

풍 산 자 필 · 수 · 유 · 형

정답과 풀이

확률과
통계

I ❖ 경우의 수

01 여러 가지 순열과 중복조합

001

$$(1) {}_n\Pi_3 = n^3, 64 = 4^3 \text{이므로 } n^3 = 4^3$$

$$\therefore n = 4 (\because n \text{은 자연수})$$

$$(2) {}_3\Pi_r = 3^r, 243 = 3^5 \text{이므로 } 3^r = 3^5$$

$$\therefore r = 5 (\because r \text{는 자연수})$$

정답_ (1) $n = 4$ (2) $r = 5$

002

4개의 놀이기구 중에서 어느 한 개를 이용하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_4\Pi_3 = 4^3 = 64$$

정답_ ③

003

5명의 유권자가 각각 2명의 후보 중에서 기명 투표로 한 명의 후보에게 투표하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_2\Pi_5 = 2^5 = 32$$

정답_ ⑤

004

서로 다른 5개의 과일 중에서 A에게 2개의 과일을 나누어 주는 경우의 수는

$${}_5C_2 = 10$$

각 경우에 대하여 나머지 과일 3개를 B, C, D에게 나누어 주는 경우의 수는

$${}_3\Pi_3 = 3^3 = 27$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$10 \times 27 = 270$$

정답_ ③

005

남학생이 배정받을 수 있는 고등학교의 수는 여자 고등학교 1개를 제외한 나머지 4개이다.

즉, 남학생 2명이 고등학교를 배정받을 수 있는 경우의 수는

$${}_4\Pi_2 = 4^2 = 16$$

여학생이 배정받을 수 있는 고등학교의 수는 남자 고등학교 2개를 제외한 나머지 3개이다.

즉, 여학생 3명이 고등학교를 배정받을 수 있는 경우의 수는

$${}_3\Pi_3 = 3^3 = 27$$

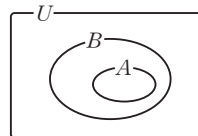
따라서 구하는 경우의 수는

$$16 \times 27 = 432$$

정답_ ④

006

전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A \subset B \subset U$ 를 만족시키는 집합 U, A, B 를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



즉, 전체집합 U 의 4개의 원소가 세 영역 $A, B-A, U-B$ 중 하나에 포함되어야 한다.

따라서 두 집합 A, B 의 순서쌍 (A, B) 의 개수는 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_3\Pi_4 = 3^4 = 81$$

정답_ ⑤

007

전구 6개를 각각 켜거나 꺼서 만들 수 있는 서로 다른 신호의 개수는

$${}_2\Pi_6 = 2^6 = 64$$

이때 전구가 모두 꺼진 경우는 신호에서 제외해야 하므로 구하는 신호의 개수는

$$64 - 1 = 63$$

정답_ ②

008

모스 부호를 1개 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는

$${}_2\Pi_1$$

모스 부호를 2개 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는

$${}_2\Pi_2$$

모스 부호를 3개, 4개, 5개 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는 각각

$${}_2\Pi_3, {}_2\Pi_4, {}_2\Pi_5$$

따라서 구하는 신호의 개수는

$${}_2\Pi_1 + {}_2\Pi_2 + {}_2\Pi_3 + {}_2\Pi_4 + {}_2\Pi_5$$

$$= 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5$$

$$= 2 + 4 + 8 + 16 + 32$$

$$= 62$$

정답_ ②

009

손가락을 한 번 펴서 만들 수 있는 서로 다른 신호의 개수는

$${}_3\Pi_1 = 3$$

손가락을 두 번 펴서 만들 수 있는 서로 다른 신호의 개수는

$${}_3\Pi_2 = 3^2$$

손가락을 3번, 4번 펴서 만들 수 있는 서로 다른 신호의 개수는 각

각 ${}_3\Pi_3=3^3$, ${}_3\Pi_4=3^4$ 이므로 손가락을 n 번 이하로 펴서 만들 수 있는 서로 다른 신호의 개수는

$$3+3^2+3^3+\cdots+3^n$$

$n=4$ 일 때

$$3+3^2+3^3+3^4=3+9+27+81=120<300$$

$n=5$ 일 때

$$3+3^2+3^3+3^4+3^5=3+9+27+81+243=363>300$$

따라서 n 의 최솟값은 5이다

정답_ ②

010

일의 자리에 올 수 있는 숫자는 2, 4의 2가지이다.

천의 자리, 백의 자리, 십의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4, 5의 5개의 숫자에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_5\Pi_3=5^3=125$$

따라서 구하는 짝수의 개수는

$$2 \times 125 = 250$$

정답_ ①

011

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0을 제외한 3가지이다.

백의 자리, 십의 자리, 일의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 0, 1, 2, 3의 4개의 숫자에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_4\Pi_3=4^3=64$$

따라서 구하는 네 자리의 자연수의 개수는

$$3 \times 64 = 192$$

정답_ ④

참고 중복순열을 이용한 자연수의 개수

(1) 1, 2, 3, ..., n 의 n 개의 숫자에서 중복을 허용하여 m 개를 택해 만들 수 있는 m 자리의 자연수의 개수는

$${}_n\Pi_m$$

(2) 0, 1, 2, 3, ..., n 의 $(n+1)$ 개의 숫자에서 중복을 허용하여 m 개를 택해 만들 수 있는 m 자리의 자연수의 개수는

$$n \times {}_{n+1}\Pi_{m-1}$$

주의 중복순열을 이용하여 자연수의 개수를 구할 때, 주어진 숫자 중 0이 있는 경우에는 맨 앞자리에 0이 올 수 없다.

012

1, 2, 3, 4의 4개의 숫자에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 세 자리의 자연수의 개수는 4개의 숫자에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_4\Pi_3=4^3=64$$

이 중에서 3이 포함되어 있지 않은 자연수의 개수는 3을 제외한 나머지 3개의 숫자에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_3\Pi_3=3^3=27$$

따라서 구하는 세 자리의 자연수의 개수는

$$64 - 27 = 37$$

정답_ ③

013

2100보다 작은 수가 되려면 1□□□의 꼴 또는 20□□의 꼴이어야 한다.

(i) 1□□□의 꼴의 경우

백의 자리, 십의 자리, 일의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 0, 1, 2, 3의 4개의 숫자에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_4\Pi_3=4^3=64$$

(ii) 20□□의 꼴의 경우

십의 자리, 일의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 0, 1, 2, 3의 4개의 숫자에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_4\Pi_2=4^2=16$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$64 + 16 = 80$$

정답_ ①

014

2, 4, 6의 3개의 숫자에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수는 2, 4, 6의 3개의 숫자에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_3\Pi_4=3^4=81$$

이 중에서 2가 포함되어 있지 않은 자연수의 개수는

$${}_2\Pi_4=2^4=16$$

6이 포함되어 있지 않은 자연수의 개수는

$${}_2\Pi_4=2^4=16$$

2와 6이 모두 포함되어 있지 않은 자연수의 개수는

$${}_1\Pi_4=1^4=1$$

즉, 2 또는 6이 포함되어 있지 않은 경우의 수는

$$16 + 16 - 1 = 31$$

이므로 2와 6을 모두 포함하는 자연수의 개수는

$$81 - 31 = 50$$

정답_ 50

015

한 자리의 자연수는 1, 3, 5, 7, 9의 5개이다.

두 자리의 자연수의 개수는

$$5 \times {}_5\Pi_1 = 5 \times 5 = 25$$

세 자리의 자연수의 개수는

$$5 \times {}_5\Pi_2 = 5 \times 5^2 = 125$$

3000보다 작은 네 자리의 자연수는 1□□□의 꼴이어야 한다.

이때 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는

$${}_6\Pi_3=6^3=216$$

따라서 3000보다 작은 자연수의 개수는

$$5 + 30 + 180 + 216 = 431$$

이므로 3000은 432번째 수이다.

정답_ ⑤

016

Y 의 원소 2, 4, 6의 3개에서 중복을 허용하여 5개를 택해 X 의 원

소 1, 2, 3, 4, 5에 대응시키면 된다.
따라서 구하는 경우의 수는
 ${}_3\Pi_5=3^5=243$

정답_ ③

017

$f(1)=0$ 이므로 Y 의 원소 0, 1, 2, 3의 4개에서 중복을 허용하여 3개를 택해 X 의 원소 2, 3, 4에 대응시키면 된다.
따라서 구하는 경우의 수는
 ${}_4\Pi_3=4^3=64$

정답_ ④

018

X 에서 Y 로의 함수의 개수는 Y 의 원소 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 중복을 허용하여 3개를 택해 X 의 원소 x, y, z 에 대응시키면 되므로
 ${}_5\Pi_3=5^3=125$
 X 에서 Y 로의 함수 중 $f(y)=1$ 인 함수의 개수는 Y 의 원소 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 중복을 허용하여 2개를 택해 X 의 원소 x, z 에 대응시키면 되므로
 ${}_5\Pi_2=5^2=25$
따라서 구하는 함수의 개수는
 $125-25=100$

정답_ ③

019

(i) $x \leq 3$ 일 때, $x \times f(x) \leq 10$ 을 만족시키는 $f(x)$ 의 값은
1 또는 2 또는 3
즉, $f(1), f(2), f(3)$ 이 될 수 있는 값은 1, 2, 3이므로 $f(1), f(2), f(3)$ 의 값을 정하는 경우의 수는
 ${}_3\Pi_3=3^3=27$
(ii) $x > 3$ 일 때, $x \times f(x) \leq 10$ 을 만족시키는 $f(x)$ 의 값은
1 또는 2
즉, $f(4), f(5)$ 가 될 수 있는 값은 1, 2이므로 $f(4), f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수는
 ${}_2\Pi_2=2^2=4$
(i), (ii)에서 구하는 함수 f 의 개수는
 $27 \times 4 = 108$

정답_ ③

020

a 가 2개, f 가 2개 있으므로 구하는 경우의 수는
 $\frac{6!}{2! \times 2!} = 180$

정답_ ③

021

양 끝에 f 가 오도록 나열하려면 2개의 f 를 양 끝에 나열하고 나머지 문자 c, o, e, e 를 일렬로 나열하면 된다.

c, o, e, e 에서 e 가 2개 있으므로 구하는 경우의 수는
 $\frac{4!}{2!} = 12$

정답_ ③

022

x, u 를 한 문자 V 로 생각하고 V, m, a, i, m, m 을 일렬로 나열하는 경우의 수는
 $\frac{6!}{3!} = 120$
이때 x 와 u 가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는
 $2! = 2$
따라서 구하는 경우의 수는
 $120 \times 2 = 240$

정답_ ⑤

023

모음 o, o, a 를 한 문자 V 로 생각하고 V, f, t, b, l, l 을 일렬로 나열하는 경우의 수는
 $\frac{6!}{2!} = 360$
이때 모음끼리 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는
 $\frac{3!}{2!} = 3$
따라서 구하는 경우의 수는
 $360 \times 3 = 1080$

정답_ ④

024

s, u, c, c, e, s, s 를 일렬로 나열하는 경우의 수는
 $\frac{7!}{3! \times 2!} = 420$
 u, e 를 한 문자 V 로 생각하고 V, s, c, c, s, s 를 일렬로 나열하는 경우의 수는
 $\frac{6!}{3! \times 2!} = 60$
이때 u 와 e 가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는
 $2! = 2$
 u 와 e 가 이웃하도록 나열하는 경우의 수는
 $60 \times 2 = 120$
따라서 구하는 경우의 수는
 $420 - 120 = 300$

정답_ ⑤

참고 이웃하지 않도록 나열하는 경우의 수는 전체의 경우의 수에서 이웃하도록 나열하는 경우의 수를 빼면 된다.

