일 때, $|c|>|b|$에서 $c-b>0$이므로 $d\times(c-b)>0$

⑤ $a>0$, $c<0$, $d<0$일 때, $c+d<0$이므로 $a\times(c+d)<0$
$a<0$, $c>0$, $d>0$일 때, $c+d>0$이므로 $a\times(c+d)<0$

따라서 나머지 넷과 부호가 다른 하나는 ⑤이다.

30 답 $a-b$

$a>0$, $b<0$, $a+b>0$이므로

$|a|>|b|$ ⋯⋯ ㉠

$2a+b>a+b$ ⋯⋯ ㉡

$a-b<a-2b$ ⋯⋯ ㉢

$a-b<2a-b$

㉠에서 $a>-b$이고 $2a-b=a-b+a$, $a-2b=a-b-b$이므로

$2a-b>a-2b$ ⋯⋯ ㉣

한편, $a+2b<0$이므로 $|a|<|2b|$이고 $2a+b=a+b+a$, $a-b=a+b-2b$이므로

$a-b>2a+b$ ⋯⋯ ㉤

㉡, ㉢, ㉣, ㉤에서

$2a-b>a-2b>a-b>2a+b>a+b$

이므로 세 번째로 큰 수는 $a-b$이다.

31 답 ④

해결 key Point!

두 수 a, b에 대하여 a와 b가 역수 관계이면 두 수의 부호는 서로 같다.

$a\times b\times c<0$이면 세 수 a, b, c 중 음수는 1개 또는 3개이다.

이때 세 수 a, b, c 중 적어도 하나는 양수이므로 a, b, c 중 음수는 한 개이다.

또, a가 b의 역수이므로 두 수 a, b의 부호는 같다.

따라서 $a>0$, $b>0$이므로 $c<0$

$|a|<1$이고 $a>0$이므로 $0<a<1$

$b=\frac{1}{a}$이므로 $b>1$

따라서 $c<0<a<1<b$이므로

$c<a<b$

32 답 6, 4, 0, -10

해결 key Point!

세 정수의 곱이 -30이 되는 모든 경우를 알아본다.

세 정수 a, b, c $(a<b<c)$에 대하여 $a\times b\times c=-30$이므로 a, b, c 중 음수는 1개 또는 3개이다.

$a\times b\times c=-30$을 만족시키는 세 정수 a, b, c를 (a, b, c)로 나타내면

$(-1, 1, 30)$, $(-1, 2, 15)$, $(-2, 1, 15)$, $(-15, 1, 2)$, $(-15, -2, -1)$, $(-1, 3, 10)$, $(-3, 1, 10)$, $(-10, 1, 3)$, $(-10, -3, -1)$, $(-1, 5, 6)$, $(-5, 1, 6)$, $(-6, 1, 5)$, $(-6, -5, -1)$, $(-2, 3, 5)$, $(-3, 2, 5)$, $(-5, 2, 3)$, $(-5, -3, -2)$이므로

(ⅰ) $(-1, 1, 30)$일 때

$|a|+|b|+|c|=1+1+30=32$

(ⅱ) $(-1, 2, 15)$ 또는 $(-2, 1, 15)$ 또는 $(-15, 1, 2)$ 또는 $(-15, -2, -1)$일 때

$|a|+|b|+|c|=1+2+15=18$

(ⅲ) $(-1, 3, 10)$ 또는 $(-3, 1, 10)$ 또는 $(-10, 1, 3)$ 또는 $(-10, -3, -1)$일 때

$|a|+|b|+|c|=1+3+10=14$

(ⅳ) $(-1, 5, 6)$ 또는 $(-5, 1, 6)$ 또는 $(-6, 1, 5)$ 또는 $(-6, -5, -1)$일 때

$|a|+|b|+|c|=1+5+6=12$

(ⅴ) $(-2, 3, 5)$ 또는 $(-3, 2, 5)$ 또는 $(-5, 2, 3)$ 또는 $(-5, -3, -2)$일 때

$|a|+|b|+|c|=2+3+5=10$

(ⅰ)~(ⅴ)에 의하여 가장 작은 $|a|+|b|+|c|$의 값은 10이고, 그때의 (a, b, c)는

$(-2, 3, 5)$ 또는 $(-3, 2, 5)$ 또는 $(-5, 2, 3)$ 또는 $(-5, -3, -2)$

이므로 $a+b+c$의 값은 각각 $(-2)+3+5=6$, $(-3)+2+5=4$, $(-5)+2+3=0$, $(-5)+(-3)+(-2)=-10$이다.

33 답 8

1단계 조건을 만족시키는 a, b의 값 구하기

$|a|=3\times|b|$, $a-b=16$을 만족시키는 a, b의 값은

$a=24$, $b=8$ 또는 $a=12$, $b=-4$

이때 $a\times b<0$이므로 a, b의 부호가 서로 달라야 한다.

$\therefore a=12,\ b=-4$

2단계 $a◎b$의 값 구하기

$a◎b=12◎(-4)$는 두 수 12, -4를 나타내는 점으로부터 같은 거리에 있는 점이 나타내는 수이므로 4이다.

$\therefore a◎b=4$

3단계 $(a◎b)◎a$의 값 구하기

$(a◎b)◎a=4◎12$는 두 수 4, 12를 나타내는 점으로부터 같은 거리에 있는 점이 나타내는 수이므로 8이다.

$\therefore (a◎b)◎a=8$

단계	채점 기준	비율
❶	조건을 만족시키는 a, b의 값을 구했다.	40 %
❷	$a◎b$의 값을 구했다.	30 %
❸	$(a◎b)◎a$의 값을 구했다.	30 %

34 답 ③

점 C가 나타내는 수가 $-\frac{1}{4}$일 때 두 점 C, A 사이의 거리는 두 점 C, D 사이의 거리의 2배이어야 한다.

① 점 D가 나타내는 수가 $\frac{1}{4}$이면 두 점 C, D 사이의 거리는

$\frac{1}{4}-\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

따라서 점 A가 나타내는 수는

$\left(-\frac{1}{4}\right)-2\times\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}-1=-\frac{5}{4}$

② 점 D가 나타내는 수가 $\frac{3}{2}$이면 두 점 C, D 사이의 거리는

$\frac{3}{2}-\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{2}+\frac{1}{4}=\frac{6}{4}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$

따라서 점 A가 나타내는 수는

$\left(-\frac{1}{4}\right)-2\times\frac{7}{4}=-\frac{1}{4}-\frac{14}{4}=-\frac{15}{4}$

③ 점 D가 나타내는 수가 $\frac{3}{4}$이면 두 점 C, D 사이의 거리는

$\frac{3}{4}-\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1$

따라서 점 A가 나타내는 수는

$\left(-\frac{1}{4}\right)-2\times1=-\frac{1}{4}-2=-\frac{9}{4}$

④ 점 D가 나타내는 수가 1이면 두 점 C, D 사이의 거리는

$1-\left(-\frac{1}{4}\right)=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$

따라서 점 A가 나타내는 수는

$\left(-\frac{1}{4}\right)-2\times\frac{5}{4}=-\frac{1}{4}-\frac{5}{2}=-\frac{11}{4}$

⑤ 점 D가 나타내는 수가 $\frac{4}{5}$이면 두 점 C, D 사이의 거리는

$\frac{4}{5}-\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{4}{5}+\frac{1}{4}=\frac{16}{20}+\frac{5}{20}=\frac{21}{20}$

따라서 점 A가 나타내는 수는

$\left(-\frac{1}{4}\right)-2\times\frac{21}{20}=-\frac{1}{4}-\frac{21}{10}=-\frac{5}{20}-\frac{42}{20}=-\frac{47}{20}$

그러므로 두 점 A, D가 나타내는 수로 가능한 것은 ③이다.

35 답 $\frac{55}{36}$

1단계 선분 AB의 길이 구하기

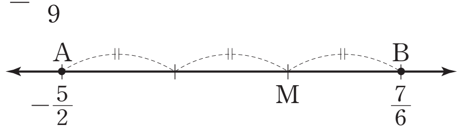
수직선에서 두 점 A, B가 나타내는 수는 각각 $-\frac{5}{2}$, $\frac{7}{6}$이므로 선분 AB의 길이는

$\frac{7}{6}-\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{7}{6}+\frac{15}{6}=\frac{22}{6}=\frac{11}{3}$

2단계 점 M이 나타내는 수 구하기

선분 AB를 3등분하는 점 사이의 간격은

$\frac{11}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{11}{9}$



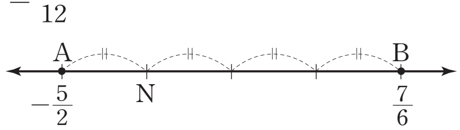
따라서 선분 AB를 2 : 1로 나누는 점 M이 나타내는 수는

$\frac{7}{6}-\frac{11}{9}=\frac{21}{18}-\frac{22}{18}=-\frac{1}{18}$

3단계 점 N이 나타내는 수 구하기

선분 AB를 4등분하는 점 사이의 간격은

$\frac{11}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{11}{12}$



따라서 선분 AB를 1 : 3으로 나누는 점 N이 나타내는 수는

$-\frac{5}{2}+\frac{11}{12}=-\frac{30}{12}+\frac{11}{12}=-\frac{19}{12}$

4단계 선분 MN의 길이 구하기

따라서 선분 MN의 길이는

$-\frac{1}{18}-\left(-\frac{19}{12}\right)=-\frac{2}{36}+\frac{57}{36}=\frac{55}{36}$

단계	채점 기준	비율
❶	선분 AB의 길이를 구했다.	20 %
❷	점 M이 나타내는 수를 구했다.	30 %
❸	점 N이 나타내는 수를 구했다.	30 %
❹	선분 MN의 길이를 구했다.	20 %

36 답 ①

해결 key Point!

수직선에서 서로 다른 세 유리수 x, y, z에 대하여
$|z-x|=|z-y|$이면 z는 두 수 x, y를 나타내는 두 점으로부터 같은 거리에 있는 점이 나타내는 수이다.

$|a-x|=|a-y|$이면 a와 x 사이의 차와 a와 y 사이의 차가 같다.

즉, $x\neq y$이면 수직선에서 a는 두 수 x, y를 나타내는 점으로부터 같은 거리에 있는 점이 나타내는 수이다.

두 수 $\frac{2}{5}$, $-\frac{4}{15}$를 나타내는 두 점 사이의 거리는

$\frac{2}{5}-\left(-\frac{4}{15}\right)=\frac{6}{15}+\frac{4}{15}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$

따라서 두 수를 나타내는 점은 같은 거리에 있는 점으로부터 $\frac{2}{3}\div2=\frac{1}{3}$만큼 떨어져 있으므로 두 수를 나타내는 점으로부터 같은 거리에 있는 점이 나타내는 수는

$\frac{2}{5}-\frac{1}{3}=\frac{6}{15}-\frac{5}{15}=\frac{1}{15}$

$\therefore\ \frac{2}{5}◎\left(-\frac{4}{15}\right)=\frac{1}{15}$

또, 두 수 $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{15}$을 나타내는 두 점 사이의 거리는

$\frac{1}{15}-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{30}+\frac{15}{30}=\frac{17}{30}$

따라서 두 수를 나타내는 점은 같은 거리에 있는 점으로부터 $\frac{17}{30}\div2=\frac{17}{60}$만큼 떨어져 있으므로 두 수를 나타내는 점으로부터 같은 거리에 있는 점이 나타내는 수는

$\frac{1}{15}-\frac{17}{60}=\frac{4}{60}-\frac{17}{60}=-\frac{13}{60}$

$\therefore\ \left(-\frac{1}{2}\right)◎\frac{1}{15}=-\frac{13}{60}$

$\therefore\ \left(-\frac{1}{2}\right)◎\left\{\frac{2}{5}◎\left(-\frac{4}{15}\right)\right\}=\left(-\frac{1}{2}\right)◎\frac{1}{15}=-\frac{13}{60}$

37 답 28

$[4,\ -2]=|4-(-2)|=6$

$[-8,\ a]=X$라고 하면 $[[-8,\ a],\ [4,\ -2]]=8$에서

$[X,\ 6]=8$이므로 $|X-6|=8$

$X-6=8$ 또는 $X-6=-8$

따라서 $X=14$ 또는 $X=-2$이므로

$[-8, a]=14$ 또는 $[-8, a]=-2$

(i) $[-8, a]=14$일 때

$|-8-a|=14$이므로

$-8-a=14$ 또는 $-8-a=-14$

$\therefore a=-22$ 또는 $a=6$

(ii) $[-8, a]=-2$일 때

$|-8-a|=-2$이고 절댓값은 음수가 될 수 없으므로 만족시키는 a의 값은 없다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 식을 만족시키는 유리수 a의 값 중 가장 큰 수는 6, 가장 작은 수는 -22이므로 $M=6$, $m=-22$

$\therefore [M, m]=[6, -22]$
$=|6-(-22)|=28$

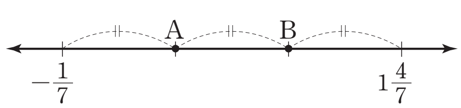
38 답 ③

개구리가 가야 하는 전체 거리는

$1\frac{4}{7}-\left(-\frac{1}{7}\right)=\frac{11}{7}+\frac{1}{7}=\frac{12}{7}$

이때 첫 번째에 착지한 점을 A, 두 번째에 착지한 점을 B라고 하면 두 수 $-\frac{1}{7}$과 $1\frac{4}{7}$를 나타내는 두 점 사이에 두 점 A, B가 같은 간격으로 놓여 있으므로 이웃하는 두 점 사이의 거리는

$\frac{12}{7}\div 3=\frac{12}{7}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{7}$



따라서 점 A가 나타내는 수는 $-\frac{1}{7}+\frac{4}{7}=\frac{3}{7}$, 점 B가 나타내는 수는 $\frac{3}{7}+\frac{4}{7}=1$이므로 구하는 합은

$\frac{3}{7}+1=\frac{10}{7}$

39 답 $420\,\text{cm}^2$

사다리꼴의 윗변의 길이는

$20-20\times\frac{10}{100}=20-2=18\,(\text{cm})$

아랫변의 길이는

$20+20\times\frac{20}{100}=20+4=24\,(\text{cm})$

또, 사다리꼴의 높이는 정사각형의 세로의 길이와 같은 20 cm이므로 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\times(18+24)\times 20=420\,(\text{cm}^2)$

40 답 19

해결 key Point!

가려지는 눈을 기준으로 생각한다.

1개의 면이 가려지는 주사위 3개를 A, B, C라 하고, 3개의 면이 가려지는 주사위 1개를 D라고 하자.

이때 가장 위에 있는 주사위를 A라고 하면 주사위 A의 윗면의 눈의 수가 4이므로 가려져 있는 눈의 수는 3이다.

가려진 눈의 수가 작을수록 S의 값이 커지므로 S의 값이 가장 클 때는 주사위 B, C에서는 1의 눈이 가려지고 주사위 D에서는 1, 2, 3의 눈이 가려질 때이다.

$\therefore a=(1+2+3+4+5+6)\times 4-(3+1\times 2+1+2+3)$
$=21\times 4-11$
$=84-11=73$

또, 가려진 눈의 수가 클수록 S의 값이 작아지므로 S의 값이 가장 작을 때는 주사위 B, C에서는 6의 눈이 가려지고 주사위 D에서는 4, 5, 6의 눈이 가려질 때이다.

$\therefore b=(1+2+3+4+5+6)\times 4-(3+6\times 2+4+5+6)$
$=21\times 4-30$
$=84-30=54$

$\therefore a-b=73-54=19$

41 답 $\frac{41}{45}$

전체의 $\frac{1}{9}$만큼 물이 차 있는 물탱크에서 파이프 A를 2시간 가동했을 때 물탱크에 있는 물의 양은

$\frac{1}{9}+2\times\frac{3}{10}=\frac{1}{9}+\frac{6}{10}=\frac{10}{90}+\frac{54}{90}$
$=\frac{64}{90}=\frac{32}{45}$

두 파이프 A, B를 동시에 2시간 가동했을 때 물탱크에 있는 물의 양은

$\frac{32}{45}+2\times\left(\frac{3}{10}-\frac{1}{5}\right)=\frac{32}{45}+2\times\left(\frac{3}{10}-\frac{2}{10}\right)$
$=\frac{32}{45}+2\times\frac{1}{10}$
$=\frac{32}{45}+\frac{1}{5}$
$=\frac{32}{45}+\frac{9}{45}=\frac{41}{45}$

따라서 물탱크에 있는 물의 양은 $\frac{41}{45}$이다.

42 답 7

해결 key Point!

가위바위보에서 내가 이기면 상대방은 지고, 내가 지면 상대방은 이긴다는 사실을 이용하여 상대방의 승패 횟수를 별도로 생각하지 않고 다른 로봇의 승패는 한 로봇의 승패를 반대로 적용한다.

가위바위보를 24번 했을 때, 비긴 횟수인 6을 제외한 18번 중 로봇 A가 이긴 횟수가 진 횟수의 2배이므로 로봇 A는 12번 이기고 6번 졌다.

따라서 로봇 B는 6번 이기고 12번 졌다.

가위바위보를 마친 후 두 로봇의 위치는

$$(\text{로봇 A의 위치})=12\times\frac{2}{3}+6\times\left(-\frac{1}{2}\right)+6\times\left(-\frac{1}{6}\right)$$
$$=8+(-3)+(-1)=4$$
$$(\text{로봇 B의 위치})=6\times\frac{2}{3}+12\times\left(-\frac{1}{2}\right)+6\times\left(-\frac{1}{6}\right)$$
$$=4+(-6)+(-1)=-3$$

따라서 최종적으로 두 로봇 A, B 사이의 거리는

$4-(-3)=7$

Lv. X 상위 1%에 도달하는 심화 문제

41쪽~43쪽

01 8	**02** 93	**03** 33	**04** 92610	**05** 168
06 $-\frac{8}{3}$	**07** 22	**08** 14	**09** 24	

01 답 8

해결 key Point!

두 수 A, B가 서로소이면 A와 B를 소인수분해했을 때, 두 수 A, B는 같은 소인수를 가질 수 없다.

1부터 10까지의 곱을 소인수분해하면

$1\times2\times3\times\cdots\times10=2^8\times3^4\times5^2\times7$

조건 (나)에서 A와 B는 서로소이므로 공약수가 1뿐이다.

즉, A와 B를 소인수분해했을 때, 공통인 소인수가 없다.

또, 조건 (가)에서 A는 홀수이므로 2를 소인수로 가질 수 없다.

따라서 2^8은 B의 약수이고, A는 3^4, 5^2, 7의 곱으로 이루어진다.

즉, A가 될 수 있는 값은 1, 3^4, 5^2, 7, $3^4\times5^2$, $3^4\times7$, $5^2\times7$, $3^4\times5^2\times7$이고 각각에 대하여 A, B의 값을 구하면 다음 표와 같다.

A	B
1	$2^8\times3^4\times5^2\times7$
7	$2^8\times3^4\times5^2$
5^2	$2^8\times3^4\times7$
3^4	$2^8\times5^2\times7$
$5^2\times7$	$2^8\times3^4$
$3^4\times7$	$2^8\times5^2$
$3^4\times5^2$	$2^8\times7$
$3^4\times5^2\times7$	2^8

따라서 조건을 만족시키는 A의 개수는 8이다.

꿀 한줄평

$1\times2\times3\times\cdots\times10$을 소인수분해하면 밑이 2, 3, 5, 7뿐이므로 서로소인 두 수 A, B는 밑 4개를 나누어 가지면 된다. 이때 A가 홀수이므로 A는 밑이 2인 소인수를 가지면 안 된다. 따라서 남은 세 수인 3, 5, 7을 갖는 경우를 모두 구한다.

이때 $A=1$인 경우를 빠뜨리지 않도록 주의한다.

02 답 93

해결 key Point!

미지수가 2개인 식을 풀어 미지수를 구할 때에는 값이 크게 변하는 미지수를 기준으로 구하는 것이 효율적이다.

$N=p\times q$ (p, q는 소수, $p<q$)이고, N의 가장 큰 소인수는 q이므로 N에 가장 큰 소인수 q를 곱한 값은

$N\times q=(p\times q)\times q=p\times q^2$

$\therefore\ 600\le p\times q^2\le800$

이때 $p\ge2$이므로 $2\times q^2\le800$에서 $q^2\le400$

$20^2=400$이므로 q는 20 이하의 소수이다.

(i) $q=19$일 때

$q^2=361$이므로 $600\le p\times361\le800$

이때 $361\times2=722$, $361\times3=1083$이므로

$p=2$

(ii) $q=17$일 때

$q^2=289$이므로 $600\le p\times289\le800$

이때 $289\times2=578$, $289\times3=867$이므로

가능한 p의 값은 없다.

(iii) $q=13$일 때

$q^2=169$이므로 $600\le p\times169\le800$

이때 $169\times3=507$, $169\times5=845$이므로

가능한 p의 값은 없다.

(iv) $q=11$일 때

$q^2=121$이므로 $600\le p\times121\le800$

이때 $121\times5=605$, $121\times7=847$이므로

$p=5$

(v) $q=7$일 때

$q^2=49$이므로 $600\le p\times49\le800$

이때 $p<q$이므로 가능한 p의 값은 없다.

(i)~(v)에 의하여 $p=2$, $q=19$ 또는 $p=5$, $q=11$이므로 가능한 $N=p\times q$의 값은 $2\times19=38$, $5\times11=55$이다.

따라서 가능한 모든 자연수 N의 값의 합은

$38+55=93$

03 답 33

(i) $n=p^a$의 꼴일 때

$S(n)=a\times p$

$a\times p=14$를 만족시키는 a, p의 값은 $a=2$, $p=7$ 또는 $a=7$, $p=2$이므로 n의 값은

$7^2=49$, $2^7=128$

(ii) $n=p_1^{a_1}\times p_2^{a_2}$ $(p_1<p_2)$의 꼴일 때

$S(n)=a_1\times p_1+a_2\times p_2$

ⓐ $p_1=2$이면 $a_1\times2+a_2\times p_2=14$이고 p_2는 홀수이므로 a_2는 짝수이어야 한다.

따라서 이 조건을 만족시키는 n의 값은

$2^1\times3^4=81$, $2^2\times5^2=100$, $2^4\times3^2=144$

ⓑ $p_1=3$이면 $a_1\times3+a_2\times p_2=14$이고 p_2는 홀수이므로 a_1이 짝수이면 a_2도 짝수이어야 하고, a_1이 홀수이면 a_2도 홀수이어야 한다.

따라서 이 조건을 만족시키는 n의 값은

$3^1\times11^1=33$, $3^3\times5^1=135$

ⓒ $p_1=5$이면 $a_1\times5+a_2\times p_2=14$

이때 이를 만족시키는 $a_2\times p_2$의 값은 9, 4이지만, 9, 4가 되게 하는 p_2의 값은 없다.

마찬가지로 $p_1\geq7$일 때 조건을 만족시키는 p_2의 값은 없다.

(iii) $n=p_1^{a_1}\times p_2^{a_2}\times p_3^{a_3}$ $(p_1<p_2<p_3)$의 꼴일 때

$S(n)=a_1\times p_1+a_2\times p_2+a_3\times p_3$

ⓐ $p_1\neq2$이면 $p_1+p_2+p_3>14$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

ⓑ $p_1=2$이면 $a_1\times2+a_2\times p_2+a_3\times p_3=14$이므로 $a_2\times p_2+a_3\times p_3<12$이고, 가능한 p_2, p_3을 (p_2, p_3)으로 나타내면 $(3, 5)$, $(3, 7)$, $(5, 7)$이다.

이 중 조건을 만족시키는 n의 값은

$2^1\times5^1\times7^1=70$, $2^2\times3^1\times7^1=84$, $2^3\times3^1\times5^1=120$

(iv) $n=p_1^{a_1}\times p_2^{a_2}\times p_3^{a_3}\times p_4^{a_4}$ $(p_1<p_2<p_3<p_4)$의 꼴일 때

$S(n)=a_1\times p_1+a_2\times p_2+a_3\times p_3+a_4\times p_4$

$a_1\times p_1+a_2\times p_2+a_3\times p_3+a_4\times p_4>14$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i)~(iv)에 의하여 조건을 만족시키는 자연수 n의 값은 33, 49, 70, 81, 84, 100, 120, 128, 135, 144이므로 가장 작은 수는 33이다.

꿀 한줄평

$S(n)$은 (지수)×(소수인 밑)의 합이다.
소수 중 짝수는 2뿐이고, 14는 짝수이므로 소인수에 2가 있을 때와 없을 때로 나누어
(짝수)+(짝수)$=14$ 또는 (홀수)+(홀수)$=14$
인 수의 조합을 찾아보며 답을 구한다.

04 답 92610

해결 key Point!

n과 180의 최대공약수가 90이므로 이 조건을 이용하여 n을 소인수분해했을 때 2의 지수를 알 수 있다.

$180=2^2\times3^2\times5$, $90=2\times3^2\times5$이므로 조건 (가)에서 n과 180의 최대공약수가 90이 되려면 n은 $90=2\times3^2\times5$를 약수로 가져야 한다.

이때 n이 $2^2=4$의 배수이면 최대공약수가 $2^2\times3^2\times5=180$이 되므로 n을 소인수분해했을 때 소인수 2의 지수는 1이다.

즉, $n=90\times k$ (k는 홀수)라고 하면

$\frac{n}{210}=\frac{90\times k}{210}=\frac{3k}{7}$

이 수가 제곱수이려면 k는 $k=7\times3\times m^2$ (m은 홀수)이어야 하므로

$\frac{n}{210}=\frac{3\times7\times3\times m^2}{7}=3^2\times m^2$

$\therefore n=1890\times m^2$

이때 m은 홀수이므로 n의 값은

$1890\times1^2=1890$, $1890\times3^2=17010$, $1890\times5^2=47250$, $1890\times7^2=92610$, $1890\times11^2=228690$, …

따라서 다섯 자리 자연수 n의 값 중 가장 큰 수는 92610이다.

05 답 168

해결 key Point!

최대공약수와 최소공배수의 성질을 이용해 A, B, C가 가질 수 있는 소인수의 지수를 찾는다.

조건 (가)에서 A와 B의 최대공약수가 60이므로

$A=a\times60$, $B=b\times60$ (a, b는 서로소, $a>b$)이라고 하면

$A\times B=a\times60\times b\times60=a\times b\times3600$

또, A와 B의 곱이 10800이므로

$a\times b\times3600=10800$에서 $a\times b=3$

곱해서 3이 되는 자연수는 1과 3뿐이고 $a>b$이므로

$a=3$, $b=1$

$\therefore A=3\times60=180$, $B=1\times60=60$

조건 (나)에서 B와 C의 최소공배수는 $240=2^4\times3\times5$이므로 C는 소인수를 2, 3, 5만 가질 수 있다.

$C=2^x\times3^y\times5^z$ (x, y, z는 0 이상의 정수)이라고 하면

$B=60=2^2\times3\times5$이므로 $x=4$

조건 (다)에서 세 수 A, B, C의 최대공약수는 12이고, A와 B의 최대공약수가 60이므로 $60=2^2\times3\times5$와 C의 최대공약수가 $12=2^2\times3$이어야 한다.

$\therefore y=1$, $z=0$

$\therefore C=2^4\times3=48$

$\therefore A-B+C=180-60+48=168$

06 답 $-\frac{8}{3}$

해결 key Point!

a, b의 대소 관계에 따라 나온 $a*b=\frac{a+b}{2}-\frac{|a-b|}{2}$의 결과값을 이용하여 $a*b$의 의미를 파악한다.

$a\geq b$이면 $|a-b|=a-b$이므로 $a*b=\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}=b$

$a<b$이면 $|a-b|=-(a-b)=b-a$이므로

$a*b=\dfrac{a+b}{2}-\dfrac{b-a}{2}=a$

따라서 $a*b$는 a, b 중 작은 값이다.

$x*y*z=(x*y)*z$이고 $(x*y)*z$의 값은 x와 y 중 작은 값과 z 중 작은 값이므로 $x*y*z$의 값은 x, y, z 중 가장 작은 값이다.

이때 $-\dfrac{3}{4}<-\dfrac{2}{3}<\dfrac{5}{6}$이므로

$\left(-\dfrac{3}{4}\right)*\left(-\dfrac{2}{3}\right)*\left(\dfrac{5}{6}\right)=-\dfrac{3}{4}$

$$\begin{aligned}\therefore\ F(x)&=\left(\dfrac{x}{2}\right)*\left(-\dfrac{3}{4}\right)*\left(-\dfrac{2}{3}\right)*\left(\dfrac{5}{6}\right)*\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\\&=\left(\dfrac{x}{2}\right)*\left(-\dfrac{3}{4}\right)*\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

따라서 $F(x)$는 $\dfrac{x}{2}$, $-\dfrac{3}{4}$, $x-\dfrac{1}{2}$의 값 중 가장 작은 값이고

$F(x)=-\dfrac{4}{3}$이므로 $F(x)=\dfrac{x}{2}$ 또는 $F(x)=x-\dfrac{1}{2}$

(i) $F(x)=\dfrac{x}{2}$일 때

$\dfrac{x}{2}=-\dfrac{4}{3}$이므로 $x=-\dfrac{4}{3}\times 2=-\dfrac{8}{3}$

(ii) $F(x)=x-\dfrac{1}{2}$일 때

$x-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{4}{3}$이므로 $x=-\dfrac{4}{3}+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{5}{6}$

(i), (ii)에 의하여 가장 작은 x의 값은 $-\dfrac{8}{3}$이다.

07 답 22

조건 (다)에서 $\dfrac{a}{b}$는 정수가 아니므로 $a\neq 0$이고 b의 값은 -1, 0, 1이 아니다.

조건 (가)에서 $|a|\leq 5$, $|b|\leq 5$이고 $a\neq b$이므로 가능한 b의 값은 -5, -4, -3, -2, 2, 3, 4, 5이다.

또, 조건 (나)에서 $\dfrac{a}{b}$를 수직선에 점으로 나타내면 -1과 2 사이에 있으므로

$-1<\dfrac{a}{b}<2$

(i) $b=2$일 때

$-1<\dfrac{a}{2}<2$에서 $-2<a<4$

이때 $\dfrac{a}{2}$는 정수가 아니므로 가능한 a의 값은 -1, 1, 3의 3개이다.

(ii) $b=3$일 때

$-1<\dfrac{a}{3}<2$에서 $-3<a<6$

이때 $\dfrac{a}{3}$는 정수가 아니므로 가능한 a의 값은 -2, -1, 1, 2, 4, 5의 6개이다.

(iii) $b=4$일 때

$-1<\dfrac{a}{4}<2$에서 $-4<a<8$

이때 $\dfrac{a}{4}$는 정수가 아니고 $|a|\leq 5$이므로 가능한 a의 값은 -3, -2, -1, 1, 2, 3, 5의 7개이다.

이때 $a=-2$, $a=2$이면 각각 $\dfrac{a}{b}=-\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{2}$이므로 $a=-1$, $b=2$, $a=1$, $b=2$일 때 구한 $\dfrac{a}{b}$의 값과 같다.

따라서 정수 a의 개수는 $7-2=5$

(iv) $b=5$일 때

$-1<\dfrac{a}{5}<2$에서 $-5<a<10$

이때 $\dfrac{a}{5}$는 정수가 아니고 $|a|\leq 5$이므로 가능한 a의 값은 -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4의 8개이다.

한편, $b<0$일 때 가능한 $\dfrac{a}{b}$의 값은 모두 $b>0$일 때와 같다.

따라서 서로 다른 $\dfrac{a}{b}$의 개수는 (i)~(iv)에 의하여

$3+6+5+8=22$

꿀 한줄평

조건에서 $\dfrac{a}{b}$는 정수가 아니라고 했으므로 -1과 2 사이의 정수 0, 1과 $a=b$인 경우를 반드시 제외해야 하고, 기약분수로 나타내었을 때 같아지는 수가 있으므로 중복해서 세지 않도록 유의한다.

다른 풀이

조건 (다)에 의하여 $\dfrac{a}{b}$는 0도 아니고 1도 아니므로 조건 (나)에서 $\dfrac{a}{b}$는 다음 세 구간에 있다.

(i) $-1<\dfrac{a}{b}<0$인 경우

분모가 2일 때, $-\dfrac{1}{2}$의 1개

분모가 3일 때, $-\dfrac{1}{3}$, $-\dfrac{2}{3}$의 2개

분모가 4일 때, $-\dfrac{1}{4}$, $-\dfrac{3}{4}$의 2개

분모가 5일 때, $-\dfrac{1}{5}$, $-\dfrac{2}{5}$, $-\dfrac{3}{5}$, $-\dfrac{4}{5}$의 4개

따라서 가능한 $\dfrac{a}{b}$의 개수는 9이다.

(ii) $0<\dfrac{a}{b}<1$인 경우

분모가 2일 때, $\dfrac{1}{2}$의 1개

분모가 3일 때, $\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{2}{3}$의 2개

분모가 4일 때, $\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{3}{4}$의 2개

분모가 5일 때, $\dfrac{1}{5}$, $\dfrac{2}{5}$, $\dfrac{3}{5}$, $\dfrac{4}{5}$의 4개

따라서 가능한 $\dfrac{a}{b}$의 개수는 9이다.

(iii) $1<\frac{a}{b}<2$인 경우

분모가 2일 때, $\frac{3}{2}$의 1개

분모가 3일 때, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$의 2개

분모가 4일 때, $\frac{5}{4}$의 1개

분모가 5일 때는 존재하지 않는다.

따라서 가능한 $\frac{a}{b}$의 개수는 4이다.

(i)~(iii)에 의하여 구하는 $\frac{a}{b}$의 개수는

$9+9+4=22$

08 답 14

해결 key Point!

곱이 120이고 합이 18 이하인 세 수 $|A|$, $|B|$, $|C|$를 찾고, $A>B>C$임을 이용하여 각 경우의 A, B, C의 값을 구한다.

세 수의 곱이 -120이므로 세 수 중 음수는 1개 또는 3개이다.
또, 1이 아닌 세 수의 곱이 120이 되는 경우는

$120=20\times3\times2=15\times4\times2=10\times6\times2$
$=10\times4\times3=8\times5\times3=6\times5\times4$

이고, 세 수의 곱이 120이 되는 각각의 경우에 음수가 1개 또는 3개가 되는 경우는 각각 4개가 있다.
이때 세 수가 20, 3, 2 또는 15, 4, 2이면
$|A|+|B|+|C|=20+3+2>18$,
$|A|+|B|+|C|=15+4+2>18$
이므로 조건 (다)를 만족시키지 않는다.

(i) 세 수가 10, 6, 2인 경우
ⓐ $A=10$, $B=6$, $C=-2$일 때
$A-B-C=10-6-(-2)=6$
ⓑ $A=10$, $B=2$, $C=-6$일 때
$A-B-C=10-2-(-6)=14$
ⓒ $A=6$, $B=2$, $C=-10$일 때
$A-B-C=6-2-(-10)=14$
ⓓ $A=-2$, $B=-6$, $C=-10$일 때
$A-B-C=-2-(-6)-(-10)=14$

(ii) 세 수가 10, 4, 3인 경우
ⓐ $A=10$, $B=4$, $C=-3$일 때
$A-B-C=10-4-(-3)=9$
ⓑ $A=10$, $B=3$, $C=-4$일 때
$A-B-C=10-3-(-4)=11$
ⓒ $A=4$, $B=3$, $C=-10$일 때
$A-B-C=4-3-(-10)=11$
ⓓ $A=-3$, $B=-4$, $C=-10$일 때
$A-B-C=-3-(-4)-(-10)=11$

(iii) 세 수가 8, 5, 3인 경우
ⓐ $A=8$, $B=5$, $C=-3$일 때
$A-B-C=8-5-(-3)=6$
ⓑ $A=8$, $B=3$, $C=-5$일 때
$A-B-C=8-3-(-5)=10$
ⓒ $A=5$, $B=3$, $C=-8$일 때
$A-B-C=5-3-(-8)=10$
ⓓ $A=-3$, $B=-5$, $C=-8$일 때
$A-B-C=-3-(-5)-(-8)=10$

(iv) 세 수가 6, 5, 4인 경우
ⓐ $A=6$, $B=5$, $C=-4$일 때
$A-B-C=6-5-(-4)=5$
ⓑ $A=6$, $B=4$, $C=-5$일 때
$A-B-C=6-4-(-5)=7$
ⓒ $A=5$, $B=4$, $C=-6$일 때
$A-B-C=5-4-(-6)=7$
ⓓ $A=-4$, $B=-5$, $C=-6$일 때
$A-B-C=-4-(-5)-(-6)=7$

(i)~(iv)에 의하여 가장 큰 $A-B-C$의 값은 14이다.

09 답 24

(i) 점 P가 양의 방향과 음의 방향으로 이동한 수의 합이 각각 정수일 때

$\frac{3}{4}$만큼 여러번 움직인 점의 위치가 나타내는 수가 정수가 되려면 움직인 횟수가 4의 배수이어야 하고, $\frac{1}{2}$만큼 여러 번 움직인 점의 위치가 나타내는 수가 정수가 되려면 움직인 횟수가 2의 배수이어야 한다.

따라서 앞면 또는 뒷면만 나온 수를 이동했을 때, 그 수가 정수이려면 앞면이 나온 횟수가 4의 배수이어야 한다.

즉, 동전을 12번 던졌을 때 앞면이 0, 4, 8, 12번 나오면 뒷면이 나온 횟수는 각각 12, 8, 4, 0이고, 이 경우는 모두 정수의 값이 나오므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(ii) 점 P가 양의 방향과 음의 방향으로 이동한 수의 합이 각각 정수가 아닐 때

앞면이 나온 수와 뒷면이 나온 수만큼 움직였을 때의 위치가 나타내는 수가 정수가 되는 경우는 앞면이 2번 나오고 뒷면이 한 번 나오는 경우이다.

즉, 동전을 12번 던졌을 때 이 경우가 포함되는 경우는 앞면이 8번, 뒷면이 4번 나오는 경우뿐이고, 이 경우는 (i)에서 구한 경우와 같다.

(i), (ii)에 의하여 구하는 합은

$0+4+8+12=24$

Lv. Master 실력을 완성하는 대단원 평가

44쪽~48쪽

01 ⑤	**02** ④, ⑤	**03** ②	**04** ⑤	**05** ①
06 ③	**07** ④	**08** ④	**09** ⑤	**10** ③
11 ⑤	**12** ①	**13** ①	**14** ①	**15** ③
16 6	**17** -24	**18** $-\frac{5}{2}$	**19** 4	**20** $\frac{13}{2}$
21 a, b, c	**22** 37개	**23** 3		

01 답 ⑤

두 수 $300=2^2\times3\times5^2$, $2^3\times7^2\times a$의 최대공약수가 $20=2^2\times5$이므로 $a=5\times k$ (k는 3, 5와 서로소)의 꼴이어야 한다.

이때 a의 값 중 가장 작은 수는 5이므로 주어진 수는 $2^3\times5\times7^2$이다.

따라서 $2^2\times3\times5^2$, $2^3\times5\times7^2$의 최소공배수는

$2^3\times3\times5^2\times7^2$

02 답 ④, ⑤

① 양수는 10, $\frac{24}{6}$의 2개이다.

② 정수는 10, $\frac{24}{6}=4$, 0, -9의 4개이다.

③ 유리수는 10, -1.5, $\frac{24}{6}$, 0, -9, $-\frac{1}{3}$의 6개이다.

④ 음의 정수는 -9의 1개이다.

⑤ 정수가 아닌 유리수는 -1.5, $-\frac{1}{3}$의 2개이다.

따라서 옳은 것은 ④, ⑤이다.

03 답 ②

수직선에 나타낼 때, 원점으로부터 가장 멀리 떨어져 있는 수는 절댓값이 가장 큰 수이다.

각 수의 절댓값을 구해 보면 다음과 같다.

① $|+4|=4$ ② $|-7|=7$ ③ $|0|=0$

④ $\left|+\frac{1}{5}\right|=\frac{1}{5}$ ⑤ $\left|-\frac{1}{9}\right|=\frac{1}{9}$

즉, $|0|<\left|-\frac{1}{9}\right|<\left|+\frac{1}{5}\right|<|+4|<|-7|$이므로

절댓값이 가장 큰 수는 -7이므로 원점으로부터 가장 멀리 떨어져 있는 것은 ②이다.

04 답 ⑤

① $a<0$, $b<0$이면 $a<b$이다.

② $b=0$일 때, $|a|>0$이지만 a가 양수인지는 알 수 없다.

③ $a>0$, $b>0$이면 a는 b보다 큰 수이다.

④ $a<0$, $b<0$이면 수직선에서 a는 b보다 왼쪽에 위치한다.

05 답 ①

$A=\left(+\frac{7}{3}\right)\times\left(-\frac{15}{14}\right)=-\frac{5}{2}$

$B=\left(-\frac{8}{27}\right)\div\left(-\frac{16}{9}\right)=\left(-\frac{8}{27}\right)\times\left(-\frac{9}{16}\right)=+\frac{1}{6}$

$\therefore A+B=\left(-\frac{5}{2}\right)+\left(+\frac{1}{6}\right)=\left(-\frac{15}{6}\right)+\left(+\frac{1}{6}\right)$

$=-\frac{14}{6}=-\frac{7}{3}$

06 답 ③

A는 -8의 역수이므로 $A=-\frac{1}{8}$

B는 $\frac{5}{4}$의 역수이므로 $B=\frac{4}{5}$

$C=\left(-\frac{1}{2}\right)^2\div\frac{1}{8}\times(-3)=\frac{1}{4}\times8\times(-3)=-6$

$\therefore A\times B-C=\left(-\frac{1}{8}\right)\times\frac{4}{5}-(-6)=-\frac{1}{10}+6=\frac{59}{10}$

07 답 ④

세 분수 $\frac{48}{n}$, $\frac{96}{n}$, $\frac{144}{n}$가 모두 자연수가 되려면 분모 n이 48, 96, 144의 공약수이어야 한다.

이때 $48=2^4\times3$, $96=2^5\times3$, $144=2^4\times3^2$이므로 48, 96, 144의 최대공약수는

$2^4\times3=48$

따라서 48의 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48이므로 자연수 n의 값이 아닌 것은 ④이다.