025

세 문자 a, b, c 중에서 모든 문자가 한 개 이상씩 포함되도록 중복을 허용하여 5개를 택해 일렬로 나열하려면 세 문자 a, b, c 를 각각 한 개씩 택한 후, a, b, c 에서 중복을 허용하여 2개를 택해 5개의 문자를 나열하면 된다.

(i) 한 개의 문자를 2번 택하여 나열하는 경우의 수는

$${}_3C_1 \times \frac{5!}{3!} = 3 \times 20 = 60$$

(ii) 서로 다른 문자를 각각 1개씩 택하여 나열하는 경우의 수는

$${}_3C_2 \times \frac{5!}{2! \times 2!} = 3 \times 30 = 90$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$60 + 90 = 150$$

정답_ ④

026

0, 1, 1, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2! \times 2!} = 30$$

이때 맨 앞자리에 0이 오는 경우의 수는 맨 앞자리를 제외한 나머지 네 자리에 1, 1, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$$30 - 6 = 24$$

정답_ ④

참고 숫자 0이 포함되어 있는 숫자로 자연수를 만드는 경우의 수

⇒ (전체 경우의 수) - (맨 앞자리에 0이 오는 경우의 수)

027

일의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 5의 2가지이다.

(i) 일의 자리의 숫자가 1인 경우

일의 자리를 제외한 나머지 다섯 자리에 1, 4, 4, 4, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{3!} = 20$$

(ii) 일의 자리의 숫자가 5인 경우

일의 자리를 제외한 나머지 다섯 자리에 1, 1, 4, 4, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2! \times 3!} = 10$$

(i), (ii)에서 구하는 홀수의 개수는

$$20 + 10 = 30$$

정답_ ②

028

300000보다 큰 수가 되려면 4□□□□□의 꼴 또는

5□□□□□의 꼴이어야 한다.

(i) 4□□□□□의 꼴의 자연수의 개수는 남은 다섯 자리에 2, 2, 4, 5, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{5!}{2! \times 2!} = 30$$

(ii) 5□□□□□의 꼴의 자연수의 개수는 남은 다섯 자리에 2, 2, 4, 4, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{5!}{2! \times 2!} = 30$$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$$30 + 30 = 60$$

정답_ 60

029

오른쪽에서 홀수 3, 5, 5, 5는 **홀**, 짝수

4, 4, 6은 **짝**의 자리에 놓으면 된다.

홀 짝 홀 짝 홀 짝 홀

홀수 번째 자리에 4개의 숫자 3, 5, 5, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!} = 4$$

짝수 번째 자리에 3개의 숫자 4, 4, 6을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!} = 3$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$4 \times 3 = 12$$

정답_ ②

030

7개의 숫자 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3에서 5개를 택하여 그 합이 3의 배수가 되는 경우는 다음과 같다.

$$1 + 1 + 2 + 2 + 3 = 9$$

$$1 + 2 + 3 + 3 + 3 = 12$$

(i) 5개의 숫자 1, 1, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2! \times 2!} = 30$$

(ii) 5개의 숫자 1, 2, 3, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{3!} = 20$$

(i), (ii)에서 구하는 3의 배수의 개수는

$$30 + 20 = 50$$

정답_ ⑤

참고 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이면 그 수는 3의 배수이다.

031

s가 h보다 앞에 와야 하므로 s, h를 모두 같은 문자 V로 생각하여 V, c, V, o, o, l을 일렬로 나열한 후, 첫 번째 V는 s, 두 번째 V는 h로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{2! \times 2!} = 180$$

정답_ ②

032

1, 2, 3의 순서가 정해져 있으므로 1, 2, 3을 모두 같은 문자 V로 생각하여 V, V, V, 4, 4, 5, 5를 일렬로 나열한 후, 첫 번째 V는 1, 두 번째 V는 2, 세 번째 V는 3으로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$\frac{7!}{3! \times 2! \times 2!} = 210$$

정답_ ③

033

u는 b보다 앞에 와야 하므로 u, b를 모두 같은 문자 A로 생각하고, y는 l보다 앞에 와야 하므로 y, l을 모두 같은 문자 B로 생각하여 A, B, A, r, r, B를 일렬로 나열한 후, 첫 번째 A는 u, 두 번째 A는 b로 바꾸고, 첫 번째 B는 y, 두 번째 B는 l로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{2! \times 2! \times 2!} = 90$$

정답_ ④

034

5개의 자음 b, s, b, l, l을 한 문자로 생각하고, 3개의 모음 a, e, a를 또 다른 한 문자로 생각하면 자음이 모음보다 앞에 오는 경우의 수는 1이다.

이때 5개의 자음 b, s, b, l, l을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2! \times 2!} = 30$$

3개의 모음 a, e, a를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!} = 3$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$1 \times 30 \times 3 = 90$$

정답_ ⑤

035

A 지점에서 출발하여 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{7!}{4! \times 3!} = 35$$

정답_ ②

036

(i) A 지점에서 P 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2! \times 1!} = 3$$

(ii) P 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2! \times 3!} = 10$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$3 \times 10 = 30$$

정답_ ③

037

(i) A 지점에서 P 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{3!}{1! \times 2!} = 3$$

(ii) P 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{7!}{5! \times 2!} = 21$$

P 지점에서 Q 지점을 지나 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우

의 수는

$$\frac{3!}{2! \times 1!} \times \frac{4!}{3! \times 1!} = 3 \times 4 = 12$$

따라서 P 지점에서 Q 지점을 지나지 않고 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$21 - 12 = 9$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$3 \times 9 = 27$$

정답_ ②

038

오른쪽 그림과 같이 세 지점 P, Q, R를 잡으면 A 지점에서 출발하여 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우는 다음과 같다.

(i) A → P → B로 갈 때, 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{1! \times 3!} \times 1 = 4 \times 1 = 4$$

(ii) A → Q → B로 갈 때, 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3! \times 1!} \times \frac{3!}{1! \times 2!} = 4 \times 3 = 12$$

(iii) A → R → B로 갈 때, 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$1 \times 1 = 1$$

(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는

$$4 + 12 + 1 = 17$$

정답_ 17

다른 풀이

오른쪽 그림과 같이 지나갈 수 없는 길을 점선으로 연결하고 두 점선의 교점을 C라고 하자.

구하는 경우의 수는 A 지점에서 출발하여 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수에서 A 지점에서 C 지점을 지나 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수를 뺀 것과 같다.

(i) A → B로 갈 때, 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{7!}{4! \times 3!} = 35$$

(ii) A → C → B로 갈 때, 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2! \times 2!} \times \frac{3!}{2! \times 1!} = 6 \times 3 = 18$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

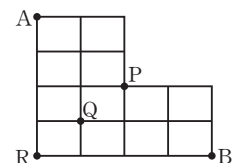
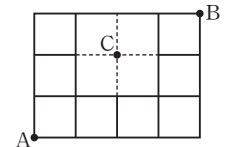
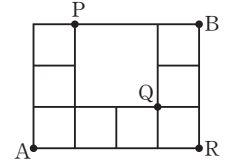
$$35 - 18 = 17$$

039

오른쪽 그림과 같이 세 지점 P, Q, R를 잡으면 A 지점에서 출발하여 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우는 다음과 같다.

(i) A → P → B로 갈 때, 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2! \times 2!} \times \frac{4!}{2! \times 2!} = 6 \times 6 = 36$$



(ii) A → Q → B로 갈 때, 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{1! \times 3!} \times \frac{4!}{3! \times 1!} = 4 \times 4 = 16$$

(iii) A → R → B로 갈 때, 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$1 \times 1 = 1$$

(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는

$$36 + 16 + 1 = 53$$

정답_ ④

다른 풀이

오른쪽 그림과 같이 지나갈 수 없는 길을 점선으로 연결하고 점선의 교점을 각각 C, D라고 하자.

구하는 경우의 수는 A 지점에서 출발하여 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수에서 A 지점에서 C 지점을 지나 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수와 A 지점에서 D 지점을 지나 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수를 뺀 것과 같다.

(i) A → B로 갈 때, 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{8!}{4! \times 4!} = 70$$

(ii) A → C → B로 갈 때, 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3! \times 1!} \times \frac{4!}{1! \times 3!} = 4 \times 4 = 16$$

(iii) A → D → B로 갈 때, 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$1 \times 1 = 1$$

(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는

$$70 - (16 + 1) = 53$$

040

오른쪽 그림과 같이 네 지점 P, Q, R, S를 잡으면 A 지점에서 출발하여 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우는 다음과 같다.

(i) A → P → B로 갈 때, 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$1 \times 1 = 1$$

(ii) A → Q → B로 갈 때, 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{5!}{1! \times 4!} \times \frac{4!}{3! \times 1!} = 5 \times 4 = 20$$

(iii) A → R → B로 갈 때, 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{5!}{3! \times 2!} \times \frac{4!}{1! \times 3!} = 10 \times 4 = 40$$

(iv) A → S → B로 갈 때, 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{5!}{4! \times 1!} \times 1 = 5 \times 1 = 5$$

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$$1 + 20 + 40 + 5 = 66$$

정답_ ③

참고 최단 거리로 갈 때 장애물이 있는 경우의 수는 다음과 같은 순서로 구한다.

- ① 최단 거리로 가기 위하여 반드시 지나야 하는 중간 지점들을 찾는다.
- ② 각 중간 지점을 거쳐 최단 거리로 가는 경우의 수를 구한다.
- ③ ②에서 구한 각 경우의 수를 더한다.

041

오른쪽 그림과 같이 세 지점 Q, R, S를 잡으면 A 지점에서 출발하여 P 지점을 지나 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우는 다음과 같다.