08 답 ④

$|-6|=6$, $\left|-\frac{20}{7}\right|=\frac{20}{7}$, $|+3.14|=3.14$,

$\left|+\frac{21}{5}\right|=\frac{21}{5}$, $|-1.23|=1.23$, $|+2|=2$

따라서 각각의 절댓값과 $\frac{29}{9}$의 대소를 비교하면

$6>\frac{29}{9}$, $\frac{20}{7}<\frac{29}{9}$, $3.14<\frac{29}{9}$, $\frac{21}{5}>\frac{29}{9}$, $1.23<\frac{29}{9}$,

$2<\frac{29}{9}$이므로 절댓값이 $\frac{29}{9}$보다 작은 수는

$-\frac{20}{7}$, $+3.14$, -1.23, $+2$의 4개이다.

09 답 ⑤

해결 key Point!

a가 0이 아닌 유리수이면 $\frac{a}{|a|}$의 값은 1 또는 -1이다.

x, y는 0이 아닌 유리수이므로 $\frac{x}{|x|}$, $\frac{|y|}{y}$, $\frac{xy}{|xy|}$의 값은 x, y의 부호에 따라 1 또는 -1이 된다.

(i) $x>0$, $y>0$일 때

$$x◎y=\frac{x}{|x|}+\frac{|y|}{y}-\frac{xy}{|xy|}$$
$$=\frac{x}{x}+\frac{y}{y}-\frac{xy}{xy}$$
$$=1+1-1=1$$

(ii) $x>0$, $y<0$일 때

$$x◎y=\frac{x}{|x|}+\frac{|y|}{y}-\frac{xy}{|xy|}$$
$$=\frac{x}{x}+\frac{-y}{y}-\frac{xy}{-xy}$$
$$=1+(-1)-(-1)=1$$

(iii) $x<0$, $y>0$일 때

$$x◎y=\frac{x}{|x|}+\frac{|y|}{y}-\frac{xy}{|xy|}$$
$$=\frac{x}{-x}+\frac{y}{y}-\frac{xy}{-xy}$$
$$=(-1)+1-(-1)=1$$

(iv) $x<0$, $y<0$일 때

$$x◎y=\frac{x}{|x|}+\frac{|y|}{y}-\frac{xy}{|xy|}$$
$$=\frac{x}{-x}+\frac{-y}{y}-\frac{xy}{xy}$$
$$=(-1)+(-1)-1=-3$$

(i)~(iv)에 의하여 $x◎y$의 값은 x, y가 모두 음수일 때 -3이고 나머지 경우일 때는 모두 1이다.

따라서 $(a◎b)+(b◎c)+(c◎a)$의 값은

(i) a, b, c가 모두 양수일 때
$1+1+1=3$

(ii) a, b, c에서 양수가 2개, 음수가 1개일 때
$1+1+1=3$

(iii) a, b, c에서 양수가 1개, 음수가 2개일 때
$1+(-3)+1=-1$

(iv) a, b, c가 모두 음수일 때
$(-3)+(-3)+(-3)=-9$

(i)~(iv)에 의하여 $(a◎b)+(b◎c)+(c◎a)$가 가질 수 있는 가장 큰 값은 3이므로 가능한 경우를 (a, b, c)로 나타내면 (양수, 양수, 양수), (양수, 양수, 음수), (양수, 음수, 양수), (음수, 양수, 양수)이다.

10 답 ③

$\langle a\rangle=3$이므로 $3\le a<4$

$(b)=b-\langle b\rangle$이므로 $0.4=b-(-2)$, $0.4=b+2$

$\therefore b=-1.6$

이때 $3+(-1.6)=1.4$, $4+(-1.6)=2.4$이므로

$1.4\le a+b<2.4$

따라서 $a+b$의 값이 될 수 있는 것은 ③이다.

11 답 ⑤

$$a=-\frac{2}{3}+\frac{5}{12}=-\frac{8}{12}+\frac{5}{12}=-\frac{3}{12}=-\frac{1}{4}$$
$$b=a-\left(-\frac{3}{10}\right)=-\frac{1}{4}+\frac{3}{10}=-\frac{5}{20}+\frac{6}{20}=\frac{1}{20}$$
$$c=a\div b=\left(-\frac{1}{4}\right)\div\frac{1}{20}=\left(-\frac{1}{4}\right)\times 20=-5$$

$c=-\frac{7}{2}-d$이므로 $-5=-\frac{7}{2}-d$

$$\therefore d=-\frac{7}{2}+5=-\frac{7}{2}+\frac{10}{2}=\frac{3}{2}$$

12 답 ①

주사위를 5번 던졌을 때 말이 위치하는 점이 나타내는 수는

(i) 짝수의 눈이 5번 나올 때
$5\times(+4)=20$

(ii) 짝수의 눈이 4번, 홀수의 눈이 1번 나올 때
$4\times(+4)+1\times(-3)=16-3=13$

(iii) 짝수의 눈이 3번, 홀수의 눈이 2번 나올 때
$3\times(+4)+2\times(-3)=12-6=6$

(iv) 짝수의 눈이 2번, 홀수의 눈이 3번 나올 때
$2\times(+4)+3\times(-3)=8-9=-1$

(v) 짝수의 눈이 1번, 홀수의 눈이 4번 나올 때
$1\times(+4)+4\times(-3)=4-12=-8$

(vi) 홀수의 눈이 5번 나올 때
$5\times(-3)=-15$

(i)~(vi)에 의하여 주사위를 5번 던졌을 때 말이 위치하는 점이 나타내는 수가 아닌 것은 ①이다.

13 답 ①

해결 key Point!

기계가 다시 작동하는 주기는 (작동 시간)+(멈춘 시간)이다.

세 기계 A, B, C가 처음 가동하고 멈춘 후 다시 가동하는 데 걸리는 시간은 각각 45초, 60초, $(x+15)$초이다.

세 기계가 오전 9시 정각에 가동을 시작한 후 처음으로 다시 동시에 가동을 시작할 때까지 걸리는 시간은 45, 60, $x+15$의 최소공배수이고, 세 기계는 $15\times 60=900$(초) 뒤에 처음으로 다시 동시에 가동을 시작했으므로 45, 60, $x+15$의 최소공배수는 900이다.

이때 $45=3^2\times 5$, $60=2^2\times 3\times 5$, $900=2^2\times 3^2\times 5^2$이므로

$x+15$는 5^2의 배수이고 $2^2\times 3^2\times 5^2$의 약수이어야 한다.

따라서 $x+15=5^2=25$일 때 x의 값이 가장 작고 그때의 x의 값은 $x=10$이다.

14 답 ①

보이는 세 면에 적힌 수 2, $\frac{5}{6}$, $-\frac{1}{3}$의 마주 보는 면에 적힌

수를 각각 a, b, c라고 하면

$2+a=1$, $\frac{5}{6}+b=1$, $-\frac{1}{3}+c=1$이므로

$a=-1$, $b=\frac{1}{6}$, $c=\frac{4}{3}$

이때 $a\times b=-1\times\frac{1}{6}=-\frac{1}{6}$, $a\times c=-1\times\frac{4}{3}=-\frac{4}{3}$,

$b\times c=\frac{1}{6}\times\frac{4}{3}=\frac{2}{9}$이고

$-\frac{4}{3}<-\frac{1}{6}<\frac{2}{9}$이므로 가장 작은 수는 $-\frac{4}{3}$이다.

15 답 ③

해결 key Point!

$\langle x\rangle$의 값이 0 또는 1이므로 $\left\langle\frac{n}{6}\right\rangle+\left\langle\frac{24}{n}\right\rangle=1$을 만족시키는 모든 경우를 찾아본다.

$\left\langle\frac{n}{6}\right\rangle$, $\left\langle\frac{24}{n}\right\rangle$의 값은 0 또는 1이므로

$\left\langle\frac{n}{6}\right\rangle+\left\langle\frac{24}{n}\right\rangle=1$에서

$\left\langle\frac{n}{6}\right\rangle=0$, $\left\langle\frac{24}{n}\right\rangle=1$ 또는 $\left\langle\frac{n}{6}\right\rangle=1$, $\left\langle\frac{24}{n}\right\rangle=0$

(i) $\left\langle\frac{n}{6}\right\rangle=0$, $\left\langle\frac{24}{n}\right\rangle=1$일 때

$\frac{n}{6}$이 정수가 되도록 하는 자연수 n은 1 이상 50 이하의 6의 배수이므로

$n=6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48$

이때 $\frac{24}{n}$가 정수가 아닌 유리수가 되려면 자연수 n은 24의 약수가 아니어야 하므로

$n=18, 30, 36, 42, 48$

(ii) $\left\langle\frac{n}{6}\right\rangle=1$, $\left\langle\frac{24}{n}\right\rangle=0$일 때

$\frac{24}{n}$가 정수가 되도록 하는 자연수 n은 24의 약수이므로

$n=1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$

이때 $\frac{n}{6}$이 정수가 아닌 유리수가 되려면 자연수 n은 6의 배수가 아니어야 하므로

$n=1, 2, 3, 4, 8$

(i), (ii)에 의하여 주어진 식을 만족시키는 모든 자연수 n은 1, 2, 3, 4, 8, 18, 30, 36, 42, 48이므로 구하는 합은

$1+2+3+4+8+18+30+36+42+48=192$

16 답 6

해결 key Point!

$1\times2\times3\times\cdots\times15$가 3^k으로 나누어떨어지므로
$1\times2\times3\times\cdots\times15$를 소인수분해하여 3의 지수를 확인한다.

$A=1\times2\times3\times\cdots\times15$라고 하면 A가 3^k으로 나누어떨어지므로 3^k은 A의 약수이다.

1부터 15까지의 자연수 중 3을 소인수로 갖는 자연수는

3, $6=2\times3$, $9=3^2$, $12=2^2\times3$, $15=3\times5$

이므로 A를 소인수분해한 결과에서 밑이 3인 소인수의 지수는 6이다.

따라서 가장 큰 자연수 k의 값은 6이다.

17 답 -24

조건 (나)에서 $a\times b\times c>0$이므로 세 정수 a, b, c는 모두 양수이거나 두 정수가 음수이고 한 정수는 양수이다.

이때 조건 (다)에서 세 수의 합이 음수이므로 세 정수 a, b, c 중 두 정수는 음수이고 한 정수는 양수이다.

조건 (가)에서 $a<b<c$이므로

$a<0$, $b<0$, $c>0$

조건 (라)에서 $|a|<|c|$이므로

$-a<c \quad \therefore a+c>0$

$\therefore |a|+|b|+|c|-|a+b|+|a+c|-|c-b|$

$=-a+(-b)+c-\{-(a+b)\}+(a+c)-(c-b)$

$=-a-b+c+a+b+a+c-c+b$

$=a+b+c=-24$

18 답 $-\frac{5}{2}$

어떤 수를 A라고 하면

$A\times\left(-\frac{8}{3}\right)=-\frac{4}{9}$

$\therefore A=\left(-\frac{4}{9}\right)\times\left(-\frac{3}{8}\right)=\frac{1}{6}$

따라서 바르게 계산한 값은

$\frac{1}{6}+\left(-\frac{8}{3}\right)=\frac{1}{6}+\left(-\frac{16}{6}\right)=-\frac{15}{6}=-\frac{5}{2}$

19 답 4

$A=2^2\times6^2\times5=2^4\times3^2\times5$이므로 A의 약수의 개수는

$(4+1)\times(2+1)\times(1+1)=30$

$B=2\times3^n\times10=2^2\times3^n\times5$이므로 B의 약수의 개수는

$(2+1)\times(n+1)\times(1+1)=6\times(n+1)$

A, B의 약수의 개수가 서로 같으므로

$30=6\times(n+1)$, $n+1=5$

$\therefore n=4$

20 답 $\frac{13}{2}$

두 점 B, F의 같은 거리에 있는 점은 D이므로 점 D가 나타내는 수는 1이다.

따라서 두 점 A, D 사이의 거리는

$1-\left(-\frac{5}{2}\right)=1+\frac{5}{2}=\frac{7}{2}$

두 점 A, D 사이에 두 점 B, C가 같은 간격으로 놓여 있으므로 이웃하는 두 점 사이의 거리는

$\frac{7}{2}\div 3=\frac{7}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{7}{6}$

점 B가 나타내는 수는

$-\frac{5}{2}+\frac{7}{6}=-\frac{15}{6}+\frac{7}{6}=-\frac{8}{6}=-\frac{4}{3}$

점 C가 나타내는 수는 $-\frac{4}{3}+\frac{7}{6}=-\frac{8}{6}+\frac{7}{6}=-\frac{1}{6}$

점 E가 나타내는 수는 $1+\frac{7}{6}=\frac{13}{6}$

점 F가 나타내는 수는 $\frac{13}{6}+\frac{7}{6}=\frac{20}{6}=\frac{10}{3}$

점 G가 나타내는 수는 $\frac{10}{3}+\frac{7}{6}=\frac{20}{6}+\frac{7}{6}=\frac{27}{6}=\frac{9}{2}$

따라서 세 점 C, E, G가 나타내는 수의 합은

$$\left(-\frac{1}{6}\right)+\frac{13}{6}+\frac{9}{2}=-\frac{1}{6}+\frac{13}{6}+\frac{27}{6}$$
$$=\frac{39}{6}=\frac{13}{2}$$

21 답 $a,\ b,\ c$

$a,\ b,\ c$가 서로 다른 정수이므로

$|a-b|>0,\ |b-c|>0$

따라서 $|a-b|+|b-c|>0$이므로

$c-a>0 \qquad \therefore c>a$

(ⅰ) $a<b<c$일 때

$a-b<0,\ b-c<0$이므로

$$|a-b|+|b-c|=-(a-b)+\{-(b-c)\}$$
$$=-a+b-b+c$$
$$=c-a$$

(ⅱ) $b<a<c$일 때

$a-b>0,\ b-c<0$이므로

$$|a-b|+|b-c|=(a-b)+\{-(b-c)\}$$
$$=a-b-b+c$$
$$=a-2b+c$$

(ⅲ) $a<c<b$일 때

$a-b<0,\ b-c>0$이므로

$$|a-b|+|b-c|=-(a-b)+(b-c)$$
$$=-a+b+b-c$$
$$=-a+2b-c$$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $a<b<c$이므로 세 수 $a,\ b,\ c$를 작은 수부터 차례대로 나열하면 $a,\ b,\ c$이다.

22 답 37개

1단계 A의 값 구하기

$$A=\frac{5}{2}\times\{(-2)^3+(-1)^4\times(-6)\}-3$$
$$=\frac{5}{2}\times\{(-8)+1\times(-6)\}-3$$
$$=\frac{5}{2}\times\{(-8)+(-6)\}-3$$
$$=\frac{5}{2}\times(-14)-3$$
$$=-35-3$$
$$=-38$$

2단계 A보다 큰 음의 정수의 개수 구하기

따라서 A보다 큰 음의 정수는 $-37,\ -36,\ -35,\ \cdots,\ -1$의 37개이다.

단계	채점 기준	배점
❶	A의 값을 구했다.	4점
❷	A보다 큰 음의 정수의 개수를 구했다.	3점

23 답 3

1단계 선분 AB의 길이 구하기

수직선에서 두 점 A, B가 나타내는 수가 -4, 11이므로

선분 AB의 길이는

$11-(-4)=15$

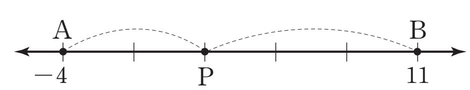
2단계 두 점 P, Q가 나타내는 수 구하기

선분 AB를 5등분했을 때, 이웃하는 두 점 사이의 간격은

$15\times\frac{1}{5}=3$

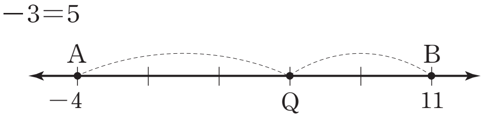
따라서 선분 AB를 2 : 3으로 나누는 점 P가 나타내는 수는

$-4+3+3=2$



또, 선분 AB를 3 : 2로 나누는 점 Q가 나타내는 수는

$11-3-3=5$



3단계 선분 PQ의 길이 구하기

따라서 선분 PQ의 길이는

$5-2=3$

단계	채점 기준	배점
❶	선분 AB의 길이를 구했다.	2점
❷	두 점 P, Q가 나타내는 수를 구했다.	3점
❸	선분 PQ의 길이를 구했다.	2점

Ⅱ 문자와 식

01 문자의 사용과 식의 값

Lv. 1 개념을 적용하는 핵심 문제

54쪽～56쪽

01 ④	02 ㄴ, ㄹ, ㅂ	03 ③	04 ①	05 ②
06 ④	07 ②	08 1715 m	09 ㄴ, ㄹ	10 ③, ⑤
11 -2	12 ⑤	13 ②	14 ④	15 $9x+7$
16 ①	17 ①	18 $\frac{10}{3}x+1$		

01 답 ④

① $2\div x\times y=2\times\frac{1}{x}\times y=\frac{2y}{x}$

② $a\times5\div(x-y)=a\times5\times\frac{1}{x-y}=\frac{5a}{x-y}$

③ $(a+2b)\div x\times(-3)=(a+2b)\times\frac{1}{x}\times(-3)$

$=\frac{-3(a+2b)}{x}$

④ $(-1)\times a+b\div4=(-1)\times a+b\times\frac{1}{4}=-a+\frac{b}{4}$

⑤ $(x+y)\div(z\div9)=(x+y)\div\frac{z}{9}=(x+y)\times\frac{9}{z}$

$=\frac{9(x+y)}{z}$

따라서 기호 ×, ÷를 생략하여 나타낸 식으로 옳은 것은 ④이다.

02 답 ㄴ, ㄹ, ㅂ

ㄱ. $a\times b\div c=a\times b\times\frac{1}{c}=\frac{ab}{c}$

ㄴ. $a\div b\times c=a\times\frac{1}{b}\times c=\frac{ac}{b}$

ㄷ. $a\div b\div c=a\times\frac{1}{b}\times\frac{1}{c}=\frac{a}{bc}$

ㄹ. $a\div(b\div c)=a\div\frac{b}{c}=a\times\frac{c}{b}=\frac{ac}{b}$

ㅁ. $a\times\left(\frac{1}{b}\div c\right)=a\times\left(\frac{1}{b}\times\frac{1}{c}\right)=a\times\frac{1}{bc}=\frac{a}{bc}$

ㅂ. $a\div\left(b\times\frac{1}{c}\right)=a\div\frac{b}{c}=a\times\frac{c}{b}=\frac{ac}{b}$

따라서 계산 결과가 $\frac{ac}{b}$인 것은 ㄴ, ㄹ, ㅂ이다.

03 답 ③

ㄴ. 1타에 12자루인 색연필 n타의 색연필의 수는 $12n$이다.

ㄷ. 물통에 1초에 x L씩 물을 채울 때, 1분 동안 채워지는 물의 양은 $60x$ L이다.

04 답 ①

3개에 a원인 풀 한 개의 가격은 $\frac{a}{3}$원이므로 풀 5개의 가격은

$\frac{a}{3}\times5=\frac{5a}{3}$(원)

b개에 2200원인 가위 한 개의 가격은 $\frac{2200}{b}$원이므로 가위 2개의 가격은 $\frac{2200}{b}\times2=\frac{4400}{b}$(원)

따라서 구하는 가격의 합은 $\left(\frac{5a}{3}+\frac{4400}{b}\right)$원이다.

05 답 ②

가장 왼쪽에 세로로 놓여 있는 성냥개비 한 개를 먼저 놓았다고 생각하고 정사각형을 1개, 2개, 3개, … 만들 때 필요한 성냥개비의 개수를 구해 보면 다음과 같다.

정사각형 1개 ⇨ $1+3$

정사각형 2개 ⇨ $1+3+3=1+3\times2$

정사각형 3개 ⇨ $1+3+3+3=1+3\times3$

⋮　　⋮

정사각형 n개 ⇨ $1+3+3+\cdots+3=1+3\times n=3n+1$

06 답 ④

① $-2a^2=-2\times(-2)^2=-8$

② $a^3=(-2)^3=-8$

③ $-(-a)^3=-\{-(-2)\}^3=-2^3=-8$

④ $-\left(-\frac{a^4}{2}\right)=-\left\{-\frac{(-2)^4}{2}\right\}=-\left(-\frac{16}{2}\right)=8$

⑤ $-a^2+2a=-(-2)^2+2\times(-2)=-4-4=-8$

따라서 식의 값이 나머지 넷과 다른 하나는 ④이다.

07 답 ②

$\frac{1}{a}-\frac{b}{3}-\frac{c}{2}=\frac{1}{3}-\frac{-1}{3}-\frac{5}{2}$

$=\frac{2}{6}+\frac{2}{6}-\frac{15}{6}$

$=-\frac{11}{6}$

08 답 1715 m

1단계 기온이 20 ℃일 때, 소리의 속력 구하기

$331+0.6x$에 $x=20$을 대입하면

$331+0.6\times20=331+12=343$

즉, 소리는 1초 동안 343 m를 이동한다.

2단계 소리가 5초 동안 이동한 거리 구하기

따라서 기온이 20 ℃일 때, 소리가 5초 동안 이동한 거리는

$343\times5=1715\,(\mathrm{m})$

단계	채점 기준	비율
❶	기온이 20 ℃일 때, 소리의 속력을 구했다.	60 %
❷	소리가 5초 동안 이동한 거리를 구했다.	40 %

09 답 ㄴ, ㄹ

ㄱ. $x-1$은 단항식이 아닌 다항식이다.

ㄷ. $5x-3$에서 상수항은 -3이다.

ㄹ. $\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y-1$에서 x의 계수는 $\frac{1}{3}$, y의 계수는 $\frac{2}{3}$이므로 그 합은 $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

10 답 ③, ⑤

① 단항식은 $-6x$의 1개이다.

② 일차식은 $1-2x+3y$, $0.1x-0.5$, $-6x$의 3개이다.

③ 항이 3개인 식은 $1-2x+3y$, $\frac{x^2}{8}-\frac{x}{4}+\frac{1}{2}$의 2개이다.

④ x의 계수가 음수인 식은 $1-2x+3y$, $-6x$, $\frac{x^2}{8}-\frac{x}{4}+\frac{1}{2}$의 3개이다.

⑤ $\frac{x^2}{8}-\frac{x}{4}+\frac{1}{2}$의 차수가 2로 가장 크므로 차수가 가장 큰 식은 $\frac{x^2}{8}-\frac{x}{4}+\frac{1}{2}$이다.

따라서 옳은 것은 ③, ⑤이다.

11 답 -2

주어진 식이 x에 대한 일차식이려면 x^2의 계수는 0이고 x의 계수는 0이 아니어야 하므로

$a+2=0$, $5-a\neq0$

$\therefore a=-2$

Level UP

다항식 $px^2+qx+r=0$이 x에 대한 일차식이려면

⇨ x^2의 계수는 0이고 x의 계수는 0이 아니어야 한다.

⇨ $p=0$, $q\neq0$

12 답 ⑤

$-3(4-x)=3x-12$

① $(x-4)\times3=3x-12$

② $(4-x)\div\left(-\frac{1}{3}\right)=(4-x)\times(-3)=3x-12$

③ $(2x-8)\div\frac{2}{3}=(2x-8)\times\frac{3}{2}=3x-12$

④ $(12-3x)\div(-1)=3x-12$

⑤ $\left(2-\frac{1}{2}x\right)\times\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{4}x-3$

따라서 계산 결과가 $-3(4-x)$와 같지 않은 것은 ⑤이다.

참고 분배법칙: 세 수 a, b, c에 대하여

(1) $a(b+c)=ab+ac$

(2) $(a+b)c=ac+bc$

13 답 ②

$\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{5}\right)\times(-15)=-5x+3$

이므로 $a=-5$, $b=3$

$\left(\frac{3}{2}x-\frac{6}{5}y\right)\div\left(-\frac{3}{10}\right)=\left(\frac{3}{2}x-\frac{6}{5}y\right)\times\left(-\frac{10}{3}\right)$

$=-5x+4y$

이므로 $c=-5$, $d=4$

$\therefore a+b+c+d=(-5)+3+(-5)+4=-3$

14 답 ④

① $(x+5)+(2x-3)=3x+2$

② $2(2x+1)-(3x-8)=4x+2-3x+8=x+10$

③ $3(1-2x)-5(2-x)=3-6x-10+5x=-x-7$

④ $\frac{1}{2}(6x+4)+\frac{1}{3}(6x-9)=3x+2+2x-3=5x-1$

⑤ $-\frac{1}{4}(3x-4)+\frac{2}{5}(5x-1)=-\frac{3}{4}x+1+2x-\frac{2}{5}$

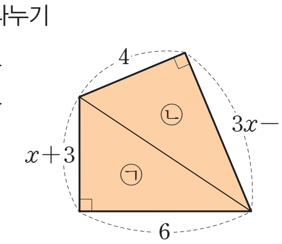
$=\frac{5}{4}x+\frac{3}{5}$

따라서 옳은 것은 ④이다.

15 답 $9x+7$

1단계 사각형을 두 개의 삼각형으로 나누기

오른쪽 그림과 같이 대각선을 그으면 주어진 사각형의 넓이는 두 직각삼각형의 넓이의 합과 같다.



2단계 두 직각삼각형의 넓이 구하기

(㉠의 넓이)$=\frac{1}{2}\times6\times(x+3)$

$=3x+9$

(㉡의 넓이)$=\frac{1}{2}\times4\times(3x-1)$

$=6x-2$

3단계 사각형의 넓이를 x를 사용한 식으로 나타내기

$\therefore$ (사각형의 넓이)=(㉠의 넓이)+(㉡의 넓이)

$=3x+9+6x-2$

$=9x+7$

따라서 사각형의 넓이는 $9x+7$이다.

단계	채점 기준	비율
❶	사각형을 두 개의 삼각형으로 나눴다.	20 %
❷	두 직각삼각형의 넓이를 구했다.	40 %
❸	사각형의 넓이를 x를 사용한 식으로 나타냈다.	40 %

Level UP

넓이를 구할 수 없는 도형이 주어지면 적당한 선을 그어 넓이를 구할 수 있는 도형 여러 개로 나눈다.

16 답 ①

$$\begin{aligned}2(2A-B)-(3A-5B)&=4A-2B-3A+5B\\&=A+3B\\&=2x-3+3(-x+4)\\&=2x-3-3x+12\\&=-x+9\end{aligned}$$

따라서 $a=-1$, $b=9$이므로

$a-b=-1-9=-10$

17 답 ①

$3x-\left[8x-\left\{4x+3-\frac{1}{2}(6x-2)\right\}\right]$

$=3x-\{8x-(4x+3-3x+1)\}$

$=3x-\{8x-(x+4)\}$

$=3x-(8x-x-4)$

$=3x-(7x-4)$

$=3x-7x+4$

$=-4x+4$

따라서 $a=-4$, $b=4$이므로

$ab=(-4)\times4=-16$

18 답 $\frac{10}{3}x+1$

$\frac{2}{3}(x-3)+\square=4x-1$에서

$$\begin{aligned}\square&=4x-1-\frac{2}{3}(x-3)\\&=4x-1-\frac{2}{3}x+2\\&=\frac{10}{3}x+1\end{aligned}$$

Lv. 2 사고를 확장하는 실전 문제

57쪽~61쪽

01 ① **02** $\frac{x+40y+500k+52000}{30}$원 **03** $\frac{5}{2}x$
04 $(8n+16)$ cm **05** $(48n+16)$ cm^2 **06** ②
07 ③ **08** $\frac{75x+200y+5000}{x+250}$ % **09** ③
10 $-\frac{43}{9}$ **11** ⑤ **12** ② **13** ③ **14** $-y$
15 1 **16** ⑤ **17** ③ **18** 7 **19** $x+8$
20 $(9x-1)$시간 **21** $\frac{32}{5}a+20$ **22** $18x+62$
23 65 **24** $(10x+5y-150)$칸 **25** 16 : 4 : 1
26 $(6a-11b)$ kg **27** $4x+36$ **28** 3 **29** $x+4y$
30 ③

01 답 ①

해결 key Point!

전체 일의 양은 (인원 수)×(시간)이다.

x명이 포스터를 만드는 데 y시간이 걸렸으므로 전체 일의 양은 xy이다. 이 포스터를 $(x-2)$명이 완성하는 데 걸린 시간을 T라고 하면

$(x-2)\times T=xy$ $\quad\therefore T=\frac{xy}{x-2}$

따라서 구하는 시간은 $\frac{xy}{x-2}$시간이다.

02 답 $\frac{x+40y+500k+52000}{30}$원

해결 key Point!

대회에 필요한 각 항목의 비용을 구하여 그것을 모두 합한 것이 총 비용이다.

1일 장소 대관료는 x원이고 팔찌는 $30\times1200=36000$(원)이다.
간식 바구니는 3명당 두 바구니를 제공하므로 총 20개의 간식 바구니가 필요하다. 즉, $20(2y+800)=40y+16000$(원)
배지는 $500k$원이므로 체육 대회를 준비하는 데 필요한 비용은
$x+36000+40y+16000+500k=x+40y+500k+52000$
따라서 참가자 한 명이 내야 하는 비용은

$\frac{x+40y+500k+52000}{30}$원

03 답 $\frac{5}{2}x$

두 그룹 A, B의 팬클럽에 모두 가입한 학생 수는 그룹 A의 팬클럽에 가입한 학생 수의 50 %이므로

$\frac{50}{100}x=\frac{1}{2}x$

또, 그룹 B의 팬클럽에 가입한 학생 수의 25 %이므로 그룹 B의 팬클럽에 가입한 학생 수는 두 그룹 A, B의 팬클럽에 모두 가입한 학생 수의 4배

즉, $\frac{1}{2}x\times4=2x$

따라서 그룹 A와 B의 팬클럽 중 적어도 한 곳에 가입한 학생 수는

$x+2x-\frac{1}{2}x=\frac{5}{2}x$

04 답 $(8n+16)$ cm

해결 key Point!

정사각형 모양의 종이의 장수가 늘어남에 따라 직사각형의 가로의 길이가 변하는 규칙을 찾아 문자를 사용한 식으로 나타내어 본다.

정사각형 모양의 종이의 장수가 늘어남에 따른 직사각형의 가로의 길이는 오른쪽 표와 같다.

장수	가로의 길이 (cm)
1	6
2	$6+4\times1$
3	$6+4\times2$
⋮	⋮

정사각형 모양의 종이 n장을 이어 붙였을 때, 직사각형의 가로의 길이는

$6+4\times(n-1)=4n+2$ (cm)

따라서 완성된 직사각형의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned}2\times6+2(4n+2)&=12+8n+4\\&=8n+16\ (\text{cm})\end{aligned}$$

05 답 $(48n+16)$ cm^2

해결 key Point!

모든 정사각형의 넓이의 합에서 겹쳐진 부분의 넓이의 합을 뺀다.

한 정사각형의 넓이는 $8\times8=64$ (cm^2)

두 정사각형이 겹쳐지는 부분의 넓이는 $4\times4=16$ (cm^2)

따라서 정사각형 모양의 종이 n장을 겹쳐 놓았을 때 겹쳐지는 부분은 $(n-1)$개이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned}64n-16(n-1)&=64n-16n+16\\&=48n+16\ (\text{cm}^2)\end{aligned}$$

06 답 ②

주어진 직사각형 모양의 종이의 둘레의 길이는

$(20+15)\times2=70$ (cm) ⋯⋯ ㉠

종이를 한 번 자를 때마다 자른 선의 길이의 2배만큼 전체 둘레의 길이가 늘어난다.

즉, 세로로 평행하게 n번 자를 때 늘어나는 길이의 합은

$(15\times2)\times n=30n$ (cm) ⋯⋯ ㉡

가로로 평행하게 $2n$번 자를 때 늘어나는 길이의 합은

$(20\times2)\times2n=80n$ (cm) ⋯⋯ ㉢

따라서 모든 작은 직사각형의 둘레의 길이의 합은

㉠+㉡+㉢$=70+30n+80n=110n+70$ (cm)

07 답 ③

정가가 x원인 상품에 대하여 쿠폰 A를 사용하면

$x\left(1-\frac{20}{100}\right)-1000=\frac{4}{5}x-1000$(원)

정가가 x원인 상품에 대하여 쿠폰 B를 사용하면

$$\begin{aligned}(x-1000)\left(1-\frac{20}{100}\right)&=(x-1000)\times\frac{4}{5}\\&=\frac{4}{5}x-800(\text{원})\end{aligned}$$

이때 $\frac{4}{5}x-1000<\frac{4}{5}x-800$이므로 x의 값에 상관없이 항상 쿠폰 A가 할인 금액이 더 크다.

Level UP

정가가 x원인 물건을 a % 할인한 판매 가격

$\left(x-x\times\frac{a}{100}\right)$원

이때 정가의 $(100-a)$ %와 같으므로

$x\times\frac{100-a}{100}=x\left(1-\frac{a}{100}\right)$(원)

08 답 $\frac{75x+200y+5000}{x+250}$ %

해결 key Point!

새로 만든 합금의 총량과 순금의 총량을 각각 구한다.

1단계 두 합금 A, B에 들어 있는 순금의 양 구하기

합금 A에 들어 있는 순금의 양은 $x\times\frac{75}{100}=0.75x$ (g)

합금 B에 들어 있는 순금의 양은 $200\times\frac{y}{100}=2y$ (g)

2단계 새로운 합금의 순금 함유량을 x, y를 사용한 식으로 나타내기

이때 추가로 넣은 순금은 50 g이므로 새로운 합금에 들어 있는 순금의 양은

$0.75x+2y+50$ (g)

따라서 새로운 합금의 무게는

$x+200+50=x+250$ (g)

이므로 새로운 합금의 순금 함유량은

$\frac{0.75x+2y+50}{x+250}\times100=\frac{75x+200y+5000}{x+250}$ (%)

단계	채점 기준	비율
❶	두 합금 A, B에 들어 있는 순금의 양을 구했다.	50 %
❷	새로운 합금의 순금 함유량을 x, y를 사용한 식으로 나타냈다.	50 %

09 답 ③

주어진 식에 $a=-\frac{1}{2}$을 각각 대입하면

$-a^2=-\left(-\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{1}{4}$

$(-a)^2=\left\{-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

$-\frac{1}{a^2}=-1\div\left(-\frac{1}{2}\right)^2=-1\times4=-4$

$|a|-1=\left|-\frac{1}{2}\right|-1=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$

이때 $-4<-\frac{1}{2}<-\frac{1}{4}<\frac{1}{4}$이므로

$M=\frac{1}{4}$, $m=-4$

$\therefore\ M\div m=\frac{1}{4}\div(-4)=\frac{1}{4}\times\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{16}$

참고 문자에 음수를 대입할 때에는 반드시 괄호를 사용하고 분모에 분수를 대입할 때에는 생략된 나눗셈 기호를 다시 쓴 후에 대입한다.

10 답 $-\frac{43}{9}$

해결 key Point!

주어진 식을 먼저 간단히 한다.

$\frac{1}{a}=3$, $\frac{1}{b}=2$, $\frac{1}{c}=6$에서

$a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{1}{2}$, $c=\frac{1}{6}$

$\therefore\ \frac{2a^2b-3bc+4ac^3}{abc}$

$=\frac{2a^2b}{abc}-\frac{3bc}{abc}+\frac{4ac^3}{abc}$

$=\frac{2a}{c}-\frac{3}{a}+\frac{4c^2}{b}$

$=2\times a\div c-3\div a+4\times c^2\div b$

$=2\times\frac{1}{3}\div\frac{1}{6}-3\div\frac{1}{3}+4\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\div\frac{1}{2}$

$=2\times\frac{1}{3}\times6-3\times3+4\times\frac{1}{36}\times2$

$=4-9+\frac{2}{9}$

$=-\frac{43}{9}$

11 답 ⑤

$4a+1=3$에서

$4a=2\qquad\therefore\ a=\frac{1}{2}$

상자 M에 3을 넣었을 때 나오는 수는 $16a^2-8a+5$에 $a=\frac{1}{2}$을 대입한 값과 같으므로

$16\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-8\times\frac{1}{2}+5=16\times\frac{1}{4}-4+5$

$=4-4+5=5$

12 답 ②

해결 key Point!

ax^2+bx+c가 x에 대한 일차식이 되기 위한 조건

⇨ $a=0$, $b\neq0$

$a(x^2-5x)-[2x^2-3\{x-(2x+1)\}]+5$

$=ax^2-5ax-\{2x^2-3(x-2x-1)\}+5$

$=ax^2-5ax-\{2x^2-3(-x-1)\}+5$

$=ax^2-5ax-(2x^2+3x+3)+5$

$=ax^2-5ax-2x^2-3x-3+5$

$=(a-2)x^2+(-5a-3)x+2$

이때 주어진 식은 x에 대한 일차식이므로 $a-2=0$, $-5a-3\neq0$이어야 한다.

따라서 $a-2=0$에서 $a=2$이므로 x의 계수는

$-5a-3=-5\times2-3=-13$

13 답 ③

해결 key Point!

식의 값이 상수이므로 상수항을 제외한 모든 항의 계수가 0이다.

$\frac{ax-3y+9}{3}-\frac{x-by-4}{2}+\frac{x+3y}{6}$

$=\frac{2(ax-3y+9)-3(x-by-4)+x+3y}{6}$

$=\frac{2ax-6y+18-3x+3by+12+x+3y}{6}$

$=\frac{2ax-2x+3by-3y+30}{6}$

$=\frac{2(a-1)x+3(b-1)y+30}{6}\qquad\cdots\cdots$ ㉠

이때 ㉠이 상수 C가 되어야 하므로

$a-1=0$, $b-1=0$

따라서 $a=1$, $b=1$이므로 ㉠에서

$C=\frac{30}{6}=5$

$\therefore\ a+b+C=1+1+5=7$

14 답 $-y$

자연수 n이 홀수이므로

$(-1)^n=-1$, $(-1)^{n+1}=1$, $(-1)^{2n}=1$

$\therefore\ (-1)^{n+1}(5x-2y)-(-1)^{2n}(3x+2y)+\frac{1}{2}(-1)^n(4x-6y)$

$=(5x-2y)-(3x+2y)-\frac{1}{2}(4x-6y)$

$=5x-2y-3x-2y-2x+3y$

$=-y$

Level UP

(1) 자연수 n이 짝수일 때

$(-1)^n=1,\ (-1)^{n+1}=-1,\ (-1)^{2n}=1$

(2) 자연수 n이 홀수일 때

$(-1)^n=-1,\ (-1)^{n+1}=1,\ (-1)^{2n}=1$

15 답 1

해결 key Point!

두 수 a, b에 대하여 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{n}{m}$ $(m, n$은 상수)일 때,

$\frac{a+b}{ab}=\frac{n}{m}$이므로 $a+b=kn,\ ab=km\ (k\neq0)$으로 놓을 수 있다.

1단계 $x+y,\ xy$를 한 문자에 대한 식으로 나타내기

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6}$에서 $\frac{x+y}{xy}=\frac{5}{6}$이므로

$x+y=5k,\ xy=6k\ (k\neq0)$로 놓을 수 있다.

2단계 $\frac{x(3-4y)+3y}{xy-(3x+3y)}$의 값 구하기

$$\therefore \frac{x(3-4y)+3y}{xy-(3x+3y)}=\frac{3x-4xy+3y}{xy-3(x+y)}=\frac{3(x+y)-4xy}{xy-3(x+y)}$$
$$=\frac{3\times5k-4\times6k}{6k-3\times5k}=\frac{15k-24k}{6k-15k}$$
$$=\frac{-9k}{-9k}=1$$

단계	채점 기준	비율
❶	$x+y,\ xy$를 한 문자에 대한 식으로 나타냈다.	40 %
❷	$\frac{x(3-4y)+3y}{xy-(3x+3y)}$의 값을 구했다.	60 %

16 답 ⑤

해결 key Point!

수직선에서 오른쪽에 있는 점에 대응하는 수는 왼쪽에 있는 점에 대응하는 수보다 크다.

$ab<0$이므로 a, b의 부호는 다르고, 수직선에서 a를 나타내는 점은 b를 나타내는 점보다 오른쪽에 있으므로

$b<a\qquad \therefore a>0,\ b<0$

이때 $|a|=\frac{3}{4}$, $|b|=2$이므로 $a=\frac{3}{4}$, $b=-2$

$$\therefore \frac{b^2}{a}-\left(ab-\frac{a}{b}\right)$$
$$=b^2\div a-ab+a\div b$$
$$=(-2)^2\div\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\times(-2)+\frac{3}{4}\div(-2)$$
$$=4\times\frac{4}{3}-\frac{3}{4}\times(-2)+\frac{3}{4}\times\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{16}{3}+\frac{3}{2}-\frac{3}{8}=\frac{155}{24}$$

17 답 ③

천의 자리의 숫자를 a, 백의 자리의 숫자를 b, 십의 자리의 숫자를 c, 일의 자리의 숫자를 d라고 하면 네 자리 수는

$1000a+100b+10c+d$

천의 자리의 숫자를 일의 자리로 이동하고 나머지 세 자리의 숫자들을 다음과 같이 한 자리씩 올려 이동한 네 자리 수는

$1000b+100c+10d+a$

$$\boxed{a}\ \boxed{b}\ \boxed{c}\ \boxed{d}\ \rightarrow\ \boxed{b}\ \boxed{c}\ \boxed{d}\ \boxed{a}$$

두 수를 더하면

$(1000a+100b+10c+d)+(1000b+100c+10d+a)$

$=1001a+1100b+110c+11d$

$=11(91a+100b+10c+d)$

즉, 두 수를 더한 수는 항상 11의 배수이다. 이때

① $3258=11\times296+2$

② $5047=11\times458+9$

③ $6380=11\times580$

④ $9876=11\times897+9$

⑤ $10111=11\times919+2$

따라서 가능한 수는 ③이다.

다른 풀이

천의 자리의 숫자를 x, 나머지 세 자리의 숫자를 y라고 하면 네 자리 수는

$1000x+y$

이때 천의 자리의 숫자를 일의 자리로 이동하고 나머지 세 숫자들은 다음과 같은 자리를 하나씩 올려 이동한 수는 $10y+x$

$$\underbrace{\boxed{}}_{x}\ \underbrace{\boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}}_{y}\ \rightarrow\ \underbrace{\boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}}_{y}\ \underbrace{\boxed{}}_{x}$$

따라서 두 수를 더하면

$(1000x+y)+(10y+x)=1001x+11y$

$=11(91x+y)$

즉, 두 수를 더한 수는 항상 11의 배수이므로 주어진 수들 중 11의 배수는

$6380=11\times580$

따라서 가능한 수는 ③이다.

18 답 7

전교생의 평균 수면 시간은 $8+\frac{1}{4}=\frac{33}{4}$(시간)

2학년 학생 수는 3학년 학생 수의 2배이므로 $y=2z$

1학년의 수면 시간의 합은 $9x$시간

2학년의 수면 시간의 합은 $8y=8\times2z=16z$(시간)

3학년의 수면 시간의 합은 $7z$시간

이때 전교생의 평균 수면 시간은

$$\frac{9x+16z+7z}{x+2z+z}=\frac{9x+23z}{x+3z}$$

즉, $\frac{9x+23z}{x+3z}=\frac{33}{4}$이므로

$4(9x+23z)=33(x+3z)$, $36x+92z=33x+99z$

$3x=7z \qquad \therefore \frac{3x}{z}=7$

19 답 $x+8$

선분 AB의 길이는

$$\begin{aligned}(3x+14)-(-2x-1)&=3x+14+2x+1\\&=5x+15\end{aligned}$$

선분 AP와 선분 PB의 길이의 비가 3 : 2이므로 선분 AP의 길이는

$(5x+15)\times\frac{3}{5}=3x+9$

따라서 점 P가 나타내는 수는

$(-2x-1)+(3x+9)=x+8$

20 답 $(9x-1)$시간

학교에서 시장까지의 거리는

$(19x+5)+(25x-4)+(10x-7)=54x-6$ (km)

따라서 민준이가 시속 6 km로 학교에서 시장까지 가는 데 걸리는 시간은

$\frac{54x-6}{6}=9x-1$(시간)

21 답 $\frac{32}{5}a+20$

1단계 새로운 사다리꼴의 윗변의 길이 구하기

윗변의 길이를 20 % 늘이면

$a\left(1+\frac{20}{100}\right)=\frac{6}{5}a$

늘어난 윗변의 길이에서 50 %를 줄이면

$\frac{6}{5}a\times\left(1-\frac{50}{100}\right)=\frac{6}{5}a\times\frac{1}{2}=\frac{3}{5}a$

2단계 새로운 사다리꼴의 아랫변의 길이 구하기

아랫변의 길이를 50 % 줄이면

$(2a+4)\left(1-\frac{50}{100}\right)=(2a+4)\times\frac{1}{2}=a+2$

줄어든 아랫변의 길이에서 3만큼 늘이면

$(a+2)+3=a+5$

3단계 새로운 사다리꼴의 높이 구하기

기존의 높이를 20 % 줄이면

$10\times\left(1-\frac{20}{100}\right)=10\times\frac{4}{5}=8$

4단계 새로운 사다리꼴의 넓이 구하기

따라서 새로운 사다리꼴의 넓이는

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{5}a+a+5\right)\times 8&=\left(\frac{8}{5}a+5\right)\times 4\\&=\frac{32}{5}a+20\end{aligned}$$

단계	채점 기준	비율
❶	새로운 사다리꼴의 윗변의 길이를 구했다.	25 %
❷	새로운 사다리꼴의 아랫변의 길이를 구했다.	25 %
❸	새로운 사다리꼴의 높이를 구했다.	25 %
❹	새로운 사다리꼴의 넓이를 구했다.	25 %

Level UP

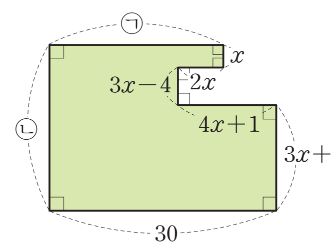
x에서 a % 증가하면 $x\left(\frac{100+a}{100}\right)=x\left(1+\frac{a}{100}\right)$

x에서 b % 감소하면 $x\left(\frac{100-b}{100}\right)=x\left(1-\frac{b}{100}\right)$

22 답 $18x+62$

해결 key Point!

주어지지 않은 변의 길이를 모두 구한다.



㉠의 길이는

$$\begin{aligned}&30-\{(4x+1)-2x\}\\&=30-(2x+1)\\&=30-2x-1\\&=-2x+29\end{aligned}$$

㉡의 길이는

$x+(3x-4)+(3x+5)=7x+1$

따라서 주어진 도형의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned}&(-2x+29)+x+2x+(3x-4)\\&\qquad+(4x+1)+(3x+5)+30+(7x+1)\\&=18x+62\end{aligned}$$

23 답 65

첫째 날, 가득 찬 물탱크에서 물을 전체의 $\frac{1}{3}$만큼 사용했으므로 물탱크에 남은 물의 양은

$$\begin{aligned}(45x+90)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)&=(45x+90)\times\frac{2}{3}\\&=30x+60\ (\mathrm{L})\end{aligned}$$

둘째 날, 비가 와서 물탱크에 15 L의 빗물이 추가되었으므로 남은 물의 양은

$(30x+60)+15=30x+75$ (L)

셋째 날, 물탱크에 남아 있는 물의 40 %를 농업용수로 사용했으므로 남은 물의 양은

$$\begin{aligned}(30x+75)\times\left(1-\frac{40}{100}\right)&=(30x+75)\times\frac{3}{5}\\&=18x+45\ (\mathrm{L})\end{aligned}$$

넷째 날, 자연 증발로 인해 $(3x-5)$ L만큼의 물이 줄어들었으므로 남은 물의 양은

$$18x+45-(3x-5)=18x+45-3x+5$$
$$=15x+50\ (\mathrm{L})$$

따라서 $a=15$, $b=50$이므로

$a+b=15+50=65$

24 답 $(10x+5y-150)$칸

해결 key Point!

하준이가 진 횟수를 x, y를 사용한 식으로 나타낸다.

가위바위보를 30번 하여 하준이는 x번 이기고 y번 비겼으므로 진 횟수는 $30-x-y$

즉, 하준이가 가위바위보를 마친 뒤 움직인 계단 수는

$$3x+y-2(30-x-y)=3x+y-60+2x+2y$$
$$=5x+3y-60$$

이때 지아는 $(30-x-y)$번 이기고 y번 비기고 x번 졌으므로 지아가 가위바위보를 마친 뒤 움직인 계단 수는

$$3(30-x-y)+y-2x=90-3x-3y+y-2x$$
$$=-5x-2y+90$$

∴ (하준이의 위치)−(지아의 위치)

$=5x+3y-60-(-5x-2y+90)$

$=5x+3y-60+5x+2y-90$

$=10x+5y-150$

따라서 최종적으로 하준이는 지아보다 $(10x+5y-150)$칸 위에 있다.

참고 $x>15$이므로 하준이가 지아보다 이긴 횟수가 많으므로 하준이가 지아보다 윗칸에 있음을 알 수 있다.

25 답 16:4:1

원 O_4의 반지름의 길이를 a라고 하면 세 원 O_3, O_2, O_1의 반지름의 길이는 각각 $2a$, $4a$, $8a$이다.

따라서 $S_1=\pi\times(8a)^2=64a^2\pi$, $S_2=\pi\times(4a)^2=16a^2\pi$,

$S_3=\pi\times(2a)^2=4a^2\pi$, $S_4=a^2\pi$이므로

$S_1-S_2=64a^2\pi-16a^2\pi=48a^2\pi$

$S_2-S_3=16a^2\pi-4a^2\pi=12a^2\pi$

$S_3-S_4=4a^2\pi-a^2\pi=3a^2\pi$

$$\therefore\ (S_1-S_2):(S_2-S_3):(S_3-S_4)=48a^2\pi:12a^2\pi:3a^2\pi$$
$$=16:4:1$$

26 답 $(6a-11b)$ kg

해결 key Point!

(평균)$=\dfrac{(\text{자료의 값의 합})}{(\text{자료의 수})}$이므로

(자료의 값의 합)=(평균)×(자료의 수)

등산 모임의 회원 18명 중 평균 체중이 a kg인 6명을 그룹 A, 나머지 12명 중 다시 뽑은 6명을 그룹 B, 그룹 A도 그룹 B도 아닌 나머지 6명을 그룹 C라고 하자.

그룹 A의 체중의 합은 $6a$ kg이고 평균 체중은 나머지 12명의 평균 체중보다 b kg만큼 무거우므로 나머지 12명의 평균 체중은 $(a-b)$ kg

따라서 나머지 12명의 체중의 합은 $12(a-b)$ kg

이때 18명의 평균 체중은

$$\frac{6a+12(a-b)}{18}=\frac{18a-12b}{18}=a-\frac{2}{3}b\ (\mathrm{kg})$$

그룹 B의 평균 체중은 전체 18명의 평균 체중보다 $\frac{1}{2}b$ kg만큼 무거우므로

$$\left(a-\frac{2}{3}b\right)+\frac{1}{2}b=a-\frac{1}{6}b\ (\mathrm{kg})$$

따라서 그룹 B의 체중의 합은

$$6\left(a-\frac{1}{6}b\right)=6a-b\ (\mathrm{kg})$$

이때 그룹 C의 체중의 합은 12명의 체중의 합에서 그룹 B의 체중의 합을 빼야 하므로

$$12(a-b)-(6a-b)=12a-12b-6a+b$$
$$=6a-11b\ (\mathrm{kg})$$

즉, 남은 6명의 체중의 합은 $(6a-11b)$ kg이다.

27 답 $4x+36$

(가)에서 $A-(2x-1)=\frac{1}{2}(20x-22)$이므로

$A=\frac{1}{2}(20x-22)+(2x-1)$

$=10x-11+2x-1$

$=12x-12$

(나)에서 $\frac{5}{3}A-B=4(x+1)$이므로

$B=\frac{5}{3}A-4(x+1)$

$=\frac{5}{3}(12x-12)-4(x+1)$

$=20x-20-4x-4$

$=16x-24$

(다)에서 $C=2A-B$이므로

$C=2(12x-12)-(16x-24)$

$=24x-24-16x+24$

$=8x$

$$\therefore\ A-2B+3C=12x-12-2(16x-24)+3\times8x$$
$$=12x-12-32x+48+24x$$
$$=4x+36$$

28 답 3

1단계 a, b의 값 구하기

$(ax+b)\times(-3)=-12x+18$이므로

$-3ax-3b=-12x+18$

즉, $-3a=-12$, $-3b=18$이므로

$a=4$, $b=-6$

2단계 k의 값 구하기

$(-12x+18)\div k=4x-6$이므로

$-\dfrac{12}{k}x+\dfrac{18}{k}=4x-6$

즉, $-\dfrac{12}{k}=4$, $\dfrac{18}{k}=-6$이므로

$k=-3$

3단계 c, d의 값 구하기

$cx+d=ax+b-5$이므로

$cx+d=4x-6-5=4x-11$

$\therefore\ c=4$, $d=-11$

4단계 $\dfrac{a+b+c+d}{k}$의 값 구하기

$\therefore\ \dfrac{a+b+c+d}{k}=\dfrac{4+(-6)+4+(-11)}{-3}=\dfrac{-9}{-3}=3$

단계	채점 기준	비율
❶	a, b의 값을 구했다.	30 %
❷	k의 값을 구했다.	30 %
❸	c, d의 값을 구했다.	30 %
❹	$\dfrac{a+b+c+d}{k}$의 값을 구했다.	10 %

29 답 $x+4y$

★	$-2x+y$	㉡
$x-3y$	y	㉠
		$11x-y$

위의 표에서

$(x-3y)-2y=$ ㉠ $\qquad\therefore$ ㉠ $=x-5y$

$2\times$ ㉡ $+$ ㉠ $=11x-y$이므로

$2\times$ ㉡ $+(x-5y)=11x-y$

$2\times$ ㉡ $=11x-y-(x-5y)$

$=11x-y-x+5y$

$=10x+4y$

$\therefore$ ㉡ $=\dfrac{1}{2}(10x+4y)=5x+2y$

따라서 ★ $-2(-2x+y)=$ ㉡이므로

★ $-2(-2x+y)=5x+2y$

$\therefore$ ★ $=5x+2y+2(-2x+y)$

$=5x+2y-4x+2y$

$=x+4y$

30 답 ③

$A+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}x-2y\right)=\dfrac{5}{6}x+y$이므로

$A=\dfrac{5}{6}x+y-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}x-2y\right)$

$=\dfrac{5}{6}x+y-\dfrac{1}{6}x+y$

$=\dfrac{2}{3}x+2y$

따라서 바르게 계산한 식은

$\dfrac{2}{3}x+2y-\left(\dfrac{1}{3}x-2y\right)=\dfrac{2}{3}x+2y-\dfrac{1}{3}x+2y$

$=\dfrac{1}{3}x+4y$

02 일차방정식

Lv. 1 개념을 적용하는 핵심 문제

62쪽~64쪽

01 ③, ⑤	02 ③	03 3개	04 8	05 ④
06 ①, ⑤	07 ③	08 $a\neq 2$	09 ④	10 -4
11 2	12 ⑤	13 ②	14 $\dfrac{7}{6}$	15 $\dfrac{5}{3}$
16 4	17 ①	18 ④		

01 답 ③, ⑤

각각의 경우를 식으로 나타내면 다음과 같다.

① $3x+1$ ② $y-5x<2$ ③ $12x=y$

④ $x^2\geq 25$ ⑤ $x\times\dfrac{5}{100}=20$

따라서 등식으로 나타낼 수 있는 것은 ③, ⑤이다.

02 답 ③

주어진 방정식에 [ ] 안의 수를 각각 대입하면 다음과 같다.

① $4\times4+16\neq0$

② $21-3\times(-7)\neq0$

③ $5\times(-3)+4=(-3)-8$

④ $3-2\times(-4)\neq-(-4+1)$

⑤ $\dfrac{2\times2-1}{3}-\dfrac{3\times(2+2)}{2}\neq-6$

따라서 [ ] 안의 수가 주어진 방정식의 해인 것은 ③이다.

03 답 3개

ㄱ, ㄴ. 방정식

ㄷ. $4x+5x=9x$에서 $9x=9x$ (항등식)

ㄹ. $6x-7=7-6x$에서 $12x-14=0$ (방정식)

ㅁ. $x+2-5x=2-4x$에서 $2-4x=2-4x$ (항등식)
ㅂ. $-4(1-x)=4x-4$에서 $-4+4x=4x-4$ (항등식)
따라서 항등식인 것은 ㄷ, ㅁ, ㅂ의 3개이다.

Level UP

x에 대한 등식 $ax+b=cx+d$에서
(1) $a\neq c$이면 방정식
(2) $a=c$, $b=d$이면 항등식

04 답 8

1단계 a, b의 값 구하기
주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로
$\frac{3}{5}=1-a$, $-\frac{1}{4}b=\frac{1}{2}$
$\therefore a=\frac{2}{5}$, $b=-2$

2단계 $5a-3b$의 값 구하기
$\therefore 5a-3b=5\times\frac{2}{5}-3\times(-2)=2+6=8$

단계	채점 기준	비율
❶	a, b의 값을 구했다.	60 %
❷	$5a-3b$의 값을 구했다.	40 %

05 답 ④

① $a=-b$의 양변에서 3을 빼면 $a-3=-b-3$
② $2a=b$의 양변에 4를 더하면 $2a+4=b+4$
③ $6a+3=3b-12$의 양변을 3으로 나누면
$2a+1=b-4$ $\therefore 2a=b-5$
④ $a+1=1-3b$의 양변에서 1을 빼면 $a=-3b$
양변을 3으로 나누면 $\frac{a}{3}=-b$
양변에서 1을 빼면 $\frac{a}{3}-1=-b-1$
⑤ $\frac{a}{4}=\frac{b}{5}$의 양변에 20을 곱하면 $5a=4b$
양변에 5를 더하면 $5a+5=4b+5$
$\therefore 5(a+1)=4b+5$
따라서 옳은 것은 ④이다.

06 답 ①, ⑤

해결 key Point!
주어진 등식을 각 문항의 좌변과 같아지게 만든 후, 우변을 비교한다.

$a-2=b+3$의 양변에 2를 더하면 $a-2+2=b+3+2$
$\therefore a=b+5$
① $a=b+5$의 양변에 3을 더하면 $a+3=b+5+3$
$\therefore a+3=b+8$
② $a=b+5$의 양변에서 5를 빼면 $a-5=b+5-5$
$\therefore a-5=b$
③ $a=b+5$의 양변에 -1을 곱하면 $-a=-b-5$
양변에서 1을 빼면 $-a-1=-b-6$
④ $a=b+5$의 양변에서 5를 빼면 $a-5=b+5-5$
$a-5=b$
양변에 -4를 곱하면 $-4(a-5)=-4b$
⑤ $a=b+5$의 양변에서 3을 빼면 $a-3=b+5-3$
$a-3=b+2$
양변을 2로 나누면 $\frac{a-3}{2}=\frac{b+2}{2}$
따라서 옳지 않은 것은 ①, ⑤이다.

07 답 ③

③ $6x-1=8-x$ ⇨ $6x+x=8+1$

08 답 $a\neq2$

$2(x+3)=ax-3$에서 $2x+6=ax-3$
$2x+6-ax+3=0$ $\therefore (2-a)x+9=0$
위의 등식이 x에 대한 일차방정식이 되려면
(x에 대한 일차식)$=0$의 꼴이어야 한다.
따라서 $2-a\neq0$이므로 $a\neq2$

09 답 ④

$3(x+1)=x+7$에서 $3x+3=x+7$
$2x=4$ $\therefore x=2$
① $4x-5=7$에서 $4x=12$ $\therefore x=3$
② $2(x+4)=x+4$에서 $2x+8=x+4$
$\therefore x=-4$
③ $3x-1=2(x+1)$에서 $3x-1=2x+2$
$\therefore x=3$
④ $5x-3=3x+1$에서 $2x=4$ $\therefore x=2$
⑤ $-(x-6)=2x+3$에서 $-x+6=2x+3$
$3x=3$ $\therefore x=1$
따라서 해가 같은 것은 ④이다.

10 답 -4

승원이가 -2를 a로 잘못 보았다고 하자.
$5x+a=x+4$의 해가 $x=2$이므로 $5x+a=x+4$에 $x=2$를 대입하면
$10+a=2+4$ $\therefore a=-4$
따라서 승원이는 -2를 -4로 잘못 보았다.

11 답 2

$ax+2=4(x+b)-6$에 $x=4$를 대입하면

$4a+2=4(4+b)-6$, $4a+2=16+4b-6$

$4a-4b=8$　　$\therefore a-b=2$

12 답 ⑤

① $9=2x-1$에서 $2x=10$　　$\therefore x=5$

② $3(x-3)=4x-5$에서 $3x-9=4x-5$　　$\therefore x=-4$

③ $0.6x+0.1=0.3x-0.2$의 양변에 10을 곱하면

$6x+1=3x-2$, $3x=-3$　　$\therefore x=-1$

④ $\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}=\frac{1}{3}x-\frac{5}{6}$의 양변에 6을 곱하면

$3x+4=2x-5$　　$\therefore x=-9$

⑤ $\frac{3x-2}{4}=\frac{4x+1}{5}$의 양변에 20을 곱하면

$5(3x-2)=4(4x+1)$, $15x-10=16x+4$

$\therefore x=-14$

따라서 해가 가장 작은 것은 ⑤이다.

13 답 ②

$-0.5(x-1)=1.1(3-x)+1$의 양변에 10을 곱하면

$-5(x-1)=11(3-x)+10$

$-5x+5=33-11x+10$

$6x=38$　　$\therefore x=\frac{19}{3}$

따라서 $a=\frac{19}{3}$이므로 $\frac{19}{3}$보다 작은 자연수는 1, 2, 3, $\cdots$, 6의 6개이다.

14 답 $\frac{7}{6}$

$\frac{1}{2}(2x-1)-\frac{2}{3}(2x-3)=0$의 양변에 6을 곱하면

$3(2x-1)-4(2x-3)=0$, $6x-3-8x+12=0$

$2x=9$　　$\therefore x=\frac{9}{2}$

$\therefore a=\frac{9}{2}$

$0.4x-5=-\frac{2(x+2)}{5}$에서 $\frac{2}{5}x-5=-\frac{2(x+2)}{5}$

양변에 5를 곱하면

$2x-25=-2(x+2)$, $2x-25=-2x-4$

$4x=21$　　$\therefore x=\frac{21}{4}$

$\therefore b=\frac{21}{4}$

$\therefore b\div a=\frac{21}{4}\div\frac{9}{2}=\frac{21}{4}\times\frac{2}{9}=\frac{7}{6}$

15 답 $\frac{5}{3}$

$(3x-4):5=(2x-1):2$에서

$2(3x-4)=5(2x-1)$, $6x-8=10x-5$

$4x=-3$　　$\therefore x=-\frac{3}{4}$

$3a-7=(a+1)x$에 $x=-\frac{3}{4}$을 대입하면

$3a-7=-\frac{3}{4}(a+1)$

양변에 4를 곱하면

$12a-28=-3(a+1)$, $12a-28=-3a-3$

$15a=25$　　$\therefore a=\frac{5}{3}$

16 답 4

1단계 방정식 $\frac{2x-5}{4}=\frac{3x-1}{3}-1$의 해 구하기

$\frac{2x-5}{4}=\frac{3x-1}{3}-1$의 양변에 12를 곱하면

$3(2x-5)=4(3x-1)-12$, $6x-15=12x-4-12$

$6x=1$　　$\therefore x=\frac{1}{6}$

2단계 방정식 $0.1x-0.2(x-a)=0.6$의 해 구하기

이때 방정식 $0.1x-0.2(x-a)=0.6$의 해가 $\frac{1}{6}$의 12배이므로

$x=\frac{1}{6}\times12=2$

3단계 a의 값 구하기

$0.1x-0.2(x-a)=0.6$에 $x=2$를 대입하면

$0.2-0.2(2-a)=0.6$

$0.2-0.4+0.2a=0.6$

$0.2a=0.8$

양변에 10을 곱하면

$2a=8$　　$\therefore a=4$

단계	채점 기준	비율
❶	방정식 $\frac{2x-5}{4}=\frac{3x-1}{3}-1$의 해를 구했다.	40 %
❷	방정식 $0.1x-0.2(x-a)=0.6$의 해를 구했다.	20 %
❸	a의 값을 구했다.	40 %

17 답 ①

$2x-\frac{4}{3}(x+2a)=-6$의 양변에 3을 곱하면

$6x-4(x+2a)=-18$, $6x-4x-8a=-18$

$2x=8a-18$　　$\therefore x=4a-9$

이때 $4a-9$가 음의 정수가 되어야 하므로

$4a-9<0$, $4a<9$　　$\therefore a<\frac{9}{4}$

이때 a는 자연수이므로

$a=1$, 2

따라서 모든 자연수 a의 값의 합은

$1+2=3$

18 답 ④

$(a+5)x-9=3$, 즉 $(a+5)x=12$의 해가 없으므로

$a+5=0 \qquad \therefore a=-5$

$bx-\frac{1}{5}=c$, 즉 $bx=c+\frac{1}{5}$의 해는 무수히 많으므로

$b=0$, $c+\frac{1}{5}=0$

$\therefore b=0$, $c=-\frac{1}{5}$

$\therefore ac-b=-5\times\left(-\frac{1}{5}\right)-0=1$

Level UP

x에 대한 방정식 $ax+b=cx+d$, 즉 $(a-c)x=d-b$에서
(1) $a=c$, $b=d$이면 해가 무수히 많다.
(2) $a=c$, $b\neq d$이면 해가 없다.

Lv. 2 사고를 확장하는 실전 문제

65쪽~70쪽

01 ②	**02** ②	**03** 1	**04** 69	**05** ④
06 -9	**07** ③	**08** $\frac{152}{3}$	**09** ③	**10** $\frac{8}{3}$
11 252	**12** ⑤	**13** 3057	**14** ②	**15** 5
16 $x=-3$	**17** $-\frac{27}{20}$	**18** ①	**19** 14	**20** ②
21 5	**22** ④	**23** ③	**24** 60	**25** $\frac{9}{2}$
26 $\frac{9}{11}$	**27** ③	**28** 16	**29** $x=2$	**30** $x=\frac{61}{7}$
31 $x=24$	**32** 9	**33** 12	**34** ②	**35** 8
36 ④				

01 답 ②

해결 key Point!

등식의 성질을 이용하여 주어진 식의 좌변을 구하는 식과 같게 만든 후, 우변을 비교한다.

ㄱ. $3a=6b$의 양변을 3으로 나누면 $a=2b$

ㄴ. $x=y$의 양변을 z로 나누면 $\frac{x}{z}=\frac{y}{z}$

ㄷ. $x=2y$의 양변에 1을 더하면 $x+1=2y+1$
이때 $2(y+1)=2y+2\neq 2y+1$

ㄹ. $\frac{a}{3}=\frac{b}{4}$의 양변에 12를 곱하면 $4a=3b$
$\therefore 4a-3b=0$

ㅁ. $x-1=0$, 즉 $x=1$이면 $x\neq 2$이지만 주어진 등식이 성립한다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ의 2개이다.

참고 어떤 수로 양변을 나눌 때, 나누는 수는 0이 아니어야 함에 유의한다.

02 답 ②

$4(a-1)=2b+2$에서 $4a-4=2b+2$

ㄱ. $4a-4=2b+2$의 양변을 2로 나누면
$2a-2=b+1$, $2a-b=3$
양변에 c를 더하면 $2a-b+c=c+3$

ㄴ. $4a-4=2b+2$의 양변에 c를 곱하면
$4ac-4c=2bc+2c \qquad \therefore 4ac-2bc=6c$

ㄷ. $4a-4=2b+2$의 양변을 4로 나누면 $a-1=\frac{b}{2}+\frac{1}{2}$
양변에 $\frac{1}{4}$을 더하면 $a-\frac{3}{4}=\frac{b}{2}+\frac{3}{4}$

ㄹ. $4a-4=2b+2$의 양변을 4로 나누면 $a-1=\frac{b}{2}+\frac{1}{2}$
$\therefore a=\frac{b}{2}+\frac{3}{2}$

ㅁ. $4a-4=2b+2$에서 $4a-2b=6$
양변을 $2c$로 나누면 $\frac{4a-2b}{2c}=\frac{6}{2c}$
$\therefore \frac{2a-b}{c}=\frac{3}{c}$

따라서 옳지 않은 것은 ㄷ, ㄹ의 2개이다.

03 답 1

$[m, n+5]+[2m-4, n-1]=[2, 6]$에서

$(-mx+n+5)+\{-(2m-4)x+n-1\}=-2x+6$

$-mx+n+5-2mx+4x+n-1=-2x+6$

$-3mx+4x+2n+4=-2x+6$

$(-3m+4)x+2n+4=-2x+6 \qquad \cdots\cdots ㉠$

이때 ㉠은 x에 대한 항등식이므로

$-3m+4=-2$, $2n+4=6$

$\therefore m=2$, $n=1$

$\therefore m-n=2-1=1$

04 답 69

해결 key Point!

초콜릿의 무게를 구하는 것이므로 윗접시저울의 한 쪽에는 초콜릿만, 다른 한 쪽에는 사탕만 남게 만들어야 한다.

1단계 오른쪽 접시의 사탕을 없애는 과정을 통하여 a의 값 구하기

윗접시저울이 평형을 이루고 있으므로 양쪽의 무게는 같다.

이때 양쪽에서 사탕을 3개씩 덜어내면 왼쪽 접시에는 사탕이 12개, 초콜릿이 2개이고 오른쪽 접시에는 사탕이 0개, 초콜릿이 5개이다.

$\therefore a=3$

2단계 왼쪽 접시의 초콜릿을 없애는 과정을 통하여 b의 값 구하기

또, 양쪽에서 초콜릿을 2개씩 덜어내면 왼쪽 접시에는 사탕이 12개, 초콜릿이 0개이고 오른쪽 접시에는 사탕이 0개, 초콜릿이 3개이다.

$\therefore b=2$

3단계 윗접시저울의 양쪽의 무게를 비교하여 c, d의 값 구하기

즉, 사탕 12개의 무게와 초콜릿 3개의 무게는 같다.

따라서 남게 된 사탕 12개의 무게는 $c=12\times8=96$ (g)이므로 초콜릿 3개의 무게는 96 g이다.

즉, $3d=96$이므로 $d=32$

4단계 $a+b+c-d$의 값 구하기

$\therefore a+b+c-d=3+2+96-32=69$

단계	채점 기준	비율
❶	오른쪽 접시의 사탕을 없애는 과정을 통하여 a의 값을 구했다.	25 %
❷	왼쪽 접시의 초콜릿을 없애는 과정을 통하여 b의 값을 구했다.	25 %
❸	윗접시저울의 양쪽의 무게를 비교하여 c, d의 값을 구했다.	40 %
❹	$a+b+c-d$의 값을 구했다.	10 %

05 답 ④

$4x(a-1)-3(2x-a)=x(a+5)+2(a-3)$에서

$4ax-4x-6x+3a=ax+5x+2a-6$

$3ax-15x+a+6=0$

$\therefore (3a-15)x+a+6=0$

이 등식이 x에 대한 일차방정식이 되지 않으려면

$3a-15=0$, $3a=15$

$\therefore a=5$

06 답 -9

1단계 일차방정식의 해를 이용하여 주어진 식을 k에 대한 식으로 나타내기

$\frac{k(x+1)-4}{2}-\frac{k(bx-1)+a}{4}=1$이 k의 값에 관계없이 항상 $x=3$을 해로 가지므로

$\frac{k(3+1)-4}{2}-\frac{k(3b-1)+a}{4}=1$

$\frac{4k-4}{2}-\frac{3bk-k+a}{4}=1$

양변에 4를 곱하면

$8k-8-3bk+k-a=4$

$\therefore (9-3b)k-a-12=0$ ⋯⋯ ㉠

2단계 a, b의 값 구하기

이때 ㉠은 k에 대한 항등식이므로

$9-3b=0$, $-a-12=0$

$\therefore a=-12$, $b=3$

3단계 $a+b$의 값 구하기

$\therefore a+b=-12+3=-9$

단계	채점 기준	비율
❶	일차방정식의 해를 이용하여 주어진 식을 k에 대한 식으로 나타냈다.	45 %
❷	a, b의 값을 구했다.	45 %
❸	$a+b$의 값을 구했다.	10 %

07 답 ③

$a(x-2)+8=3x-2b$에서

$ax-2a+8=3x-2b$ ⋯⋯ ㉠

이때 ㉠은 x에 대한 항등식이므로

$a=3$, $-2a+8=-2b$

$\therefore a=3$, $b=-1$

따라서 $\frac{x-b}{a}-0.5\left(x-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6}x$에서

$\frac{x+1}{3}-0.5\left(x-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6}x$

양변에 6을 곱하면

$2(x+1)-3\left(x-\frac{1}{3}\right)=x$, $2x+2-3x+1=x$

$2x=3$ $\quad\therefore x=\frac{3}{2}$

08 답 $\frac{152}{3}$

$\frac{5x+2}{4}-\frac{x-3}{2}=ax+b$의 양변에 4를 곱하면

$5x+2-2(x-3)=4ax+4b$

$5x+2-2x+6=4ax+4b$

$3x+8=4ax+4b$ ⋯⋯ ㉠

이때 ㉠은 x에 대한 항등식이므로

$3=4a$, $8=4b$

$\therefore a=\frac{3}{4}$, $b=2$

방정식 $cx-7=3x+5$의 해가 $x=a$, 즉 $x=\frac{3}{4}$이므로

$\frac{3}{4}c-7=\frac{9}{4}+5$, $\frac{3}{4}c=\frac{57}{4}$

$\therefore c=19$

$\therefore b\times c\div a=2\times19\div\frac{3}{4}=2\times19\times\frac{4}{3}=\frac{152}{3}$

09 답 ③

$2x-\left[1.5x-3\left\{(0.5x-1)\div\frac{2}{5}-\frac{1}{4}(5x-8)\right\}\right]=7$에서

$2x-\left[\frac{3}{2}x-3\left\{\left(\frac{1}{2}x-1\right)\times\frac{5}{2}-\frac{1}{4}(5x-8)\right\}\right]=7$

$2x-\left\{\frac{3}{2}x-3\left(\frac{5}{4}x-\frac{5}{2}-\frac{5}{4}x+2\right)\right\}=7$

$2x-\left\{\frac{3}{2}x-3\times\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}=7$

$2x-\left(\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}\right)=7$

$2x-\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}=7$

$\frac{1}{2}x=\frac{17}{2}\qquad\therefore x=17$

10 답 $\frac{8}{3}$

$x\triangle 5=5x-x+\frac{5}{2}=4x+\frac{5}{2}$

$2\triangle(x+1)=2(x+1)-2+\frac{1}{2}(x+1)$

$=2x+2-2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

$=\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}$

따라서 $x\triangle 5-\{2\triangle(x+1)\}=6$에서

$\left(4x+\frac{5}{2}\right)-\left(\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}\right)=6$

$4x+\frac{5}{2}-\frac{5}{2}x-\frac{1}{2}=6$

$\frac{3}{2}x=4\qquad\therefore x=\frac{8}{3}$

11 답 252

1단계 (가)를 만족시키는 x의 값 구하기

(가)에서 $66=2\times3\times11$, $42=2\times3\times7$이므로

66과 42의 최대공약수는 $2\times3=6$

$\therefore 66★42=6$

$12=2^2\times3$, $15=3\times5$이므로

12와 15의 최소공배수는 $2^2\times3\times5=60$

$\therefore 12◇15=60$

즉, $(66★42)\times x-(12◇15)=12$에서

$6x-60=12$, $6x=72$

$\therefore x=12$

2단계 (나)를 만족시키는 y의 값 구하기

(나)에 $x=12$를 대입하면 $\frac{y}{12◇5}-(12★9)=1$

$12=2^2\times3$이므로 12와 5의 최소공배수는 $2^2\times3\times5=60$

$\therefore 12◇5=60$

$12=2^2\times3$, $9=3^2$이므로 12와 9의 최대공약수는 3

$\therefore 12★9=3$

즉, $\frac{y}{12◇5}-(12★9)=1$에서

$\frac{y}{60}-3=1$, $y-180=60$

$\therefore y=240$

3단계 $x+y$의 값 구하기

$\therefore x+y=12+240=252$

단계	채점 기준	비율
❶	(가)를 만족시키는 x의 값을 구했다.	40 %
❷	(나)를 만족시키는 y의 값을 구했다.	40 %
❸	$x+y$의 값을 구했다.	20 %

12 답 ⑤

$\frac{2x-1}{3}-\frac{3x+2}{4}=-\frac{7}{6}$의 양변에 12를 곱하면

$4(2x-1)-3(3x+2)=-14$

$8x-4-9x-6=-14\qquad\therefore x=4$

$\therefore a=4$

$0.03x+0.5=0.02(3x-5)+0.72$의 양변에 100을 곱하면

$3x+50=2(3x-5)+72$, $3x+50=6x-10+72$

$3x=-12\qquad\therefore x=-4$

$\therefore b=-4$

$\therefore a-b=4-(-4)=8$

13 답 3057

(가) $\frac{4}{3}x-2=\frac{2}{3}x$에서 $\frac{2}{3}x=2\qquad\therefore x=3$

(나) $\frac{x-3}{4}-\frac{2x-1}{3}=-\frac{5}{12}$의 양변에 12를 곱하면

$3(x-3)-4(2x-1)=-5$, $3x-9-8x+4=-5$

$-5x=0\qquad\therefore x=0$

(다) $0.2(x-1)-0.5=0.3$의 양변에 10을 곱하면

$2(x-1)-5=3$, $2x-2-5=3$

$2x=10\qquad\therefore x=5$

(라) $(2x+1):5=(x+2):3$에서

$3(2x+1)=5(x+2)$, $6x+3=5x+10$

$\therefore x=7$

따라서 금고의 비밀번호는 3057이다.

14 답 ②

30보다 작은 소수는 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29이므로 이 중 3번째로 큰 수는 19

$\therefore a=19$

$48=2^4\times3$, $72=2^3\times3^2$의 최대공약수는 $2^3\times3=24$

$\therefore b=24$

따라서 $\frac{a+5}{4}x-\frac{b}{6}=0.5(b-x)-3$에서

$\frac{19+5}{4}x-\frac{24}{6}=0.5(24-x)-3$

$6x-4=\frac{1}{2}(24-x)-3$

$6x-4=12-\frac{1}{2}x-3$

$\frac{13}{2}x=13 \qquad \therefore x=2$

15 답 5

1단계 x의 값 구하기

$0.3(x-9)-0.27x=-2.4$의 양변에 100을 곱하면

$30(x-9)-27x=-240$, $30x-270-27x=-240$

$3x=30 \qquad \therefore x=10$

2단계 상수 a의 값 구하기

일차방정식 $\frac{x+a}{2}-\frac{2x-1}{3}=\frac{a+2}{6}$의 해가 $x=10$이므로

$\frac{10+a}{2}-\frac{19}{3}=\frac{a+2}{6}$

양변에 6을 곱하면

$3(10+a)-38=a+2$, $30+3a-38=a+2$

$2a=10 \qquad \therefore a=5$

단계	채점 기준	비율
❶	x의 값을 구했다.	50 %
❷	상수 a의 값을 구했다.	50 %

16 답 $x=-3$

$\frac{3x+4}{2}-\frac{2x-1}{3}=\frac{17}{3}$의 양변에 6을 곱하면

$3(3x+4)-2(2x-1)=34$, $9x+12-4x+2=34$

$5x=20 \qquad \therefore x=4$

방정식 $\frac{mx-8}{3}=2x-m+1$의 해가 $x=4$이므로

$\frac{4m-8}{3}=8-m+1$

양변에 3을 곱하면

$4m-8=24-3m+3$, $7m=35$

$\therefore m=5$

따라서 방정식 $(m-2)x+10=1$에 $m=5$를 대입하면

$3x+10=1$, $3x=-9$

$\therefore x=-3$

17 답 $-\frac{27}{20}$

(가)에서

$2a+3b=3(a-b)$, $2a+3b=3a-3b$

$\therefore a=6b$

(나)에서 $\frac{4a+b}{a-b}$에 $a=6b$를 대입하면

$\frac{24b+b}{6b-b}=\frac{25b}{5b}=5$

따라서 방정식 $\frac{x-8}{4}-2a=\frac{x+4-2a}{6}$의 해가 $x=5$이므로

$\frac{5-8}{4}-2a=\frac{5+4-2a}{6}$, $-\frac{3}{4}-2a=\frac{9-2a}{6}$

양변에 12를 곱하면

$-9-24a=2(9-2a)$, $-9-24a=18-4a$

$20a=-27 \qquad \therefore a=-\frac{27}{20}$

18 답 ①

$0.4x-\frac{x-2}{5}=1.6$의 양변에 10을 곱하면

$4x-2(x-2)=16$, $4x-2x+4=16$

$2x=12 \qquad \therefore x=6$

일차방정식 $3|mx-4|-2x=6$의 해가 $x=6$이므로

$3|6m-4|-12=6$, $6|3m-2|=18$

$\therefore |3m-2|=3$

즉, $3m-2=-3$ 또는 $3m-2=3$이므로

$3m=-1$ 또는 $3m=5$

$\therefore m=-\frac{1}{3}$ 또는 $m=\frac{5}{3}$

따라서 모든 상수 m의 값의 합은

$-\frac{1}{3}+\frac{5}{3}=\frac{4}{3}$

Level UP

유리수 a에 대하여 $|ka|=k|a|$ $(k\geq 0)$가 성립한다.

19 답 14

$(3x-2):(x+4)=2:1$에서

$3x-2=2(x+4)$, $3x-2=2x+8$

$\therefore x=10$

따라서 $(a+x):(2a-x)=4:3$에 $x=10$을 대입하면

$(a+10):(2a-10)=4:3$, $3(a+10)=4(2a-10)$

$3a+30=8a-40$, $5a=70$

$\therefore a=14$

20 답 ②

$2a:(2x-3)=3:(x+1)$에서

$3(2x-3)=2a(x+1)$, $6x-9=2ax+2a$

$(6-2a)x=2a+9 \qquad \therefore x=\frac{2a+9}{6-2a}$

$\frac{x}{2}-\frac{x-2b}{4}=0$의 양변에 4를 곱하면

$2x-x+2b=0 \qquad \therefore x=-2b$

따라서 $\frac{2a+9}{6-2a}=-2b$이므로

$2a+9=-2b(6-2a)$, $2a+9=-12b+4ab$

$2a-4ab+12b=-9 \qquad \therefore a-2ab+6b=-\frac{9}{2}$

21 답 5

해결 key Point!

주어진 방정식에 a 대신 $-a$를 대입한 방정식의 해가 $x=3$이다.

a를 $-a$로 잘못 보고 풀었을 때

방정식 $\frac{-ax+4}{5}-0.6=0.2(x+2a)$의 해가 $x=3$이므로

$\frac{-3a+4}{5}-0.6=0.2(3+2a)$

양변에 10을 곱하면

$2(-3a+4)-6=2(3+2a)$, $-6a+8-6=6+4a$

$10a=-4$ $\therefore a=-\frac{2}{5}$

$\frac{ax+4}{5}-0.6=0.2(x-2a)$의 양변에 10을 곱하면

$2(ax+4)-6=2(x-2a)$

$a=-\frac{2}{5}$를 대입하면

$2\left(-\frac{2}{5}x+4\right)-6=2\left(x+\frac{4}{5}\right)$, $-\frac{4}{5}x+8-6=2x+\frac{8}{5}$

$\frac{14}{5}x=\frac{2}{5}$ $\therefore x=\frac{1}{7}$

따라서 $k=\frac{1}{7}$이므로

$35k=35\times\frac{1}{7}=5$

22 답 ④

a를 b로 잘못 보고 풀었을 때

방정식 $\frac{x-b}{3}+\frac{x-b}{4}=\frac{x}{2}+\frac{5}{6}$의 해가 $x=-4$이므로

$\frac{-4-b}{3}+\frac{-4-b}{4}=\frac{-4}{2}+\frac{5}{6}$

양변에 12를 곱하면

$4(-4-b)+3(-4-b)=-14$

$-16-4b-12-3b=-14$

$7b=-14$ $\therefore b=-2$

b를 $-a$로 잘못 보고 풀었을 때

방정식 $\frac{x-a}{3}+\frac{x+a}{4}=\frac{x}{2}+\frac{5}{6}$의 해가 $x=13$이므로

$\frac{13-a}{3}+\frac{13+a}{4}=\frac{13}{2}+\frac{5}{6}$

양변에 12를 곱하면

$4(13-a)+3(13+a)=88$, $52-4a+39+3a=88$

$\therefore a=3$

따라서 주어진 일차방정식에 $a=3$, $b=-2$를 대입하면

$\frac{x-3}{3}+\frac{x+2}{4}=\frac{x}{2}+\frac{5}{6}$

양변에 12를 곱하면

$4(x-3)+3(x+2)=6x+10$, $4x-12+3x+6=6x+10$

$\therefore x=16$

23 답 ③

해결 key Point!