(i) A → Q → P → R → B로

갈 때, 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{1! \times 3!} \times 1 \times 1 \times \left(1 \times \frac{4!}{2! \times 2!}\right) = 4 \times 6 = 24$$

(ii) A → Q → P → S → B로 갈 때, 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{1! \times 3!} \times 1 \times 1 \times \frac{5!}{2! \times 3!} = 4 \times 10 = 40$$

(iii) A → R → P → S → B로 갈 때, 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\left(\frac{3!}{1! \times 2!} \times 1\right) \times 1 \times 1 \times \frac{5!}{2! \times 3!} = 3 \times 10 = 30$$

(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는

$$24 + 40 + 30 = 94$$

정답_ ⑤

042

(1) ${}_nH_3 = {}_{n+3-1}C_3 = {}_{n+2}C_3$ 이므로

$$\frac{(n+2)(n+1)n}{3 \times 2 \times 1} = 4$$

$$n(n+1)(n+2) = 2 \times 3 \times 4$$

$$\therefore n = 2$$

(2) ${}_5H_r = {}_{5+r-1}C_r = {}_{4+r}C_r = {}_{4+r}C_4$ 이므로

$$\frac{(4+r)(3+r)(2+r)(1+r)}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 15$$

$$(r+1)(r+2)(r+3)(r+4) = 3 \times 4 \times 5 \times 6$$

$$\therefore r = 2$$

정답_ (1) $n=2$ (2) $r=2$

043

구하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 중복을 허용하여 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_8 = {}_{11}C_8 = {}_{11}C_3 = 165$$

정답_ ③

044

다항식 $(a+b+c)^4$ 의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 3개의 문자 a, b, c 에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$$

정답_ ④

045

(i) 빨간색 볼펜 5자루를 4명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수

는 서로 다른 4개에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_5 = {}_8C_5 = {}_8C_3 = 56$$

- (ii) 파란색 볼펜 2자루를 4명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_2 = {}_5C_2 = 10$$

- (i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$56 \times 10 = 560$$

정답_ ①

046

- (i) 숫자 5를 택하지 않는 경우

5를 제외한 나머지 2개의 숫자에서 중복을 허용하여 4개를 택하면 되므로 이때의 경우의 수는

$${}_2H_4 = {}_5C_4 = {}_5C_1 = 5$$

- (ii) 숫자 5를 1개 택하는 경우

5를 제외한 나머지 2개의 숫자에서 중복을 허용하여 3개를 택하면 되므로 이때의 경우의 수는

$${}_2H_3 = {}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$$

- (i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$5 + 4 = 9$$

정답_ ③

047

3명 중 마카롱을 받을 2명을 택하는 경우의 수는

$${}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$$

마카롱 5개를 택한 2명에게 나누어 주는 경우의 수는 선택된 2명에게 마카롱을 각각 1개씩 나누어 주고 남은 3개를 2명에게 나누어 주는 경우의 수와 같다.

즉, 서로 다른 2개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_2H_3 = {}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$3 \times 4 = 12$$

정답_ ②

048

$3 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq 10$ 을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c, d) 는 3부터 10까지 8개의 자연수 중에서 중복을 허용하여 4개를 택해 작거나 같은 수부터 차례대로 a, b, c, d 의 값으로 정하면 된다.

따라서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는 서로 다른 8개에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_8H_4 = {}_{11}C_4 = 330$$

정답_ ④

049

a, b, c 가 자연수이고 $5 < a \leq b \leq c < 9$ 이므로

$$6 \leq a \leq b \leq c \leq 8$$

$6 \leq a \leq b \leq c \leq 8$ 을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c) 는 6부터 8까지 3개의 자연수 중에서 중복을 허용하여 3개를 택해 작거나 같은 수부터 차례대로 a, b, c 의 값으로 정하면 된다.

따라서 구하는 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$$

정답_ ①

050

3부터 6까지 4개의 자연수 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_4H_3 = {}_6C_3 = 20$$

선택한 3개의 수를 작거나 같은 수부터 차례대로 $|a|, |b|, |c|$ 의 값으로 정하면 $3 \leq |a| \leq |b| \leq |c| \leq 6$ 을 만족시킨다.

이때 0이 아닌 세 정수 a, b, c 는 각각 절댓값이 같고 부호가 다른 두 개의 값을 가질 수 있으므로 구하는 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는

$$20 \times 2 \times 2 \times 2 = 160$$

정답_ ①

051

조건 (가)에 의하여 세 수 a, b, c 는 모두 홀수이다.

조건 (나)에서 세 수 a, b, c 는 모두 20 이하이므로 20 이하의 홀수 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19의 10개의 자연수 중에서 3개를 택해 작거나 같은 수부터 차례대로 a, b, c 의 값으로 정하면

$a \leq b \leq c \leq 20$ 을 만족시킨다.

따라서 구하는 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는 서로 다른 10개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_{10}H_3 = {}_{12}C_3 = 220$$

정답_ 220

052

색연필, 볼펜, 형광펜을 1개씩 먼저 택한 후, 남은 색연필, 볼펜, 형광펜 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$$

정답_ ①

053

A, B, C에게 각각 빵을 2개씩 먼저 나누어 주고 남은 빵 3개를 중복을 허용하여 3명에게 나누어 주면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$$

정답_ ①

054

3명의 학생에게 콜라와 오렌지주스를 각각 적어도 한 병씩 나누

어 주어야 하므로 3명의 학생에게 먼저 콜라와 오렌지주스를 각각 한 병씩 나누어 주고 남은 콜라 3병과 오렌지주스 2병을 3명의 학생에게 나누어 주면 된다.

콜라 3병을 3명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$$

오렌지주스 2병을 3명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$10 \times 6 = 60$$

정답_ ①

055

3명의 학생 중 3가지 색의 카드를 각각 한 장 이상 받을 학생을 택하는 경우의 수는

$${}_3C_1 = 3$$

먼저 선택된 학생에게 3가지 색의 카드를 각각 한 장씩 나누어 준 후, 남은 빨간색 카드 3장, 파란색 카드 1장을 3명의 학생에게 나누어 주면 된다.

빨간색 카드 3장을 3명에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$$

파란색 카드 1장을 3명에게 나누어 주는 경우의 수는

$${}_3H_1 = {}_3C_1 = 3$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$3 \times 10 \times 3 = 90$$

정답_ ③

056

서로 다른 종류의 초콜릿 3개를 같은 종류의 상자 3개에 넣는 경우의 수는 1이다.

이때 같은 종류의 상자에 서로 다른 종류의 초콜릿을 넣었으므로 3개의 상자는 서로 다른 상자가 된다.

서로 다른 종류의 초콜릿이 들어 있는 3개의 상자에 과자가 1개 이상 들어가야 하므로 3개의 상자에 과자를 1개씩 미리 넣은 후, 남은 나머지 5개의 과자를 3개의 상자에 넣으면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_5 = {}_7C_3 = {}_7C_2 = 21$$

정답_ 21

057

음이 아닌 정수 x, y, z 의 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는 3개의 문자 x, y, z 중에서 중복을 허용하여 10개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_{10} = {}_{12}C_{10} = {}_{12}C_2 = 66$$

정답_ ④

058

a, b, c, d 가 양의 정수이므로

$$a = a' + 1, b = b' + 1, c = c' + 1, d = d' + 1 \text{로 놓으면}$$

$$(a' + 1) + (b' + 1) + (c' + 1) + (d' + 1) = 9$$

(단, a', b', c', d' 은 음이 아닌 정수)

$$\therefore a' + b' + c' + d' = 5$$

따라서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는 $a' + b' + c' + d' = 5$

를 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c', d' 의 순서쌍

(a', b', c', d') 의 개수와 같으므로

$${}_4H_5 = {}_8C_5 = {}_8C_3 = 56$$

정답_ ④

다른 풀이

양의 정수 a, b, c, d 의 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는 4개의 문자 a, b, c, d 를 각각 한 번씩 택했다고 보면 4개 중에서 중복을 허용하여 $9 - 4 = 5$ (개)를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_5 = {}_8C_5 = {}_8C_3 = 56$$

059

x, y, z, w 가 음이 아닌 정수이므로

(i) $x + y + z + w = 0$ 일 때

음이 아닌 정수 x, y, z, w 의 순서쌍 (x, y, z, w) 의 개수는

$${}_4H_0 = {}_3C_0 = 1$$

(ii) $x + y + z + w = 1$ 일 때

음이 아닌 정수 x, y, z, w 의 순서쌍 (x, y, z, w) 의 개수는

$${}_4H_1 = {}_4C_1 = 4$$

(iii) $x + y + z + w = 2$ 일 때

음이 아닌 정수 x, y, z, w 의 순서쌍 (x, y, z, w) 의 개수는

$${}_4H_2 = {}_5C_2 = 10$$

(i)~(iii)에서 구하는 순서쌍 (x, y, z, w) 의 개수는

$$1 + 4 + 10 = 15$$

정답_ ①

다른 풀이

부등식 $x + y + z + w < 3$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, w 의 순서쌍 (x, y, z, w) 의 개수는 방정식 $x + y + z + w + u = 2$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, w, u 의 모든 순서쌍

(x, y, z, w, u) 의 개수와 같다.

따라서 구하는 순서쌍 (x, y, z, w, u) 의 개수는

$${}_5H_2 = {}_6C_2 = 15$$

참고 부등식의 해의 개수

부등식 $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n \leq r$ (n, r 는 자연수)를 만족시키는 음이 아닌 정수해의 개수는 방정식 $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n + x_{n+1} = r$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수해의 개수와 같다.

$$\Leftrightarrow {}_{n+1}H_r$$

060

$$x = x' + 2, y = y' + 1, z = z' - 1 \text{로 놓으면}$$

$$(x' + 2) + (y' + 1) + (z' - 1) = 7 \text{ (단, } x', y', z' \text{은 음이 아닌 정수)}$$

$$\therefore x' + y' + z' = 5$$

따라서 구하는 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는 $x' + y' + z' = 5$ 를 만족

시키는 음이 아닌 정수 x', y', z' 의 순서쌍 (x', y', z') 의 개수와 같으므로

$${}_3H_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = 21$$

정답_ ③

061

x, y, z, w 가 양의 정수이므로

$$x=x'+1, y=y'+1, z=z'+1, w=w'+1 \text{로 놓으면}$$

$$(x'+1)+(y'+1)+3(z'+1)+(w'+1)=10$$

(단, x', y', z', w' 은 음이 아닌 정수)

$$\therefore x'+y'+3z'+w'=4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

따라서 구하는 순서쌍 (x, y, z, w) 의 개수는 ①을 만족시키는 음이 아닌 정수 x', y', z', w' 의 순서쌍 (x', y', z', w') 의 개수와 같다.