주어진 방정식의 해는 정수, a의 값은 자연수이어야 하는 조건을 이용한다.

$\frac{x-2}{4}-\frac{2x+a}{3}=-\frac{7}{12}$의 양변에 12를 곱하면

$3(x-2)-4(2x+a)=-7$, $3x-6-8x-4a=-7$

$-5x=-1+4a$ $\therefore x=\frac{1-4a}{5}$

이때 a는 자연수이므로 $1-4a<0$

또, x가 정수가 되려면 $1-4a$는 5의 배수이어야 하고,

$|x|\le 10$이므로

$1-4a=-5, -10, -15, \dots, -50$

$1-4a=-5$일 때, $4a=6$ $\therefore a=\frac{3}{2}$

$1-4a=-10$일 때, $4a=11$ $\therefore a=\frac{11}{4}$

$1-4a=-15$일 때, $4a=16$ $\therefore a=4$

$1-4a=-20$일 때, $4a=21$ $\therefore a=\frac{21}{4}$

$1-4a=-25$일 때, $4a=26$ $\therefore a=\frac{13}{2}$

$1-4a=-30$일 때, $4a=31$ $\therefore a=\frac{31}{4}$

$1-4a=-35$일 때, $4a=36$ $\therefore a=9$

$1-4a=-40$일 때, $4a=41$ $\therefore a=\frac{41}{4}$

$1-4a=-45$일 때, $4a=46$ $\therefore a=\frac{23}{2}$

$1-4a=-50$일 때, $4a=51$ $\therefore a=\frac{51}{4}$

이때 a가 자연수이므로 조건을 만족시키는 a의 값은 4, 9

따라서 모든 자연수 a의 값의 합은

$4+9=13$

24 답 60

1단계 주어진 일차방정식의 해 구하기

$\frac{ax-2}{2}-\frac{ax-6}{3}=5$의 양변에 6을 곱하면

$3(ax-2)-2(ax-6)=30$

$3ax-6-2ax+12=30$

$ax=24$ $\therefore x=\frac{24}{a}$

2단계 자연수 a의 값 구하기

이때 $\frac{24}{a}$가 자연수이어야 하므로 a는 24의 약수이다.

$\therefore a=1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$

3단계 모든 자연수 a의 값의 합 구하기

따라서 모든 자연수 a의 값의 합은

$1+2+3+4+6+8+12+24=60$

단계	채점 기준	비율
❶	주어진 일차방정식의 해를 구했다.	60 %
❷	자연수 a의 값을 구했다.	30 %
❸	모든 자연수 a의 값의 합을 구했다.	10 %

25 답 $\frac{9}{2}$

$0.4(x+2)=0.6$의 양변에 10을 곱하면

$4(x+2)=6$, $4x+8=6$, $4x=-2$

$\therefore x=-\frac{1}{2}$

따라서 일차방정식 $(2a+1)x-5=0$의 해는 $x=\frac{1}{2}$이므로

$(2a+1)\times\frac{1}{2}-5=0$, $a+\frac{1}{2}-5=0$

$\therefore a=\frac{9}{2}$

26 답 $\frac{9}{11}$

해결 key Point!

두 수를 곱한 값이 1이면 두 수는 역수 관계이다.

⇨ $ab=1$이면 $b=\frac{1}{a}$, 즉 b는 a의 역수이다.

1단계 비례식을 만족시키는 x의 값 구하기

$(0.3x-1.5):2=\frac{1}{5}(x-2):1$에서

$0.3x-1.5=\frac{2}{5}(x-2)$

양변에 10을 곱하면

$3x-15=4(x-2)$, $3x-15=4x-8$

$\therefore x=-7$

2단계 일차방정식의 해 구하기

따라서 일차방정식 $3a(x+1)-2=5x+a$의 해는 $x=-\frac{1}{7}$

3단계 a의 값 구하기

$3a(x+1)-2=5x+a$에 $x=-\frac{1}{7}$을 대입하면

$3a\left(-\frac{1}{7}+1\right)-2=5\times\left(-\frac{1}{7}\right)+a$, $\frac{18}{7}a-2=-\frac{5}{7}+a$

$\frac{11}{7}a=\frac{9}{7}$ $\quad\therefore a=\frac{9}{11}$

단계	채점 기준	비율
❶	비례식을 만족시키는 x의 값을 구했다.	40 %
❷	일차방정식의 해를 구했다.	20 %
❸	a의 값을 구했다.	40 %

27 답 ③

$\frac{3x-a}{5}-1.6=0.2(x-3a)$의 양변에 10을 곱하면

$2(3x-a)-16=2(x-3a)$, $6x-2a-16=2x-6a$

$4x=16-4a$ $\quad\therefore x=4-a$

$\frac{x}{3}-\frac{x-a}{2}=\frac{a}{6}$의 양변에 6을 곱하면

$2x-3(x-a)=a$, $2x-3x+3a=a$

$\therefore x=2a$

즉, $m=4-a$, $n=2a$이고, $m=n-5$이므로

$4-a=2a-5$, $3a=9$

$\therefore a=3$

28 답 16

1단계 a의 값 구하기

$0.5(x-3)+\frac{a}{6}=\frac{x+2}{3}$의 양변에 30을 곱하면

$15(x-3)+5a=10(x+2)$, $15x-45+5a=10x+20$

$5x=65-5a$ $\quad\therefore x=13-a$

이때 x는 3의 배수이고 a는 $a\le20$인 자연수이므로

$13-a=3, 6, 9, 12$ $\quad\therefore a=1, 4, 7, 10$

2단계 b의 값 구하기

$4:(b-2)=2:(y-1)$에서

$4(y-1)=2(b-2)$, $4y-4=2b-4$

$4y=2b$ $\quad\therefore y=\frac{b}{2}$

이때 y는 소수이고 $b<20$에서 $\frac{b}{2}<10$이므로

$\frac{b}{2}=2, 3, 5, 7$ $\quad\therefore b=4, 6, 10, 14$

3단계 (a, b)의 개수 구하기

따라서 가능한 모든 (a, b)는

$(1, 4)$, $(1, 6)$, $(1, 10)$, $(1, 14)$, $(4, 4)$, $(4, 6)$, $(4, 10)$, $(4, 14)$, $(7, 4)$, $(7, 6)$, $(7, 10)$, $(7, 14)$, $(10, 4)$, $(10, 6)$, $(10, 10)$, $(10, 14)$의 16개이다.

단계	채점 기준	비율
❶	a의 값을 구했다.	40 %
❷	b의 값을 구했다.	40 %
❸	(a, b)의 개수를 구했다.	20 %

29 답 $x=2$

해결 key Point!

$x\neq0$이므로 주어진 방정식의 양변에 $6x$를 곱하여 일차방정식으로 변형한다.

$\frac{2x+1}{3x}-\frac{x-3}{2x}-\frac{1}{6x}=1$의 양변에 $6x$를 곱하면

$2(2x+1)-3(x-3)-1=6x$, $4x+2-3x+9-1=6x$

$5x=10$ $\quad\therefore x=2$

30 답 $x=\frac{61}{7}$

$\frac{a}{4}=\frac{b}{6}=\frac{c}{9}=k$ ($k\neq0$인 상수)라고 하면

$a=4k$, $b=6k$, $c=9k$

$(a-b+c)(x-5)-(2a-3b+4c)=0$에 $a=4k$, $b=6k$, $c=9k$를 대입하면

$(4k-6k+9k)(x-5)-(8k-18k+36k)=0$

$7k(x-5)-26k=0$, $7(x-5)-26=0$

$7x-35-26=0$, $7x=61$

$\therefore x=\frac{61}{7}$

31 답 $x=24$

해결 key Point!

주어진 방정식의 우변에서 $2a+3b+4c$를 만든다.

$$(\text{우변})=3+\frac{3b+4c}{2a}+\frac{2a+4c}{3b}+\frac{2a+3b}{4c}$$
$$=1+\frac{3b+4c}{2a}+1+\frac{2a+4c}{3b}+1+\frac{2a+3b}{4c}$$
$$=\frac{2a+3b+4c}{2a}+\frac{2a+3b+4c}{3b}+\frac{2a+3b+4c}{4c}$$
$$=\frac{24}{2a}+\frac{24}{3b}+\frac{24}{4c}$$

즉, $\frac{x}{2a}+\frac{x}{3b}+\frac{x}{4c}=\frac{24}{2a}+\frac{24}{3b}+\frac{24}{4c}$이므로

$x\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{3b}+\frac{1}{4c}\right)=24\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{3b}+\frac{1}{4c}\right)$

이때 주어진 방정식이 x에 대한 일차방정식이고

$\frac{1}{2a}+\frac{1}{3b}+\frac{1}{4c}\neq0$이므로

$x=24$

32 답 9

$A=\frac{3k}{4k}$ (k는 자연수)라고 하면

$\frac{3k-6}{4k+6}=\frac{1}{2}$, $2(3k-6)=4k+6$

$6k-12=4k+6$, $2k=18$

$\therefore k=9$

즉, $A=\frac{3k}{4k}=\frac{27}{36}$이므로

$\frac{27+2x}{36-x}=\frac{5}{3}$, $3(27+2x)=5(36-x)$

$81+6x=180-5x$, $11x=99$

$\therefore x=9$

33 답 12

1단계 S_k의 값 구하기

$\frac{2x-k}{3}-0.5(x-2k)=\frac{1}{6}$의 양변에 30을 곱하면

$10(2x-k)-15(x-2k)=5$, $20x-10k-15x+30k=5$

$5x=5-20k$ $\quad\therefore x=1-4k$

$\therefore S_k=1-4k$

2단계 $-S_{10}+S_9-S_8+S_7-S_6+S_5$의 값 구하기

$k=5$일 때, $S_5=1-4\times5=-19$ $\quad\therefore S_5=-19$

$k=6$일 때, $S_6=1-4\times6=-23$ $\quad\therefore S_6=-23$

$k=7$일 때, $S_7=1-4\times7=-27$ $\quad\therefore S_7=-27$

$k=8$일 때, $S_8=1-4\times8=-31$ $\quad\therefore S_8=-31$

$k=9$일 때, $S_9=1-4\times9=-35$ $\quad\therefore S_9=-35$

$k=10$일 때, $S_{10}=1-4\times10=-39$ $\quad\therefore S_{10}=-39$

$\therefore -S_{10}+S_9-S_8+S_7-S_6+S_5$

$=-(-39)+(-35)-(-31)+(-27)-(-23)+(-19)$

$=12$

단계	채점 기준	비율
❶	S_k의 값을 구했다.	50 %
❷	$-S_{10}+S_9-S_8+S_7-S_6+S_5$의 값을 구했다.	50 %

34 답 ②

$0.5(x-2k)-\frac{x-3}{4}=\frac{k-x}{2}$의 양변에 20을 곱하면

$10(x-2k)-5(x-3)=10(k-x)$

$10x-20k-5x+15=10k-10x$

$15x=30k-15$ $\quad\therefore x=2k-1$

$k=2$, $k=5$일 때 일차방정식의 해가 각각 a_2, a_5이므로

(ⅰ) $k=2$일 때

$x=2\times2-1=3$ $\quad\therefore a_2=3$

(ⅱ) $k=5$일 때

$x=2\times5-1=9$ $\quad\therefore a_5=9$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $|a_2-a_5|=|3-9|=6$

35 답 8

해결 key Point!

$|x|=a$이면 $x=a$ 또는 $x=-a$임을 이용하여 주어진 방정식을 푼다.

$3||x-2|-5|=9$에서

$||x-2|-5|=3$

$|x-2|-5=3$ 또는 $|x-2|-5=-3$

즉, $|x-2|=8$ 또는 $|x-2|=2$

(ⅰ) $|x-2|=8$일 때

$x-2=8$ 또는 $x-2=-8$

$\therefore x=10$ 또는 $x=-6$

(ⅱ) $|x-2|=2$일 때

$x-2=2$ 또는 $x-2=-2$

$\therefore x=4$ 또는 $x=0$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $3||x-2|-5|=9$를 만족시키는 x의 값은 $10, -6, 4, 0$이므로 구하는 합은

$10+(-6)+4+0=8$

36 답 ④

방정식 ㈎는 해가 2개 이상이므로 해가 무수히 많다.

$a(2x-1)+5=4(x+b)$에서

$2ax-a+5=4x+4b$

$\therefore (2a-4)x=a+4b-5$

따라서 $2a-4=0$, $a+4b-5=0$이므로

$2a=4$에서 $a=2$

$2+4b-5=0$에서

$4b=3 \qquad \therefore b=\frac{3}{4}$

방정식 ㈏에 $\frac{x-a}{3}=\frac{cx+b}{6}$의 양변에 6을 곱하면

$2(x-a)=cx+b$

이 방정식에 $a=2$, $b=\frac{3}{4}$을 대입하면

$2(x-2)=cx+\frac{3}{4}$, $2x-4=cx+\frac{3}{4}$

$\therefore (2-c)x=\frac{19}{4}$

이 방정식의 해가 존재하지 않아야 하므로

$2-c=0 \qquad \therefore c=2$

03 일차방정식의 활용

Lv. 1 개념을 적용하는 핵심 문제

71쪽~73쪽

01 ③	**02** ②	**03** 36	**04** ⑤	**05** ①
06 243 cm^2	**07** ⑤	**08** 20000원	**09** 153	**10** ⑤
11 ②	**12** $\frac{5}{3}$ km	**13** ③	**14** 20분	**15** ⑤
16 ①	**17** ②	**18** 40 g		

01 답 ③

어떤 수를 x라고 하면

$(3x+4)+7=4(x+2)$, $3x+11=4x+8$

$\therefore x=3$

따라서 어떤 수는 3이므로 처음에 구하려고 했던 수는

$3\times3+4=13$

02 답 ②

연속하는 세 짝수를 $x-2$, x, $x+2$라고 하면

$5(x+2)=(x-2)+x+30$, $5x+10=2x+28$

$3x=18 \qquad \therefore x=6$

따라서 연속하는 세 짝수는 4, 6, 8이므로 가장 큰 수는 8이다.

03 답 36

일의 자리의 숫자를 x라고 하면 십의 자리의 숫자는 $x-3$이므로

$10(x-3)+x=4(x+x-3)$, $10x-30+x=8x-12$

$3x=18 \qquad \therefore x=6$

따라서 구하는 자연수는 36이다.

참고 십의 자리의 숫자가 a, 일의 자리의 숫자가 b인 두 자리 자연수는 $10a+b$이다.

04 답 ⑤

어린이가 x명이라고 하면 어른은 $(60-x)$명이므로

$2(60-x)+\frac{1}{2}x=60$

양변에 2를 곱하면

$4(60-x)+x=120$, $240-4x+x=120$

$-3x=-120 \qquad \therefore x=40$

따라서 어린이는 40명이다.

05 답 ①

현재 수민이의 나이를 x살이라고 하면 이모의 나이는 $(x+28)$살이므로

$(x+28)+9=2(x+9)+7$, $x+37=2x+18+7$

$\therefore x=12$

따라서 현재 수민이의 나이는 12살이다.

참고 (1) a년 후의 나이: {(현재 나이)$+a$}살

(2) b년 전의 나이: {(현재 나이)$-b$}살

06 답 243 cm^2

1단계 직사각형의 가로, 세로의 길이를 문자를 사용한 식으로 나타내기

가로의 길이를 x cm라고 하면 세로의 길이는 $3x$ cm이므로

직사각형의 둘레의 길이는

$2(x+3x)=72$

2단계 직사각형의 가로, 세로의 길이 구하기

$8x=72 \qquad \therefore x=9$

즉, 직사각형의 가로의 길이는 9 cm, 세로의 길이는

$3x=3\times9=27\ (\text{cm})$

3단계 직사각형의 넓이 구하기

따라서 구하는 넓이는

$9\times27=243\ (\text{cm}^2)$

단계	채점 기준	비율
❶	직사각형의 가로, 세로의 길이를 문자를 사용한 식으로 나타냈다.	40 %
❷	직사각형의 가로, 세로의 길이를 구했다.	40 %
❸	직사각형의 넓이를 구했다.	20 %

참고 가로의 길이가 a cm, 세로의 길이가 b cm인 직사각형에 대하여
(1) (둘레의 길이)$=2(a+b)$ (cm)
(2) (넓이)$=ab$ (cm^2)

07 답 ⑤

x개월 후에 주원이의 예금액의 4배와 서연이의 예금액의 3배가 같아진다고 하면

$4(18000+2000x)=3(32000+2000x)$

$72000+8000x=96000+6000x$

$2000x=24000 \qquad \therefore x=12$

따라서 12개월 후이다.

08 답 20000원

이 장갑의 원가를 x원이라고 하면 정가는

$x+\frac{30}{100}x=\frac{13}{10}x$(원)이고, 판매 가격은 $\left(\frac{13}{10}x-4000\right)$원이다.

이때 (이익)=(판매 가격)−(원가)이므로

$\left(\frac{13}{10}x-4000\right)-x=\frac{10}{100}x$

$\frac{3}{10}x-4000=\frac{1}{10}x, \ \frac{1}{5}x=4000$

$\therefore x=20000$

따라서 장갑의 원가는 20000원이다.

Level UP

① 원가가 x원인 물건에 a %의 이익을 붙인 정가

⇨ (정가)=(원가)+(이익)

$=x+x\times\frac{a}{100}$

$=\left(1+\frac{a}{100}\right)x$ (원)

② 정가가 x원인 물건을 a % 할인한 판매 가격

⇨ (판매 가격)=(정가)−(할인 금액)

$=x-x\times\frac{a}{100}$

$=\left(1-\frac{a}{100}\right)x$ (원)

09 답 153

1단계 작년의 여자 회원 수 구하기

작년의 여자 회원 수를 x라고 하면 올해 감소한 회원 수는

$19+\frac{10}{100}x=300\times\frac{12}{100}, \ 19+\frac{1}{10}x=36$

$\frac{1}{10}x=17 \qquad \therefore x=170$

2단계 올해의 여자 회원 수 구하기

따라서 올해의 여자 회원 수는

$170-170\times\frac{10}{100}=170-17=153$

단계	채점 기준	비율
❶	작년의 여자 회원 수를 구했다.	60 %
❷	올해의 여자 회원 수를 구했다.	40 %

10 답 ⑤

라율이네 가족이 x시간 동안 여행을 했다고 하면

$\frac{1}{8}x+\frac{1}{6}x+\frac{1}{3}x+36=x, \ \frac{5}{8}x+36=x$

$\frac{3}{8}x=36 \qquad \therefore x=96$

따라서 라율이네 가족이 여행한 총시간은 96시간이다.

11 답 ②

수영장에 가득 찬 물의 양을 1이라고 하면 두 호스 A, B로 1시간 동안 채울 수 있는 물의 양은 각각 $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$이다.

호스 A로만 물을 더 받아야 하는 시간을 x시간이라고 하면

$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\times1+\frac{1}{3}\times x=1, \ \frac{8}{15}+\frac{1}{3}x=1$

$\frac{1}{3}x=\frac{7}{15} \qquad \therefore x=\frac{7}{5}$

따라서 호스 A로만 물을 더 받아야 하는 시간은

$\frac{7}{5}=1\frac{24}{60}$(시간), 즉 1시간 24분이다.

12 답 $\frac{5}{3}$ km

지웅이네 집에서 꽃집까지의 거리를 x km라고 하면

꽃을 구입하는 데 걸린 시간은 $\frac{15}{60}=\frac{1}{4}$(시간)이므로

$\frac{x}{4}+\frac{1}{4}+\frac{x}{5}=1, \ \frac{9}{20}x+\frac{1}{4}=1$

$\frac{9}{20}x=\frac{3}{4} \qquad \therefore x=\frac{5}{3}$

따라서 지웅이네 집에서 꽃집까지의 거리는 $\frac{5}{3}$ km이다.

13 답 ③

집에서 체육관까지의 거리를 x m라고 하면

$\frac{x}{50}-\frac{x}{60}=10, \ \frac{1}{300}x=10$

$\therefore x=3000$

따라서 집에서 체육관까지의 거리는 3000 m, 즉 3 km이다.

14 답 20분

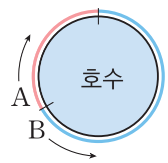
서우가 출발한 지 x분 후에 처음으로 지민이를 만난다고 하면

$80(10+x)+50x=3400,\ 800+80x+50x=3400$

$130x=2600 \qquad \therefore\ x=20$

따라서 서우가 출발한 지 20분 후에 처음으로 지민이를 만난다.

참고 두 사람 A, B가 둘레의 길이가 l인 호수 둘레의 한 지점에서 동시에 출발하여 반대 방향으로 걸을 때, 두 사람 A, B가 걷기 시작한 지 t분 후에 처음으로 다시 만나게 된다고 하면



(A가 t분 동안 걸은 거리)+(B가 t분 동안 걸은 거리)$=l$

이다.

15 답 ⑤

열차의 길이를 x m라고 하면 길이가 600 m인 터널을 완전히 통과할 때의 열차의 속력은 초속 $\dfrac{600+x}{25}$ m이고, 길이가 900 m인 터널을 완전히 통과할 때의 열차의 속력은 초속 $\dfrac{900+x}{35}$ m이다.

이때 열차의 속력은 일정하므로

$\dfrac{600+x}{25}=\dfrac{900+x}{35},\ 7(600+x)=5(900+x)$

$4200+7x=4500+5x,\ 2x=300$

$\therefore\ x=150$

따라서 열차의 길이는 150 m이다.

16 답 ①

10 %의 소금물 400 g에 들어 있는 소금의 양은

$\dfrac{10}{100}\times400=40\ (\mathrm{g})$

소금을 x g 넣는다고 하면

$\dfrac{20}{100}\times(400+x)=40+x,\ 80+\dfrac{1}{5}x=40+x$

$\dfrac{4}{5}x=40 \qquad \therefore\ x=50$

따라서 넣어야 하는 소금의 양은 50 g이다.

17 답 ②

4 %의 소금물의 양을 x g이라고 하면

$\dfrac{4}{100}\times x+\dfrac{10}{100}\times(450-x)=\dfrac{8}{100}\times450$

$4x+4500-10x=3600$

$6x=900 \qquad \therefore\ x=150$

따라서 4 %의 소금물의 양은 150 g이다.

18 답 40 g

1단계 12 %의 소금물의 양을 문자를 사용한 식으로 나타내기

소금을 x g 더 넣는다고 하면 12 %의 소금물의 양은 $(400+160+x)$ g이다.

2단계 더 넣어야 하는 소금의 양 구하기

섞기 전의 소금의 양의 합과 섞은 후의 소금물에 들어 있는 소금의 양은 같으므로

$\dfrac{8}{100}\times400+x=\dfrac{12}{100}\times(400+160+x)$

$3200+100x=4800+1920+12x$

$88x=3520 \qquad \therefore\ x=40$

따라서 더 넣어야 하는 소금의 양은 40 g이다.

단계	채점 기준	비율
❶	12 %의 소금물의 양을 문자를 사용한 식으로 나타냈다.	40 %
❷	더 넣어야 하는 소금의 양을 구했다.	60 %

Lv. 2 사고를 확장하는 실전 문제

74쪽～79쪽

01 ③	02 80	03 462	04 4	05 ⑤
06 29일	07 7000원	08 ①	09 ③	10 700
11 162	12 171	13 158	14 ④	15 48
16 ③	17 ①	18 60초	19 17.5	
20 오후 1시 48분		21 4일	22 5일	23 4분
24 80분	25 300 g	26 ④	27 200	28 ④
29 ④	30 $\dfrac{5}{3}$ km	31 ②	32 ②	33 480 m
34 시속 16 km		35 425 m	36 ③	

01 답 ③

불꽃이 터지는 것을 본 순간부터 소리가 들릴 때까지 걸린 시간은 A 지점에서 2초, B 지점에서 5초이므로 두 지점 A, B 사이의 시간 차이는 3초이다.

이때 두 지점 A, B 사이의 거리가 1029 m이므로 소리의 속력은 초속 $\dfrac{1029}{3}=343\ (\mathrm{m})$

이 날의 기온을 x ℃라고 하면

$331+0.6x=343,\ 0.6x=12$

$\therefore\ x=20$

따라서 이 날의 기온은 20 ℃이다.

02 답 80

해결 key Point!

합격자, 불합격자의 환산 점수의 평균을 x를 사용한 식으로 나타낸다.

최저 합격자의 원점수가 x점이므로 환산 점수는
$0.9x+5$(점)
(나)에 의하여 합격자의 환산 점수의 평균은
$(0.9x+5)+16=0.9x+21$(점)
(다)에 의하여 불합격자의 환산 점수의 평균은
$(0.9x+5)-24=0.9x-19$(점)
이때 (가)에서 (합격자 수):(불합격자 수)=5:11이므로 합격자 수를 $5k$, 불합격자 수를 $11k$라고 하면 (라)에 의하여 전체 환산 점수의 총점은
$16k\times65.5=5k(0.9x+21)+11k(0.9x-19)$
$16\times65.5=5(0.9x+21)+11(0.9x-19)$
$1048=4.5x+105+9.9x-209$
$14.4x=1152,\ 144x=11520$
$\therefore\ x=80$

03 답 462

해결 key Point!

백의 자리의 숫자를 일의 자리의 숫자로 나타낸다.

처음 수의 백의 자리의 숫자를 x, 십의 자리의 숫자를 y, 일의 자리의 숫자를 z라고 하면 $x=2z$
백의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자를 바꾼 수는 처음 수보다 198만큼 작으므로
$100z+10y+2z=(200z+10y+z)-198$
$99z=198 \qquad \therefore\ z=2$
이때 $x=2z=4$이고 각 자리의 숫자의 합이 12이므로
$4+y+2=12 \qquad \therefore\ y=6$
따라서 처음 세 자리 자연수는 462이다.

04 답 4

해결 key Point!

10점, 8점을 맞힌 화살의 개수를 9점을 맞힌 화살의 개수로 표현한다.

1단계 맞힌 화살의 개수를 문자를 사용한 식으로 나타내기

9점을 맞힌 화살의 개수를 x라고 하면 10점을 맞힌 화살의 개수는 $\frac{x+2}{2}$, 8점을 맞힌 화살의 개수는 $\frac{1}{2}x$이다.

2단계 9점을 맞힌 화살의 개수 구하기

이때 민준이는 총 82점을 득점하였으므로
$10\times\frac{x+2}{2}+9x+8\times\frac{1}{2}x=82$
$5x+10+9x+4x=82,\ 18x=72$
$\therefore\ x=4$
따라서 민준이가 9점을 맞힌 화살의 개수는 4이다.

단계	채점 기준	비율
❶	맞힌 화살의 개수를 문자를 사용한 식으로 나타냈다.	40 %
❷	9점을 맞힌 화살의 개수를 구했다.	60 %

05 답 ⑤

첫 번째 학생은 x번, 두 번째 학생은 y번, 세 번째부터 열다섯 번째까지의 학생은 모두 $(k+1)$번 자유투를 던졌을 때, 전체 학생이 던진 자유투 횟수의 평균이 첫 번째와 두 번째 학생이 던진 자유투 횟수의 평균과 같으므로
$\frac{x+y+13(k+1)}{15}=\frac{x+y}{2}$
$2\{x+y+13(k+1)\}=15(x+y)$
$2x+2y+26k+26=15x+15y$
$26k+26=13x+13y$
$\therefore\ k+1=\frac{1}{2}(x+y)$
이때 열다섯 번째 학생이 던진 자유투의 총횟수는
$k+1=\frac{1}{2}(x+y)$이므로
$a=2,\ b=0$
$\therefore\ a+b=2+0=2$

06 답 29일

1단계 묶인 칸의 수의 규칙 찾기

묶인 8칸 중 윗 줄의 맨 왼쪽의 수를 x라고 하면 8칸의 수는 다음과 같다.

x	$x+1$	$x+2$	$x+3$
$x+7$	$x+8$	$x+9$	$x+10$

2단계 x의 값 구하기

$x+(x+1)+(x+2)+(x+3)+(x+7)$
$+(x+8)+(x+9)+(x+10)=192$
이므로
$8x+40=192,\ 8x=152$
$\therefore\ x=19$

3단계 가장 큰 수의 칸은 며칠인지 구하기

따라서 묶인 칸에서 가장 큰 수는 $x+10=19+10=29$이므로 29일이다.

단계	채점 기준	비율
❶	묶인 칸의 수의 규칙을 찾았다.	40 %
❷	x의 값을 구했다.	40 %
❸	가장 큰 수의 칸은 며칠인지 구했다.	20 %

07 답 7000원

상품의 원가를 x원이라고 하면 정가는
$x+\frac{40}{100}x=\frac{7}{5}x$(원)

창립기념일을 맞아 정가에서 10 %를 할인한 가격에 추가로 1000원 할인 쿠폰까지 적용하여 판매한 가격은

$\frac{7}{5}x\left(1-\frac{10}{100}\right)-1000=\frac{63}{50}x-1000$(원)

이때 이익이 원가의 6 %이므로

$\left(\frac{63}{50}x-1000\right)-x=\frac{6}{100}x$

$\frac{1}{5}x=1000 \qquad \therefore x=5000$

따라서 이 상품의 정가는 $\frac{7}{5}\times5000=7000$(원)이다.

참고 상품의 원가를 x원이라고 했으므로 x의 값을 구한 후 정가를 구해야 한다.

08 답 ①

상품의 원가를 x원이라고 하면 정가는

$x+\frac{50}{100}x=\frac{3}{2}x$(원)

정가에서 20 % 할인한 판매 가격은

$\frac{3}{2}x\left(1-\frac{20}{100}\right)=\frac{6}{5}x$(원)

이므로 이때의 이익은

$\frac{6}{5}x-x=\frac{1}{5}x$(원)

20개를 판매했을 때의 총이익은

$20\times\frac{1}{5}x=4x$(원) ...... ㉠

또, 정가에서 500원을 할인한 판매 가격은

$\left(\frac{3}{2}x-500\right)$원이므로 이때의 이익은

$\left(\frac{3}{2}x-500\right)-x=\frac{1}{2}x-500$(원)

24개를 판매했을 때의 총이익은

$24\left(\frac{1}{2}x-500\right)=12x-12000$(원) ...... ㉡

㉠, ㉡이 같아야 하므로

$4x=12x-12000$

$8x=12000 \qquad \therefore x=1500$

따라서 이 상품의 원가는 1500원이다.

09 답 ③

해결 key Point!

음식 부스를 이용한 학생을 햄버거만 구매, 음료수만 구매, 두 개 모두 구매한 학생으로 나누어 생각해야 한다.

햄버거를 구매한 학생 수를 x라고 하면 음료수를 구매한 학생 수는 $x-3$이므로

햄버거만 구매한 학생은 $45-(x-3)=48-x$

음료수만 구매한 학생은 $45-x$

두 개 모두 구매한 학생은 $x-(48-x)=2x-48$

두 개를 모두 구매할 때의 판매 가격은

$(4000+2000)\times\left(1-\frac{10}{100}\right)=6000\times\frac{9}{10}=5400$(원)

총매출이 205200원이므로

$4000(48-x)+2000(45-x)+5400(2x-48)=205200$

$20(48-x)+10(45-x)+27(2x-48)=1026$

$960-20x+450-10x+54x-1296=1026$

$24x=912 \qquad \therefore x=38$

따라서 햄버거를 구매한 학생 수는 38이므로

햄버거만 구매한 학생 수는 $48-38=10$

10 답 700

인쇄 매수를 x라고 하면

인쇄소 A에 맡길 때의 총비용은

$25000+20x$(원)

인쇄소 A에 400장의 인쇄를 맡길 때의 총비용은

$25000+20\times400=33000$(원)

인쇄소 B에 400장의 인쇄를 맡길 때의 총비용은

$10000+50\times400=30000$(원)

따라서 400장 이하의 포스터를 인쇄할 때, 항상 인쇄소 B가 더 저렴하다.

400장을 초과하여 인쇄했을 때의 인쇄물 1장당 비용은

$50\left(1-\frac{40}{100}\right)=30$(원)

즉, 인쇄소 B에 맡길 때의 총비용은

$30000+30(x-400)$(원)

따라서 두 인쇄소 A, B에 맡길 때의 총비용이 서로 같아지는 인쇄 매수는

$25000+20x=30000+30(x-400)$

$25000+20x=30000+30x-12000$

$10x=7000 \qquad \therefore x=700$

즉, 총비용이 같아지는 인쇄 매수는 700이다.

11 답 162

해결 key Point!

A가 x에서 a % 증가하고 B가 y에서 b % 감소할 때

(전체 변화량)=(A의 변화량)+(B의 변화량)

$=\frac{a}{100}x-\frac{b}{100}y$

1단계 변화한 학생 수를 문자를 사용한 식으로 나타내기

작년의 여학생 수를 x라고 하면 작년의 남학생 수는 $x-60$

올해의 남학생 수는 작년보다 20 % 증가했으므로

$\frac{20}{100}(x-60)=\frac{1}{5}x-12$

올해의 여학생 수는 작년보다 10 % 감소했으므로

$\frac{10}{100}x=\frac{1}{10}x$

2단계 작년의 여학생 수 구하기

이때 올해 증가된 전체 학생 수는 6이므로

$\left(\frac{1}{5}x-12\right)-\frac{1}{10}x=6$

$10\left(\frac{1}{5}x-12\right)-x=60$, $2x-120-x=60$

$\therefore x=180$

즉, 작년의 여학생 수는 180이다.

3단계 올해의 여학생 수 구하기

따라서 올해의 여학생 수는

$180-\frac{1}{10}\times180=180-18=162$

단계	채점 기준	비율
❶	변화한 학생 수를 문자를 사용한 식으로 나타냈다.	40 %
❷	작년의 여학생 수를 구했다.	40 %
❸	올해의 여학생 수를 구했다.	20 %

12 답 171

작년의 남학생 수를 x라고 하면 작년의 여학생 수는 $500-x$

올해의 남학생 수는 작년보다 5 % 감소했으므로

$x\left(1-\frac{5}{100}\right)=\frac{19}{20}x$

올해의 여학생 수는 작년보다 10 % 증가했으므로

$(500-x)\left(1+\frac{10}{100}\right)=\frac{11}{10}(500-x)$

또, 내년에 입학 예정인 남학생 수는 올해의 남학생 수보다 10 % 감소하므로

$\frac{19}{20}x\left(1-\frac{10}{100}\right)=\frac{171}{200}x$

내년에 입학 예정인 여학생 수는 올해와 같으므로

$\frac{11}{10}(500-x)$

이때 내년에 입학 예정인 전체 학생 수는 501이므로

$\frac{171}{200}x+\frac{11}{10}(500-x)=501$

$171x+220(500-x)=100200$

$171x+110000-220x=100200$

$49x=9800 \qquad \therefore x=200$

따라서 작년의 남학생 수는 200이므로

내년에 입학 예정인 남학생 수는

$\frac{171}{200}x=\frac{171}{200}\times200=171$

13 답 158

해결 key Point!

한 탁자에 7명씩 앉으면 탁자가 2개 남고 마지막 탁자에는 자리가 3개 남으므로 7명씩 앉은 탁자의 개수는 {(탁자의 개수)-3}이다.

탁자의 개수를 x라고 하면 한 탁자에 6명씩 앉으면 8명의 학생이 앉지 못하므로 회의에 참가한 학생 수는

$6x+8$

또, 한 탁자에 7명씩 앉으면 탁자가 2개 남고 마지막 탁자에는 자리가 3개 남으므로 회의에 참가한 학생 수는 $7(x-3)+4$

한 탁자에 6명씩 앉을 때와 한 탁자에 7명씩 앉을 때의 학생 수는 같으므로

$6x+8=7(x-3)+4$

$6x+8=7x-21+4 \qquad \therefore x=25$

따라서 탁자의 개수는 25이므로 회의에 참가한 학생 수는

$6x+8=6\times25+8=158$

14 답 ④

과자 1개의 정가를 x원이라고 하자.

과자를 7개 살 때 지불해야 하는 금액은

$7x-700$(원)

과자를 5개 살 때 지불해야 하는 금액은

$5x-500$(원)

이때 지후가 과자를 7개 사면 300원이 부족하고, 5개를 사면 700원이 남으므로

$(7x-700)-300=(5x-500)+700$

$7x-1000=5x+200$

$2x=1200 \qquad \therefore x=600$

따라서 과자 1개의 정가는 600원이므로 지후가 가진 돈은

$5x+200=5\times600+200=3200$(원)

따라서 과자를 6개 사면

$6x-600=6\times600-600=3000$(원)

을 지불해야 하므로 지후는 가진 돈에서

$3200-3000=200$(원)이 남는다.

15 답 48

한별이가 처음에 가지고 있던 마카롱의 개수를 x라고 하면 한별이는 아버지께 $\frac{1}{6}x$개, 어머니께 $\frac{1}{8}x$개, 누나에게 $\frac{1}{12}x$개, 친구에게 10개를 주었으므로 남은 마카롱의 개수는

$x-\frac{1}{6}x-\frac{1}{8}x-\frac{1}{12}x-10=\frac{5}{8}x-10$

이때 남은 마카롱의 개수는 아버지와 어머니께 드린 마카롱의 개수의 합보다 6개 더 많으므로

$\frac{5}{8}x-10=\frac{1}{6}x+\frac{1}{8}x+6$

$\frac{1}{3}x=16 \qquad \therefore x=48$

따라서 한별이가 처음에 가지고 있던 마카롱의 개수는 48이다.

16 답 ③

처음의 전체 성과금을 x만 원이라고 하면 기획팀에 전체 성과금의 $\frac{1}{5}$보다 20만 원을 더 주었으므로 기획팀이 처음에 받은 성과금은

$\frac{1}{5}x+20$(만 원)

기획팀에 성과금을 주고 남은 금액은

$x-\left(\frac{1}{5}x+20\right)=\frac{4}{5}x-20$(만 원)

개발팀에 남은 금액의 $\frac{1}{4}$보다 10만 원을 더 주었으므로 개발팀이 받은 성과금은

$\frac{1}{4}\left(\frac{4}{5}x-20\right)+10=\frac{1}{5}x-5+10$

$=\frac{1}{5}x+5$(만 원)

마지막으로 남은 금액은

$\left(\frac{4}{5}x-20\right)-\left(\frac{1}{5}x+5\right)=\frac{4}{5}x-20-\frac{1}{5}x-5$

$=\frac{3}{5}x-25$(만 원)

마지막으로 남은 금액을 기획팀에게 모두 주었으므로 기획팀이 받은 총 성과금은

$\left(\frac{1}{5}x+20\right)+\left(\frac{3}{5}x-25\right)=\frac{4}{5}x-5$(만 원)

기획팀이 받은 총 성과금이 개발팀이 받은 금액의 3배이므로

$\frac{4}{5}x-5=3\left(\frac{1}{5}x+5\right)$

$\frac{4}{5}x-5=\frac{3}{5}x+15,\ \frac{1}{5}x=20$

$\therefore\ x=100$

따라서 처음의 전체 성과금이 100만 원이므로 기획팀이 받은 총 성과금은

$\frac{4}{5}x-5=\frac{4}{5}\times100-5=75$(만 원)

17 답 ①

여자 합격자 수를 x라고 하면 합격자의 남녀의 비가 $4:1$이므로 남자 합격자 수는 $4x$이다.

여자 입사 지원자가 여자 합격자보다 140명이 더 많으므로 여자 입사 지원자 수는 $x+140$이고 여자 불합격자 수는 140이다.

이때 불합격자의 남녀의 비는 $1:1$이므로 남자 불합격자 수도 140이다.

즉, 남자 지원자 수는 $4x+140$이고 입사 지원자의 남녀의 비는 $5:3$이므로

$(4x+140):(x+140)=5:3$

$3(4x+140)=5(x+140),\ 12x+420=5x+700$

$7x=280\qquad\therefore\ x=40$

따라서 여자 합격자 수는 40이므로 전체 입사 지원자 수는

$(4x+140)+(x+140)=5x+280=5\times40+280=480$

참고 입사 지원자 수를 표로 나타내면 다음과 같다.

	남	여
지원자(명)	$4x+140$	$x+140$
합격자(명)	$4x$	x
불합격자(명)	140	140

18 답 60초

1단계 선분 AP의 길이 구하기

선분 AP의 길이를 x cm라고 하면 사각형 ABCP의 넓이는 3300 cm^2이므로

$\frac{1}{2}\times(x+90)\times60=3300$

$30(x+90)=3300,\ x+90=110$

$\therefore\ x=20$

2단계 점 P가 움직인 시간 구하기

따라서 점 P는 점 A에서 20 cm 이동했고, 점 P는 선분 BC와 선분 AB에서 매초 3 cm의 속력으로 움직이고 선분 AP에서 매초 2 cm의 속력으로 움직이므로 점 P가 움직인 시간은

$\frac{90}{3}+\frac{60}{3}+\frac{20}{2}=30+20+10=60$(초)

단계	채점 기준	비율
❶	선분 AP의 길이를 구했다.	50 %
❷	점 P가 움직인 시간을 구했다.	50 %

19 답 17.5

해결 key Point!

물이 실제로 채워지는 직육면체 모양의 가로의 길이와 세로의 길이는 물통의 두께를 빼주어야 한다.

물통의 내부 공간의 가로의 길이는 $15-2=13$ (cm), 세로의 길이는 $12-2=10$ (cm)이고 높이는 $(h-1)$ cm이다.

이때 물통에 물을 가득 채운 뒤 물을 325 cm^3 만큼 덜어낸 후 남아 있는 물의 높이가 14 cm이므로

$13\times10\times\{(h-1)-14\}=325$

$130(h-15)=325,\ h-15=\frac{5}{2}$

$\therefore\ h=\frac{35}{2}=17.5$

20 답 오후 1시 48분

1단계 양수기를 사용한 시간을 문자를 사용한 식으로 나타내기

수영장의 물 전체의 양을 1이라고 하면 두 양수기 A, B가 1시간 동안 퍼내는 물의 양은 각각 $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{6}$이다.

양수기 A만 사용한 시간을 x시간이라고 하면 두 양수기 A, B를 함께 사용한 시간은 $\frac{1}{2}x$시간이다.

2단계 양수기 A만 사용한 시간 구하기

이때 양수기 A만 x시간 사용하고 두 양수기 A, B를 함께 $\frac{1}{2}x$시간 사용했으므로

$\frac{1}{12}x+\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{6}\right)\times\frac{1}{2}x=1$

$\frac{1}{12}x+\frac{1}{8}x=1$, $\frac{5}{24}x=1$

$\therefore x=\frac{24}{5}$

3단계 양수기 B를 추가로 사용하기 시작한 시각 구하기

따라서 양수기 A만 사용한 시간은 $\frac{24}{5}$시간, 즉 4시간 48분이므로 양수기 B를 추가로 사용하기 시작한 시각은 오전 9시에서 4시간 48분 후인 오후 1시 48분이다.

단계	채점 기준	비율
❶	양수기를 사용한 시간을 문자를 사용한 식으로 나타냈다.	40 %
❷	양수기 A만 사용한 시간을 구했다.	50 %
❸	양수기 B를 추가로 사용하기 시작한 시각을 구했다.	10 %

21 답 4일

전체 일의 양을 1이라고 하면 주윤, 민아, 나연이가 하루에 할 수 있는 일의 양은 각각 $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{30}$이다.

주윤이가 혼자 t일 일했다고 하면 민아는 $\left(\frac{3}{2}t+1\right)$일 일을 하였으므로

$\frac{1}{10}t+\frac{1}{15}\left(\frac{3}{2}t+1\right)+\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{30}\right)\times3+\frac{1}{30}\times4=1$

$\frac{1}{10}t+\frac{1}{10}t+\frac{1}{15}+\frac{2}{5}+\frac{2}{15}=1$, $\frac{2}{10}t=\frac{2}{5}$

$\therefore t=2$

따라서 주윤이가 혼자 2일 일을 하였으므로 민아가 혼자 일한 기간은 $\frac{3}{2}t+1=\frac{3}{2}\times2+1=4$(일)이다.

22 답 5일

전체 프로젝트의 양을 1이라고 하면 두 기획자 A, B가 하루에 할 수 있는 일의 양은 각각 $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{30}$이다.

기획자 A가 휴가를 t일 동안 다녀왔다고 하면 기획자 A는 $(15-t)$일, 기획자 B는 15일 일을 하였으므로

$\frac{1}{20}(15-t)+\frac{1}{30}\times15=1$

$\frac{3}{4}-\frac{1}{20}t+\frac{1}{2}=1$, $\frac{1}{20}t=\frac{1}{4}$

$\therefore t=5$

따라서 기획자 A는 휴가를 5일 다녀왔다.

23 답 4분

전체 문서의 양을 1이라고 하면 동하와 혜지가 1분 동안 입력하는 문서의 양은 각각 $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{18}$이다.

두 사람이 함께 입력할 때의 문서 입력 속도는

$\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{18}\right)\times\frac{90}{100}=\frac{1}{8}$

이때 혜지가 x분 동안 입력했다고 하면 동하는 $(10-x)$분 동안 혼자 입력했으므로

$\frac{1}{12}(10-x)+\frac{1}{8}x=1$

$\frac{5}{6}-\frac{1}{12}x+\frac{1}{8}x=1$, $\frac{1}{24}x=\frac{1}{6}$

$\therefore x=4$

따라서 혜지가 입력한 시간은 4분이다.

24 답 80분

전체 물통의 양을 1이라고 하면 두 호스 A, B가 1시간 동안 물을 채우는 양은 각각 $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{9}$이고 배수관 C가 1시간 동안 물을 빼내는 양은 $\frac{1}{12}$이다.

배수관 C가 열려 있을 때 두 호스 A, B가 함께 물을 채우는 속도는 $\frac{1}{6}+\frac{1}{9}-\frac{1}{12}=\frac{7}{36}$

배수관 C가 닫혀 있을 때 두 호스 A, B가 함께 물을 채우는 속도는 $\frac{1}{6}+\frac{1}{9}=\frac{5}{18}$

이때 배수관 C가 x시간 동안 열려 있었다고 하면 배수관 C가 닫혀 있는 시간은 $(4-x)$시간이므로

$\frac{7}{36}x+\frac{5}{18}(4-x)=1$

$\frac{7}{36}x+\frac{10}{9}-\frac{5}{18}x=1$, $\frac{1}{12}x=\frac{1}{9}$

$\therefore x=\frac{4}{3}$

따라서 배수관 C는 $\frac{4}{3}$시간, 즉 80분 동안 열려 있었다.

25 답 300 g

12 %의 소금물의 양을 x g이라고 하면 6 %의 소금물의 양은 $(x+100)$ g

6 %의 소금물과 12 %의 소금물을 섞은 후 물 50 g을 더 넣어서 8 %의 소금물을 만들었으므로

$\frac{6}{100}(x+100)+\frac{12}{100}x=\frac{8}{100}(x+100+x+50)$

$6(x+100)+12x=8(2x+150)$

$6x+600+12x=16x+1200$

$2x=600$ $\quad\therefore x=300$

따라서 12 %의 소금물의 양은 300 g이다.

26 답 ④

x %의 소금물 400 g에 들어 있는 소금의 양은

$\frac{x}{100}\times 400=4x$ (g)

❶에서 물을 증발시켜 전체 질량이 20 % 감소되었으므로 남은 소금물의 양은

$400\times\left(1-\frac{20}{100}\right)=320$ (g)

❷에서 소금 40 g을 더 넣었으므로

소금물의 양은 $320+40=360$ (g), 소금의 양은 $4x+40$ (g)

❸에서 물 40 g을 더 부었으므로 최종 소금물의 양은

$360+40=400$ (g)

이때 최종 소금물의 농도는 처음 소금물의 농도의 3배인 $3x$ %가 되었으므로

$4x+40=\frac{3x}{100}\times 400$

$4x+40=12x$

$8x=40$ $\therefore x=5$

27 답 200

비커 A에 처음 들어 있는 소금의 양은 $\frac{15}{100}\times 600=90$ (g)

비커 A에서 x g의 소금물을 덜어내고 5 %의 소금물 x g을 넣었을 때, 비커 A에 들어 있는 소금의 양은

$\left(90-\frac{15}{100}x\right)+\frac{5}{100}x=90-\frac{1}{10}x$ (g)

10 %의 소금물 400 g이 들어 있는 비커 B로 비커 A에 담긴 소금물 600 g을 모두 넣었더니 11 %의 소금물이 되었으므로

$\frac{10}{100}\times 400+\left(90-\frac{1}{10}x\right)=\frac{11}{100}\times(400+600)$

$40+\left(90-\frac{1}{10}x\right)=110$

$\frac{1}{10}x=20$ $\therefore x=200$

28 답 ④

❶에서 그릇 A의 소금물 200 g을 그릇 B에 넣었으므로 그릇 A에 남은 소금의 양은 $\frac{8}{100}\times 300=24$ (g)

이때 실험 전 그릇 B의 소금물의 농도를 x %라고 하면 ❶에서 그릇 B의 소금의 양은

$\frac{x}{100}\times 500+\frac{8}{100}\times 200=5x+16$ (g)

이때 그릇 B의 소금물의 농도는

$\frac{5x+16}{700}\times 100=\frac{5x+16}{7}$ (%)

❷에서 그릇 B의 소금물 200 g을 다시 그릇 A로 옮겼으므로 그릇 A로 옮겨진 소금의 양은

$\frac{5x+16}{7}\times\frac{1}{100}\times 200=\frac{10x+32}{7}$ (g)

실험이 모두 끝난 후 그릇 A의 소금물의 농도가 10 %가 되었고 소금물의 양은 500 g이므로

$24+\frac{10x+32}{7}=\frac{10}{100}\times 500$

$24+\frac{10x+32}{7}=50$, $\frac{10x+32}{7}=26$

$10x+32=182$, $10x=150$

$\therefore x=15$

따라서 실험 전 그릇 B의 소금물의 농도는 15 %이다.

다른 풀이

실험 전 그릇 A에 들어 있는 소금의 양은

$\frac{8}{100}\times 500=40$ (g)

❶에서 그릇 A에 남은 소금의 양은

$40\times\frac{300}{500}=24$ (g)

그릇 A에서 그릇 B로 이동된 소금의 양은

$40-24=16$ (g)

실험이 모두 끝난 후 그릇 A에 들어 있는 소금의 양은

$\frac{10}{100}\times 500=50$ (g)

즉, ❷에서 그릇 A에 추가된 소금의 양은

$50-24=26$ (g)

따라서 ❷에서 그릇 B의 소금물 200 g에는 소금이 26 g 들어 있으므로 그릇 B의 소금물 700 g에 들어 있는 소금의 양은

$26\times\frac{700}{200}=91$ (g)

실험 전 소금물 500 g에 들어 있는 소금의 양은

$91-16=75$ (g)

따라서 실험 전 그릇 B의 소금물의 농도는

$\frac{75}{500}\times 100=15$ (%)

29 답 ④

해결 key Point!

가능한 많은 합금 C를 만드는 경우는 두 합금 A 또는 B 중 하나를 모두 쓰는 경우이다.

합금 C는 금과 은의 비율이 1 : 1이므로 금과 은의 양이 같다.
이때 합금 C를 가능한 한 많이 만드는 경우는 합금 A 또는 합금 B를 전부 사용할 때이다.

(i) 합금 A를 전부 사용하는 경우

사용한 합금 A에 들어 있는 금의 양은

$540\times\frac{1}{3}=180$ (g), 은의 양은 $540\times\frac{2}{3}=360$ (g)이므로

합금 B의 양을 x g이라고 하면 합금 C의 금과 은의 양이 같으므로

$180+\frac{4}{5}x=360+\frac{1}{5}x$

$\frac{3}{5}x=180$ $\therefore x=300$

(ii) 합금 B를 전부 사용하는 경우

사용한 합금 B에 들어 있는 금의 양은

$400\times\frac{4}{5}=320$(g), 은의 양은 $400\times\frac{1}{5}=80$ (g)이므로

합금 A의 양을 y g이라고 하면 합금 C의 금과 은의 양이 같으므로

$\frac{1}{3}y+320=\frac{2}{3}y+80$

$\frac{1}{3}y=240$ $\quad\therefore y=720$

이때 합금 A는 540 g만 가지고 있으므로 합금 B를 전부 사용하지 못한다.

(i), (ii)에 의하여 합금 C를 가능한 많이 만들기 위해 사용한 두 합금 A, B의 양은 540 g, 300 g이므로 만들 수 있는 합금 C는

$540+300=840$ (g)

30 답 $\frac{5}{3}$ km

1단계 각각 걸어갔을 때 걸린 시간을 문자를 사용한 식으로 나타내기

집과 도서관 사이의 거리를 x km라고 하면 집에서 도서관까지 걸어갔을 때 걸린 시간은 $\frac{x}{4}$시간, 도서관에서 집으로 뛰어왔을 때 걸린 시간은 $\frac{x}{10}$시간이다.

2단계 집과 도서관 사이의 거리 구하기

도서관에서 집으로 오는 도중 편의점에서 6분 동안 머물렀음에도 집에서 도서관까지 걸어갔을 때보다 9분 덜 걸렸으므로

$\frac{x}{4}-\left(\frac{x}{10}+\frac{6}{60}\right)=\frac{9}{60}$

$\frac{x}{4}-\frac{x}{10}-\frac{1}{10}=\frac{3}{20}$, $\frac{3}{20}x=\frac{1}{4}$

$\therefore x=\frac{5}{3}$

따라서 집과 도서관 사이의 거리는 $\frac{5}{3}$ km이다.

단계	채점 기준	비율
❶	각각 걸어갔을 때 걸린 시간을 문자를 사용한 식으로 나타냈다.	40 %
❷	집과 도서관 사이의 거리를 구했다.	60 %

31 답 ②

해결 key Point!

두 선수가 도착하는 데 걸린 시간을 각각 구한다.

선수 A가 자전거를 수리하는 데 걸린 시간을 x분이라고 하면 선수 A가 결승점까지 가는 데 걸린 시간은

$\frac{5000+600}{400}+x=14+x$(분)

선수 B가 결승점까지 가는 데 걸린 시간은 $\frac{5000}{200}=25$(분)

이때 선수 A는 선수 B보다 2분 먼저 결승점에 도착하였으므로

$14+x=25-2$ $\quad\therefore x=9$

따라서 선수 A가 자전거를 수리하는 데 걸린 시간은 9분이다.

32 답 ②

해결 key Point!

자동차 A가 먼저 달린 거리를 구하고 두 자동차의 속력을 분속으로 나타낸다.

자동차 B가 출발하기 전까지 자동차 A가 달린 거리는

$60\times\frac{10}{60}=10$ (km)

자동차 B가 출발한 지 x시간 후에 자동차 A를 처음으로 따라잡았다고 하면 시속 90 km로 달리는 자동차 B가 시속 60 km로 달리는 자동차 A보다 10 km를 더 달려야 하므로

$90x-60x=10$, $30x=10$

$\therefore x=\frac{1}{3}$

즉, 자동차 B가 달린 거리는

$90x=90\times\frac{1}{3}=30$ (km)

따라서 자동차 B는 트랙을 총 $\frac{30}{4}=7.5$(바퀴) 돌았다.

33 답 480 m

해결 key Point!

두 로봇은 두 로봇의 이동 거리의 합이 3.3 km일 때 만난다.

로봇 α가 10분 동안 혼자 움직인 거리는 $10\times60=600$ (m)이므로 두 로봇 α, β 사이의 남은 거리는

$3300-600=2700$ (m)

두 로봇 α, β가 만날 때까지 걸린 시간을 x분이라고 하면

$60x+90x=2700$, $150x=2700$

$\therefore x=18$

따라서 두 로봇이 만날 때까지 걸린 시간이 18분이므로 로봇 α가 움직이는 거리는 $600+60\times18=1680$ (m)

이때 정찰 드론은 로봇 β와 동시에 출발하여 18분 날아다녔으므로 이동한 거리는 $250\times18=4500$ (m)

즉, 정찰 드론은 로봇 α가 출발한 지점으로부터 $4500-3300=1200$ (m)인 지점에 있으므로 로봇 α와 정찰 드론 사이의 거리는

$1680-1200=480$ (m)

34 답 시속 16 km

1단계 A 지점에서 B 지점까지 갈 때의 배의 속력을 문자를 사용한 식으로 나타내기

배의 원래 속력을 시속 x km라고 하면

강물이 A 지점에서 B 지점을 향해 흐르므로
(A 지점에서 B 지점까지 갈 때의 배의 속력)
$=$(배의 원래 속력)$+$(강물의 속력)
$=x+2$ (km/시)

2단계 B 지점에서 A 지점까지 갈 때의 배의 속력을 문자를 사용한 식으로 나타내기

(B 지점에서 A 지점까지 갈 때의 배의 속력)
$=$(엔진에 문제가 생긴 배의 속력)$-$(강물의 속력)
$=\left(1-\frac{20}{100}\right)x-2=\frac{4}{5}x-2$ (km/시)

3단계 배의 원래 속력 구하기

두 지점 A, B 사이의 거리는 같으므로
$3(x+2)=5\left(\frac{4}{5}x-2\right)$
$3x+6=4x-10 \qquad \therefore x=16$
따라서 배의 원래 속력은 시속 16 km이다.

단계	채점 기준	비율
❶	A 지점에서 B 지점까지 갈 때의 배의 속력을 문자를 사용한 식으로 나타냈다.	40 %
❷	B 지점에서 A 지점까지 갈 때의 배의 속력을 문자를 사용한 식으로 나타냈다.	40 %
❸	배의 원래 속력을 구했다.	20 %

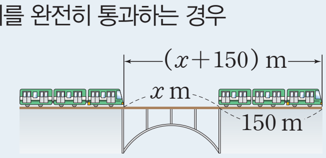
35 답 425 m

해결 key Point!
기차가 다리를 건널 때와 터널을 통과할 때의 속도가 같다.

다리의 길이를 x m라고 하면 터널의 길이는 $3x$ m이다.
길이가 150 m인 기차가 길이가 x m인 다리를 완전히 통과하려면 $(x+150)$ m를 달려야 하고, 길이가 $3x$ m인 터널을 통과할 때 기차가 보이지 않는 동안 기차는 $(3x-150)$ m를 달려야 한다.
이때 기차의 속력은 일정하므로
$\frac{x+150}{23}=\frac{3x-150}{45}$
$45(x+150)=23(3x-150)$
$45x+6750=69x-3450$
$24x=10200$
$\therefore x=425$
따라서 다리의 길이는 425 m이다.

Level UP

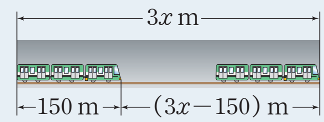
(1) 기차가 다리를 완전히 통과하는 경우



길이가 150 m인 기차가 길이가 x m인 다리를 완전히 통과하려면 $(x+150)$ m를 달려야 하므로

(기차의 속력)$=\frac{x+150}{\text{(완전히 통과하는 데 걸린 시간)}}$

(2) 기차가 터널을 통과할 때 기차가 보이지 않는 경우



기차가 길이가 $3x$ m인 터널을 통과할 때, 기차가 보이지 않는 동안 기차가 달린 거리는 $(3x-150)$ m이므로

(기차의 속력)$=\frac{3x-150}{\text{(보이지 않는 시간)}}$

36 답 ③

해결 key Point!
두 열차가 완전히 지나친다는 것은 두 열차의 이동 거리의 합이 두 열차의 길이의 합과 같다는 것이다.

열차 A의 길이를 x m라고 하면 열차 A의 속력은
초속 $\frac{400+x}{16}$ m
두 열차 A, B가 서로 반대 방향으로 달려 완전히 지나치려면 두 열차의 길이의 합이 두 열차가 움직인 거리의 합과 같아야 하므로
$x+120=4\times\frac{400+x}{16}+4\times20$
$x+120=100+\frac{1}{4}x+80, \ \frac{3}{4}x=60$
$\therefore x=80$
따라서 열차 A의 길이는 80 m이다.

Lv. X 상위 1%에 도달하는 심화 문제

81쪽~83쪽

01 -7	**02** 5	**03** $-\frac{10}{3}$	**04** 1	**05** 11
06 6	**07** 10개	**08** 오후 4시 24분		**09** 10시간

01 답 -7

해결 key Point!
n이 홀수일 때와 짝수일 때, 주어진 지수가 각각 홀수인지 짝수인지 구한다.

절댓값이 4인 음수는 -4이므로 $x=-4$

n이 홀수일 때, $2n$은 짝수, $n(n+1)+1$은 홀수, $2n+1$은 홀수이다.

따라서 주어진 식은

$$\frac{-\{-(-4)\}^2\times(-1)^{2n}}{|-(-4)|}+(-1)^{n(n+1)+1}\times\frac{16\times(-1)^{2n+1}}{(-4)^2}-\left\{\frac{-4}{2\times(-1)^n}\right\}^2$$

$$=\frac{-4^2}{4}+(-1)\times\frac{16\times(-1)}{16}-\left\{\frac{-4}{2\times(-1)}\right\}^2$$

$=-4+(-1)\times(-1)-2^2$

$=-4+1-4=-7$

n이 짝수일 때, $2n$은 짝수, $n(n+1)+1$은 홀수, $2n+1$은 홀수이다.

즉, n이 홀수일 때와 주어진 식의 값이 같다.

따라서 구하는 값은 -7이다.

꿀 한줄평

절댓값 기호를 풀 때, 부호 정하기

x의 값이 음수일 때, 즉 x가 음수인 -4일 때,

$|x|=|-4|=4$ (양수), $|-x|=|4|=4$ (양수)

이므로 $|-x|$를 x나 $-x$로 먼저 바꾸지 말고, x의 값을 먼저 대입하는 것이 편리하다.

02 답 5

해결 key Point!

주어진 식의 일부만 계산하여 값이 간단해지고 반복되는 부분을 찾는다.

$P=ax+b$라고 하면 $P_k=ak+b$

$P_1=a\times1+b=a+b$

$P_2=a\times2+b=2a+b$

$\therefore P_1-P_2=(a+b)-(2a+b)=-a$

이때

$P_{2n-1}-P_{2n}=\{a(2n-1)+b\}-(a\times2n+b)$

$\qquad=2an-a+b-2an-b=-a$

이므로 이웃한 두 항을 뺀 값은 항상 $-a$로 일정하다.

따라서 $P_1-P_2+P_3-P_4+\cdots+P_{49}-P_{50}=-125$에서

$(P_1-P_2)+(P_3-P_4)+\cdots+(P_{49}-P_{50})=-125$

$(-a)+(-a)+\cdots+(-a)=-125$

$-25a=-125$

$\therefore a=5$

꿀 한줄평

많은 항이 나열된 문제는 보통 일일히 계산하는 것이 아니고 결괏값이 규칙을 갖는 최소 단위를 찾아 그 값을 이용하여 답을 구할 수 있다.

03 답 $-\frac{10}{3}$

해결 key Point!

절댓값 기호를 풀며 만들어지는 모든 경우의 식을 풀어 x의 값을 구한다.

$|x+3+|2x-1||=10$에서

$x+3+|2x-1|=-10$ 또는 $x+3+|2x-1|=10$

(i) $x+3+|2x-1|=-10$일 때

$|2x-1|=-x-13$ ……㉠

$2x-1=x+13$ 또는 $2x-1=-x-13$

$\therefore x=14$ 또는 $x=-4$

$x=14$이면 $|2x-1|=|2\times14-1|=27$,

$-x-13=-14-13=-27$이므로 ㉠이 성립하지 않는다.

$x=-4$이면 $|2x-1|=|2\times(-4)-1|=9$,

$-x-13=-(-4)-13=-9$이므로 ㉠이 성립하지 않는다.

(ii) $x+3+|2x-1|=10$일 때

$|2x-1|=-x+7$ ……㉡

$2x-1=x-7$ 또는 $2x-1=-x+7$

$\therefore x=-6$ 또는 $x=\frac{8}{3}$

$x=-6$이면 $|2x-1|=|2\times(-6)-1|=13$,

$-x+7=-(-6)+7=13$이므로 ㉡이 성립한다.

$x=\frac{8}{3}$이면 $|2x-1|=\left|2\times\frac{8}{3}-1\right|=\frac{13}{3}$,

$-x+7=-\frac{8}{3}+7=\frac{13}{3}$이므로 ㉡이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식의 해는 $x=-6$, $x=\frac{8}{3}$이므로 그 합은

$-6+\frac{8}{3}=-\frac{10}{3}$

참고 절댓값 기호가 포함된 방정식에서 절댓값의 안과 밖에 모두 x가 있을 때에는 구한 해가 실제로 성립하는지 확인해 봐야 한다.

04 답 1

해결 key Point!

$x◈2$의 값은 $x<2$, $x\ge2$일 때 값이 다르고 $x◈5$의 값은 $x<5$, $x\ge5$일 때 값이 달리지므로 수직선을 세 구간 $x<2$, $2\le x<5$, $x\ge5$로 나누어 문제를 풀어야 한다.

(i) $x<2$일 때

$x◈2=2-x$, $x◈5=5-x$이므로

$(x◈2)+(x◈5)=17$에서

$(2-x)+(5-x)=17$

$7-2x=17$, $-2x=10$

$\therefore x=-5$

이때 $-5<2$이므로 성립한다.

(ii) $2\le x<5$일 때

$x◈2=2x-2$, $x◈5=5-x$이므로

$(x◈2)+(x◈5)=17$에서

$(2x-2)+(5-x)=17$

$x+3=17$　　$\therefore x=14$

이때 14는 $2\le x<5$를 만족시키지 않으므로 해가 아니다.

(iii) $x\ge5$일 때

$x◈2=2x-2$, $x◈5=2x-5$이므로

$(x◈2)+(x◈5)=17$에서

$(2x-2)+(2x-5)=17$

$4x-7=17$, $4x=24$

$\therefore x=6$

이때 $6\ge5$이므로 성립한다.

(i)~(iii)에 의하여 조건을 만족시키는 x의 값은 -5, 6이므로 구하는 합은

$(-5)+6=1$

05 답 11

해결 key Point!

세 방정식 (가), (나), (다)의 해를 모두 구한다.

(가)에서 $4(x-1)+x=3a+7$

$4x-4+x=3a+7$, $5x=3a+11$

$\therefore x=\dfrac{3a+11}{5}$

이때 (가)의 해는 $x=n-1$이므로

$n-1=\dfrac{3a+11}{5}$　　$\therefore n=\dfrac{3a+16}{5}$　　…… ㉠

(나)에서 $2(3x-1)-\{4(x+2)-b\}=7$

$6x-2-(4x+8-b)=7$, $6x-2-4x-8+b=7$

$2x=17-b$　　$\therefore x=\dfrac{17-b}{2}$

이때 (나)의 해는 $x=n$이므로

$n=\dfrac{17-b}{2}$　　…… ㉡

(다)에서 $1.5(x-1)=0.75(a+5)$의 양변에 4를 곱하면

$6(x-1)=3(a+5)$, $6x-6=3a+15$

$6x=3a+21$　　$\therefore x=\dfrac{a+7}{2}$

이때 (다)의 해는 $x=n+1$이므로

$n+1=\dfrac{a+7}{2}$　　$\therefore n=\dfrac{a+5}{2}$　　…… ㉢

㉠, ㉢에서 $\dfrac{3a+16}{5}=\dfrac{a+5}{2}$이므로 양변에 10을 곱하면

$2(3a+16)=5(a+5)$, $6a+32=5a+25$

$\therefore a=-7$

㉢에 $a=-7$을 대입하면

$n=\dfrac{-7+5}{2}=-1$

㉡에 $n=-1$을 대입하면

$-1=\dfrac{17-b}{2}$, $-2=17-b$

$\therefore b=19$

$\therefore a+b+n=-7+19+(-1)=11$

06 답 6

$3▣(x+1)=2\times3\times(x+1)-3-(x+1)+1$

$=6x+6-3-x-1+1$

$=5x+3$

$(5x+3)▣2=2(5x+3)\times2-(5x+3)-2+1$

$=20x+12-5x-3-1$

$=15x+8$

$(ax)▣b=2\times ax\times b-ax-b+1$

$=2abx-ax-b+1$

$=(2ab-a)x+(1-b)$

따라서 일차방정식 $\{3▣(x+1)\}▣2=(ax)▣b$에서

$15x+8=(2ab-a)x+(1-b)$

이 방정식의 해가 무수히 많으므로

$15=2ab-a$, $8=1-b$

$\therefore b=-7$

$15=2ab-a$에 $b=-7$을 대입하면

$15=2a\times(-7)-a$

$15=-15a$　　$\therefore a=-1$

$\therefore a-b=-1-(-7)=6$

07 답 10개

매표 창구 1개에서 1분 동안 판매된 입장권의 수를 k, 1분마다 새로 줄을 서는 인원수를 x, 처음 줄을 서 있던 인원수를 A라고 하자.

매표 창구를 5개 열었을 때 줄이 완전히 사라지는 데 40분이 걸리므로

(40분 동안 판매된 입장권의 수)

=(처음 줄을 서 있던 인원수)+(40분간 추가된 인원수)

즉, $5\times k\times40=A+40x$이므로

$A+40x=200k$　　…… ㉠

매표 창구를 8개 열었을 때 줄이 완전히 사라지는 데 20분이 걸리므로

(20분 동안 판매된 입장권의 수)

=(처음 줄을 서 있던 인원수)+(20분간 추가된 인원수)

즉, $8\times k\times20=A+20x$이므로

$A+20x=160k$　　…… ㉡

이때 $A=160k-20x$이므로 ㉠에 대입하면

$(160k-20x)+40x=200k$, $20x=40k$

$\therefore x=2k$

㉡에 $x=2k$를 대입하면

$A+20\times 2k=160k$, $A+40k=160k$

$\therefore A=120k$

따라서 1분마다 새로 줄을 서는 인원수는 $2k$, 처음 줄을 서 있던 인원수는 $120k$이다.

16분 이내에 대기했던 사람들이 모두 입장권을 구매하기 위해 필요한 창구 수를 N이라고 하면 16분 이내에 줄이 완전히 사라져야 하므로

(16분 동안 판매된 입장권의 수)

=(처음 줄을 서 있던 인원수)+(16분간 추가된 인원수)

$N\times k\times 16=120k+16\times 2k$

$16Nk=152k \qquad \therefore N=9.5$

따라서 매표 창구가 9.5개 필요하고 N은 자연수이므로 매표 창구를 최소 10개 열어야 한다.

꿀 한줄평

주어진 상황에서 미지수로 놓아야 할 것이 많다. 각 상황을 동일한 미지수를 이용하여 나타내고, 그 미지수 중 구해야 하는 미지수만 구하면 되므로 나머지 미지수를 제외하고 계산할 수 있도록 식을 변형 또는 계산해야 한다.

08 답 오후 4시 24분

구하는 시각을 오후 4시 x분이라고 하자.

분침은 1분에 6°씩, 시침은 1분에 0.5°씩 움직이므로 오후 4시 x분에 분침, 시침이 12시 방향으로부터 회전한 각도는 각각 $6x^\circ$, $0.5x^\circ$이다.

해나가 학원에 도착하였을 때 분침과 시침이 이루는 각의 크기는

$6x-(\underline{120}+0.5x)=5.5x-120\ (^\circ)$

4시일 때 시침이 12시와 이루는 각도

이때 이 각의 크기가 오후 4시 정각부터 현재까지 시침이 움직인 각의 크기와 같으므로

$5.5x-120=0.5x$

$5x=120 \qquad \therefore x=24$

따라서 구하는 시각은 오후 4시 24분이다.

Level UP

시각이 h시 x분일 때, 분침과 시침이 이루는 각의 크기는

$|6x-(30h+0.5x)|$

문제에서 분침이 추월했다는 조건이 있으므로 12시 방향으로부터 분침이 시침보다 멀리 있다.

즉, $|6x-(30h+0.5x)|=6x-(30h+0.5x)$

09 답 10시간

전체 물의 양을 1이라 하고 두 급수관 A, B가 1시간 동안 채우는 물의 양을 각각 a, b, 배수관 C가 빼내는 물의 양을 c라고 하자.

두 급수관 A, B를 모두 작동시켜 물을 채우면 가득 차는 데 12시간이 걸리므로

$12(a+b)=1 \qquad \therefore a+b=\frac{1}{12} \qquad \cdots\cdots$ ㉠

급수관 A와 배수관 C를 작동시켜 물을 채우면 가득 차는 데 20시간이 걸리므로

$20(a-c)=1 \qquad \therefore a-c=\frac{1}{20} \qquad \cdots\cdots$ ㉡

급수관 B와 배수관 C를 작동시켜 물을 채우면 가득 차는 데 60시간이 걸리므로

$60(b-c)=1 \qquad \therefore b-c=\frac{1}{60} \qquad \cdots\cdots$ ㉢

즉, ㉡, ㉢은 각각 $a=\frac{1}{20}+c$, $b=\frac{1}{60}+c$이므로

이를 ㉠에 대입하면

$\left(\frac{1}{20}+c\right)+\left(\frac{1}{60}+c\right)=\frac{1}{12}$, $\frac{1}{15}+2c=\frac{1}{12}$

$2c=\frac{1}{60} \qquad \therefore c=\frac{1}{120}$

㉡, ㉢에 $c=\frac{1}{120}$을 각각 대입하면

$a-\frac{1}{120}=\frac{1}{20} \qquad \therefore a=\frac{7}{120}$

$b-\frac{1}{120}=\frac{1}{60} \qquad \therefore b=\frac{1}{40}$

따라서 두 급수관 A, B를 동시에 작동시켜 3시간 동안 채운 물의 양은

$3\times(a+b)=3\times\left(\frac{7}{120}+\frac{1}{40}\right)=3\times\frac{1}{12}=\frac{1}{4}$

배수관 C가 두 급수관 A, B와 함께 작동되기 시작하였을 때 시간당 물탱크에 물이 채워지는 양은

$(a+b)-c=\frac{1}{12}-\frac{1}{120}=\frac{3}{40}$

이므로 배수관 C가 작동된 이후 물탱크가 가득 찰 때까지 t시간이 걸린다고 하면

$\frac{1}{4}+\frac{3}{40}t=1$, $\frac{3}{40}t=\frac{3}{4}$

$\therefore t=10$

따라서 구하는 시간은 10시간이다.

Lv. Master 실력을 완성하는 대단원 평가

84쪽~88쪽

01 ⑤	02 ④	03 ⑤	04 ②	05 ③
06 ①, ⑤	07 ①	08 ②	09 ①	10 ②
11 ②	12 ②	13 ④	14 ④	15 ②
16 $5x-3$	17 -2	18 20개	19 10	20 3시간
21 146명	22 24분	23 $-\frac{2}{25}$		

01 답 ⑤

① $1\times b\times a=ab$

② $x\times(-3)\times x=-3x^2$

③ $5\times(a-b)\div 2=\frac{5(a-b)}{2}$

④ $4\times x+(2\times y+1)\div 3=4x+(2y+1)\div 3$

$=4x+\frac{2y+1}{3}$

⑤ $x\div(-9)-x\div(6\times y)=-\frac{x}{9}-x\div 6y=-\frac{x}{9}-\frac{x}{6y}$

따라서 기호 ×, ÷를 생략하여 나타낸 식으로 옳은 것은 ⑤이다.

02 답 ④

ㄴ. (거리)=(속력)×(시간)이므로 시속 4 km로 x분=$\frac{x}{60}$시간 동안 걸어간 거리는 $4\times\frac{x}{60}=\frac{x}{15}$ (km)

ㄷ. 십의 자리의 숫자가 x, 일의 자리의 숫자가 y인 두 자리 자연수는 $10x+y$이고 이 수의 십의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자를 바꾼 수는 $10y+x$이므로 두 수의 합은 $(10x+y)+(10y+x)=11x+11y$

따라서 문자를 사용하여 나타낸 식으로 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

참고 시간과 거리가 주어진 상황을 식으로 나타낼 때에는 단위에 유의한다.

03 답 ⑤

해결 key Point!

문자에 음수를 대입할 때에는 반드시 괄호를 사용하고, 분모에 분수를 대입할 때에는 생략된 나눗셈 기호를 다시 쓴 후에 대입한다.

① $6xy=6\times\frac{1}{2}\times(-3)=-9$

② $2x-3y=2\times\frac{1}{2}-3\times(-3)=1+9=10$

③ $4x\div\left(-\frac{1}{y}\right)=4\times\frac{1}{2}\div\left(-\frac{1}{-3}\right)=4\times\frac{1}{2}\times 3=6$

④ $\frac{1}{x}+\frac{3}{y}=1\div x+3\div y=1\div\frac{1}{2}+3\div(-3)$

$=1\times 2+3\times\left(-\frac{1}{3}\right)=2+(-1)=1$

⑤ $\frac{3}{x}-2y=3\div x-2y=3\div\frac{1}{2}-2\times(-3)$

$=3\times 2-2\times(-3)=6+6=12$

따라서 식의 값이 가장 큰 것은 ⑤이다.

04 답 ②

$(-1)^3\times\frac{a-2b}{3}-(-1)^4\times\frac{a+3b}{2}$

$=(-1)\times\frac{a-2b}{3}-1\times\frac{a+3b}{2}$

$=-\frac{a-2b}{3}-\frac{a+3b}{2}=-\frac{2a-4b}{6}-\frac{3a+9b}{6}$

$=\frac{-2a+4b-3a-9b}{6}=\frac{-5a-5b}{6}$

05 답 ③

등식은 $4x=4$, $3x+7x=10x$, $2x+5=7$, $3x-3=3(x-1)$, $5x+6=11x$의 5개이므로

$a=5$

방정식은 $4x=4$, $2x+5=7$, $5x+6=11x$의 3개이므로

$b=3$

항등식은 $3x+7x=10x$, $3x-3=3(x-1)$의 2개이므로

$c=2$

$\therefore a+b-c=5+3-2=6$

06 답 ①, ⑤

① $a=0$, $x=2$, $y=3$이면 $0\times 2=0\times 3$이지만 $2\neq 3$

즉, $a=0$이면 $ax=ay$이어도 $x\neq y$

② $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$의 양변에 ab를 곱하면 $bx=ay$

③ $x=3y$의 양변에 a를 더하면 $x+a=3y+a$

④ $4x-4=4(y+1)$의 양변을 4로 나누면 $x-1=y+1$

⑤ $-\frac{x}{2}+5=5-y$의 양변에서 5를 빼면 $-\frac{x}{2}=-y$

양변에 -2를 곱하면 $x=2y$

양변에 3을 더하면 $x+3=2y+3$

따라서 옳지 않은 것은 ①, ⑤이다.

07 답 ①

$\frac{x-2}{2}-\frac{a+1}{3}=-1$의 양변에 6을 곱하면

$3(x-2)-2(a+1)=-6$, $3x-6-2a-2=-6$

$3x=2a+2\qquad\therefore x=\frac{2a+2}{3}$

$\frac{x+a}{4}=x$에서 $x+a=4x$

$3x=a\qquad\therefore x=\frac{a}{3}$

이때 $\frac{2a+2}{3}=\frac{a}{3}\times\frac{3}{2}$이므로

$4a+4=3a \qquad \therefore a=-4$

08 답 ②

해결 key Point!

불합격자 중 남학생의 수를 구하고 합격자 중 남학생, 여학생을 각각 같은 미지수로 놓고 입학 지원자의 비율로 식을 세운다.

불합격자 중 여학생이 30명이므로 불합격자 중 남학생을 x명이라고 하면

$x:30=2:1 \qquad \therefore x=60$

합격자 중 남학생, 여학생을 각각 $4a$명, $3a$명이라고 하면 입학 지원자의 남녀의 비가 $5:3$이므로

$(4a+60):(3a+30)=5:3$

$3(4a+60)=5(3a+30)$

$12a+180=15a+150,\ 3a=30$

$\therefore a=10$

즉, 합격자 중 남학생, 여학생은 각각

$4\times10=40$(명), $3\times10=30$(명)이므로 입학 지원자 수는

$40+30+60+30=160$

참고 입학 지원자를 표로 나타내면 다음과 같다.

	남학생	여학생	합계
합격자(명)	$4a$	$3a$	$7a$
불합격자(명)	60	30	90
지원자(명)	$4a+60$	$3a+30$	160

09 답 ①

트랙터의 앞바퀴의 둘레의 길이는 $60\times3=180$ (cm), 뒷바퀴의 둘레의 길이는 $90\times3=270$ (cm)

뒷바퀴가 회전한 횟수를 x라고 하면 앞바퀴가 회전한 횟수는 $x+50$

두 바퀴가 굴러간 거리가 같으므로

$180(x+50)=270x,\ 2(x+50)=3x$

$2x+100=3x \qquad \therefore x=100$

따라서 트랙터가 이동한 거리는

$270\times100=27000$ (cm) $=270$ (m)

꿀 한줄평

앞과 뒤에 바퀴가 달린 물체는 바퀴의 크기가 달라도 이동한 거리는 같으므로

(앞바퀴의 둘레)×(앞바퀴의 회전수)

=(뒷바퀴의 둘레)×(뒷바퀴의 회전수)

임을 이용한다.

10 답 ②

통화 시간을 x초라고 하면

$x=200$일 때, 통화 요금은

$260+35\times\dfrac{200-40}{10}=820$(원)

$x>200$일 때, 통화 요금은

$820+45\times\dfrac{x-200}{10}=\dfrac{9}{2}x-80$(원)

충전해 둔 금액을 모두 사용하려면 통화 요금이 6040원이어야 하므로

$\dfrac{9}{2}x-80=6040,\ \dfrac{9}{2}x=6120$

$\therefore x=1360$

따라서 1360초, 즉 22분 40초 동안 통화를 하였다.

11 답 ②

해결 key Point!

조건을 만족시키는 각 자리의 숫자가 모두 다른 세 자리 자연수를 찾는다.

세 자리 자연수 x의 백의 자리의 숫자를 a, 십의 자리의 숫자를 b, 일의 자리의 숫자를 c라고 하면

$x=100a+10b+c,\ y=100c+10b+a$

이때 $x-y=297$이므로

$(100a+10b+c)-(100c+10b+a)=297$

$99a-99c=297$

$\therefore a-c=3$

이를 만족시키는 두 수 a, c를 (a, c)로 나타내면 $(4, 1)$, $(5, 2)$, $(6, 3)$, $(7, 4)$, $(8, 5)$, $(9, 6)$

이때 x의 각 자리의 숫자의 합이 15이므로

$a+b+c=15$

(i) $a=4,\ c=1$일 때

$4+b+1=15$이므로 $b=10$

이때 b는 한 자리 자연수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=5,\ c=2$일 때

$5+b+2=15$이므로 $b=8$

(iii) $a=6,\ c=3$일 때

$6+b+3=15$이므로 $b=6$

이때 $a=b=6$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iv) $a=7,\ c=4$일 때

$7+b+4=15$이므로 $b=4$

이때 $b=c=4$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(v) $a=8,\ c=5$일 때

$8+b+5=15$이므로 $b=2$

(vi) $a=9,\ c=6$일 때

$9+b+6=15$이므로 $b=0$

(i)~(vi)에 의하여 조건을 만족시키는 b의 값은 8, 2, 0이므로 자연수 x는 582, 825, 906

따라서 조건을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합은

$582+825+906=2313$

Level UP

세 자리 자연수와 그 수의 백의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자를 바꾼 수의 차는 항상 99의 배수이다.