(i) $z'=0$ 일 때

①에서 $x'+y'+w'=4$ 이므로 이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 x', y', w' 의 순서쌍 (x', y', w') 의 개수는

$${}_3H_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$$

(ii) $z'=1$ 일 때

①에서 $x'+y'+w'=1$ 이므로 이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 x', y', w' 의 순서쌍 (x', y', w') 의 개수는

$${}_3H_1 = {}_3C_1 = 3$$

(iii) $z' \geq 2$ 일 때

①을 만족시키는 음이 아닌 정수 x', y', w' 의 순서쌍 (x', y', w') 은 존재하지 않는다.

(i)~(iii)에서 구하는 순서쌍 (x, y, z, w) 의 개수는

$$15+3=18$$

정답_ ②

다른 풀이

$$x+y+3z+w=10 \text{에서 } x+y+w=10-3z$$

x, y, w 가 양의 정수이므로

$$x+y+w \geq 3, 10-3z \geq 3$$

$$\therefore z \leq \frac{7}{3}$$

이때 z 는 양의 정수이므로

$$z=1 \text{ 또는 } z=2$$

(i) $z=1$ 일 때

$x+y+w=7$ 을 만족시키는 양의 정수 x, y, w 의 순서쌍 (x, y, w) 의 개수는

$${}_3H_{7-3} = {}_3H_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$$

(ii) $z=2$ 일 때

$x+y+w=4$ 를 만족시키는 양의 정수 x, y, w 의 순서쌍 (x, y, w) 의 개수는

$${}_3H_{4-3} = {}_3H_1 = {}_3C_1 = 3$$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (x, y, z, w) 의 개수는

$$15+3=18$$

062

조건 (가)에 의하여 네 자연수 a, b, c, d 중 홀수가 2개이어야 하므로 a, b, c, d 중 홀수가 되는 2개를 선택하는 경우의 수는

$${}_4C_2=6$$

a, b, c, d 중 두 홀수를 $2x+1, 2y+1$, 두 짝수를 $2z+2, 2w+2$ 라고 하면 조건 (나)에 의하여

$$(2x+1)+(2y+1)+(2z+2)+(2w+2)=18$$

(단, x, y, z, w 는 음이 아닌 정수)

$$\therefore x+y+z+w=6$$

$x+y+z+w=6$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, w 의 순서쌍 (x, y, z, w) 의 개수는

$${}_4H_6 = {}_9C_6 = {}_9C_3 = 84$$

따라서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는

$$6 \times 84 = 504$$

정답_ ③

주의 z, w 는 음이 아닌 정수이므로 두 짝수를 $2z, 2w$ 라고 하지 않는다.

063

주어진 조건은 Y 의 원소 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 중복을 허용하여 3개를 택해 작거나 같은 수부터 차례대로 $f(1), f(2), f(3)$ 에 대응시키면 된다.

따라서 구하는 함수의 개수는 Y 의 원소 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_5H_3 = {}_7C_3 = 35$$

정답_ ④

참고 함수의 개수

함수 $f: X \rightarrow Y$ 에 대하여 $n(X)=a, n(Y)=b$ 일 때

(1) 함수 f 의 개수

$$\Rightarrow {}_b\Pi_a$$

(2) $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 인 함수 f 의 개수

$$\Rightarrow {}_bP_a \text{ (단, } a \leq b)$$

(3) $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) < f(x_2)$ 인 함수 f 의 개수

$$\Rightarrow {}_bC_a \text{ (단, } a \leq b)$$

(4) $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) \leq f(x_2)$ 인 함수 f 의 개수

$$\Rightarrow {}_bH_a$$

064

$f(1) \leq f(2) < f(3) \leq f(4)$ 를 만족시키는 함수 f 의 개수는

$f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq f(4)$ 를 만족시키는 함수의 개수에서

$f(1) \leq f(2) = f(3) \leq f(4)$ 를 만족시키는 함수의 개수를 빼면 된다.

이때 $f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq f(4)$ 를 만족시키는 함수 f 의 개수는 Y 의 원소 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 중복을 허용하여 4개를 택해 작거나 같은 수부터 차례대로 $f(1), f(2), f(3), f(4)$ 에 대응시키면 된다.

즉, 서로 다른 5개에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_5H_4 = {}_8C_4 = 70$$

한편, $f(1) \leq f(2) = f(3) \leq f(4)$ 를 만족시키는 함수 f 의 개수는

$f(2) = f(3)$ 이므로 Y 의 원소 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 중복을 허용하여 3개를 택해 작거나 같은 수부터 차례대로 $f(1), f(2), f(4)$ 에 대응시키면 된다.

즉, 서로 다른 5개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_5H_3 = {}_7C_3 = 35$$

따라서 구하는 함수 f 의 개수는

정답_ ②

065

조건 (가)에서 $f(3)=6$ 이므로 조건 (나)에 의하여(i) $f(4)$ 의 값이 될 수 있는 경우는 2, 4, 6의 3가지이다.(ii) $f(1), f(2)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 6, 8, 10의 3개에서 중복을 허용하여 2개를 택해 크거나 같은 수부터 차례대로 $f(1), f(2)$ 에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

$${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$$

(i), (ii)에서 구하는 함수의 개수는

$$3 \times 6 = 18$$

정답_ ②

066

조건 (가), (나)에 의하여

$$f(2)=1, f(3)=6 \text{ 또는 } f(2)=2, f(3)=3$$

(i) $f(2)=1, f(3)=6$ 인 경우

$$f(1)=1, f(4)=f(5)=6$$

따라서 이때의 경우의 수는 1이다.

(ii) $f(2)=2, f(3)=3$ 인 경우 $f(1)$ 의 값이 될 수 있는 경우는 1, 2의 2가지이다. $f(4), f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 3, 4, 5, 6의 4개에서 중복을 허용하여 2개를 택해 작거나 같은 수부터 차례대로 $f(4), f(5)$ 에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

$${}_4H_2 = {}_5C_2 = 10$$

따라서 이때의 경우의 수는

$$2 \times 10 = 20$$

(i), (ii)에서 구하는 함수의 개수는

$$1 + 20 = 21$$

정답_ 21

067

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 3, 4, 5의 3가지이다. ①

일의 자리에 올 수 있는 숫자는 2, 4의 2가지이다. ②

백의 자리, 십의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_5\Pi_2 = 5^2 = 25 \quad \text{③}$$

따라서 구하는 짝수의 개수는

$$3 \times 2 \times 25 = 150 \quad \text{④}$$

정답_ 150

채점 기준	비율
① 천의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수 구하기	20 %
② 일의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수 구하기	20 %
③ 백의 자리, 십의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수 구하기	40 %
④ 짝수의 개수 구하기	20 %

068

조건 (가)에서 $f(3)=7$ 이므로 조건 (나)에 의하여 $f(1), f(2)$ 의 값을

정하는 경우의 수는 5, 6, 7의 3개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_3\Pi_2 = 3^2 = 9 \quad \text{①}$$

조건 (가)에서 $f(3)=7$ 이므로 조건 (나)에 의하여 $f(4), f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 7, 8의 2개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_2\Pi_2 = 2^2 = 4 \quad \text{②}$$

따라서 구하는 함수의 개수는

$$9 \times 4 = 36 \quad \text{③}$$

정답_ 36

채점 기준	비율
① $f(1), f(2)$ 의 값을 정하는 경우의 수 구하기	40 %
② $f(4), f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수 구하기	40 %
③ 함수 f 의 개수 구하기	20 %

069

홀수가 되려면 일의 자리의 숫자가 1 또는 3이어야 한다.

(i) 일의 자리의 숫자가 1인 경우

0, 1, 3, 3이 적혀 있는 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{3!} = 20$$

이때 맨 앞자리에 0이 오는 경우의 수는 $\frac{4!}{3!} = 4$

따라서 일의 자리의 숫자가 1인 경우의 수는

$$20 - 4 = 16 \quad \text{①}$$

(ii) 일의 자리의 숫자가 3인 경우

0, 1, 1, 3, 3이 적혀 있는 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2! \times 2!} = 30$$

이때 맨 앞자리에 0이 오는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2! \times 2!} = 6 \quad \text{②}$$

따라서 일의 자리의 숫자가 3인 경우의 수는

$$30 - 6 = 24$$

(i), (ii)에서 구하는 홀수의 개수는

$$16 + 24 = 40 \quad \text{③}$$

정답_ 40

채점 기준	비율
① 일의 자리의 숫자가 1인 경우의 수 구하기	40 %
② 일의 자리의 숫자가 3인 경우의 수 구하기	40 %
③ 홀수의 개수 구하기	20 %

070

A, B를 제외한 5개의 문자 중에서 3개의 문자를 택하는 경우의 수는

$${}_5C_3 = {}_5C_2 = 10 \quad \text{①}$$

5개의 문자 중에서 택한 세 문자를 C, D, E라고 하면 A가 B보다 앞에 오도록 나열하는 경우는 A, B를 모두 같은 문자 V로 생각하여 V, V, C, D, E를 일렬로 나열한 후, 첫 번째 V는 A로 두

번째 V는 B로 바꾸면 된다.

이때의 경우의 수는

$$\frac{5!}{2!} = 60 \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$10 \times 60 = 600 \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

정답_ 600

채점 기준	비율
① A, B를 제외한 5개의 문자 중 3개를 택하는 경우의 수 구하기	30 %
② A, B를 포함한 5개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수 구하기	50 %
③ A가 B보다 앞에 오도록 나열하는 경우의 수 구하기	20 %

071

5명의 학생들이 같은 종류의 사탕 8개를 나누어 가지는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 중복을 허용하여 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$$a = {}_5H_8 = {}_{12}C_8 = {}_{12}C_4 = 495 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

사탕을 하나도 받지 못하는 학생이 없도록 나누어 가지려면 5명의 학생에게 먼저 사탕을 한 개씩 나누어 준 후, 남은 3개를 중복을 허용하여 5명의 학생에게 나누어 주면 된다.