12 답 ②

왕이 처음에 가지고 있던 전체 금화의 개수를 x라고 하면 전사, 마법사, 궁수가 받은 금화의 개수는 각각

$\frac{1}{6}x,\ \frac{1}{4}x,\ 4\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{6}x\right)$

성전 건립 기금으로 기부한 금화는 남은 금화의 절반이므로

$\frac{1}{2}\left[x-\left\{\frac{1}{6}x+\frac{1}{4}x+4\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{6}x\right)\right\}\right]$

이때 성전 건립 기금으로 기부한 금화와 왕에게 남은 금화의 개수는 같으므로

$\frac{1}{2}\left[x-\left\{\frac{1}{6}x+\frac{1}{4}x+4\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{6}x\right)\right\}\right]=10$

$\frac{1}{2}\left\{x-\left(\frac{1}{6}x+\frac{1}{4}x+x-\frac{2}{3}x\right)\right\}=10$

$\frac{1}{2}\left(x-\frac{3}{4}x\right)=10,\ \frac{1}{8}x=10$

$\therefore\ x=80$

따라서 왕이 처음에 가지고 있던 전체 금화의 개수는 80이다.

13 답 ④

해결 key Point!

로봇 A가 만든 제품 중 불량품은 $\frac{1}{10}$이므로 정상품은 $\frac{9}{10}$이다.

로봇 B가 1분 동안 만들 수 있는 제품의 개수를 x라고 하면 로봇 A가 1분 동안 만들 수 있는 제품의 개수는 $x+2$이므로 정상 제품의 개수는 $\frac{9}{10}(x+2)$

이때 두 로봇 A, B를 각각 50분, 1시간 동안 투입하여 만들 수 있는 제품의 개수가 같으므로

$50\times\frac{9}{10}(x+2)=60\times x$

$45x+90=60x,\ 15x=90$

$\therefore\ x=6$

따라서 로봇 B가 1분 동안 만들 수 있는 제품의 개수는 6이므로 로봇 A를 1시간 30분, 즉 90분 동안 투입하여 만들 수 있는 정상 제품의 개수는

$90\times\frac{9}{10}\times(6+2)=648$

14 답 ④

기존 입장료를 k원이라고 하면

민수의 의견에서 입장료 수입은

$k\left(1+\frac{50}{100}\right)\left(1-\frac{20}{100}\right)=\frac{6k}{5}$(원)

수진이의 의견에서 입장료 수입은

$k\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{25}{100}\right)=\frac{3k}{4}\left(1+\frac{x}{100}\right)$(원)

이때 두 의견의 입장료 수입은 같으므로

$\frac{6k}{5}=\frac{3k}{4}\left(1+\frac{x}{100}\right),\ 1+\frac{x}{100}=\frac{8}{5}$

$\frac{x}{100}=\frac{3}{5}$

$\therefore\ x=60$

15 답 ②

점 A에서 점 P까지의 거리는

$x-(-2)=x+2$

이므로 점 P에서 점 A의 반대 방향으로 같은 거리만큼 이동한 점을 R라고 하면 점 R가 나타내는 수는

$-2-(x+2)=-x-4$

점 R와 점 Q 사이의 거리는

$3-(-x-4)=x+7$

이므로 점 Q에서 점 R의 반대 방향으로 같은 거리만큼 이동한 점을 S라고 하면 점 S가 나타내는 수는

$3+(x+7)=x+10$

점 S와 점 P 사이의 거리는

$(x+10)-(-2)=x+12$

이므로 점 P에서 점 S의 반대 방향으로 같은 거리만큼 이동한 점이 나타내는 수는

$-2-(x+12)=-x-14$

즉, 이동시킨 후의 점 A가 나타내는 수는 $-x-14$

이 점과 처음 점 A 사이의 거리가 18이므로

$|x-(-x-14)|=18,\ |2x+14|=18$

$2x+14=-18$ 또는 $2x+14=18$

$2x=-32$ 또는 $2x=4$

$\therefore\ x=-16$ 또는 $x=2$

따라서 모든 x의 값의 합은 $-16+2=-14$

참고 점의 대칭 이동은 기준점으로부터 같은 거리만큼 반대 방향으로 보내는 과정이다. 이 과정에서 계산된 식은 x가 기준점보다 크지 작은지 상관없이 두 점의 가운데가 항상 기준점이 되도록 한다.

16 답 $5x-3$

어떤 일차식을 A라고 하면

$2A-(3x-4)=5x+8,\ 2A-3x+4=5x+8$

$2A=8x+4\qquad\therefore\ A=4x+2$

따라서 바르게 계산하면

$(4x+2)\div 2+(3x-4)=(4x+2)\times\frac{1}{2}+3x-4$
$=2x+1+3x-4$
$=5x-3$

17 답 -2

$2(x-3):\frac{1}{2}(x+1)=4:3$에서
$6(x-3)=2(x+1)$, $6x-18=2x+2$
$4x=20$ $\quad\therefore x=5$
$5x-a=3(x-a)+6$에 $x=5$를 대입하면
$25-a=3(5-a)+6$, $25-a=15-3a+6$
$2a=-4$ $\quad\therefore a=-2$

18 답 20개

1개의 정삼각형을 만드는 데 필요한 성냥개비는 3개이고, 1개의 정삼각형이 늘어날 때마다 성냥개비는 2개씩 늘어나므로 n개의 정삼각형을 만드는 데 필요한 성냥개비의 개수는
$3+2(n-1)=2n+1$
$2n+1=41$에서 $2n=40$
$\therefore n=20$
따라서 성냥개비를 41개 사용하면 20개의 정삼각형을 만들 수 있다.

19 답 10

해결 key Point!
'작지 않다.'는 '크거나 같다.'와 같고, '크지 않다.'는 '작거나 같다.'와 같다.

$a\blacktriangle b=\begin{cases} a & (a\ge b) \\ b & (a<b)\end{cases}$, $a\blacktriangledown b=\begin{cases} b & (a\ge b) \\ a & (a<b)\end{cases}$이므로

(i) $x<-4$일 때
$x\blacktriangle 4=4$, $|x|\blacktriangledown 4=4$이므로
$3(x\blacktriangle 4)-2(|x|\blacktriangledown 4)=22$에서
$3\times 4-2\times 4=4\ne 22$
이 등식은 성립하지 않는다.

(ii) $-4\le x<4$일 때
$x\blacktriangle 4=4$, $|x|\blacktriangledown 4=|x|$이므로
$3(x\blacktriangle 4)-2(|x|\blacktriangledown 4)=22$에서
$3\times 4-2|x|=22$, $2|x|=-10$
$\therefore |x|=-5$
이때 절댓값은 음수가 될 수 없으므로 성립하지 않는다.

(iii) $x\ge 4$일 때
$x\blacktriangle 4=x$, $|x|\blacktriangledown 4=4$이므로
$3(x\blacktriangle 4)-2(|x|\blacktriangledown 4)=22$에서
$3x-2\times 4=22$, $3x=30$
$\therefore x=10$
(i)~(iii)에 의하여 주어진 방정식을 만족시키는 x의 값은 10이다.

20 답 3시간

해결 key Point!
지민이가 열람실을 들어간 시각과 나온 시각을 구한다.

분침은 1분에 6°씩 움직이고, 시침은 1분에 0.5°씩 움직인다.
지민이가 열람실에 들어간 시각을 오후 5시 x분 $(x<30)$이라고 하면 시침과 분침이 이루는 각이 90°이므로
$(30\times 5+0.5x)-6x=90$
$150-\frac{11}{2}x=90$, $\frac{11}{2}x=60$
$\therefore x=\frac{120}{11}=10\frac{10}{11}$
한편, 지민이가 열람실에서 나온 시각을 오후 8시 y분이라고 하면 시침과 분침이 이루는 각이 180°이므로
$(30\times 8+0.5y)-6y=180$
$240-\frac{11}{2}y=180$, $\frac{11}{2}y=60$
$\therefore y=\frac{120}{11}=10\frac{10}{11}$
따라서 지민이는 오후 5시 $10\frac{10}{11}$분부터 오후 8시 $10\frac{10}{11}$분까지 공부했으므로 공부한 시간은 3시간이다.
참고 지민이가 열람실에 들어간 시각이 오후 5시 30분 이전이므로 시침이 분침보다 앞서 있다.

21 답 146명

수련원의 방의 개수를 x라고 하면 한 방에 6명씩 배정하면 8명의 학생이 남으므로 수련원의 전체 학생 수는 $6x+8$
한 방에 8명씩 배정하면 8명이 가득찬 방의 개수는 $x-5$이므로 수련원의 전체 학생 수는
$8(x-5)+2=8x-40+2=8x-38$
한 방에 6명씩 배정할 때와 8명씩 배정할 때의 학생 수는 같으므로
$6x+8=8x-38$
$2x=46$ $\quad\therefore x=23$
따라서 수련원의 방의 개수는 23이므로 수련원의 전체 학생 수는
$6x+8=6\times 23+8=146$

22 답 24분

1단계 아영이네 집에서 공연장까지의 거리를 문자를 사용한 식으로 나타내기
아영이네 집에서 공연장까지의 거리를 x km라고 하면

$\frac{x}{80}+\frac{3}{60}=\frac{x}{60}-\frac{4}{60}$

2단계 아영이네 집에서 공연장까지의 거리 구하기

양변에 240을 곱하면

$3x+12=4x-16$ $\therefore x=28$

즉, 아영이네 집에서 공연장까지의 거리는 28 km이다.

3단계 아영이네 집에서 공연장까지 시속 70 km로 갈 때 걸리는 시간 구하기

따라서 아영이네 집에서 공연장까지 시속 70 km로 갈 때 걸리는 시간은

$\frac{28}{70}\times60=24$(분)

단계	채점 기준	배점
❶	아영이네 집에서 공연장까지의 거리를 문자를 사용한 식으로 나타냈다.	3점
❷	아영이네 집에서 공연장까지의 거리를 구했다.	2점
❸	아영이네 집에서 공연장까지 시속 70 km로 갈 때 걸리는 시간을 구했다.	2점

23 답 $-\frac{2}{25}$

1단계 주어진 식 간단히 하기

$\frac{2x-5y}{3}=0.5(x-2y)$의 양변에 6을 곱하면

$2(2x-5y)=3(x-2y)$, $4x-10y=3x-6y$

$\therefore x=4y$

2단계 k의 값 구하기

$\frac{3x-4y}{2x-3y}$에 $x=4y$를 대입하면

$\frac{3\times4y-4y}{2\times4y-3y}=\frac{8y}{5y}=\frac{8}{5}$

$\therefore k=\frac{8}{5}$

3단계 a의 값 구하기

$\frac{z-a}{2}=\frac{2z+1}{5}$의 양변에 10을 곱하면

$5(z-a)=2(2z+1)$, $5z-5a=4z+2$

$\therefore z=5a+2$

이때 $z=k=\frac{8}{5}$이므로

$\frac{8}{5}=5a+2$, $5a=-\frac{2}{5}$

$\therefore a=-\frac{2}{25}$

단계	채점 기준	배점
❶	주어진 식을 간단히 했다.	2점
❷	k의 값을 구했다.	2점
❸	a의 값을 구했다.	3점

Ⅲ 좌표평면과 그래프

01 좌표평면과 그래프

Lv. 1 개념을 적용하는 핵심 문제

92쪽~93쪽

01 ②	**02** ③	**03** ④	**04** ①	**05** ④
06 제3사분면		**07** ①	**08** ⑤	**09** ①, ③
10 ②				

01 답 ②

해결 key Point!

두 순서쌍 (p, q), (r, s)가 서로 같으려면 $p=r$, $q=s$이어야 한다.

두 순서쌍 $(2-3a, a-2b+4)$, $(a+6, b-3)$이 서로 같으므로

$2-3a=a+6$에서 $-4a=4$ $\therefore a=-1$

$a-2b+4=b-3$에서 $-1-2b+4=b-3$

$-3b=-6$ $\therefore b=2$

$\therefore a-b=-1-2=-3$

02 답 ③

점 $A(a-5, 2b+4)$가 x축 위의 점이므로

$2b+4=0$, $2b=-4$ $\therefore b=-2$

점 $B(a+3b, a-b)$가 y축 위의 점이므로

$a+3b=0$, $a-6=0$ $\therefore a=6$

$\therefore A(1, 0)$, $B(0, 8)$

이때 점 C는 점 A와 x좌표가 같고, 점 B와 y좌표가 같으므로 $C(1, 8)$

참고 ① x축 위의 점의 좌표 ⇨ (x좌표, 0)

② y축 위의 점의 좌표 ⇨ (0, y좌표)

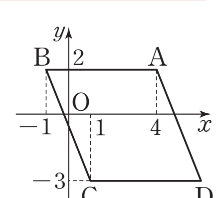
03 답 ④

해결 key Point!

평행사변형 ABCD의 마주 보는 두 변의 길이는 서로 같으므로

(변 AB의 길이)=(변 CD의 길이)

임을 이용하면 꼭짓점 D의 x좌표를 구할 수 있다.



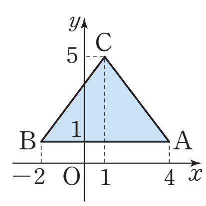
세 점 $A(4, 2)$, $B(-1, 2)$, $C(1, -3)$을 좌표평면 위에 나타내고 두 선분 AB, BC를 두 변으로 하는 평행사변형 ABCD를 그리면 오른쪽 그림과 같다.

이때 사각형 ABCD는 평행사변형이므

로 변 AB와 변 CD는 서로 평행하고 그 길이가 같다.
(변 CD의 길이)$=$(변 AB의 길이)
$=4-(-1)=5$
이므로 꼭짓점 D의 x좌표는
(점 C의 x좌표)$+5=1+5=6$
두 꼭짓점 C, D의 y좌표가 서로 같고 꼭짓점 C의 y좌표는 -3이므로
$D(6, -3)$
따라서 $a=6$, $b=-3$이므로
$a+b=6+(-3)=3$

04 답 ①

세 점 $A(4, 1)$, $B(-2, 1)$, $C(1, 5)$를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 삼각형 ABC의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\{4-(-2)\}\times(5-1)$
$=\frac{1}{2}\times6\times4=12$

05 답 ④

① $a>0$, $b<0$이므로 점 (a, b)는 제4사분면 위의 점이다.
② $-a<0$, $b<0$이므로 점 $(-a, b)$는 제3사분면 위의 점이다.
③ $ab<0$, $a-b>0$이므로 점 $(ab, a-b)$는 제2사분면 위의 점이다.
④ $b-a<0$, $b<0$이므로 점 $(b-a, b)$는 제3사분면 위의 점이다.
⑤ $a+b$의 부호는 알 수 없으나 $-b>0$이므로
점 $(a+b, -b)$는 제1사분면 또는 제2사분면 위의 점이다.
따라서 점의 좌표와 그 점이 속하는 사분면을 바르게 짝 지은 것은 ④이다.

참고 (1) 제1사분면 위의 점 ⇨ $(+, +)$
(2) 제2사분면 위의 점 ⇨ $(-, +)$
(3) 제3사분면 위의 점 ⇨ $(-, -)$
(4) 제4사분면 위의 점 ⇨ $(+, -)$

Level UP

(1) 두 수 a, b의 부호가 같을 때
① $a+b>0$인 경우 $a>0$, $b>0$
② $a+b<0$인 경우 $a<0$, $b<0$
(2) 두 수 a, b의 부호가 다를 때
① $a-b>0$인 경우 $a>0$, $b<0$
② $a-b<0$인 경우 $a<0$, $b>0$

06 답 제3사분면

1단계 두 점 A, B의 좌표의 부호 구하기
점 $A(a, b)$는 제3사분면 위의 점이므로
$a<0$, $b<0$
점 $B(c, d)$는 제4사분면 위의 점이므로
$c>0$, $d<0$
2단계 점 $(a-c, b+d)$의 위치 구하기
따라서 $a-c<0$, $b+d<0$이므로 점 $(a-c, b+d)$는 제3사분면 위의 점이다.

단계	채점 기준	비율
❶	두 점 A, B의 좌표의 부호를 구했다.	50 %
❷	점 $(a-c, b+d)$의 위치를 구했다.	50 %

07 답 ①

두 점 $A(4a-1, 9)$, $B(2a-7, -3b)$가 x축에 대하여 대칭이므로 두 점의 x좌표는 같고 y좌표는 부호가 반대이다.
즉, $4a-1=2a-7$에서 $2a=-6$
$\therefore a=-3$
$9=-(-3b)$에서 $b=3$
$\therefore ab=-3\times3=-9$

Level UP

점 (a, b)와
(1) x축에 대하여 대칭인 점의 좌표 ⇨ $(a, -b)$
(2) y축에 대하여 대칭인 점의 좌표 ⇨ $(-a, b)$
(3) 원점에 대하여 대칭인 점의 좌표 ⇨ $(-a, -b)$

08 답 ⑤

물병 A는 아랫부분은 폭이 넓고 일정하고 윗부분은 폭이 좁고 일정하므로 물의 높이가 느리고 일정하게 증가하다가 빠르고 일정하게 증가한다. 따라서 물병 A의 그래프로 알맞은 것은 ㄷ이다.
물병 B는 아랫부분은 폭이 점점 좁아지고 윗부분은 폭이 좁고 일정하므로 물의 높이가 점점 빠르게 증가하다가 일정하게 증가한다. 따라서 물병 B의 그래프로 알맞은 것은 ㄹ이다.

09 답 ①, ③

- 출발 후 6분 동안 이동한 거리는 $\boxed{0.2}$ km이다.
- 출발 후 $\boxed{11}$분 동안 1.1 km만큼 이동했다.
- 그래프에서 혜윤이는 20분 동안 총 1.5 km를 가고 멈췄으므로 집에서 학교까지의 거리는 $\boxed{1.5}$ km이다.
- $\boxed{6}$분부터 $\boxed{11}$분까지 그래프가 가장 급격히 증가하므로 가장 빠른 속력으로 이동했다.

따라서 옳지 않은 것은 ①, ③이다.

10 답 ②

① 선수 A는 출발한 지 9분 후에 속력이 느려졌다.

② 선수 B는 출발점으로부터의 거리가 4 km인 지점에서 속력이 느려졌다.

③ 두 선수 A, B는 출발점으로부터의 거리가 7 km인 지점에서 만났다.

④ 출발한 지 38분 후에 두 선수 A, B의 순위가 바뀌었다.

⑤ 선수 B, 선수 A의 순서대로 결승점에 도착하였다.

따라서 옳은 것은 ②이다.

Lv. 2 사고를 확장하는 실전 문제

94쪽~97쪽

01 6	**02** ③	**03** ①, ⑤	**04** ③	**05** 15
06 ⑤	**07** 10	**08** ④	**09** ⑤	**10** ③
11 ③	**12** $(-5,\ 3)$	**13** 20	**14** 5	**15** ③, ④
16 9	**17** ③	**18** ⑤	**19** ②	**20** ③
21 ①	**22** A－ㄴ, B－ㄱ, C－ㄷ		**23** 풀이 참조	

01 답 6

해결 key Point!

a의 값에 따라 $a+b\le4$를 만족시키는 모든 경우를 구해야 한다.

$a=1$일 때, $1+b\le4$이므로 부등식을 만족시키는 b의 값은 $b=1,\ 2,\ 3$

$a=2$일 때, $2+b\le4$이므로 부등식을 만족시키는 b의 값은 $b=1,\ 2$

$a=3$일 때, $3+b\le4$이므로 부등식을 만족시키는 b의 값은 $b=1$

따라서 $a+b\le4$를 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(1,\ 1)$, $(1,\ 2)$, $(1,\ 3)$, $(2,\ 1)$, $(2,\ 2)$, $(3,\ 1)$의 6개이다.

02 답 ③

$P(5,\ 2)$, $Q(-4,\ 1)$, $R(-1,\ -3)$, $S(1,\ -4)$

① 점 A가 점 P이면

$a-3=5,\ b=2 \qquad \therefore a=8$

$\therefore A(5,\ 2),\ B(6,\ 8),\ C(-10,\ 1),\ D(12,\ 18)$

이때 세 점 B, C, D에 각각 대응하는 점을 찾을 수 없다.

② 점 A가 점 Q이면

$a-3=-4,\ b=1 \qquad \therefore a=-1$

$\therefore A(-4,\ 1),\ B(-2,\ -1),\ C(0,\ 0),\ D(1,\ -1)$

이때 세 점 B, C, D에 각각 대응하는 점을 찾을 수 없다.

③ 점 A가 점 R이면

$a-3=-1,\ b=-3 \qquad \therefore a=2$

$\therefore A(-1,\ -3),\ B(5,\ 2),\ C(1,\ -4),\ D(-4,\ 1)$

따라서 점 A는 점 R, 점 B는 점 P, 점 C는 점 S, 점 D는 점 Q에 대응한다.

④ 점 A가 점 S이면

$a-3=1,\ b=-4 \qquad \therefore a=4$

$\therefore A(1,\ -4),\ B(8,\ 4),\ C(0,\ -5),\ D(-4,\ 4)$

이때 세 점 B, C, D에 각각 대응하는 점을 찾을 수 없다.

⑤ ③에 의하여 $a=2$, $b=-3$이므로 점 $(a-2,\ b+2)$는 점 $(0,\ -1)$이고, 이 점은 y축 위에 있다.

따라서 옳은 것은 ③이다.

03 답 ①, ⑤

두 점 $A(3-2a,\ a-1)$, $B(b-2,\ 4b-1)$이 x축 또는 y축 위에 있어야 하므로 두 점이 모두 x축 또는 y축 위에 있거나 두 점이 각각 x축 또는 y축 위에 있다.

(i) 두 점 모두 x축 위에 있는 경우

$a-1=0,\ 4b-1=0$이므로 $a=1,\ b=\frac{1}{4}$

이때 $A(1,\ 0)$, $B\left(-\frac{7}{4},\ 0\right)$이므로 $C(1,\ 0)$이다.

따라서 점 C는 점 A와 같으므로 성립하지 않는다.

(ii) 두 점 모두 y축 위에 있는 경우

$3-2a=0,\ b-2=0$이므로 $a=\frac{3}{2},\ b=2$

이때 $A\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$, $B(0,\ 7)$이므로 $C(0,\ 7)$이다.

따라서 점 C는 점 B와 같으므로 성립하지 않는다.

(iii) 점 A는 x축 위에 있고, 점 B는 y축 위에 있는 경우

$a-1=0,\ b-2=0$이므로 $a=1,\ b=2$

따라서 $A(1,\ 0)$, $B(0,\ 7)$이므로 $C(1,\ 7)$이다.

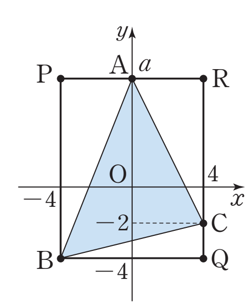
(iv) 점 A는 y축 위에 있고, 점 B는 x축 위에 있는 경우

$3-2a=0,\ 4b-1=0$이므로 $a=\frac{3}{2},\ b=\frac{1}{4}$

따라서 $A\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$, $B\left(-\frac{7}{4},\ 0\right)$이므로 $C(0,\ 0)$이다.

(i)~(iv)에 의하여 점 C의 좌표가 될 수 있는 것은 $(1,\ 7)$, $(0,\ 0)$이다.

04 답 ③



세 점 $A(0,\ a)$, $B(-4,\ -4)$, $C(4,\ -2)$를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다. 이때 만들어진 삼각형의 각 꼭짓점에서 x축, y축에 각각 평행한 선을 그어 직사각형 PBQR를 만들면 $P(-4,\ a)$, $Q(4,\ -4)$, $R(4,\ a)$이다.

(사각형 PBQR의 넓이)

$=\{4-(-4)\}\times\{a-(-4)\}$

$=8\times(a+4)=8a+32$

(삼각형 ACR의 넓이)$=\frac{1}{2}\times4\times\{a-(-2)\}=2a+4$

(삼각형 PBA의 넓이)$=\frac{1}{2}\times4\times\{a-(-4)\}=2a+8$

(삼각형 CBQ의 넓이)$=\frac{1}{2}\times2\times8=8$

이때 삼각형 ABC의 넓이가 36이므로

(삼각형 ABC의 넓이)

=(사각형 PBQR의 넓이)−(삼각형 ACR의 넓이)

−(삼각형 PBA의 넓이)−(삼각형 CBQ의 넓이)

에서

$36=8a+32-(2a+4)-(2a+8)-8$

$36=4a+12$, $24=4a$

$\therefore a=6$

Level UP

좌표평면 위의 도형의 넓이는 다음과 같은 순서대로 구한다.

❶ 주어진 점을 좌표평면 위에 나타내어 선분으로 연결한다.

❷ 만들어진 도형의 넓이의 공식을 이용하여 넓이를 구한다.

이때, 두 점 $A(a,\ 0)$, $B(c,\ 0)$을 잇는 선분의 길이는 $c-a\ (c>a)$임을 이용한다.

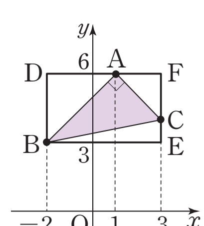
05 답 15

1단계 주어진 점을 좌표평면 위에 나타내어 만들 수 있는 직각삼각형의 경우 구하기

세 점 A, B, C를 좌표평면 위에 나타내면 k의 값에 대하여 $\angle C$는 항상 예각이므로 삼각형 ABC가 직각삼각형이 되는 경우는 $\angle A$ 또는 $\angle B$가 직각인 경우이다.

2단계 $\angle A$가 직각인 삼각형 ABC의 넓이 구하기

(ⅰ) $\angle A$가 직각인 경우



만들어진 삼각형 ABC의 각 꼭짓점에서 x축, y축에 각각 평행한 선을 그어 직사각형 DBEF를 만들면 $D(-2,\ 6)$, $E(3,\ 3)$, $F(3,\ 6)$이다.

이때 선분 AD의 길이는 $1-(-2)=3$, 선분 BD의 길이는 $6-3=3$, $\angle D=90°$이므로 삼각형 ADB는 직각이등변삼각형이다.

즉, $\angle FAC=180°-90°-45°=45°$이고 $\angle F=90°$이므로 삼각형 ACF도 직각이등변삼각형이다.

따라서 선분 AF의 길이는 $3-1=2$이므로 선분 CF의 길이도 2이다.

$\therefore C(3,\ 4)$

(사각형 DBEF의 넓이)$=5\times3=15$

(삼각형 ADB의 넓이)$=\frac{1}{2}\times3\times3=\frac{9}{2}$

(삼각형 ACF의 넓이)$=\frac{1}{2}\times2\times2=2$

(삼각형 BEC의 넓이)$=\frac{1}{2}\times\{3-(-2)\}\times(4-3)=\frac{5}{2}$

∴ (직각삼각형 ABC의 넓이)

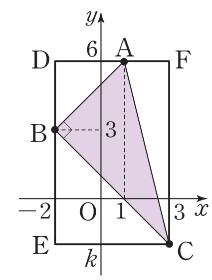
=(사각형 DBEF의 넓이)−(삼각형 ADB의 넓이)

−(삼각형 ACF의 넓이)−(삼각형 BEC의 넓이)

$=15-\frac{9}{2}-2-\frac{5}{2}=6$

3단계 $\angle B$가 직각인 삼각형 ABC의 넓이 구하기

(ⅱ) $\angle B$가 직각인 경우



만들어진 삼각형 ABC의 각 점에서 x축, y축에 각각 평행한 선을 그어 직사각형 DECF를 만들면 $D(-2,\ 6)$, $E(-2,\ k)$, $F(3,\ 6)$이다.

이때 선분 AD의 길이는 $1-(-2)=3$, 선분 BD의 길이는 $6-3=3$, $\angle D=90°$이므로 삼각형 ADB는 직각이등변삼각형이다.

즉, $\angle EBC=180°-90°-45°=45°$이고 $\angle E=90°$이므로 삼각형 BEC도 직각이등변삼각형이다.

따라서 선분 CE의 길이는 $3-(-2)=5$이므로 선분 BE의 길이도 5이다.

$\therefore C(3,\ -2)$, $E(-2,\ -2)$

(사각형 DECF의 넓이)$=5\times\{6-(-2)\}=40$

(삼각형 ADB의 넓이)$=\frac{1}{2}\times3\times3=\frac{9}{2}$

(삼각형 BEC의 넓이)$=\frac{1}{2}\times5\times5=\frac{25}{2}$

(삼각형 ACF의 넓이)$=\frac{1}{2}\times(3-1)\times\{6-(-2)\}=8$

∴ (직각삼각형 ABC의 넓이)

=(사각형 DECF의 넓이)−(삼각형 ADB의 넓이)

−(삼각형 BEC의 넓이)−(삼각형 ACF의 넓이)

$=40-\frac{9}{2}-\frac{25}{2}-8=15$

4단계 직각삼각형 ABC의 넓이가 될 수 있는 값 중 가장 큰 수 구하기

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 삼각형 ABC의 넓이가 될 수 있는 값 중 가장 큰 수는 15이다.

단계	채점 기준	비율
❶	주어진 점을 좌표평면 위에 나타내어 만들 수 있는 직각삼각형의 경우를 구했다.	10 %
❷	∠A가 직각인 삼각형 ABC의 넓이를 구했다.	40 %
❸	∠B가 직각인 삼각형 ABC의 넓이를 구했다.	40 %
❹	직각삼각형 ABC의 넓이가 될 수 있는 값 중 가장 큰 수를 구했다.	10 %

06 답 ⑤

① $a>0$, $b<0$이므로 점 (b, a)는 제2사분면 위의 점이다.
② $a<0$, $-b<0$이므로 $b>0$
즉, 점 (b, a)는 제4사분면 위의 점이다.
③ $-a<0$, $b>0$이므로 $a>0$
즉, 점 (b, a)는 제1사분면 위의 점이다.
④ $-a>0$, $-b>0$이므로 $a<0$, $b<0$
즉, 점 (b, a)는 제3사분면 위의 점이다.
⑤ $-b>0$, $-a<0$이므로 $b<0$, $a>0$
즉, 점 (b, a)는 제2사분면 위의 점이다.
따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

07 답 10

점 $(6-x, y-3)$이 제4사분면 위의 점이면
$6-x>0$, $y-3<0$이어야 한다.
$6-x>0$을 만족시키는 자연수 x의 값은 1, 2, 3, 4, 5
$y-3<0$을 만족시키는 자연수 y의 값은 1, 2
따라서 조건을 만족시키는 두 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)는 $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$, $(3, 2)$, $(4, 1)$, $(4, 2)$, $(5, 1)$, $(5, 2)$의 10개이다.

08 답 ④

해결 key Point!
주어진 조건으로 찾은 a, b의 부호를 이용하여 각 점이 위치할 수 있는 사분면을 찾아야 한다.

점 (a, b)가 제2사분면 위에 있으므로 $a<0$, $b>0$
① $2a-b<0$, $2b-a>0$이므로 점 $(2a-b, 2b-a)$는 제2사분면 위의 점이다.
② $a^2>0$이므로 $b-a^2$의 부호는 알 수 없고, $b-a>0$이므로 점 $(b-a^2, b-a)$는 제1사분면 또는 제2사분면 위의 점이다.
③ $a-b<0$, $ab<0$이므로 점 $(a-b, ab)$는 제3사분면 위의 점이다.
④ $-a^3>0$, $-b^3<0$이므로 점 $(-a^3, -b^3)$은 제4사분면 위의 점이다.
⑤ $\frac{a}{b}<0$, $a<0$이므로 점 $\left(\frac{a}{b}, a\right)$는 제3사분면 위의 점이다.
따라서 제4사분면 위에 있는 점의 좌표는 ④이다.

Level UP
$a<0$, $b>0$에 대하여
① $2a-b$: (음수)$-$(양수) ⇨ (음수)$+$(음수) ⇨ (음수)
② $2b-a$: (양수)$-$(음수) ⇨ (양수)$+$(양수) ⇨ (양수)
③ $b-a^2$: (양수)$-$(양수) ⇨ 부호를 알 수 없다.
④ $-a^3$: $-$(음수) ⇨ (양수), $-b^3$: $-$(양수) ⇨ (음수)

09 답 ⑤

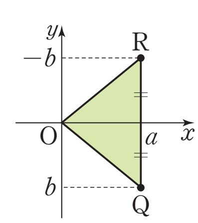
점 $(-a, b)$가 제3사분면 위의 점이므로
$-a<0$, $b<0$ $\quad\therefore a>0$
① $a>0$, $ab<0$이므로 점 (a, ab)는 제4사분면 위의 점이다.
② $-ab>0$, $b<0$이므로 점 $(-ab, b)$는 제4사분면 위의 점이다.
③ $a-b>0$, $b-a<0$이므로 점 $(a-b, b-a)$는 제4사분면 위의 점이다.
④ $|a|>|b|$이므로 $a+b>0$, $-a-b<0$이다. 따라서 점 $(a+b, -a-b)$는 제4사분면 위의 점이다.
⑤ $a-b>0$, $-b>0$이므로 점 $(a-b, -b)$는 제1사분면 위의 점이다.
따라서 속하는 사분면이 나머지 넷과 다른 하나는 ⑤이다.

10 답 ③

점 $\left(|a|-|b|, -\frac{b}{a}\right)$가 제2사분면 위의 점이므로
$|a|-|b|<0$, $-\frac{b}{a}>0$ $\quad\therefore |a|<|b|$, $ab<0$
따라서 $a>0$, $b<0$ 또는 $a<0$, $b>0$이고 $|a|+|b|>0$이므로 $(|a|+|b|)(|a|-|b|)<0$이다.
(i) $a>0$, $b<0$일 때
$a+b<0$, $a-b>0$이므로 $(a+b)(a-b)<0$
따라서 점 $((a+b)(a-b), (|a|+|b|)(|a|-|b|))$는 제3사분면 위의 점이다.
(ii) $a<0$, $b>0$일 때
$a+b>0$, $a-b<0$이므로 $(a+b)(a-b)<0$
따라서 점 $((a+b)(a-b), (|a|+|b|)(|a|-|b|))$는 제3사분면 위의 점이다.
(i), (ii)에 의하여 점
$((a+b)(a-b), (|a|+|b|)(|a|-|b|))$는 제3사분면 위의 점이다.

11 답 ③

점 $\mathrm{P}(ab, a-b)$가 제2사분면 위에 있으므로
$ab<0$, $a-b>0$ $\quad\therefore a>0$, $b<0$
따라서 점 $\mathrm{Q}(a, b)$는 제4사분면 위의 점이고 점 $\mathrm{R}(a, -b)$는 제1사분면 위의 점이므로 두 점 Q, R를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore$ (삼각형 OQR의 넓이)$=\frac{1}{2}\times 2b\times a$
$=ab$

12 답 $(-5,\ 3)$

해결 key Point!

주어진 조건을 따라 점 P_2, P_3, P_4, …의 좌표를 구해야 한다.

점 $P_1(-5,\ -3)$과 x축에 대하여 대칭인 점 P_2의 좌표는 $(-5,\ 3)$

점 $P_2(-5,\ 3)$과 y축에 대하여 대칭인 점 P_3의 좌표는 $(5,\ 3)$

점 $P_3(5,\ 3)$과 x축에 대하여 대칭인 점 P_4의 좌표는 $(5,\ -3)$

점 $P_4(5,\ -3)$과 y축에 대하여 대칭인 점 P_5의 좌표는 $(-5,\ -3)$

⋮

즉, 점 P_1, P_2, P_3, …의 좌표는 $(-5,\ -3)$, $(-5,\ 3)$, $(5,\ 3)$, $(5,\ -3)$이 이 순서대로 반복된다.

따라서 $2026=4\times506+2$에서 점 P_{2026}의 좌표는 점 P_2의 좌표와 같으므로 점 P_{2026}의 좌표는 $(-5,\ 3)$이다.

13 답 20

1단계 두 점 A, B의 좌표 구하기

조건 (가)에서 점 $(2,\ -1)$과 x축에 대하여 대칭인 점의 좌표는 $(2,\ 1)$

점 $(2,\ -1)$과 원점에 대하여 대칭인 점의 좌표는 $(-2,\ 1)$

$\therefore$ $A(2,\ 1)$, $B(-2,\ 1)$

2단계 두 점 C, D의 좌표 구하기

조건 (나)에서 점 $(-2,\ 5)$와 x축에 대하여 대칭인 점의 좌표는 $(-2,\ -5)$ $\quad\therefore C(-2,\ -5)$

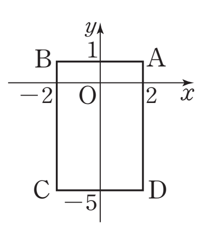
점 C와 y축에 대하여 대칭인 점의 좌표는 $(2,\ -5)$

$\therefore$ $D(2,\ -5)$

3단계 사각형 ABCD의 둘레의 길이 구하기

따라서 네 점 A, B, C, D를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 사각형 ABCD의 둘레의 길이는

$2\times[\{2-(-2)\}+\{1-(-5)\}]=20$



단계	채점 기준	비율
❶	두 점 A, B의 좌표를 구했다.	30 %
❷	두 점 C, D의 좌표를 구했다.	30 %
❸	사각형 ABCD의 둘레의 길이를 구했다.	40 %

14 답 5

1단계 a, b의 값 구하기

점 $P(-4a-10,\ 4-3b)$가 점 $Q(2+2a,\ -5b)$와 x축에 대하여 대칭이므로

$-4a-10=2+2a$에서 $-6a=12$ $\quad\therefore a=-2$

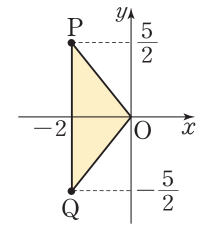
$4-3b=5b$에서 $8b=4$ $\quad\therefore b=\frac{1}{2}$

2단계 삼각형 OPQ의 넓이 구하기

따라서 두 점 P, Q의 좌표는 $\left(-2,\ \frac{5}{2}\right)$, $\left(-2,\ -\frac{5}{2}\right)$이므로 세 점 O, P, Q를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

따라서 삼각형 OPQ의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\left\{\frac{5}{2}-\left(-\frac{5}{2}\right)\right\}\times\{0-(-2)\}=5$



단계	채점 기준	비율
❶	a, b의 값을 구했다.	60 %
❷	삼각형 OPQ의 넓이를 구했다.	40 %

15 답 ③, ④

점 $A(2,\ -4)$를 주어진 규칙에 따라 이동시키면

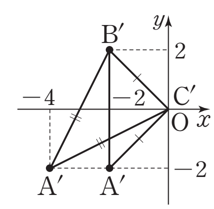
$A'(4a+4,\ 2-4)$ $\quad\therefore A'(4a+4,\ -2)$

점 $B(0,\ 2)$를 주어진 규칙에 따라 이동시키면

$B'(0-2,\ 0+2)$ $\quad\therefore B'(-2,\ 2)$

점 $C(0,\ 0)$을 주어진 규칙에 따라 이동시키면 $C'(0,\ 0)$

이때 삼각형 $A'B'C'$이 이등변삼각형이 되려면 오른쪽 그림과 같이 점 A'의 x좌표는 -4 또는 -2이어야 한다.



$4a+4=-4$에서 $4a=-8$

$\therefore a=-2$

$4a+4=-2$에서 $4a=-6$ $\quad\therefore a=-\frac{3}{2}$

따라서 모든 상수 a의 값은 -2, $-\frac{3}{2}$이다.

16 답 9

$a-b$의 값이 가장 크려면 a의 값은 가장 크고 b의 값은 가장 작아야 한다.

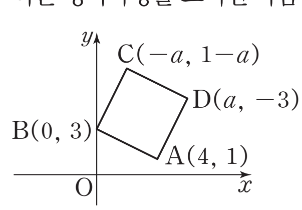
즉, 점 $P(a,\ b)$가 점 $C(5,\ -6)$에 위치할 때 $a-b$의 값이 가장 크다.

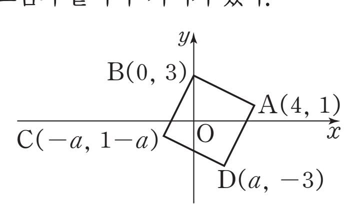
따라서 $a=5$, $b=-6$이므로

$3a+b=3\times5+(-6)=9$

17 답 ③

두 점 $A(4,\ 1)$, $B(0,\ 3)$에 대하여 선분 AB를 한 변으로 하는 정사각형을 그리면 다음 그림과 같이 두 가지가 있다.





이때 $C(-a,\ 1-a)$, $D(a,\ -3)$, 즉 점 D의 y좌표는 -3이므로 점 D는 제4사분면 위에 있고 점 C는 제3사분면 위에 있

어야 한다.

따라서 점 D의 x좌표는 $0<a<4$이어야 하므로 주어진 값 중 a의 값으로 알맞은 것은 ③이다.

참고 $a=1$일 때, $C(-1,\ 0)$, $D(1,\ -3)$이므로 점 C가 제3사분면에 위치하지 않는다.
$a=2$일 때, $C(-2,\ -1)$, $D(2,\ -3)$이므로 점 C가 제3사분면에 위치하고 정사각형이 된다.
$a=3$일 때, $C(-3,\ -2)$, $D(3,\ -3)$이므로 점 C가 제3사분면에 위치하지만 정사각형이 되지 않는다.
따라서 $a=2$일 때 사각형 ABCD가 정사각형이 된다.

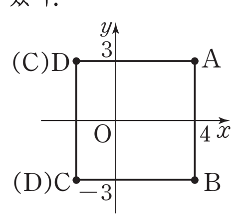
18 답 ⑤

해결 key Point!

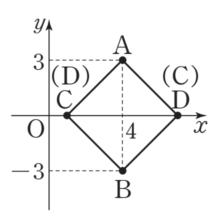
두 점 A, B가 정사각형의 꼭짓점이 되는 모든 정사각형을 생각해 본다.

네 점 A, B, C, D를 좌표평면 위에 나타낼 때 정사각형이 만들어지는 경우는 다음과 같이 세 가지가 있다.

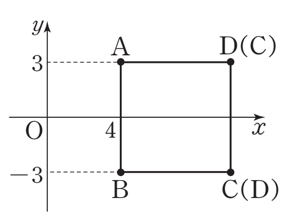
(i) 한 변의 길이가 $3-(-3)=6$인 정사각형이므로
$C(-2,\ -3)$, $D(-2,\ 3)$ 또는
$C(-2,\ 3)$, $D(-2,\ -3)$
$\therefore a^2+b^2+c^2+d^2=4+9+4+9$
$=26$



(ii) 대각선의 길이가 $3-(-3)=6$인 정사각형이므로
$C(1,\ 0)$, $D(7,\ 0)$ 또는
$C(7,\ 0)$, $D(1,\ 0)$
$\therefore a^2+b^2+c^2+d^2=1+0+49+0$
$=50$



(iii) 한 변의 길이가 $3-(-3)=6$인 정사각형이므로
$C(10,\ -3)$, $D(10,\ 3)$ 또는
$C(10,\ 3)$, $D(10,\ -3)$
$\therefore a^2+b^2+c^2+d^2$
$=100+9+100+9=218$



(i)~(iii)에 의하여 $a^2+b^2+c^2+d^2$의 값 중 가장 큰 수는 218, 가장 작은 수는 26이므로 구하는 합은
$218+26=244$

19 답 ②

ㄱ. 두 그래프가 40초, 100초와 120초 사이에서 각각 만나므로 A, B는 두 번 만났다.
ㄴ. B의 그래프에서 $y=800$일 때 $x=100$이므로 800 m 지점을 통과한 것은 출발한 지 100초가 되었을 때이다.
ㄷ. 출발 후 20초가 되었을 때, B가 A보다 두 배 멀리 간 순간이 있으나, 그 반대가 되는 경우는 그래프에서 찾을 수 없다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

20 답 ③

해결 key Point!

주어진 그래프를 보고 a, b의 값을 구한 다음 이를 이용하여 c의 값을 유추해 본다.

수도꼭지 A만 사용하여 수조를 가득 채우는 데 걸린 시간이 630분이므로 $a=\dfrac{1260}{630}=2$

두 수도꼭지 A, B를 동시에 사용하여 수조를 가득 채우는 데 걸린 시간이 252분이므로 $a+b=\dfrac{1260}{252}=5$

이때 $a=2$이므로 $2+b=5$ $\quad\therefore b=3$

그래프 (가)는 수조를 가득 채우는 데 걸린 시간이 105분이므로 1분당 $\dfrac{1260}{105}=12$ (L)만큼 물을 채울 수 있다.

그래프 (나)는 수조를 가득 채우는 데 걸린 시간이 140분이므로 1분당 $\dfrac{1260}{140}=9$ (L)만큼 물을 채울 수 있다.

(i) 그래프 (가)가 세 수도꼭지 A, B, C를 모두 사용한 경우
$a+b+c=12$이므로 $2+3+c=12$에서 $c=7$
이때 그래프 (나)는 1분당 9 L만큼 물을 채울 수 있으므로 $a+c=2+7=9$에서 그래프 (나)는 두 수도꼭지 A, C를 동시에 사용한 경우이다.

(ii) 그래프 (가)가 세 수도꼭지 A, B, C 중 2개를 사용한 경우
그래프 (가)는 1분당 12 L만큼, 그래프 (나)는 1분당 9 L만큼 물을 채울 수 있고,
$a<b$이므로 그래프 (가)는 두 수도꼭지 B, C를 사용하고, 그래프 (나)는 수도꼭지 A, C를 사용한 경우이다.
즉, $b+c=12$에서 $3+c=12$ $\quad\therefore c=9$
이때 $a+c=2+9=11\neq 9$이므로 성립하지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 $c=7$이므로 수도꼭지 C를 사용하여 수조를 가득 채우는 데 걸리는 시간은 $\dfrac{1260}{7}=180$(분)

또, 그래프 (가)는 세 수도꼭지 A, B, C를 모두 사용한 경우, 그래프 (나)는 두 수도꼭지 A, C를 동시에 사용한 경우이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

21 답 ①

① 변기의 물의 높이는 보통 물을 내리는 순간 급격히 내려가고, 그 뒤 천천히 다시 차오르는 과정이 반복된다. 즉, 그래

프는 규칙적인 물결 모양이 아니라, 불규칙적인 변화의 모양의 그래프이어야 한다.

② 시계의 분침은 정각에 시계의 12를 가르키는 곳에서 출발하여 60분간 동일한 속도로 원 한바퀴를 돌아 다시 12를 가르키는 곳에 도착한다. 따라서 높이가 주기적으로 변하는 곡선이 나타난다.

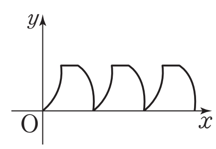
③ 용수철에 매달린 추는 위아래로 진동하므로 높이가 주기적으로 변하는 곡선이 나타난다.

④ 대관람차는 일정한 속도로 회전하므로 높이가 주기적으로 변하는 곡선이 나타난다.

⑤ 줄을 튕기면 그 지점이 위아래로 진동하므로 높이가 주기적으로 변하는 곡선이 나타난다.

따라서 변수 x, y로 적합하지 않은 것은 ①이다.

참고 ①의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



22 답 A－ㄴ, B－ㄱ, C－ㄷ

물병 A의 폭이 점점 좁아지는 부분에서 물의 높이는 점점 빠르게 증가하므로 그래프로 알맞은 것은 ㄴ이다.

물병 B는 폭이 일정한 부분과 폭이 점점 넓어지는 부분으로 나뉜다. 폭이 일정한 부분에서는 물의 높이가 일정하게 증가하고, 폭이 점점 넓어지는 부분에서는 물의 높이가 점점 느리게 증가하므로 알맞은 그래프는 ㄱ이다.

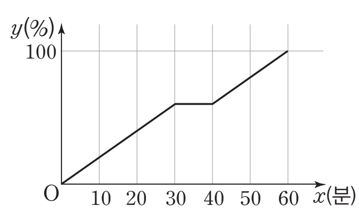
물병 C는 폭이 점점 좁아지는 부분과 폭이 점점 넓어지는 부분으로 나뉜다. 폭이 점점 좁아지는 부분에서는 물의 높이가 점점 빠르게 증가하고 폭이 점점 넓어지는 부분에서는 물의 높이가 점점 느리게 증가하므로 알맞은 그래프는 ㄷ이다.

23 답 풀이 참조

배터리를 충전하는 동안에는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하고, 전력 공급이 끊긴 동안에는 x의 값이 증가하여도 y의 값은 변화가 없이 일정하다.

핸드폰을 30분 동안 충전하다가 10분 동안은 전력 공급이 끊겼고, 다시 20분 동안 충전하였으므로 x의 값이 증가할 때 y의 값은 증가하다가 일정한 값을 유지하다가 다시 증가한다.

따라서 x와 y 사이의 관계를 그래프로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



02 정비례와 반비례

Lv. 1 개념을 적용하는 핵심 문제

98쪽～99쪽

01 ①, ⑤	02 ②, ⑤	03 ②	04 $\frac{4}{3}$	05 ③
06 ①	07 3	08 ⑤	09 ④	10 ②, ③
11 ④	12 ⑤			

01 답 ①, ⑤

① $y=120x$

② $y=7x+5000$

③ 정사각형의 넓이는 (가로의 길이)×(세로의 길이)이므로

$y=x^2$

④ 하루 24시간에서 낮의 길이를 빼면 밤의 길이이므로

$y=24-x$

⑤ $(\text{소금물의 농도})=\dfrac{(\text{소금의 양})}{(\text{소금물의 양})}\times 100\,(\%)$이므로

$y=\dfrac{x}{500}\times 100=\dfrac{x}{5}$

따라서 y가 x에 정비례하는 것은 ①, ⑤이다.

02 답 ②, ⑤

조건 (가)에서 y가 x에 정비례하므로 $y=ax\,(a\neq 0)$라고 하면 $x=4$일 때의 y의 값은 $4a$, $x=-2$일 때의 y의 값은 $-2a$이므로 조건 (나)에서

$|4a-(-2a)|=36$, $|6a|=36$, $|a|=6$

$\therefore a=-6$ 또는 $a=6$

따라서 x와 y 사이의 관계식은

$y=-6x$ 또는 $y=6x$

03 답 ②

$y=\dfrac{3}{2}x$에 $x=a$, $y=6$을 대입하면

$6=\dfrac{3}{2}a \qquad \therefore a=4$

$y=\dfrac{3}{2}x$에 $x=b$, $y=-\dfrac{9}{2}$를 대입하면

$-\dfrac{9}{2}=\dfrac{3}{2}b \qquad \therefore b=-3$

$y=\dfrac{3}{2}x$에 $x=-\dfrac{4}{3}$, $y=c$를 대입하면

$c=\dfrac{3}{2}\times\left(-\dfrac{4}{3}\right)=-2$

$\therefore a+b+c=4+(-3)+(-2)=-1$

04 답 $\frac{4}{3}$

1단계 그래프의 식 구하기

그래프가 점 $\left(-3, -\frac{8}{3}\right)$을 지나므로 $y=ax$에 $x=-3$, $y=-\frac{8}{3}$을 대입하면

$-\frac{8}{3}=-3a \qquad \therefore a=\frac{8}{9}$

$\therefore y=\frac{8}{9}x$

2단계 점 P의 y좌표 구하기

점 P의 x좌표가 $\frac{3}{2}$이므로 $y=\frac{8}{9}x$에 $x=\frac{3}{2}$을 대입하면

$y=\frac{8}{9}\times\frac{3}{2}=\frac{4}{3}$

따라서 점 P의 y좌표는 $\frac{4}{3}$이다.

단계	채점 기준	비율
❶	그래프의 식을 구했다.	50 %
❷	점 P의 y좌표를 구했다.	50 %

05 답 ③

이 자동차가 시속 60 km로 달릴 때, 휘발유 4 L로 64 km를 갈 수 있으므로 휘발유 1 L로 16 km를 갈 수 있다.
즉, 휘발유 x L로 $16x$ km를 갈 수 있으므로 x와 y 사이의 관계식은 $y=16x$
$y=16x$에 $x=30$을 대입하면 $y=480$
따라서 휘발유 30 L로 480 km를 갈 수 있으므로
$\frac{480}{60}=8$(시간)을 갈 수 있다.

참고 (시간)$=\frac{(\text{거리})}{(\text{속력})}$

06 답 ①

x초 후의 선분 BP의 길이가 $2x$ cm이므로

$y=\frac{1}{2}\times 2x\times 14 \qquad \therefore y=14x$

$y=14x$에 $y=168$을 대입하면

$168=14x \qquad \therefore x=12$

따라서 삼각형 ABP의 넓이가 168 cm^2가 되는 것은 점 P가 점 B를 출발한 지 12초 후이다.

07 답 3

1단계 x와 y 사이의 관계식 구하기

y가 x에 반비례하므로 $y=\frac{a}{x}$ $(a\neq 0)$라고 하자.

$y=\frac{a}{x}$에 $x=-\frac{5}{4}$, $y=-16$을 대입하면

$-16=a\div\left(-\frac{5}{4}\right)$, $-16=a\times\left(-\frac{4}{5}\right)$

$\therefore a=20$

즉, x와 y 사이의 관계식은 $y=\frac{20}{x}$

2단계 A, B, C의 값 구하기

$y=\frac{20}{x}$에 $x=-10$, $y=A$를 대입하면

$A=\frac{20}{-10}=-2$

$y=\frac{20}{x}$에 $x=B$, $y=6$을 대입하면

$6=\frac{20}{B} \qquad \therefore B=\frac{10}{3}$

$y=\frac{20}{x}$에 $x=12$, $y=C$를 대입하면

$C=\frac{20}{12}=\frac{5}{3}$

3단계 $A+B+C$의 값 구하기

$\therefore A+B+C=-2+\frac{10}{3}+\frac{5}{3}=3$

단계	채점 기준	비율
❶	x와 y 사이의 관계식을 구했다.	30 %
❷	A, B, C의 값을 구했다.	60 %
❸	$A+B+C$의 값을 구했다.	10 %

08 답 ⑤

$y=\frac{a}{x}$에 $x=-2$, $y=9$를 대입하면

$9=\frac{a}{-2} \qquad \therefore a=-18$

즉, x와 y 사이의 관계식은 $y=-\frac{18}{x}$

⑤ $x<0$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

09 답 ④

$y=\frac{a}{x}$에 $x=2$를 대입하면 $y=\frac{a}{2}$이므로 점 P의 y좌표는 $\frac{a}{2}$이다.

또, $y=\frac{a}{x}$에 $x=6$을 대입하면 $y=\frac{a}{6}$이므로 점 Q의 y좌표는 $\frac{a}{6}$이다.

이때 두 점 P, Q의 y좌표의 차가 $\frac{10}{3}$이므로

$\frac{a}{2}-\frac{a}{6}=\frac{10}{3}$, $\frac{1}{3}a=\frac{10}{3} \qquad \therefore a=10$

10 답 ②, ③

반비례 관계 ㉠의 그래프를 나타내는 식을 $y=\frac{a}{x}$라고 할 때,

㉠의 그래프는 $y=\frac{2}{x}$의 그래프보다 원점에서 멀리 있으므로

$a>0$, $|a|>|2|$

따라서 ㉠의 그래프로 알맞은 식은 $y=\frac{5}{x}$이다.

반비례 관계 ㉡의 그래프를 나타내는 식을 $y=\frac{b}{x}$라고 할 때,

ⓒ의 그래프는 $y=-\frac{3}{x}$의 그래프보다 원점에 가까이 있으므로

$b<0$, $|b|<|-3|$

따라서 ⓒ의 그래프로 알맞은 식은 $y=-\frac{1}{x}$이다.

11 답 ④

A$(-3, 4)$이므로 $y=\frac{a}{x}$에 $x=-3$, $y=4$를 대입하면

$4=\frac{a}{-3}$ $\quad\therefore a=-12$

점 C의 x좌표가 2이므로 $y=-\frac{12}{x}$에 $x=2$를 대입하면

$y=-\frac{12}{2}=-6$ $\quad\therefore$ C$(2, -6)$

따라서 두 점 B, D의 좌표는 각각 $(-3, -6)$, $(2, 4)$이므로

직사각형 ABCD의 넓이는

$\{2-(-3)\}\times\{4-(-6)\}=5\times10=50$

12 답 ⑤

일의 전체 양은 $20\times15=300$

이 일을 x명이 함께 하면 y일 만에 끝낼 수 있으므로

$x\times y=300$ $\quad\therefore y=\frac{300}{x}$

ㄱ. x의 값이 3배가 되면 y의 값은 $\frac{1}{3}$배가 된다.

ㄴ. $y=\frac{300}{x}$에 $x=30$을 대입하면 $y=10$

즉, 30명이 함께 하면 10일 만에 끝난다.

ㄷ. $y=\frac{300}{x}$에 $y=12$를 대입하면

$12=\frac{300}{x}$ $\quad\therefore x=25$

즉, 12일 만에 끝내려면 25명이 함께 해야 한다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

Lv. 2 사고를 확장하는 실전 문제

100쪽~104쪽

01 ③	02 2	03 $\frac{14}{3}$	04 18	05 6
06 ②	07 ⑤	08 ②	09 ①	10 ①
11 7	12 ④	13 $\frac{3}{4}$	14 ⑤	15 $\frac{21}{25}$
16 ⑤	17 ⑤	18 12	19 1	20 ⑤
21 ③	22 24	23 ⑤	24 ③	25 ①
26 ⑤	27 24초	28 ⑤		

01 답 ③

$y=3x$에 $x=a-1$, $y=-a+3$을 대입하면

$-a+3=3(a-1)$, $-a+3=3a-3$

$4a=6$ $\quad\therefore a=\frac{3}{2}$

$\therefore y=\frac{1}{a-1}x=1\div\left(\frac{3}{2}-1\right)\times x=2x$

따라서 $y=2x$에 $x=b-1$, $y=-b+3$을 대입하면

$-b+3=2(b-1)$, $-b+3=2b-2$

$3b=5$ $\quad\therefore b=\frac{5}{3}$

$\therefore 2a+3b=2\times\frac{3}{2}+3\times\frac{5}{3}=3+5=8$

02 답 2

해결 key Point!

좌표평면 위의 원점을 지나는 직선은 정비례 관계의 그래프임을 이용해야 한다.

원점을 포함한 세 점이 한 직선 위에 있으므로 세 점은 정비례 관계 $y=ax$의 그래프 위의 점이다.

점 A$(2, 4)$가 $y=ax$의 그래프 위의 점이므로

$4=2a$ $\quad\therefore a=2$

$\therefore y=2x$

점 B$(5-2n, n)$이 $y=2x$의 그래프 위의 점이므로

$n=2(5-2n)$, $n=10-4n$

$5n=10$ $\quad\therefore n=2$

03 답 $\frac{14}{3}$

해결 key Point!

$y=\frac{a}{x}$에서 $a=xy$이므로 주어진 점의 좌표를 $a=xy$에 대입하여 해결한다.

$y=\frac{a}{x}$에서 $a=xy$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠에 $x=\frac{2^2+3^2}{1^2+2^2}$, $y=\frac{3^2+4^2}{2^2+3^2}$을 대입하면

$a=\frac{2^2+3^2}{1^2+2^2}\times\frac{3^2+4^2}{2^2+3^2}=\frac{3^2+4^2}{1^2+2^2}=\frac{25}{5}=5$

따라서 $y=\frac{5}{x}$에 $x=3$, $y=b+2$를 대입하면

$b+2=\frac{5}{3}$ $\quad\therefore b=-\frac{1}{3}$

$\therefore a+b=5+\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{14}{3}$

04 답 18

1단계 a의 값 구하기

$y=\frac{k}{x}(k\neq0)$라 하고 $x=a-1$, $y=2b$를 대입하면

$2b=\dfrac{k}{a-1}$ ······ ㉠

$y=\dfrac{k}{x}$에 $x=a+1$, $y=b$를 대입하면 $b=\dfrac{k}{a+1}$

㉠에 $b=\dfrac{k}{a+1}$를 대입하면 $2\left(\dfrac{k}{a+1}\right)=\dfrac{k}{a-1}$

$\dfrac{2k}{a+1}=\dfrac{k}{a-1}$, $2(a-1)=a+1$

$2a-2=a+1$ $\quad\therefore a=3$

2단계 b의 값 구하기

㉠에 $a=3$을 대입하면 $2b=\dfrac{k}{3-1}$ $\quad\therefore k=4b$

$\therefore y=\dfrac{4b}{x}$

$y=\dfrac{4b}{x}$에 $x=a=3$, $y=b+1$을 대입하면

$b+1=\dfrac{4b}{3}$, $3b+3=4b$

$\therefore b=3$

3단계 c의 값 구하기

$k=4b=4\times3=12$이므로

$y=\dfrac{12}{x}$에 $x=6$, $y=c$를 대입하면

$c=\dfrac{12}{6}=2$

4단계 $a\times b\times c$의 값 구하기

$\therefore a\times b\times c=3\times3\times2=18$

단계	채점 기준	비율
❶	a의 값을 구했다.	40 %
❷	b의 값을 구했다.	30 %
❸	c의 값을 구했다.	20 %
❹	$a\times b\times c$의 값을 구했다.	10 %

05 답 6

$y=\dfrac{a}{x}$, 즉 $a=xy$에 $x=-\dfrac{3}{2}$, $y=6$을 대입하면

$a=-\dfrac{3}{2}\times6=-9$

따라서 반비례 관계 $y=-\dfrac{9}{x}$의 그래프 위의 점 중 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 좌표는 $(1, -9)$, $(3, -3)$, $(9, -1)$, $(-1, 9)$, $(-3, 3)$, $(-9, 1)$의 6개이다.

꿀 한줄평

x의 좌표가 정수가 아닌 분수의 꼴이면 $y=\dfrac{a}{x}$보다 $a=xy$에 대입하는 것이 더 계산이 편리하다.

또, $y=\dfrac{a}{x}$에서 x좌표와 y좌표가 정수이려면 x좌표의 절댓값이 a의 약수이어야 한다.

즉, $y=-\dfrac{a}{x}$에서 9의 약수는 1, 3, 9이므로 x좌표가 -9, -3, -1, 1, 3, 9일 때, x좌표와 y좌표가 모두 정수이다.

06 답 ②

해결 key Point!

x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점을 찾아야 한다.

x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점은 제1사분면 위에 있다.

$y=\dfrac{12}{x}$에서 y좌표가 자연수가 되는 x좌표는 12의 약수이므로 1, 2, 3, 4, 6, 12

$\dfrac{12}{1}=12$이므로 $x=1$일 때 $y=1, 2, \cdots, 11$의 11개

$\dfrac{12}{2}=6$이므로 $x=2$일 때 $y=1, 2, \cdots, 5$의 5개

$\dfrac{12}{3}=4$이므로 $x=3$일 때 $y=1, 2, 3$의 3개

$\dfrac{12}{4}=3$이므로 $x=4, 5$일 때 $y=1, 2$의 2개

$\dfrac{12}{6}=2$, $\dfrac{12}{12}=1$이므로

$x=6, 7, 8, 9, 10, 11$일 때 $y=1$의 1개

따라서 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점의 개수는

$11+5+3+2\times2+6\times1=29$

07 답 ⑤

점 (a, b)가 제2사분면 위의 점이므로 $a<0$, $b>0$

① $a<0$이므로 $y=ax$의 그래프는 제2사분면, 제4사분면을 지난다.

② $-b<0$이므로 $y=-bx$의 그래프는 제2사분면, 제4사분면을 지난다.

③ $a<0$이므로 $y=\dfrac{a}{x}$의 그래프는 제2사분면, 제4사분면을 지난다.

④ $a^3<0$, $b^2>0$이므로 $\dfrac{a^3}{b^2}<0$

따라서 $y=\dfrac{a^3}{b^2x}$의 그래프는 제2사분면, 제4사분면을 지난다.

⑤ $a^3<0$이므로 $-\dfrac{b}{a^3}>0$

따라서 $y=-\dfrac{b}{a^3x}$의 그래프는 제1사분면, 제3사분면을 지난다.

따라서 제3사분면을 지나는 그래프는 ⑤이다.

08 답 ②

ㄱ. $y=\dfrac{a}{x}$의 그래프는 제1사분면과 제3사분면에 한 쌍의 곡선으로 그려져 있으므로 $a>0$

$y=\dfrac{b}{x}$와 $y=\dfrac{c}{x}$는 제2사분면과 제4사분면에 한 쌍의 곡선으로 그려져 있으므로 $b<0$, $c<0$

이때 $y=\frac{c}{x}$의 그래프는 $y=\frac{b}{x}$의 그래프보다 원점에서 멀리 떨어져 있으므로 $|b|<|c|$ $\quad \therefore b>c$

$\therefore c<b<a$

ㄴ. $y=px$, $y=qx$는 제1사분면과 제3사분면을 지나는 직선이므로 $p>0$, $q>0$

이때 $y=px$가 $y=qx$보다 y축에 더 가까우므로 $p>q$

$y=rx$, $y=sx$는 제2사분면과 제4사분면을 지나는 직선이므로 $r<0$, $s<0$

이때 $y=rx$가 $y=sx$보다 y축에 더 가까우므로

$|r|>|s|$ $\quad \therefore s>r$

$\therefore r<s<q<p$

ㄷ. $b<0$, $c<0$이므로 $bc>0$

ㄹ. $p>0$, $q>0$, $r<0$, $s<0$이므로

$pq>0$, $rs>0$ $\quad \therefore pq+rs>0$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

09 답 ①

0이 아닌 상수 a, b에 대하여 y가 x에 정비례하면 $y=ax$라 하고, y가 x에 반비례하면 $y=\frac{a}{x}$라고 하자.

또, x가 z에 정비례하면 $x=bz$라 하고, x가 z에 반비례하면 $x=\frac{b}{z}$라고 하자.

ㄱ. y가 x에 정비례하므로 $y=ax$, x가 z에 정비례하므로 $x=bz$

따라서 $y=a\times bz=abz$이므로 y는 z에 정비례한다.

ㄴ. y가 x에 정비례하므로 $y=ax$, x가 z에 반비례하므로

$x=\frac{b}{z}$

따라서 $y=a\times\frac{b}{z}=\frac{ab}{z}$이므로 y는 z에 반비례한다.

ㄷ. y가 x에 반비례하므로 $y=\frac{a}{x}$, x가 z에 반비례하므로

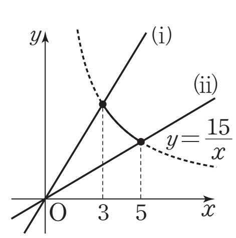
$x=\frac{b}{z}$

따라서 $y=\frac{a}{\frac{b}{z}}=a\div\frac{b}{z}=a\times\frac{z}{b}=\frac{a}{b}z$이므로 y는 z에 정비례한다.

그러므로 옳은 것은 ㄱ이다.

10 답 ①

정비례 관계 $y=ax$의 그래프와 반비례 관계 $y=\frac{15}{x}$의 그래프가 제1사분면에서 만나는 점은 오른쪽 그림과 같이 두 그래프 (i), (ii) 사이에 존재한다.



(i) $k=3$일 때

$y=\frac{15}{x}$에 $x=3$을 대입하면 $y=5$

$y=ax$에 $x=3$, $y=5$를 대입하면

$5=3a$ $\quad \therefore a=\frac{5}{3}$

(ii) $k=5$일 때

$y=\frac{15}{x}$에 $x=5$를 대입하면 $y=3$

$y=ax$에 $x=5$, $y=3$을 대입하면

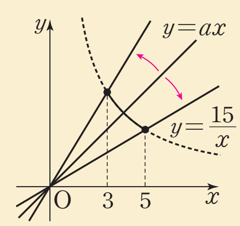
$3=5a$ $\quad \therefore a=\frac{3}{5}$

(i), (ii)에 의하여 $\frac{3}{5}\le a\le\frac{5}{3}$이므로 a의 값 중 가장 큰 수는 $\frac{5}{3}$, 가장 작은 수는 $\frac{3}{5}$이므로 $15a$의 값 중 가장 큰 수와 가장 작은 수의 합은

$15\times\frac{5}{3}+15\times\frac{3}{5}=25+9=34$

꿀 한줄평

정비례 관계 $y=ax$의 그래프는 원점을 지나는 직선이다. 이 직선이 $3\le x\le 5$에서 반비례 관계 $y=\frac{15}{x}$의 그래프와 만나야 하므로 $3\le x\le 5$에서의 반비례 관계 $y=\frac{15}{x}$의 그래프의 곡선을 지나야 한다.



이때 a는 직선의 가파르기를 결정하므로 원점을 지나는 직선을 움직여 보며 곡선과 만나는 범위를 찾으면 된다.

따라서 $x=3$일 때 a의 값이 가장 크고, $x=5$일 때 a의 값이 가장 작다.

11 답 7

1단계 두 점 A, B의 좌표 구하기

두 점 A, B의 x좌표를 a라고 하면

$A(a, 3a)$, $B(a, 2a)$

이때 선분 AB의 길이가 14이므로

$3a-2a=14$ $\quad \therefore a=14$

$\therefore A(14, 42)$, $B(14, 28)$

2단계 점 C의 좌표 구하기

이때 점 C의 y좌표는 점 A의 y좌표와 같으므로

$y=2x$에 $y=42$를 대입하면

$42=2x$ $\quad \therefore x=21$

$\therefore C(21, 42)$

3단계 선분 AC의 길이 구하기

따라서 선분 AC의 길이는

$21-14=7$

단계	채점 기준	비율
❶	두 점 A, B의 좌표를 구했다.	60 %
❷	점 C의 좌표를 구했다.	30 %
❸	선분 AC의 길이를 구했다.	10 %

12 답 ④

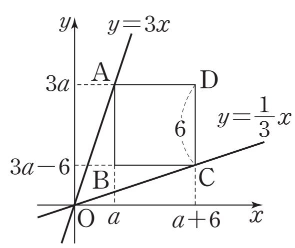
해결 key Point!

점 A의 좌표를 미지수 a를 이용하여 나타내고, 나머지 점도 미지수로 a를 이용하여 나타내야 한다.

점 A의 x좌표를 a라고 하면 $A(a,\ 3a)$이므로

$B(a,\ 3a-6)$, $C(a+6,\ 3a-6)$, $D(a+6,\ 3a)$

이때 점 C는 $y=\frac{1}{3}x$의 그래프 위의 점이므로 $y=\frac{1}{3}x$에 $x=a+6$, $y=3a-6$을 대입하면



$3a-6=\frac{1}{3}(a+6)$

$3a-6=\frac{1}{3}a+2$

$\frac{8}{3}a=8 \qquad \therefore a=3$

$\therefore A(3,\ 9)$

13 답 $\frac{3}{4}$

점 P는 $y=ax$의 그래프 위의 점이므로 점 P의 x좌표를 $m\ (m>0)$이라고 하면 $P(m,\ am)$

(삼각형 PAB의 넓이)$=\frac{1}{2}\times(9-3)\times am=3am$

(삼각형 PCD의 넓이)$=\frac{1}{2}\times(8-5)\times m=\frac{3}{2}m$

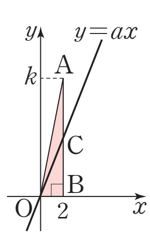
이때 삼각형 PAB의 넓이를 2배 한 값이 삼각형 PCD의 넓이를 3배 한 값과 같으므로

$2\times 3am=3\times\frac{3}{2}m$

$6am=\frac{9}{2}m \qquad \therefore a=\frac{3}{4}$

14 답 ⑤

오른쪽 그림과 같이 $y=ax$의 그래프가 선분 AB와 만나는 점을 C라고 하자.



정비례 관계 $y=ax$의 그래프가 삼각형 AOB의 넓이를 이등분하므로 삼각형 COB의 넓이는 삼각형 AOB의 넓이의 $\frac{1}{2}$배이다. 이때 두 삼각형 AOB와 COB의 밑변은 선분 OB로 같고 선분 AB의 길이가 k이므로 선분 BC의 길이는 $\frac{k}{2}$이다.

$\therefore C\left(2,\ \frac{k}{2}\right)$

이때 점 C는 $y=ax$의 그래프 위의 점이므로 $y=ax$에 $x=2$, $y=\frac{k}{2}$를 대입하면

$\frac{k}{2}=2a \qquad \therefore k=4a$

따라서 정비례 관계 $k=4a$의 그래프로 알맞은 것은 ⑤이다.

꿀 한줄평

두 삼각형 AOB, COB는 둘다 직각삼각형이고 공통인 변 OB가 있으므로 넓이의 비는 두 변 AB, CB의 길이의 비와 같다.

이때 삼각형 COB의 넓이가 삼각형 AOB의 넓이의 $\frac{1}{2}$배이므로 선분 CB의 길이가 선분 AB의 길이의 $\frac{1}{2}$배가 되는 것이다.

15 답 $\frac{21}{25}$

해결 key Point!

주어진 점의 좌표를 이용하여 삼각형 PBO의 넓이를 구해야 한다.

1단계 삼각형 PBO의 넓이 구하기

(사다리꼴 ABOC의 넓이)$=\frac{1}{2}\times(5+2)\times 6=21$

$y=ax$의 그래프가 사다리꼴 ABOC의 넓이를 이등분하므로 삼각형 PBO의 넓이는 $\frac{21}{2}$이다.

2단계 점 P의 좌표 구하기

점 P는 $y=ax$의 그래프 위의 점이므로 $y=ax$에 $x=-5$를 대입하면 $y=-5a$

$\therefore P(-5,\ -5a)$

3단계 a의 값 구하기

따라서 삼각형 PBO의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 5\times 5a=\frac{25}{2}a$

즉, $\frac{21}{2}=\frac{25}{2}a$이므로 $21=25a$

$\therefore a=\frac{21}{25}$

단계	채점 기준	비율
❶	삼각형 PBO의 넓이를 구했다.	40 %
❷	점 P의 좌표를 구했다.	40 %
❸	a의 값을 구했다.	20 %

16 답 ⑤

점 $(p,\ q)$가 $y=\frac{a}{x}$의 그래프 위의 점이므로 $y=\frac{a}{x}$에 $x=p$, $y=q$를 대입하면

$q=\frac{a}{p} \qquad \therefore pq=a$

ㄱ. p, q가 정수일 때, $pq=2$를 만족시키는 점 $(p,\ q)$는 $(1,\ 2)$, $(2,\ 1)$, $(-1,\ -2)$, $(-2,\ -1)$의 4개이다.

ㄴ. a의 약수의 개수를 k라고 하자.
$pq=a$를 만족시키는 정수 p에 대하여 $|p|$의 값은 k개이므로 p의 값은 $2k$개이다. 이때 p의 값에 대응되는 q의 값이 항상 한 개 존재하므로 $pq=a$를 만족시키는 점 $(p,\ q)$의 개수는 p의 개수와 같다.
따라서 점의 개수는 항상 짝수이다.

ㄷ. 점의 개수 $2k$가 4의 배수가 아니려면 k가 홀수이어야 한다. 이때 k는 a의 약수의 개수이고 k가 홀수이려면 a는 (자연수)^{2}의 꼴이어야 하므로 100 이하의 수는 $1^2,\ 2^2,\ \cdots,\ 10^2$의 10개이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

17 답 ⑤

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하고 사각형 PQOR의 넓이를 S라고 하면 $S=xy$

즉, $y=\dfrac{S}{x}$이므로 S를 일정하게 유지하면 y는 x에 반비례한다.

이때 $S>0$이므로 점 P가 나타내는 그래프로 알맞은 것은 ⑤이다.

18 답 12

선분 AB가 y축에 평행하므로 두 점 A, B는 x좌표가 같다.
따라서 점 B의 x좌표는 3이므로

$y=-\dfrac{a}{x}$에 $x=3$을 대입하면 $y=-\dfrac{a}{3}$

$\therefore$ B$\left(3,\ -\dfrac{a}{3}\right)$

이때 선분 AB의 길이가 8이므로

$4-\left(-\dfrac{a}{3}\right)=8,\ 4+\dfrac{a}{3}=8,\ \dfrac{a}{3}=4 \qquad \therefore a=12$

19 답 1

해결 key Point!

세 점 A, B, C의 좌표를 모두 a, b를 이용하여 나타내야 한다.

두 점 A, C의 x좌표가 같으므로 점 C의 x좌표는 1이다.

$y=\dfrac{a}{x}$에 $x=1$을 대입하면 $y=a$

$\therefore$ A$(1,\ a)$

$y=\dfrac{b}{x}$에 $x=1$을 대입하면 $y=b$

$\therefore$ C$(1,\ b)$

두 점 A, B의 y좌표가 같으므로 점 B의 y좌표는 a이다.

$y=\dfrac{b}{x}$에 $y=a$를 대입하면

$a=\dfrac{b}{x},\ x=\dfrac{b}{a}$

$\therefore$ B$\left(\dfrac{b}{a},\ a\right)$

즉, 선분 AB와 선분 AC의 길이가 같으므로

$1-\dfrac{b}{a}=a-b,\ \dfrac{a-b}{a}=a-b$

이때 $a\neq b$이므로 양변을 $a-b$로 나누면

$\dfrac{1}{a}=1 \qquad \therefore a=1$

20 답 ⑤

점 A의 x좌표가 2이므로 $y=\dfrac{a}{x}$에 $x=2$를 대입하면

$y=\dfrac{a}{2} \qquad \therefore$ A$\left(2,\ \dfrac{a}{2}\right)$

점 C의 x좌표가 6이므로 $y=\dfrac{a}{x}$에 $x=6$을 대입하면

$y=\dfrac{a}{6} \qquad \therefore$ C$\left(6,\ \dfrac{a}{6}\right)$

이때 점 B는 점 A와 x좌표가 같고 점 C와 y좌표가 같으므로

B$\left(2,\ \dfrac{a}{6}\right)$

점 D는 점 C와 x좌표가 같고 점 A와 y좌표가 같으므로

D$\left(6,\ \dfrac{a}{2}\right)$

즉, 직사각형 ABCD의 넓이가 36이므로

$(6-2)\times\left(\dfrac{a}{2}-\dfrac{a}{6}\right)=36,\ 4\times\dfrac{1}{3}a=36$

$\dfrac{4}{3}a=36 \qquad \therefore a=27$

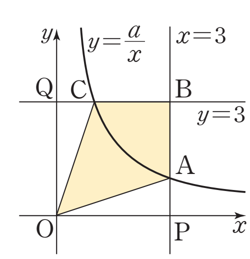
21 답 ③

점 A의 x좌표가 3이므로 $y=\dfrac{a}{x}$에 $x=3$을 대입하면

$y=\dfrac{a}{3} \qquad \therefore$ A$\left(3,\ \dfrac{a}{3}\right)$

점 C의 y좌표가 3이므로 $y=\dfrac{a}{x}$에 $y=3$을 대입하면

$3=\dfrac{a}{x},\ x=\dfrac{a}{3} \qquad \therefore$ C$\left(\dfrac{a}{3},\ 3\right)$



오른쪽 그림과 같이 $x=3$과 만나는 x축 위의 점을 P, $y=3$과 만나는 y축 위의 점을 Q라고 하면

(사각형 OPBQ의 넓이)$=3\times3=9$

(삼각형 OAP의 넓이)

$=\dfrac{1}{2}\times3\times\dfrac{a}{3}=\dfrac{a}{2}$

(삼각형 OCQ의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{a}{3}\times3=\dfrac{a}{2}$

이때 사각형 OABC의 넓이가 6이므로

(사각형 OABC의 넓이)

$=$(사각형 OPBQ의 넓이)$-$(삼각형 OAP의 넓이)

$-$(삼각형 OCQ의 넓이)

에서

$6=9-\frac{a}{2}-\frac{a}{2}$, $6=9-a$

$\therefore a=3$

22 답 24

1단계 두 점 A, B의 좌표 구하기

두 점 A, B의 y좌표는 6이므로 $y=\frac{a}{x}$에 $y=6$을 대입하면

$6=\frac{a}{x}$, $x=\frac{a}{6}$

$\therefore A\left(\frac{a}{6}, 6\right)$

$y=-\frac{2a}{x}$에 $y=6$을 대입하면

$6=-\frac{2a}{x}$, $x=-\frac{a}{3}$

$\therefore B\left(-\frac{a}{3}, 6\right)$

2단계 점 C의 좌표 구하기

이때 두 점 A, C를 지나는 그래프를 정비례 관계 $y=bx$ (b는 상수)라고 하자.

$y=bx$에 $x=\frac{a}{6}$, $y=6$을 대입하면

$6=\frac{ab}{6}$, $b=\frac{36}{a}$ $\qquad \therefore y=\frac{36}{a}x$

$y=\frac{36}{a}x$에 $y=3$을 대입하면

$3=\frac{36}{a}x$, $x=\frac{a}{12}$

$\therefore C\left(\frac{a}{12}, 3\right)$

3단계 점 D의 좌표 구하기

마찬가지로 두 점 B, D를 지나는 그래프를 정비례 관계 $y=cx$ (c는 상수)라고 하자.

$y=cx$에 $x=-\frac{a}{3}$, $y=6$을 대입하면

$6=-\frac{ac}{3}$, $c=-\frac{18}{a}$

$\therefore y=-\frac{18}{a}x$

$y=-\frac{18}{a}x$에 $y=3$을 대입하면

$3=-\frac{18}{a}x$, $x=-\frac{a}{6}$

$\therefore D\left(-\frac{a}{6}, 3\right)$

4단계 a의 값 구하기

$y=bx$, $y=cx$의 그래프와 두 직선 $y=6$, $y=3$으로 둘러싸인 사각형 ABDC는 사다리꼴이다.

이때 선분 BA의 길이는 $\frac{a}{6}-\left(-\frac{a}{3}\right)=\frac{1}{2}a$, 선분 DC의 길이는 $\frac{a}{12}-\left(-\frac{a}{6}\right)=\frac{1}{4}a$이고, 사각형 ABDC의 넓이가 27이므로

$\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}a\right)\times 3=27$

$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}a\times 3=27$, $\frac{9}{8}a=27$

$\therefore a=24$

단계	채점 기준	비율
❶	두 점 A, B의 좌표를 구했다.	25 %
❷	점 C의 좌표를 구했다.	25 %
❸	점 D의 좌표를 구했다.	25 %
❹	a의 값을 구했다.	25 %

23 답 ⑤

일정한 기간 동안 맞물리는 톱니의 개수는 같으므로

$55\times x=75\times y$ $\qquad \therefore y=\frac{11}{15}x$

이때 x, y는 톱니바퀴가 회전한 횟수이므로 $x>0$, $y>0$

따라서 x와 y 사이의 관계를 나타낸 그래프로 알맞은 것은 $y=\frac{11}{15}x$의 그래프 중 $x>0$, $y>0$인 부분을 나타낸 ⑤이다.

24 답 ③

해결 key Point!

B1 용지를 반씩 세 번 접으면 B4 용지가 되므로 B1 용지 1장을 인쇄하는 것과 B4 용지 8장을 인쇄하는 것이 같음을 이용해야 한다.

20초 동안 B4 용지 8장을 인쇄할 수 있으므로 60초, 즉 1분 동안 B4 용지 $3\times 8=24$(장)을 인쇄할 수 있다.

또, B4 용지 24장을 인쇄하는 것은 B3 용지 12장, B2 용지 6장, B1 용지 3장을 인쇄하는 것과 같다.

따라서 1분 동안 B1 용지 3장을 인쇄할 수 있으므로 x와 y 사이의 관계를 식으로 나타내면

$y=3x$

25 답 ①

$x\times y=243$이므로 $y=\frac{243}{x}$

이때 x, y는 각각 가로, 세로에 놓인 타일의 개수이므로 자연수이고, 직사각형의 가로의 길이가 세로의 길이보다 길어야 하므로 $x>y$

따라서 $y=\frac{243}{x}$을 만족시키는 순서쌍 (x, y)는

$(243, 1)$, $(81, 3)$, $(27, 9)$

이므로 구하는 직사각형의 개수는 3이다.