따라서 사탕을 하나도 받지 못하는 학생이 없도록 나누어 가지는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$$b = {}_5H_3 = {}_7C_3 = 35 \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

$$\therefore a + b = 495 + 35 = 530 \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

정답_ 530

채점 기준	비율
① a의 값 구하기	40 %
② b의 값 구하기	50 %
③ a+b의 값 구하기	10 %

072

x, y, z 가 짝수이므로 $x=2X, y=2Y, z=2Z$ 로 놓으면

$x+y+z=12$ 에서

$2X+2Y+2Z=12$ (단, X, Y, Z 는 양의 정수)

$$\therefore X+Y+Z=6$$

따라서 구하는 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는 방정식 $X+Y+Z=6$ 을 만족시키는 양의 정수 X, Y, Z 의 순서쌍 (X, Y, Z) 의 개수와 같다. $\dots\dots\dots \textcircled{1}$

$X=x'+1, Y=y'+1, Z=z'+1$ 로 놓으면

$X+Y+Z=6$ 에서

$(x'+1)+(y'+1)+(z'+1)=6$ (단, x', y', z' 은 음이 아닌 정수)

$$\therefore x'+y'+z'=3$$

따라서 구하는 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는 $x'+y'+z'=3$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 x', y', z' 의 순서쌍 (x', y', z') 의 개수와 같으므로 $\dots\dots\dots \textcircled{2}$

$${}_3H_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = 10 \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

정답_ 10

채점 기준	비율
① $x=2X, y=2Y, z=2Z$ 로 놓고 $X+Y+Z=6$ 의 양의 정수해의 개수가 순서쌍 (x, y, z) 의 개수와 같음을 보이기	40 %
② $X=x'+1, Y=y'+1, Z=z'+1$ 로 놓고 $x'+y'+z'=3$ 의 음이 아닌 정수해의 개수가 순서쌍 (x, y, z) 의 개수와 같음을 보이기	40 %
③ 순서쌍 (x, y, z) 의 개수 구하기	20 %

073

조건 (가)에서 양 끝에 각각 대문자 X 또는 Y 가 나오는 경우의 수는

$${}_2\Pi_2 = 2^2 = 4$$

조건 (나)에서 문자 a 는 한 번만 나와야 하므로 문자 a 의 자리를 정하는 경우의 수는

$${}_4C_1 = 4$$

남은 3개의 자리에 오는 문자를 정하는 경우의 수는 b, X, Y 의 3개의 문자에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_3\Pi_3 = 3^3 = 27$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$4 \times 4 \times 27 = 432$$

정답_ ③

074

조건 (가)에서 $A^c \cap B^c \cap C^c = \{6, 7, 8\}$ 이므로

$$(A \cup B \cup C)^c = \{6, 7, 8\}$$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 집합 U, A, B, C 를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

이때 $A-B, B-A, C$ 에 집합 U 의 원소 2, 4, 5를 나누어 넣는 모든 경우의 수는

$${}_3\Pi_3 = 3^3 = 27$$

그런데 집합 C 가 공집합인 경우의 수는 2, 4, 5를 $A-B, B-A$ 에 넣는 경우의 수와 같으므로

$${}_2\Pi_3 = 2^3 = 8$$

또, $C = \{2, 4, 5\}$ 이면 $A = \{1, 3\}, B = \{1, 3\}$ 에서 $A=B$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 구하는 순서쌍 (A, B, C) 의 개수는

$$27 - (8 + 1) = 18$$

정답_ 18

참고 드모르간의 법칙

전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여

$$(1) (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

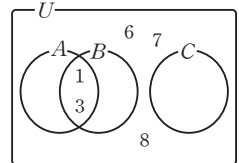
$$(2) (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

075

천의 자리의 숫자와 십의 자리의 숫자의 합이 짝수가 되려면 두 숫자가 모두 짝수이거나 모두 홀수이어야 한다.

(i) 천의 자리의 숫자와 십의 자리의 숫자가 모두 짝수인 경우

천의 자리, 십의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 2, 4, 6의



3개에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_3\Pi_2 = 3^2 = 9$$

백의 자리, 일의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 2, 3, 4, 5, 6의 5개에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_5\Pi_2 = 5^2 = 25$$

따라서 이때의 경우의 수는

$$9 \times 25 = 225$$

- (ii) 천의 자리의 숫자와 십의 자리의 숫자가 모두 홀수인 경우

천의 자리, 십의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 3, 5의 2개에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_2\Pi_2 = 2^2 = 4$$

백의 자리, 일의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 2, 3, 4, 5, 6의 5개에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_5\Pi_2 = 5^2 = 25$$

따라서 이때의 경우의 수는

$$4 \times 25 = 100$$

- (i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$$225 + 100 = 325$$

정답_ 325

076

1계단씩 오르는 것을 a , 2계단씩 오르는 것을 b 라고 하자.

- (i) 2계단씩 0번 오르는 경우

9개의 계단을 올라가는 경우의 수는 9개의 a 를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 1이다.

- (ii) 2계단씩 1번 오르는 경우

9개의 계단을 올라가는 경우의 수는 7개의 a 와 1개의 b 를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{8!}{7!} = 8$$

- (iii) 2계단씩 2번 오르는 경우

9개의 계단을 올라가는 경우의 수는 5개의 a 와 2개의 b 를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{7!}{5! \times 2!} = 21$$

- (iv) 2계단씩 3번 오르는 경우

9개의 계단을 올라가는 경우의 수는 3개의 a 와 3개의 b 를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{6!}{3! \times 3!} = 20$$

- (v) 2계단씩 4번 오르는 경우

9개의 계단을 올라가는 경우의 수는 1개의 a 와 4개의 b 를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{5!}{4!} = 5$$

- (i)~(v)에서 구하는 경우의 수는

$$1 + 8 + 21 + 20 + 5 = 55$$

정답_ ⑤

077

천의 자리와 일의 자리의 숫자가 2일 때, 나머지 네 자리에 4와 6이 적어도 하나씩 포함되는 경우는 다음과 같다.

(2, 2, 4, 6), (2, 4, 4, 6), (2, 4, 6, 6), (4, 4, 4, 6), (4, 4, 6, 6), (4, 6, 6, 6)

- (i) (2, 2, 4, 6), (2, 4, 4, 6), (2, 4, 6, 6)인 경우

4개의 숫자 2, 2, 4, 6을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

4개의 숫자가 2, 4, 4, 6인 경우와 2, 4, 6, 6인 경우의 수도 같은 방법으로 구하면 각각 12이다.

따라서 이때의 경우의 수는

$$3 \times 12 = 36$$

- (ii) (4, 4, 4, 6), (4, 6, 6, 6)인 경우

4개의 숫자 4, 4, 4, 6을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!} = 4$$

4개의 숫자가 4, 6, 6, 6인 경우의 수도 같은 방법으로 구하면 4이다.

따라서 이때의 경우의 수는

$$2 \times 4 = 8$$

- (iii) (4, 4, 6, 6)인 경우

4개의 숫자 4, 4, 6, 6을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$$

- (i)~(iii)에서 천의 자리와 일의 자리의 숫자가 2인 경우의 수는

$$36 + 8 + 6 = 50$$

천의 자리와 일의 자리의 숫자가 4인 경우와 6인 경우의 수도 같은 방법으로 구하면 각각 50이다.

따라서 구하는 자연수의 개수는

$$3 \times 50 = 150$$

정답_ ④

078

오른쪽 그림과 같이 네 지점 P, Q, R, S를 잡으면 A 지점에서 출발하여 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우는 다음과 같다.

- (i) A → Q → B로 갈 때, 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2! \times 1!} \times \frac{4!}{1! \times 1! \times 2!} = 3 \times 12 = 36$$

- (ii) A → P → B로 갈 때, 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2! \times 1! \times 1!} \times \frac{3!}{1! \times 1! \times 1!} = 12 \times 6 = 72$$

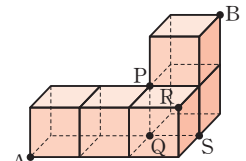
- (iii) A → S → B로 갈 때, 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3! \times 1!} \times \frac{3!}{1! \times 2!} = 4 \times 3 = 12$$

- (iv) A → R → B로 갈 때, 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3! \times 1!} \times \left(1 \times \frac{2!}{1! \times 1!}\right) = 4 \times 2 = 8$$

이때 (i), (ii)에서 A → Q → P → B인 경우, (i), (iii)에서 A → Q → S → B인 경우가 중복된다.



A → Q → P → B로 갈 때, 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2! \times 1!} \times 1 \times \frac{3!}{1! \times 1! \times 1!} = 3 \times 6 = 18$$

A → Q → S → B로 갈 때, 최단 거리로 가는 경우의 수는

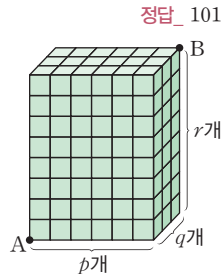
$$\frac{3!}{2! \times 1!} \times 1 \times \frac{3!}{1! \times 2!} = 3 \times 3 = 9$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$36 + 72 + 12 + 8 - (18 + 9) = 101$$

참고 오른쪽 그림과 같이 크기가 같은 정육면체를 가로, 세로, 높이의 칸의 개수가 각각 p, q, r 가 되도록 쌓아 올려 직육면체를 만들었을 때, 각 정육면체의 모서리를 따라 꼭짓점 A에서 꼭짓점 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{(p+q+r)!}{p! \times q! \times r!}$$



정답_ 101

079

(i) $b \leq a \leq c \leq d$ 인 경우

5 이하의 자연수 중에서 중복을 허용하여 4개를 택해 작거나 같은 수부터 차례대로 b, a, c, d 의 값으로 정하면 된다.

따라서 이때의 구하는 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는 서로 다른 5개에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_5H_4 = {}_8C_4 = 70$$

(ii) $a \leq b \leq c \leq d$ 인 경우

(i)과 같은 방법으로 구하면 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는

$${}_5H_4 = {}_8C_4 = 70$$

(iii) $a = b \leq c \leq d$ 인 경우

5 이하의 자연수 중에서 중복을 허용하여 3개를 택해 작거나 같은 수부터 차례대로 a, c, d 의 값으로 정하면 된다.

따라서 이때의 구하는 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는 서로 다른 5개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_5H_3 = {}_7C_3 = 35$$

(i)~(iii)에서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는

$$70 + 70 - 35 = 105$$

정답_ ②

080

(i) A를 택하지 않는 경우

B, C, D를 각각 2개 이상 택해야 하므로 B, C, D를 각각 2개씩 먼저 택한 후, 세 종류의 과일 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하면 된다.

따라서 이때의 경우의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$$

(ii) A를 1개 택하는 경우

B, C, D를 각각 2개 이상 택해야 하므로 B, C, D를 각각 2개씩 먼저 택한 후, 세 종류의 과일 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하면 된다.

따라서 이때의 경우의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$10 + 6 = 16$$

정답_ ②

081

주어진 조건을 만족시키기 위해서는 a, b, c 가 3 이상의 3의 거듭제곱의 수가 되어야 한다.

즉, 세 자연수 a, β, γ 에 대하여 $a=3^a, b=3^\beta, c=3^\gamma$ 의 꼴이어야 한다.

$$\therefore abc = 3^{a+\beta+\gamma}$$

즉, $3^{a+\beta+\gamma} = 3^n$ 이므로

$$a + \beta + \gamma = n$$

$a=x+1, \beta=y+1, \gamma=z+1$ 로 놓으면

$(x+1) + (y+1) + (z+1) = n$ (단, x, y, z 는 음이 아닌 정수)

$$\therefore x + y + z = n - 3$$

따라서 순서쌍 (a, β, γ) 의 개수는 방정식 $x + y + z = n - 3$ 의 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로

$$\begin{aligned} {}_3H_{n-3} &= {}_{3+(n-3)-1}C_{n-3} \\ &= {}_{n-1}C_{n-3} \\ &= {}_{n-1}C_2 \end{aligned}$$

이때 순서쌍 (a, β, γ) 의 개수는 순서쌍 (a, b, c) 의 개수와 같으므로

$${}_{n-1}C_2 = 15, \quad \frac{(n-1)(n-2)}{2 \times 1} = 15$$

$$(n-1)(n-2) = 6 \times 5$$

$$\therefore n = 7$$

정답_ ③

082

조건 (가)에서 $x + y = 6 - z$ 이므로 조건 (나)에 의하여

$$0 < 6 - z < 4 \quad \therefore 2 < z < 6$$

이때 z 는 음이 아닌 정수이므로 z 의 값이 될 수 있는 것은 3, 4, 5이다.

(i) $z=3$ 일 때

$x + y = 3$ 이므로 음이 아닌 정수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 의 개수는

$${}_2H_3 = {}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$$

(ii) $z=4$ 일 때

$x + y = 2$ 이므로 음이 아닌 정수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 의 개수는

$${}_2H_2 = {}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$$

(iii) $z=5$ 일 때

$x + y = 1$ 이므로 음이 아닌 정수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 의 개수는

$${}_2H_1 = {}_2C_1 = 2$$

(i)~(iii)에서 구하는 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는

$$4 + 3 + 2 = 9$$

정답_ ③

다른 풀이

조건 (가)를 만족시키는 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는

$${}_3H_6 = {}_8C_6 = {}_8C_2 = 28$$

조건 (나)를 만족시키지 않는 경우는 $x+y \leq 0$ 또는 $x+y \geq 4$ 이므로
 $x+y=0$ 또는 $x+y=4$ 또는 $x+y=5$ 또는 $x+y=6$

(i) $x+y=0$ 일 때

이를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 의 개수는

$${}_2H_0 = {}_1C_0 = 1$$

(ii) $x+y=4$ 일 때

이를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 의 개수는

$${}_2H_4 = {}_5C_4 = {}_5C_1 = 5$$

(iii) $x+y=5$ 일 때

이를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 의 개수는

$${}_2H_5 = {}_6C_5 = {}_6C_1 = 6$$

(iv) $x+y=6$ 일 때

이를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 의 개수는

$${}_2H_6 = {}_7C_6 = {}_7C_1 = 7$$

(i)~(iii)에서 구하는 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는

$$28 - (1 + 5 + 6 + 7) = 9$$

083

(i) $f(1)=1$ 인 경우

조건 (가)에 의하여

$$f(f(1)) = f(1) = 1$$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $f(1)=2$ 인 경우

조건 (가)에 의하여

$$f(f(1)) = f(2) = 4$$

조건 (나)에 의하여 $f(3), f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 2, 3, 4, 5의 4개에서 중복을 허용하여 2개를 택해 작거나 같은 수부터 차례대로 $f(3), f(5)$ 에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

$${}_4H_2 = {}_5C_2 = 10$$

$f(4)$ 의 값을 정하는 경우의 수는

$${}_5C_1 = 5$$

따라서 이때의 함수의 개수는

$$10 \times 5 = 50$$

(iii) $f(1)=3$ 인 경우

조건 (가)에 의하여

$$f(f(1)) = f(3) = 4$$

조건 (나)에 의하여 $f(5)$ 의 값이 될 수 있는 경우는 4, 5의 2가지이다.

$f(2), f(4)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 각각

$${}_5C_1 = 5$$

따라서 이때의 함수의 개수는

$$2 \times 5 \times 5 = 50$$

(iv) $f(1)=4$ 인 경우

조건 (가)에 의하여

$$f(f(1)) = f(4) = 4$$

조건 (나)에 의하여 $f(3), f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 4, 5의 2개에서 중복을 허용하여 2개를 택해 작거나 같은 수부터 차례대로 $f(3), f(5)$ 에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

$${}_2H_2 = {}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$$

$f(2)$ 의 값을 정하는 경우의 수는

$${}_5C_1 = 5$$

따라서 이때의 함수의 개수는

$$3 \times 5 = 15$$

(v) $f(1)=5$ 인 경우

조건 (가)에 의하여

$$f(f(1)) = f(5) = 4$$

이때 조건 (나)에서 $f(1) \leq f(3) \leq f(5)$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i)~(v)에서 구하는 함수의 개수는

$$50 + 50 + 15 = 115$$

정답 115

084

(1) $(x-3)^6$ 의 전개식의 일반항은

$${}_6C_r x^{6-r} (-3)^r = {}_6C_r (-3)^r x^{6-r} \quad (\text{단, } r=0, 1, 2, \dots, 6)$$

x^3 항은 $6-r=3$ 일 때이므로

$$r=3$$

따라서 구하는 x^3 의 계수는

$${}_6C_3 \times (-3)^3 = -540$$

(2) $(2x-y)^4$ 의 전개식의 일반항은

$${}_4C_r (2x)^{4-r} (-y)^r = {}_4C_r (-1)^r 2^{4-r} x^{4-r} y^r \quad (\text{단, } r=0, 1, 2, 3, 4)$$

$x^2 y^2$ 항은 $r=2$ 일 때이므로 구하는 $x^2 y^2$ 의 계수는

$${}_4C_2 \times (-1)^2 \times 2^2 = 24$$

(3) $(x^5 + \frac{1}{x^2})^6$ 의 전개식의 일반항은

$${}_6C_r (x^5)^{6-r} \left(\frac{1}{x^2}\right)^r = {}_6C_r \frac{x^{30-5r}}{x^{2r}} \quad (\text{단, } r=0, 1, 2, \dots, 6)$$

x^2 항은 $30-5r-2r=2$ 일 때이므로

$$r=4$$

따라서 구하는 x^2 의 계수는

$${}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$$

(4) $(x + \frac{1}{x^2})^4$ 의 전개식의 일반항은

$${}_4C_r x^{4-r} \left(\frac{1}{x^2}\right)^r = {}_4C_r \frac{x^{4-r}}{x^{2r}} \quad (\text{단, } r=0, 1, 2, 3, 4)$$

$\frac{1}{x^2}$ 항은 $2r-(4-r)=2$ 일 때이므로

$$r=2$$

따라서 구하는 $\frac{1}{x^2}$ 의 계수는

$${}_4C_2 = 6$$

정답_ (1) -540 (2) 24 (3) 15 (4) 6

참고 $a \neq 0$ 이고 m, n 이 자연수일 때

$$(1) a^m a^n = a^{m+n}$$

$$(2) (a^m)^n = a^{mn}$$

$$(3) (ab)^n = a^n b^n$$

$$(4) \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$$

$$(5) a^m \div a^n = \begin{cases} a^{m-n} & (m > n) \\ 1 & (m = n) \\ \frac{1}{a^{n-m}} & (m < n) \end{cases}$$

085

$(x+a)^5$ 의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r x^{5-r} a^r = {}_5C_r a^r x^{5-r} \quad (\text{단, } r=0, 1, 2, \dots, 5)$$

x^3 항은 $5-r=3$ 일 때이므로

$$r=2$$

따라서 x^3 의 계수는

$${}_5C_2 a^2 = 10a^2$$

x^4 항은 $5-r=4$ 일 때이므로

$$r=1$$

따라서 x^4 의 계수는

$${}_5C_1 a = 5a$$

이때 x^3 의 계수와 x^4 의 계수가 같으므로

$$10a^2 = 5a, \quad 2a^2 - a = 0$$

$$a(2a-1)=0 \quad \therefore a=\frac{1}{2} \quad (\because a>0)$$

정답_ ①

086

$(ax^2 + \frac{2}{x})^5$ 의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r (ax^2)^{5-r} \left(\frac{2}{x}\right)^r = {}_5C_r a^{5-r} 2^r \frac{x^{10-2r}}{x^r} \quad (\text{단, } r=0, 1, 2, \dots, 5)$$

x 항은 $(10-2r)-r=1$ 일 때이므로

$$r=3$$

따라서 x 의 계수는

$${}_5C_3 a^2 2^3 = 80a^2$$

이때 x 의 계수가 320이므로

$$80a^2 = 320, \quad a^2 = 4$$

$$\therefore a=2 \quad (\because a>0)$$

정답_ ②

087

$(x+2)^n$ 의 전개식의 일반항은

$${}_nC_r x^{n-r} 2^r = {}_nC_r 2^r x^{n-r} \quad (\text{단, } r=0, 1, 2, \dots, n)$$

상수항은 $r=n$ 일 때이므로 상수항은

$${}_nC_n 2^n = 2^n$$

이때 상수항이 64이므로

$$2^n = 64, \quad 2^n = 2^6$$

$$\therefore n=6$$

정답_ ⑤

088

$(ax - \frac{2}{ax})^7$ 의 전개식에서 각 항의 계수의 총합은 $x=1$ 을 대입

한 값과 같으므로

$$\left(a - \frac{2}{a}\right)^7 = 1, \quad a - \frac{2}{a} = 1$$

$$a^2 - a - 2 = 0, \quad (a+1)(a-2) = 0$$

$$\therefore a=2 \quad (\because a>0)$$

$(2x - \frac{1}{x})^7$ 의 전개식의 일반항은

$${}_7C_r (2x)^{7-r} \left(-\frac{1}{x}\right)^r = {}_7C_r (-1)^r 2^{7-r} \frac{x^{7-r}}{x^r}$$

(단, $r=0, 1, 2, \dots, 7$)

$\frac{1}{x}$ 항은 $r-(7-r)=1$ 일 때이므로

$$r=4$$

따라서 구하는 $\frac{1}{x}$ 의 계수는

$${}_7C_4 \times (-1)^4 \times 2^3 = 280$$

정답_ ④

참고 $(a+x)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ 이라고 하면

$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$ 의 값은 $(a+x)^n$ 에 $x=1$ 을 대입하여 구할 수 있다.

089

$(x+3)^5$ 의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r x^{5-r} 3^r = {}_5C_r 3^r x^{5-r} \quad (\text{단, } r=0, 1, 2, \dots, 5) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$(x+1)(x+3)^5 = x(x+3)^5 + (x+3)^5$ 의 전개식에서 x^4 항은 x 와 $\textcircled{1}$ 의 x^3 항, 1과 $\textcircled{1}$ 의 x^4 항이 곱해질 때 나타난다.