26 답 ⑤

해결 key Point!

두 그래프의 식을 각각 구해야 한다.

두 그래프는 정비례 관계의 그래프이므로 지은이의 그래프는 $y=ax\ (a\neq0)$, 민우의 그래프는 $y=bx\ (b\neq0)$라고 하자.
지은이의 그래프가 점 $(20,\ 100)$을 지나므로
$100=20a \qquad \therefore a=5$
민우의 그래프가 점 $(20,\ 60)$을 지나므로
$60=20b \qquad \therefore b=3$
즉, 지은이의 그래프가 나타내는 식은 $y=5x$, 민우의 그래프가 나타내는 식은 $y=3x$

④ 두 사람이 x분 동안 소금빵을 각각 $3x$개, $5x$개 만드므로 총 $8x$개를 만들 수 있다.
두 사람이 800개의 소금빵을 만들기 위해 걸리는 시간은 $800=8x$에서 $x=100$
즉, 100분이 소요된다.

⑤ 그래프의 식에 $x=30$을 각각 대입하면
$y=5\times30=150$(개), $y=3\times30=90$(개)
즉, 지은이가 민우보다 $150-90=60$(개) 더 많은 소금빵을 만든다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

27 답 24초

1단계 x, y 사이의 관계식 구하기

선분 PD의 길이를 x cm, 삼각형 APD의 넓이를 $y\ \text{cm}^2$라고 하면

$y=\frac{1}{2}\times x\times60 \qquad \therefore y=30x$

2단계 선분 PD의 길이 구하기

$y=30x$에 $y=600$을 대입하면 $600=30x$

$\therefore x=20$

3단계 점 P가 출발한 지 몇 초 후인지 구하기

따라서 선분 PC의 길이는 $40-20=20$ (cm)이므로 점 P가 움직인 거리는 $40+60+20=120$ (cm)
이때 점 P는 초속 5 cm로 직사각형의 변을 따라 움직이므로 점 P가 점 A에서 출발한 지 $\frac{120}{5}=24$(초) 후이다.

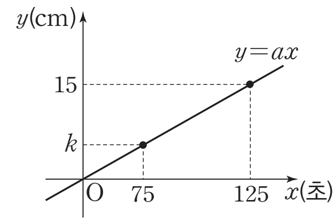
단계	채점 기준	비율
❶	x, y 사이의 관계식을 구했다.	40 %
❷	선분 PD의 길이를 구했다.	30 %
❸	점 P가 출발한 지 몇 초 후인지 구했다.	30 %

28 답 ⑤

해결 key Point!
물은 작은 수조부터 채워지고 있고 y는 수면의 최대 높이이므로 작은 수조가 다 채워진 후 큰 수조가 채워질 때 일정 구간 동안 최대 높이는 변하지 않음을 주의해야 한다.

27초와 75초일 때 수면의 높이는 k cm로 같다. 즉, 수조의 물은 27초 동안 작은 수조에 물이 가득 차고, 75초 동안 큰 수조에 k cm만큼 물이 찬다. 그 후 125초까지 큰 수조의 물이 15 cm까지 채워진다. 이때 수조에 채워지는 물의 속력이 일정하므로 작은 수조가 없이 큰 수조에 물을 채웠다면 그래프는 0초부터 125초까지 정비례 관계의 그래프이어야 한다.

75초부터 125초까지의 구간의 그래프를 정비례 관계 $y=ax$의 그래프라고 하면 이 그래프는 점 $(125,\ 15)$를 지나므로



$y=ax$에 $x=125$, $y=15$를 대입하면

$15=125a$, $a=\frac{3}{25} \qquad \therefore y=\frac{3}{25}x$

$y=\frac{3}{25}x$에 $x=75$, $y=k$를 대입하면

$k=\frac{3}{25}\times75 \qquad \therefore k=9$

따라서 작은 수조의 한 모서리의 길이는 9 cm이다.

Lv. X 상위 1%에 도달하는 심화 문제 106쪽~107쪽

01 25 **02** 77 **03** 235 **04** 2 : 1 **05** 7배
06 5

01 답 25

해결 key Point!
점 A_1의 좌표를 이용하여 점 A_2, A_3, …의 좌표를 구해야 한다.

$y=mx$에 $y=2048$을 대입하면

$2048=mx \qquad \therefore x=\frac{2048}{m}$

$\therefore A_2\left(\frac{2048}{m},\ 2048\right)$, $A_3\left(\frac{2048}{m},\ \frac{2048}{m}\right)$

$y=mx$에 $y=\frac{2048}{m}$을 대입하면

$\frac{2048}{m}=mx \qquad \therefore x=\frac{2048}{m^2}$

$\therefore A_4\left(\frac{2048}{m^2},\ \frac{2048}{m}\right)$, $A_5\left(\frac{2048}{m^2},\ \frac{2048}{m^2}\right)$

$y=mx$에 $y=\frac{2048}{m^2}$을 대입하면

$\frac{2048}{m^2}=mx \qquad \therefore x=\frac{2048}{m^3}$

$\therefore$ $A_6\left(\dfrac{2048}{m^3}, \dfrac{2048}{m^2}\right)$, $A_7\left(\dfrac{2048}{m^3}, \dfrac{2048}{m^3}\right)$

$\vdots$

따라서 $A_{2k}\left(\dfrac{2048}{m^k}, \dfrac{2048}{m^{k-1}}\right)$, $A_{2k+1}\left(\dfrac{2048}{m^k}, \dfrac{2048}{m^k}\right)$ (k는 2 이상의 자연수)이므로 $A_n(1, 1)$을 만족시키는 n의 값은 홀수이다.

$\dfrac{2048}{m^k}=1$에서 $m^k=2048=2^{11}$

따라서 $m=2$, $k=11$이므로 $n=2\times11+1=23$

$\therefore$ $m+n=2+23=25$

꿀 한줄평

점의 좌표가 주어지면 그 좌표를 이용하여 다음 점들을 차례대로 구한다. 차례대로 구한 점의 좌표에 규칙이 있으므로 규칙을 식으로 나타내고, 구해야 하는 값을 규칙을 나타낸 식에서 찾으면 되므로 규칙을 찾는 것이 중요한 문제이다.

또, 규칙은 연속된 점에서 나올 수도 있지만 이 문제처럼 A_2, A_4, A_6, …과 같이 일정한 간격으로 나올 수도 있다.

02 답 77

해결 key Point!

점 A의 좌표를 문자로 나타내고, 그 문자를 이용하여 직사각형 ABCD의 둘레의 길이를 나타내야 한다.

점 A의 좌표를 $(t, 3t)$ (t는 자연수)라고 하면 점 D의 좌표가 $(t+2, 3t)$이므로 $x=t+2$를 $y=\dfrac{1}{2}x$에 대입하면

$y=\dfrac{1}{2}(t+2)=\dfrac{1}{2}t+1$ $\quad\therefore$ $C\left(t+2, \dfrac{1}{2}t+1\right)$

따라서 선분 AD의 길이는 2,

선분 CD의 길이는 $3t-\left(\dfrac{1}{2}t+1\right)=\dfrac{5}{2}t-1$

이므로 직사각형 ABCD의 둘레의 길이 l은

$l=2\left(2+\dfrac{5}{2}t-1\right)=5t+2$

따라서 l이 될 수 있는 값을 t의 값에 따라 작은 수부터 차례대로 나열해 보면

7, 12, 17, 22, 27, …

이므로 15번째로 오는 수는 $5\times15+2=77$이다.

Level UP

직사각형의 둘레의 길이는 가로, 세로의 길이만 알면 되므로 점 B의 좌표는 구하지 않아도 된다.

03 답 235

해결 key Point!

자연수인 문자를 포함한 등식은 약수와 배수의 성질을 갖음을 이용해야 한다.

두 자연수 a, b에 대하여 두 점 $A(5, a)$, $B(b, 7)$이 반비례 관계 $y=\dfrac{K}{x}$의 그래프 위의 점이므로

$a=\dfrac{K}{5}$, $7=\dfrac{K}{b}$ $\qquad\therefore$ $5a=7b=K$

$5a=7b$에서 $a=7t$, $b=5t$ (t는 자연수)라고 하면 $K=35t$

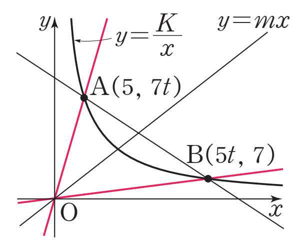
이때 직선 $y=mx$가 점 $A(5, 7t)$를 지나는 직선이면

$7t=5m$ $\qquad\therefore$ $m=\dfrac{7t}{5}$

점 $B(5t, 7)$을 지나는 직선이면

$7=5tm$ $\qquad\therefore$ $m=\dfrac{7}{5t}$

따라서 $y=\dfrac{K}{x}$의 그래프가 두 점 $A(5, 7t)$, $B(5t, 7)$을 지나므로 직선 $y=mx$가 선분 AB와 만나려면



$\dfrac{7}{5t}\le m\le\dfrac{7t}{5}$이어야 한다.

이때 t의 값이 커질수록 $\dfrac{7}{5t}$의 값은 작아지고, $\dfrac{7t}{5}$의 값은 커진다.

$\dfrac{7}{5t}$의 값은 $t=1$이면 $1<\dfrac{7}{5t}<2$, $t>1$이면 $0<\dfrac{7}{5t}<1$

$\dfrac{7t}{5}$의 값은 $t=1$이면 $1<\dfrac{7t}{5}<2$, $t=2$이면 $2<\dfrac{7t}{5}<3$, …

$t=1$이면 조건을 만족시키는 m의 값이 없으므로 $t\ge2$이고 양의 정수 m의 값이 7개이므로 $0<m<8$이어야 한다.

즉, $0<\dfrac{7}{5t}<1$이고 $7\le\dfrac{7t}{5}<8$이어야 하므로

$t=5$

따라서 $a=7\times5=35$, $b=5\times5=25$, $K=35\times5=175$이므로

$a+b+K=35+25+175=235$

04 답 2:1

해결 key Point!

주어진 점을 이용하여 a, b의 값을 찾고, 세 점 A, P, Q를 같은 문자를 이용하여 나타내야 한다.

$y=ax$에 $x=4$, $y=2$를 대입하면

$2=4a$ $\qquad\therefore$ $a=\dfrac{1}{2}$ $\qquad\therefore$ $y=\dfrac{1}{2}x$

$y=\dfrac{b}{x}$에 $x=4$, $y=2$를 대입하면

$2=\dfrac{b}{4}$ $\qquad\therefore$ $b=8$ $\qquad\therefore$ $y=\dfrac{8}{x}$

이때 점 A는 $y=\dfrac{1}{2}x$의 그래프 위의 점이므로 $A\left(t, \dfrac{1}{2}t\right)$라고 하면 점 P는 y좌표가 $\dfrac{1}{2}t$이고 $y=\dfrac{8}{x}$의 그래프 위의 점이므로

$\frac{1}{2}t=\frac{8}{x}$, $x=\frac{16}{t}$　　$\therefore$ P$\left(\frac{16}{t}, \frac{1}{2}t\right)$

점 Q는 x좌표가 t이고 $y=\frac{8}{x}$의 그래프 위의 점이므로

$y=\frac{8}{t}$　　$\therefore$ Q$\left(t, \frac{8}{t}\right)$

따라서 선분 AP의 길이는 $\frac{16}{t}-t$, 선분 AQ의 길이는 $\frac{8}{t}-\frac{1}{2}t=\frac{1}{2}\left(\frac{16}{t}-t\right)$이므로 선분 AP와 선분 AQ의 길이의 비는

$\frac{16}{t}-t:\frac{1}{2}\left(\frac{16}{t}-t\right)=1:\frac{1}{2}=2:1$

꿀 한줄평

길이의 비를 구할 때, 반드시 값을 수로 나타내지 않아도 된다. 비를 알아야 하는 두 값에 0이 아닌 동일한 문자나 식이 있다면 그 문자나 식으로 나누어 두 값을 자연수의 비로 나타내어 길이의 비를 구할 수 있다.

05 답 7배

해결 key Point!

그래프가 변하는 상황을 통해 벽돌의 높이를 예상할 수 있고, 높이가 변하는 정도를 확인하여 밑넓이의 비율을 구해야 한다.

물의 높이가 30 cm가 될 때까지의 그래프의 기울기가 그 이후보다 가파르게 기울어졌으므로 물이 채워지는 용기의 높이가 30 cm일 때 변한다. 즉, 벽돌의 높이는 30 cm이다.

물을 채우기 시작하고 20분 동안 물의 높이가 30 cm 증가했으므로 20분까지 1분 동안 높이의 증가율은

$\frac{30}{20}=\frac{3}{2}$

그 후 34분까지 높이가 12 cm 증가했으므로 20분부터 34분까지 1분 동안 높이의 증가율은

$\frac{12}{14}=\frac{6}{7}$

1분 동안 넣는 물의 양을 V라 하고, 용기의 밑넓이를 S, 벽돌의 밑넓이를 P라고 하면

$V=(S-P)\times\frac{3}{2}=S\times\frac{6}{7}$

$S-P=\frac{4}{7}S$, $\frac{3}{7}S=P$　　$\therefore S=\frac{7}{3}P$

이때 벽돌의 높이는 30 cm이므로 부피는

$30P\ (\mathrm{cm}^3)$

용기의 높이는 90 cm이므로 부피는

$90S=90\times\frac{7}{3}P=210P\ (\mathrm{cm}^3)$

따라서 $\frac{(\text{용기의 부피})}{(\text{벽돌의 부피})}=\frac{210P}{30P}=7$이므로 용기의 부피는 벽돌의 부피의 7배이다.

06 답 5

해결 key Point!

점 A의 x좌표가 1임을 이용하여 네 점 A, B, C, D의 좌표를 나타낸다.

점 A의 x좌표가 1이므로 점 B의 x좌표도 1이다.

$\therefore$ A$(1, k)$, B$(1, a)$

점 C의 y좌표가 a이므로 $y=a$를 $y=\frac{k}{x}$에 대입하면

$a=\frac{k}{x}$　　$\therefore x=\frac{k}{a}$

$\therefore$ C$\left(\frac{k}{a}, a\right)$, D$\left(\frac{k}{a}, k\right)$

선분 AB의 길이는 $a-k$, 선분 BC의 길이는 $1-\frac{k}{a}=\frac{a-k}{a}$이고, 직사각형 ABCD의 넓이는 9이므로

$(a-k)\left(\frac{a-k}{a}\right)=9$, $(a-k)^2=9a$

이때 $a-k\neq0$이고, $(a-k)^2>0$이므로 $a>0$

또, $9=3^2$이고 a는 자연수이므로 a는 (자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.

즉, 10 이하의 자연수 a의 값은 1, 4, 9이고 k는 자연수이므로

(i) $a=1$일 때

$(1-k)^2=9$에서 $1-k=-3$　　$\therefore k=4$

$\therefore a+k=1+4=5$

(ii) $a=4$일 때

$(4-k)^2=36$에서 $4-k=-6$　　$\therefore k=10$

$\therefore a+k=4+10=14$

(iii) $a=9$일 때

$(9-k)^2=81$에서 $9-k=-9$　　$\therefore k=18$

이때 k는 10 이하의 자연수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i)~(iii)에 의하여 $a+k$의 값 중 가장 작은 수는 5이다.

Lv. Master 실력을 완성하는 대단원 평가

108쪽~112쪽

01 ④	02 ②	03 ②	04 ④	05 ②, ④
06 ⑤	07 ②, ③	08 ③	09 ⑤	10 ②
11 ③	12 ①	13 ⑤	14 ④	15 ④
16 2	17 제4사분면		18 60 cm	19 8
20 9	21 1:2	22 $a=24$, $y=\frac{24}{x}$		23 96분

01 답 ④

해결 key Point!

$x+y<0$, $xy>0$임을 이용하여 x, y의 부호를 구하고, $|x|<|y|$임을 이용하여 $x-y$의 부호를 구한다.

$x+y<0$, $xy>0$이므로 $x<0$, $y<0$

또, $|x|<|y|$이므로 $x-y>0$

따라서 $\frac{x}{y}>0$, $\frac{x-y}{x}<0$이므로 점 $\left(\frac{x}{y}, \frac{x-y}{x}\right)$는 제4사분면 위의 점이고 주어진 점이 위치한 사분면은 다음과 같다.

① 제2사분면

② 제3사분면

③ x의 좌표가 0이므로 y축 위의 점이다.

④ 제4사분면

⑤ 제1사분면

그러므로 같은 사분면 위에 있는 점은 ④이다.

Level UP

(1) $x>0$, $y>0$일 때

① $|x|>|y|$이면 $x-y>0$

② $|x|<|y|$이면 $x-y<0$

(2) $x<0$, $y<0$일 때

① $|x|>|y|$이면 $x-y<0$

② $|x|<|y|$이면 $x-y>0$

02 답 ②

점 $\mathrm{P}(2, -6)$과 x축에 대하여 대칭인 점 A의 좌표는

$\mathrm{A}(2, 6)$ $\quad\therefore a=2$, $b=6$

점 $\mathrm{P}(2, -6)$과 y축에 대하여 대칭인 점 B의 좌표는

$\mathrm{B}(-2, -6)$ $\quad\therefore c=-2$, $d=-6$

ㄱ. 점 $\mathrm{A}(2, 6)$과 원점에 대하여 대칭인 점의 좌표는 $(-2, -6)$

즉, 점 B는 점 A와 원점에 대하여 대칭이다.

ㄴ. 점 P와 원점에 대하여 대칭인 점의 좌표는 $(-2, 6)$

점 $\mathrm{A}(2, 6)$과 x축에 대하여 대칭인 점의 좌표는 $(2, -6)$

즉, 점 P와 원점에 대하여 대칭인 점은 점 A와 x축에 대하여 대칭이 아니다.

ㄷ. $a+b+c+d=2+6+(-2)+(-6)=0$

ㄹ. $ad+bc=2\times(-6)+6\times(-2)=-24\neq0$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

03 답 ②

시우가 일정한 속력으로 갔을 때는 거리가 일정하게 증가하고 도중에 자전거가 고장이 나서 잠깐 멈춰 수리를 하였으므로 그때는 거리에 변화가 없다.

또, 다시 일정한 속력으로 갔으므로 거리가 다시 일정하게 증가한다.

따라서 시우가 움직인 거리를 시간에 따라 나타낸 그래프로 알맞은 것은 ②이다.

04 답 ④

주어진 그래프는 정비례 관계이므로

① x의 값이 2배, 3배, 4배, …로 변함에 따라 y의 값도 2배, 3배, 4배, …로 변한다.

② 그래프는 원점과 점 $(-6, 4)$를 지나는 직선이므로

$y=ax$에 $x=-6$, $y=4$를 대입하면

$4=-6a \quad \therefore a=-\frac{2}{3}$

즉, x와 y 사이의 관계식은 $y=-\frac{2}{3}x$이다.

③ $y=-\frac{2}{3}x$에 $x=9$를 대입하면 $y=-\frac{2}{3}\times9=-6$

즉, 점 $(9, -6)$을 지난다.

⑤ 제2사분면과 제4사분면을 지난다.

따라서 옳은 것은 ④이다.

참고 정비례 관계 $y=ax$의 그래프에서 $|a|$가 작을수록 x축에 더 가깝다.

05 답 ②, ④

점 (a, b)가 제4사분면 위의 점이므로 $a>0$, $b<0$

① $a>0$이므로 $y=ax$의 그래프는 제1사분면과 제3사분면을 지난다.

② $ab<0$이므로 $y=abx$의 그래프는 제2사분면과 제4사분면을 지난다.

③ $a-b>0$이므로 $y=(a-b)x$의 그래프는 제1사분면과 제3사분면을 지난다.

④ $-a<0$이므로 $y=-\frac{a}{x}$의 그래프는 제2사분면과 제4사분면을 지난다.

⑤ $-ab>0$이므로 $y=-\frac{ab}{x}$의 그래프는 제1사분면과 제3사분면을 지난다.

따라서 그래프가 제2사분면을 지나는 것은 ②, ④이다.

참고 정비례 관계 $y=ax$의 그래프와 반비례 관계 $y=\frac{a}{x}$의 그래프는

① $a>0$이면 제1사분면과 제3사분면을 지난다.

② $a<0$이면 제2사분면과 제4사분면을 지난다.

06 답 ⑤

조건 ㈏에 의하여 두 상수 a, b의 부호가 같다. 이때 조건 ㈎에 의하여 $a<0$, $b<0$이고 조건 ㈐에서 $|a|<|b|$이므로 $a>b$이다.

따라서 $-a>0$, $b<0$이므로 점 $\mathrm{P}(-a, b)$는 제4사분면 위의 점이고 $b-a<0$이다.

07 답 ②, ③

점 P(a, b)는 제2사분면 위의 점이므로 $a<0$, $b>0$

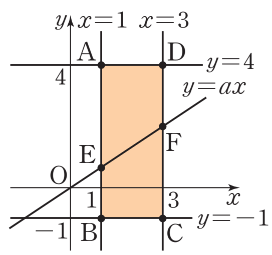
$b-a>0$, $ab<0$이므로 $\dfrac{b-a}{ab}<0$

즉, x좌표는 음수이다.

이때 $a+b$의 부호는 알 수 없으므로 y좌표의 부호는 알 수 없다.

따라서 점 R는 제2사분면 또는 제3사분면 위의 점이다.

08 답 ③



오른쪽 그림과 같이 네 직선 $x=1$, $x=3$, $y=-1$, $y=4$의 교점을 각각 A, B, C, D라고 하면 사각형 ABCD의 넓이는 $2\times5=10$

직선 $y=ax$의 그래프가 직선 AB, 직선 CD와 만나는 점을 각각 E, F라고 하면 직선 $y=ax$의 그래프가 직사각형 ABCD의 넓이를 이등분하므로 두 사다리꼴 AEFD, EBCF의 넓이는 같다. 두 점 E, F의 좌표는 각각 $(1, a)$, $(3, 3a)$이고

(사각형 AEFD의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\times$(사각형 ABCD의 넓이)이므로

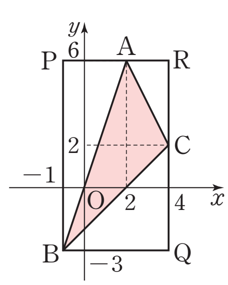
$\dfrac{1}{2}\times\{(4-a)+(4-3a)\}\times2=\dfrac{1}{2}\times10$

$8-4a=5$, $4a=3$ $\quad\therefore a=\dfrac{3}{4}$

09 답 ⑤

해결 key Point!

세 점 A, B, C를 지나고 각각 x축, y축에 평행한 직선을 그어 직사각형을 만든다.



오른쪽 그림과 같이 세 점 A, B, C에서 각각 x축, y축에 평행한 직선을 그어 직사각형 PBQR를 만들면 P$(-1, 6)$, Q$(4, -3)$, R$(4, 6)$이다.

(사각형 PBQR의 넓이)

$=\{4-(-1)\}\times\{6-(-3)\}$

$=45$

(삼각형 APB의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\times\{2-(-1)\}\times\{6-(-3)\}$

$=\dfrac{27}{2}$

(삼각형 ACR의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\times(4-2)\times(6-2)=4$

(삼각형 CBQ의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\times\{4-(-1)\}\times\{2-(-3)\}$

$=\dfrac{25}{2}$

$\therefore$ (삼각형 ABC의 넓이)

$=$(사각형 PBQR의 넓이)$-$(삼각형 APB의 넓이)

$-$(삼각형 ACR의 넓이)$-$(삼각형 CBQ의 넓이)

$=45-\dfrac{27}{2}-4-\dfrac{25}{2}=15$

10 답 ②

$y=5x$에 $x=2$를 대입하면 $y=5\times2=10$

즉, 두 그래프가 만나는 점의 좌표는 $(2, 10)$이므로

$y=\dfrac{a}{x}$에 $x=2$, $y=10$을 대입하면

$10=\dfrac{a}{2}$ $\quad\therefore a=20$

따라서 $y=\dfrac{20}{x}$에 $x=3$, $y=b$를 대입하면 $b=\dfrac{20}{3}$

$\therefore a+3b=20+3\times\dfrac{20}{3}=40$

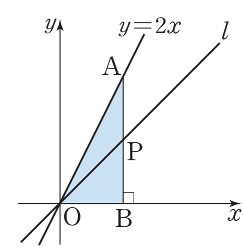
11 답 ③

$y=2x$에 $x=k$, $y=3k-3$을 대입하면

$3k-3=2k$ $\quad\therefore k=3$

$\therefore$ A$(3, 6)$, B$(3, 0)$

따라서 삼각형 AOB의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times3\times6=9$



직선 l은 원점을 지나므로 직선 l을 나타내는 식을 $y=ax$, 직선 l이 선분 AB와 만나는 점을 P라고 하자.

직선 l이 삼각형 AOB의 넓이를 이등분하므로 삼각형 POB의 넓이는 삼각형 AOB의 넓이의 $\dfrac{1}{2}$배이다.

이때 두 삼각형 AOB, POB의 밑변은 선분 OB로 같고 선분 AB의 길이가 6이므로 선분 PB의 길이는 $\dfrac{6}{2}=3$이다.

$\therefore$ P$(3, 3)$

$y=ax$에 $x=3$, $y=3$을 대입하면

$3=3a$ $\quad\therefore a=1$

따라서 직선 l을 나타내는 식은 $y=x$이다.

12 답 ①

점 A의 x좌표를 k라고 할 때 점 A는 정비례 관계 $y=bx$의 그래프 위의 점이므로 $y=bx$에 $x=k$를 대입하면

$y=bk$ $\quad\therefore$ A(k, bk)

점 B는 점 A와 x좌표가 같으므로 점 B의 x좌표는 k이다.

$y=ax$에 $x=k$를 대입하면

$y=ak$ $\quad\therefore$ B(k, ak)

점 C는 점 A와 y좌표가 같으므로 점 C의 y좌표는 bk이다.

$y=ax$에 $y=bk$를 대입하면

$bk=ax$, $x=\frac{bk}{a}$

$\therefore$ $\mathrm{C}\left(\frac{bk}{a}, bk\right)$

(삼각형 AOB의 넓이)$=\frac{1}{2}(bk-ak)\times k$

$=\frac{1}{2}(b-a)k^2$

(삼각형 ABC의 넓이)$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{bk}{a}-k\right)\times(bk-ak)$

$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{bk-ak}{a}\right)\times(bk-ak)$

$=\frac{(b-a)^2k^2}{2a}$

두 삼각형 AOB, ABC의 넓이가 같으므로

$\frac{1}{2}(b-a)k^2=\frac{(b-a)^2k^2}{2a}$

이때 $k\neq0$, $a\neq b$이므로

$1=\frac{b-a}{a}$, $a=b-a$ $\qquad\therefore$ $b=2a$

a, b는 100 이하의 자연수이므로 $b=2a\leq100$에서 $a\leq50$

따라서 순서쌍 (a, b)는 $(1, 2)$, $(2, 4)$, $(3, 6)$, $\cdots$, $(50, 100)$의 50개이다.

13 답 ⑤

① A는 출발 후 4분 동안 300 m를 걸어갔으므로 속력은

$\frac{300}{4}=75$

따라서 A는 출발 후 4분까지는 분속 75 m로 걸었다.

② A는 4분부터 9분까지 이동거리가 0 m이므로 5분 동안 멈춰 있었다.

③ B는 8분 후부터 움직인 거리의 변화율이 8분 이전의 움직인 거리의 변화율보다 줄어 들었으므로 8분 후부터 속도가 줄어들었다.

④ A, B는 6분 후에 만났고, 그 후 B가 더 이동거리가 크므로 출발한 지 6분 후에 B가 A를 추월했다.

⑤ A, B가 집에서 도서관까지 걸어간 거리는 500 m로 서로 같다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

14 답 ④

보통 열차는 15분 동안 20 km를 이동하였으므로 보통 열차의 속력은

분속 $\frac{20}{15}=\frac{4}{3}$ (km)

급행 열차는 5분 동안 20 km를 이동하였으므로 급행 열차의 속력은

분속 $\frac{20}{5}=4$ (km)

이때 보통 열차가 A역에서 C역까지 가는 데 걸린 시간과 중간에 정차한 시간, C역에서 B역까지 걸린 시간의 합은 급행 열차가 보통 열차보다 늦게 출발한 시간, 급행 열차가 A역에서 B역까지 가는 데 걸린 시간, 급행 열차가 보통 열차보다 빨리 도착한 시간의 합과 같다.

보통 열차가 C역에서 B역까지 가는 데 걸린 시간은

$16\div\frac{4}{3}=16\times\frac{3}{4}=12$(분)

급행 열차가 A역에서 B역까지 가는 데 걸린 시간은

$\frac{36}{4}=9$(분)

이때 보통 열차가 급행 열차보다 B역에 12분 30초, 즉 $\frac{25}{2}$분 뒤에 도착하므로 C역에서 보통 열차가 정차한 시간을 x분이라고 하면

$15+x+12=10+9+\frac{25}{2}$ $\qquad\therefore$ $x=\frac{9}{2}$

따라서 C역에서 보통 열차가 $\frac{9}{2}$분, 즉 4분 30초 동안 정차하였다.

15 답 ④

해결 key Point!

삼각형 OAB 내부에 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점을 세어본다.

두 점 O, B를 지나는 정비례 관계의 그래프의 식을 $y=bx$ (b는 상수)라 하고 이 그래프에 $x=9$, $y=6$을 대입하면

$6=9b$ $\qquad\therefore$ $b=\frac{2}{3}$

$\therefore$ $y=\frac{2}{3}x$

따라서 삼각형 OAB의 내부에 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수는 $x=1$이면 $y=\frac{2}{3}$이므로 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점은 존재하지 않는다.

$x=2$이면 $y=\frac{4}{3}$이므로 $(2, 1)$의 1개

$x=3$이면 $y=\frac{6}{3}=2$이므로 $(3, 1)$의 1개

$x=4$이면 $y=\frac{8}{3}$이므로 $(4, 1)$, $(4, 2)$의 2개

$x=5$이면 $y=\frac{10}{3}$이므로 $(5, 1)$, $(5, 2)$, $(5, 3)$의 3개

$x=6$이면 $y=\frac{12}{3}=4$이므로 $(6, 1)$, $(6, 2)$, $(6, 3)$의 3개

$x=7$이면 $y=\frac{14}{3}$이므로 $(7, 1)$, $(7, 2)$, $(7, 3)$, $(7, 4)$의 4개

$x=8$이면 $y=\frac{16}{3}$이므로 $(8, 1)$, $(8, 2)$, $(8, 3)$, $(8, 4)$, $(8, 5)$의 5개

즉, 삼각형 OAB의 내부에 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점

의 개수는

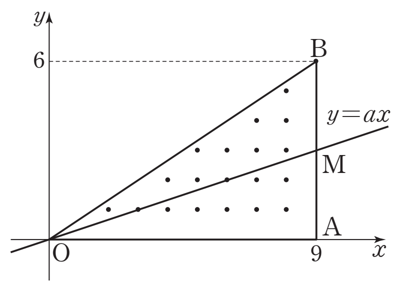
$1+1+2+3+3+4+5=19 \qquad \therefore k=19$

따라서 $\frac{k-1}{2}=\frac{19-1}{2}=9$이므로 삼각형 OAM의 내부에 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점이 9개 있어야 한다.

선분 AB를 이등분하는 점 $(9, 3)$을 점 M이라고 하면

$3=9a$에서 $a=\frac{1}{3}$

이때 $y=ax$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 삼각형 OAM의 내부에 x좌표와 y좌표가 정수인 점이 7개이다.

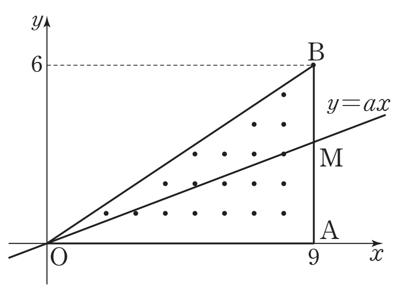


$\therefore a>\frac{1}{3}$

$y=ax$가 점 $(8, 3)$을 지나는 경우

$3=8a$에서 $a=\frac{3}{8}$

$y=\frac{3}{8}x$이면 오른쪽 그림과 같이 x좌표와 y좌표가 정수인 점이 9개이다.



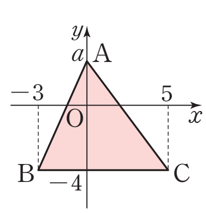
따라서 구하는 상수 a의 값은 $\frac{3}{8}$이다.

꿀 한줄평

삼각형 내부에 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수는 x좌표와 y좌표가 정수인 점을 구하여 전부 세어봐야 한다.
이때 삼각형 OAB의 내부의 점이 19개이므로 삼각형 OAM의 내부의 점의 개수는 9이어야 한다.
따라서 $y=ax$의 그래프가 선분 AB를 이등분하는 점 주변을 지나야 하므로 그 즈음의 점을 대입해 가며 내부의 점의 개수가 9가 되는 값을 찾아야 한다.

16 답 2

a가 양수이므로 세 점 $A(0, a)$, $B(-3, -4)$, $C(5, -4)$를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



이때 삼각형 ABC의 넓이가 24이므로

$\frac{1}{2}\times\{5-(-3)\}\times\{a-(-4)\}=24$

$4(a+4)=24,\ a+4=6 \qquad \therefore a=2$

17 답 제4사분면

점 $A\left(a+1,\ \frac{1}{3}a+2\right)$가 x축 위의 점이므로

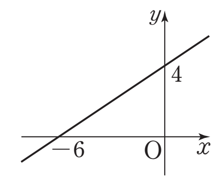
$\frac{1}{3}a+2=0,\ \frac{1}{3}a=-2$

$\therefore a=-6$

점 $B\left(b-4,\ 5-\frac{1}{2}b\right)$가 y축 위의 점이므로

$b-4=0 \qquad \therefore b=4$

따라서 두 점 $(-6, 0)$, $(0, 4)$를 이은 직선을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같고, 제4사분면을 지나지 않는다.



18 답 60 cm

해결 key Point!

새로 생기는 도형에서 추가되는 둘레의 길이를 생각한다.

1번째 도형의 둘레의 길이는 4 cm

2번째 도형의 둘레의 길이는 $4\times2=8$ (cm)

3번째 도형의 둘레의 길이는 $4\times3=12$ (cm)

⋮

즉, x와 y 사이의 관계식은 $y=4x$

$y=4x$에 $x=15$를 대입하면 $y=60$

따라서 15번째 도형의 둘레의 길이는 60 cm이다.

19 답 8

두 점 P, Q는 원점을 지나는 직선 위의 서로 다른 두 점이고 원점에서 같은 거리만큼 떨어져 있으므로 원점에 대하여 대칭이다.

따라서 $4-a=-3a$, $7-2b=-(a-b+1)$이므로

$4-a=-3a$에서 $2a=-4 \qquad \therefore a=-2$

$7-2b=-(a-b+1)$에서 $7-2b=-a+b-1$

$3b=6 \qquad \therefore b=2$

$\therefore a^2+b^2=(-2)^2+2^2=8$

20 답 9

해결 key Point!

주어진 x좌표를 이용하여 세 점 A, B, C의 y좌표를 모두 구한다.

점 A는 $y=\frac{3}{2}x$, $y=\frac{k}{x}$의 그래프 위의 점이므로

$y=\frac{3}{2}x$에 $x=2$를 대입하면 $y=\frac{3}{2}\times2=3$

$\therefore A(2, 3)$

$y=\frac{k}{x}$에 $x=2$, $y=3$을 대입하면

$3=\frac{k}{2} \qquad \therefore k=6$

$\therefore y=\frac{6}{x}$

점 B는 $y=\frac{6}{x}$의 그래프 위의 점이므로 $y=\frac{6}{x}$에 $x=4$를 대입하면 $y=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

$\therefore$ B$\left(4,\ \frac{3}{2}\right)$

점 C는 $y=\frac{3}{2}x$의 그래프 위의 점이므로 $y=\frac{3}{2}x$에 $x=4$를 대입하면 $y=\frac{3}{2}\times4=6$

$\therefore$ C$(4,\ 6)$

따라서 삼각형 ABC의 넓이 S는

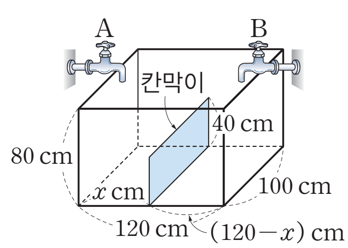
$S=\frac{1}{2}\times(4-2)\times\left(6-\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{2}$

$\therefore\ 2S=2\times\frac{9}{2}=9$

21 답 1 : 2

해결 key Point!

두 수도꼭지 A, B에서 나오는 물의 속력의 합이 전체 수족관에 물이 차는 속력과 같다.



수족관에서 칸막이 왼쪽의 가로의 길이를 x cm, 칸막이 오른쪽의 가로의 길이를 $(120-x)$ cm라고 하자.

칸막이 왼쪽은 수도꼭지에서 물이 나온 지 5분 후 수면의 높이가 40 cm가 됐으므로 칸막이 왼쪽에 5분 동안 채워진 물의 부피는

$x\times100\times40=4000x\ (\text{cm}^3)$

따라서 수도꼭지 A에서 물이 나오는 속력은

$\frac{4000x}{5}=800x$

한편, 칸막이 오른쪽은 수도꼭지에서 물이 나온 지 5분 후 수면의 높이가 10 cm가 됐으므로 칸막이 오른쪽의 부분에 5분 동안 채워진 물의 부피는

$(120-x)\times100\times10=1000(120-x)\ (\text{cm}^3)$

따라서 수도꼭지 B에서 물이 나오는 속력은

$\frac{1000(120-x)}{5}=200(120-x)$

두 수도꼭지 A, B로 수족관에 물을 넣은 지 10분 후 수면의 높이가 40 cm가 되었으므로 그 부피는

$120\times100\times40=480000\ (\text{cm}^3)$

따라서 수족관에 물이 차는 속력은

$\frac{480000}{10}=48000$

즉, $800x+200(120-x)=48000$이므로

$800x+24000-200x=48000,\ 600x=24000$

$\therefore\ x=40$

따라서 칸막이 왼쪽의 밑넓이는 $40\times100=4000\ (\text{cm}^2)$, 오른쪽의 밑넓이는 $(120-40)\times100=8000\ (\text{cm}^2)$이므로 두 밑넓이의 비는

$4000 : 8000=1 : 2$

꿀 한줄평

칸막이의 높이까지 물이 차기 전에 왼쪽, 오른쪽에 각각 물이 차는 속력이 두 수도꼭지 A, B에서 물이 나오는 속력이고 칸막이 높이 이후 물이 차는 속력이 두 수도꼭지 A, B에서 물이 나오는 속력의 합이다.

따라서 칸막이의 높이까지 물이 차기 전 왼쪽, 오른쪽에 각각의 물이 채워지는 속력과 칸막이 높이 이후 물이 채워지는 속력을 구하여 식을 만들어 답을 구해야 한다.

22 답 $a=24,\ y=\frac{24}{x}$

1단계 a의 값 구하기

넓이가 8 m^2인 직사각형 모양의 꽃밭에 꽃을 심는 비용이 76000원이므로 넓이가 1 m^2인 직사각형 모양의 꽃밭에 꽃을 심는 비용은

$\frac{76000}{8}=9500$(원)

따라서 228000원으로 꽃을 심을 수 있는 꽃밭의 넓이는

$\frac{228000}{9500}=24\ (\text{m}^2)$ $\qquad\therefore\ a=24$

2단계 x와 y 사이의 관계식 세우기

이때 꽃밭은 가로와 세로의 길이가 각각 x m, y m인 직사각형 모양이므로

$x\times y=24$ $\qquad\therefore\ y=\frac{24}{x}$

단계	채점 기준	배점
❶	a의 값을 구했다.	4점
❷	x와 y 사이의 관계식을 세웠다.	3점

23 답 96분

1단계 수도꼭지 A의 물을 넣는 속력 구하기

그래프에서 10분이 지난 후 물이 채워지는 속력이 증가했으므로 수도꼭지 A만 사용한 시간은 10분까지이다. 수도꼭지 A만 사용하여 10분 동안 물 35 L를 채웠으므로 수도 A의 물을 넣는 속력은

분속 $\frac{35}{10}=3.5\ (\text{L})$

2단계 수도꼭지 B의 물을 넣는 속력 구하기

10분부터 12분까지 두 수도꼭지 A, B를 동시에 사용하여 물의 양이 35 L에서 48 L로 늘었으므로 2분 동안 늘어난 양은

$48-35=13$ (L)이다.

따라서 두 수도꼭지 A, B를 동시에 사용했을 때 물을 넣는 속력은

분속 $\frac{13}{2}=6.5$ (L)

즉, 수도꼭지 B의 물을 넣는 속력은

분속 $6.5-3.5=3$ (L)

3단계 관 C의 물을 빼는 속력 구하기

물탱크가 가득 찬 후 14분부터 관 C를 열어 26분까지 물을 모두 빼냈으므로 12분 동안 48 L의 물이 빠졌다.

따라서 관 C의 물을 빼는 속력은

분속 $\frac{48}{12}=4$ (L)

4단계 용량이 5배인 물탱크에 물을 가득 채우는 데 걸리는 시간 구하기

두 수도꼭지 A, B와 관 C를 동시에 열었을 때 물이 채워지는 속력은

분속 $3.5+3-4=2.5$ (L)

따라서 물탱크의 용량이 48 L이므로 용량이 5배인 물탱크 $5\times48=240$ (L)에 물을 가득 채우는 데 걸리는 시간은

$\frac{240}{2.5}=\frac{2400}{25}=96$(분)

단계	채점 기준	배점
❶	수도꼭지 A의 물을 넣는 속력을 구했다.	2점
❷	수도꼭지 B의 물을 넣는 속력을 구했다.	2점
❸	관 C의 물을 빼는 속력을 구했다.	2점
❹	용량이 5배인 물탱크에 물을 가득 채우는 데 걸리는 시간을 구했다.	1점

MEMO

MEMO

MEMO