(i) $\textcircled{1}$ 에서 x^3 항은 $5-r=3$ 일 때이므로

$$r=2$$

따라서 $(x+3)^5$ 의 전개식에서 x^3 의 계수는

$${}_5C_2 \times 3^2 = 90$$

이때의 x^4 의 계수는 90이다.

(ii) $\textcircled{1}$ 에서 x^4 항은 $5-r=4$ 일 때이므로

$$r=1$$

따라서 $(x+3)^5$ 의 전개식에서 x^4 의 계수는

$${}_5C_1 \times 3 = 15$$

이때의 x^4 의 계수는 15이다.

(i), (ii)에서 구하는 x^4 의 계수는

$$90 + 15 = 105$$

정답_ ⑤

참고 $(a+b)(c+d)^n$ 의 전개식의 일반항

$\Rightarrow a(c+d)^n + b(c+d)^n$ 으로 바꾸어 생각한다.

090

$\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$ 의 전개식의 일반항은

$${}_6C_r x^{6-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r = {}_6C_r \frac{x^{6-r}}{x^r} \quad (\text{단, } r=0, 1, 2, \dots, 6) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\left(\frac{2}{x^2} + 4\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)^6 = \frac{2}{x^2}\left(x + \frac{1}{x}\right)^6 + 4\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$ 의 전개식에서 상수항은 $\frac{2}{x^2}$ 와 $\textcircled{1}$ 의 x^2 항, 4와 $\textcircled{1}$ 의 상수항이 곱해질 때 나타난다.

(i) $\textcircled{1}$ 에서 x^2 항은 $(6-r)-r=2$ 일 때이므로

$$r=2$$

따라서 $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$ 의 전개식에서 x^2 의 계수는

$${}_6C_2 = 15$$

이때의 상수항은

$$2 \times 15 = 30$$

(ii) $\textcircled{1}$ 에서 상수항은 $6-r-r=0$ 일 때이므로

$$r=3$$

따라서 $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$ 의 전개식에서 상수항은

$${}_6C_3 = 20$$

이때의 상수항은

$$4 \times 20 = 80$$

(i), (ii)에서 구하는 상수항은

$$30 + 80 = 110$$

정답_ ①

091

$(2x+a)^5$ 의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r (2x)^{5-r} a^r = {}_5C_r a^r 2^{5-r} x^{5-r} \quad (\text{단, } r=0, 1, 2, \dots, 5) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$(x-1)(2x+a)^5 = x(2x+a)^5 - (2x+a)^5$ 의 전개식에서 x^4 항은 x 와 $\textcircled{1}$ 의 x^3 항, -1 과 $\textcircled{1}$ 의 x^4 항이 곱해질 때 나타난다.

(i) $\textcircled{1}$ 에서 x^3 항은 $5-r=3$ 일 때이므로

$$r=2$$

따라서 $(2x+a)^5$ 의 전개식에서 x^3 의 계수는

$${}_5C_2 a^2 2^3 = 80a^2$$

이때의 x^4 의 계수는 $80a^2$

(ii) $\textcircled{1}$ 에서 x^4 항은 $5-r=4$ 일 때이므로

$$r=1$$

따라서 $(2x+a)^5$ 의 전개식에서 x^4 의 계수는

$${}_5C_1 a 2^4 = 80a$$

이때의 x^4 의 계수는

$$-1 \times 80a = -80a$$

(i), (ii)에서 x^4 의 계수는 $80a^2 - 80a$ 이다.

이때 x^4 의 계수가 160이므로

$$80a^2 - 80a = 160, \quad a^2 - a - 2 = 0$$

$$(a+1)(a-2) = 0$$

$$\therefore a = 2 \quad (\because a > 0)$$

정답_ ①

092

$\left(x + \frac{a}{x^2}\right)^4$ 의 전개식의 일반항은

$${}_4C_r x^{4-r} \left(\frac{a}{x^2}\right)^r = {}_4C_r a^r \frac{x^{4-r}}{x^{2r}} \quad (\text{단, } r=0, 1, 2, 3, 4) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{a}{x^2}\right)^4 = x^2\left(x + \frac{a}{x^2}\right)^4 - \frac{1}{x}\left(x + \frac{a}{x^2}\right)^4$ 의 전개식에서 x^3 항은 x^2 과 $\textcircled{1}$ 의 x 항, $-\frac{1}{x}$ 과 $\textcircled{1}$ 의 x^4 항이 곱해질 때 나타난다.

(i) $\textcircled{1}$ 에서 x 항은 $(4-r)-2r=1$ 일 때이므로

$$r=1$$

따라서 $\left(x + \frac{a}{x^2}\right)^4$ 의 전개식에서 x 의 계수는

$${}_4C_1 a = 4a$$

이때의 x^3 의 계수는 $4a$ 이다.

(ii) $\textcircled{1}$ 에서 x^4 항은 $(4-r)-2r=4$ 일 때이므로

$$r=0$$

따라서 $\left(x + \frac{a}{x^2}\right)^4$ 의 전개식에서 x^4 의 계수는

$${}_4C_0 a^0 = 1$$

이때의 x^3 의 계수는

$$-1 \times 1 = -1$$

(i), (ii)에서 x^3 의 계수는 $4a - 1$ 이다.

이때 x^3 의 계수가 7이므로

$$4a - 1 = 7 \quad \therefore a = 2$$

정답_ ②

093

$(1+x^2)^3$ 의 전개식의 일반항은

$${}_3C_r 1^{3-r} (x^2)^r = {}_3C_r x^{2r} \quad (\text{단, } r=0, 1, 2, 3)$$

$(1+2x)^4$ 의 전개식의 일반항은

$${}_4C_s 1^{4-s} (2x)^s = {}_4C_s 2^s x^s \quad (\text{단, } s=0, 1, 2, 3, 4)$$

따라서 $(1+x^2)^3(1+2x)^4$ 의 전개식의 일반항은

$${}_3C_r x^{2r} \times {}_4C_s 2^s x^s = {}_3C_r {}_4C_s 2^s x^{2r+s}$$

x^5 항은 $2r+s=5$ 일 때이므로 이를 만족시키는 r, s 의 순서쌍

(r, s) 는 $(1, 3), (2, 1)$ 이다.

(i) $r=1, s=3$ 일 때, x^5 의 계수는

$${}_3C_1 \times {}_4C_3 \times 2^3 = 96$$

(ii) $r=2, s=1$ 일 때, x^5 의 계수는

$${}_3C_2 \times {}_4C_1 \times 2 = 24$$

(i), (ii)에서 구하는 x^5 의 계수는

$$96 + 24 = 120$$

정답_ ①

참고 다항식 $(ax+b)^m(cx+d)^n$ 의 전개식의 일반항은 $(ax+b)^m$ 의 전개식의 일반항 ${}_mC_r(ax)^{m-r}b^r$ 과 $(cx+d)^n$ 의 전개식의 일반항 ${}_nC_s(cx)^{n-s}d^s$ 의 곱이다. 즉, ${}_mC_r(ax)^{m-r}b^r \times {}_nC_s(cx)^{n-s}d^s$ 이다.

(단, $r=0, 1, 2, \dots, m, s=0, 1, 2, \dots, n$)

094

$(x^2-1)^3$ 의 전개식의 일반항은

$${}_3C_r(x^2)^{3-r}(-1)^r = {}_3C_r(-1)^r x^{6-2r} \quad (\text{단, } r=0, 1, 2, 3)$$

$(2x+y)^5$ 의 전개식의 일반항은

$${}_5C_s(2x)^{5-s}y^s = {}_5C_s 2^{5-s} x^{5-s} y^s \quad (\text{단, } s=0, 1, 2, \dots, 5)$$

따라서 $(x^2-1)^3(2x+y)^5$ 의 전개식의 일반항은

$${}_3C_r(-1)^r x^{6-2r} \times {}_5C_s 2^{5-s} x^{5-s} y^s = {}_3C_r {}_5C_s (-1)^r 2^{5-s} x^{11-2r-s} y^s$$

x^2y^3 항은 $11-2r-s=2, s=3$ 일 때이므로 이를 만족시키는 r, s 의 순서쌍 (r, s) 는 $(3, 3)$ 이다.

따라서 구하는 x^2y^3 의 계수는

$${}_3C_3 \times {}_5C_3 \times (-1)^3 \times 2^2 = -40$$

정답_ ②

095

$(a+x)^2$ 의 전개식의 일반항은

$${}_2C_r a^{2-r} x^r \quad (\text{단, } r=0, 1, 2)$$

$(1+x)^4$ 의 전개식의 일반항은

$${}_4C_s 1^{4-s} x^s = {}_4C_s x^s \quad (\text{단, } r=0, 1, 2, 3, 4)$$

따라서 $(a+x)^2(1+x)^4$ 의 전개식의 일반항은

$${}_2C_r a^{2-r} x^r \times {}_4C_s x^s = {}_2C_r {}_4C_s a^{2-r} x^{r+s}$$

x^5 항은 $r+s=5$ 일 때이므로 이를 만족시키는 r, s 의 순서쌍

(r, s) 는 $(1, 4), (2, 3)$ 이다.

(i) $r=1, s=4$ 일 때, x^5 의 계수는

$${}_2C_1 \times {}_4C_4 \times a = 2a$$

(ii) $r=2, s=3$ 일 때, x^5 의 계수는

$${}_2C_2 \times {}_4C_3 = 4$$

(i), (ii)에서 x^5 의 계수는 $2a+4$ 이다.

이때 x^5 의 계수가 12이므로

$$2a+4=12 \quad \therefore a=4$$

정답_ ③

096

$(a+x)^3$ 의 전개식의 일반항은

$${}_3C_r a^{3-r} x^r \quad (\text{단, } r=0, 1, 2, 3)$$

$\left(x-\frac{1}{x}\right)^4$ 의 전개식의 일반항은

$${}_4C_s x^{4-s} \left(-\frac{1}{x}\right)^s = {}_4C_s (-1)^s \frac{x^{4-s}}{x^s} \quad (\text{단, } s=0, 1, 2, 3, 4)$$

따라서 $(a+x)^3\left(x-\frac{1}{x}\right)^4$ 의 전개식의 일반항은

$${}_3C_r a^{3-r} x^r \times {}_4C_s (-1)^s \frac{x^{4-s}}{x^s} = {}_3C_r {}_4C_s (-1)^s a^{3-r} \frac{x^{r+4-s}}{x^s}$$

x^2 항은 $(r+4-s)-s=2$, 즉 $r-2s=-2$ 일 때이므로 이를 만족시키는 r, s 의 순서쌍 (r, s) 는 $(0, 1), (2, 2)$ 이다.

(i) $r=0, s=1$ 일 때, x^2 의 계수는

$${}_3C_0 \times {}_4C_1 \times (-1) \times a^3 = -4a^3$$

(ii) $r=2, s=2$ 일 때, x^2 의 계수는

$${}_3C_2 \times {}_4C_2 \times (-1)^2 \times a = 18a$$

(i), (ii)에서 x^2 의 계수는 $-4a^3+18a$ 이다.

이때 x^2 의 계수가 4이므로

$$-4a^3+18a=4, 2a^3-9a+2=0$$

$$(a-2)(2a^2+4a-1)=0$$

$$\therefore a=2$$

정답_ 2

097

$(x^2+1)^4$ 의 전개식의 일반항은

$${}_4C_r 1^{4-r} (x^2)^r = {}_4C_r x^{2r} \quad (\text{단, } r=0, 1, 2, 3, 4)$$

$(x^3+1)^n$ 의 전개식의 일반항은

$${}_nC_s 1^{n-s} (x^3)^s = {}_nC_s x^{3s} \quad (\text{단, } s=0, 1, 2, \dots, n)$$

따라서 $(x^2+1)^4(x^3+1)^n$ 의 전개식의 일반항은

$${}_4C_r x^{2r} \times {}_nC_s x^{3s} = {}_4C_r {}_nC_s x^{2r+3s}$$

x^5 항은 $2r+3s=5$ 일 때이므로 이를 만족시키는 r, s 의 순서쌍

(r, s) 는 $(1, 1)$ 이다.

즉, x^5 의 계수는

$${}_4C_1 \times {}_nC_1 = 4n$$

이때 x^5 의 계수가 12이므로

$$4n=12$$

$$\therefore n=3$$

다항식 $(x^2+1)^4(x^3+1)^n$, 즉 $(x^2+1)^4(x^3+1)^3$ 의 전개식의 일반항은

$${}_4C_r x^{2r} \times {}_3C_s x^{3s} = {}_4C_r {}_3C_s x^{2r+3s}$$

따라서 x^6 항은 $2r+3s=6$ 일 때이므로 이를 만족시키는 r, s 의 순서쌍 (r, s) 는 $(0, 2), (3, 0)$ 이다.

(i) $r=0, s=2$ 일 때, x^6 의 계수는

$${}_4C_0 \times {}_3C_2 = 3$$

(ii) $r=3, s=0$ 일 때, x^6 의 계수는

$${}_4C_3 \times {}_3C_0 = 4$$

(i), (ii)에서 구하는 x^6 의 계수는

$$3+4=7$$

정답_ ②

098

파스칼의 삼각형에서

$${}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r = {}_nC_r \quad (r=1, 2, 3, \dots, n-1)$$

이므로

$$\begin{aligned}
& {}_3C_0 + {}_3C_1 + {}_4C_2 + {}_5C_3 + \cdots + {}_{10}C_8 \\
&= {}_4C_1 + {}_4C_2 + {}_5C_3 + \cdots + {}_{10}C_8 \\
&\vdots \\
&= {}_{10}C_7 + {}_{10}C_8 \\
&= {}_{11}C_8
\end{aligned}$$

정답_ ⑤

099

$$\begin{aligned}
& {}_1C_0 = {}_2C_0 \text{이고, } {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r = {}_nC_r \ (r=1, 2, 3, \cdots, n-1) \text{이므로} \\
& {}_1C_0 + {}_2C_1 + {}_3C_2 + \cdots + {}_8C_7 \\
&= {}_2C_0 + {}_2C_1 + {}_3C_2 + \cdots + {}_8C_7 \\
&= {}_3C_1 + {}_3C_2 + {}_4C_3 + \cdots + {}_8C_7 \\
&\vdots \\
&= {}_8C_6 + {}_8C_7 \\
&= {}_9C_7 = {}_9C_2 \\
&= 36
\end{aligned}$$

정답_ ④

100

$$\begin{aligned}
& {}_3C_3 = {}_4C_4 \text{이고, } {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r = {}_nC_r \ (r=1, 2, 3, \cdots, n-1) \text{이므로} \\
& {}_3C_3 + {}_4C_3 + {}_5C_3 + \cdots + {}_{20}C_3 \\
&= {}_4C_4 + {}_4C_3 + {}_5C_3 + \cdots + {}_{20}C_3 \\
&= {}_5C_4 + {}_5C_3 + {}_6C_3 + \cdots + {}_{20}C_3 \\
&\vdots \\
&= {}_{20}C_4 + {}_{20}C_3 \\
&= {}_{21}C_4 \\
&\therefore n=21
\end{aligned}$$

정답_ ②

101

$$\begin{aligned}
& (x+1)^n \text{의 전개식의 일반항은} \\
& {}_nC_r x^r \text{ (단, } r=0, 1, 2, \cdots, n) \\
& \text{이때 } 3 \leq n \leq 10 \text{인 경우에만 } x^3 \text{항이 나오므로 주어진 식의 전개식} \\
& \text{에서 } x^3 \text{의 계수는 } (x+1)^3, (x+1)^4, \cdots, (x+1)^{10} \text{의 각각의 전개} \\
& \text{식에서 } x^3 \text{의 계수를 구하여 더하면 된다.} \\
& (x+1)^3 \text{의 전개식에서 } x^3 \text{의 계수는 } {}_3C_3 \\
& (x+1)^4 \text{의 전개식에서 } x^3 \text{의 계수는 } {}_4C_3 \\
&\vdots \\
& (x+1)^{10} \text{의 전개식에서 } x^3 \text{의 계수는 } {}_{10}C_3 \\
& \text{따라서 구하는 } x^3 \text{의 계수는} \\
& {}_3C_3 + {}_4C_3 + {}_5C_3 + \cdots + {}_{10}C_3 \\
&= {}_4C_4 + {}_4C_3 + {}_5C_3 + \cdots + {}_{10}C_3 \ (\because {}_3C_3 = {}_4C_4) \\
&= {}_5C_4 + {}_5C_3 + \cdots + {}_{10}C_3 \\
&\vdots \\
&= {}_{10}C_4 + {}_{10}C_3 \\
&= {}_{11}C_4 \\
&= 330
\end{aligned}$$

정답_ ④

102

$$\begin{aligned}
& (1) \text{ 이항계수의 성질에 의하여} \\
& {}_{11}C_0 + {}_{11}C_2 + {}_{11}C_4 + \cdots + {}_{11}C_{10} = 2^{11-1} = 2^{10} \\
&= 1024 \\
& (2) \text{ 이항계수의 성질에 의하여} \\
& {}_{10}C_1 + {}_{10}C_3 + {}_{10}C_5 + {}_{10}C_7 + {}_{10}C_9 = 2^{10-1} = 2^9 \\
&= 512
\end{aligned}$$

정답_ (1) 1024 (2) 512

103

$$\begin{aligned}
& \text{이항계수의 성질에 의하여} \\
& {}_{15}C_0 - {}_{15}C_1 + {}_{15}C_2 - {}_{15}C_3 + \cdots - {}_{15}C_{15} = 0 \\
& \text{이때 } {}_{15}C_0 = 1, {}_{15}C_{15} = 1 \text{이므로} \\
& {}_{15}C_1 - {}_{15}C_2 + {}_{15}C_3 - {}_{15}C_4 + \cdots - {}_{15}C_{14} = 0
\end{aligned}$$

정답_ ①

104

$$\begin{aligned}
& {}_nC_r = {}_nC_{n-r} \ (r=0, 1, 2, \cdots, n) \text{이므로} \\
& {}_{15}C_8 + {}_{15}C_9 + {}_{15}C_{10} + \cdots + {}_{15}C_{15} \\
&= {}_{15}C_7 + {}_{15}C_6 + {}_{15}C_5 + \cdots + {}_{15}C_0 \\
& \text{이때 이항계수의 성질에 의하여} \\
& {}_{15}C_0 + {}_{15}C_1 + {}_{15}C_2 + \cdots + {}_{15}C_{15} = 2^{15} \\
& \text{이므로} \\
& {}_{15}C_8 + {}_{15}C_9 + {}_{15}C_{10} + \cdots + {}_{15}C_{15} \\
&= 2^{15-1} = 2^{14}
\end{aligned}$$

정답_ ③

105

$$\begin{aligned}
& \text{이항계수의 성질에 의하여} \\
& {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n = 2^n \\
& \text{이므로} \\
& 2^n = 128 = 2^7 \\
& \therefore n=7
\end{aligned}$$

정답_ ②

106

$$\begin{aligned}
& \text{이항계수의 성질에 의하여} \\
& {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n = 2^n \\
& \text{이때 } {}_nC_0 = 1 \text{이므로} \\
& {}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 + \cdots + {}_nC_n = 2^n - 1 \\
& \text{이것을 주어진 식에 대입하면} \\
& 500 < 2^n - 1 < 1000 \\
& \therefore 501 < 2^n < 1001 \\
& \text{이때} \\
& 2^8 = 256, 2^9 = 512, 2^{10} = 1024 \\
& \text{이므로 } n=9
\end{aligned}$$

정답_ ③

107

20개의 점 중에서 n 개의 점을 택하는 경우의 수는

$$\begin{aligned} f(n) &= {}_{20}C_n \\ \therefore f(3) + f(5) + f(7) + \cdots + f(19) \\ &= {}_{20}C_3 + {}_{20}C_5 + {}_{20}C_7 + \cdots + {}_{20}C_{19} \end{aligned}$$

이항계수의 성질에 의하여

$$\begin{aligned} & {}_{20}C_1 + {}_{20}C_3 + {}_{20}C_5 + \cdots + {}_{20}C_{19} \\ &= 2^{20-1} = 2^{19} \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} & {}_{20}C_3 + {}_{20}C_5 + {}_{20}C_7 + \cdots + {}_{20}C_{19} \\ &= 2^{19} - {}_{20}C_1 \\ &= 2^{19} - 20 \end{aligned}$$

정답_ ⑤

108

$(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1x + {}_nC_2x^2 + {}_nC_3x^3 + \cdots + {}_nC_nx^n$ 의 양변에 $x=-1$, $n=10$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} 0 &= {}_{10}C_0 - {}_{10}C_1 + {}_{10}C_2 - {}_{10}C_3 + \cdots + {}_{10}C_{10} \\ \therefore {}_{10}C_1 - {}_{10}C_2 + {}_{10}C_3 - {}_{10}C_4 + \cdots + {}_{10}C_9 \\ &= {}_{10}C_0 + {}_{10}C_{10} \\ &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

정답_ ②

109

$(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1x + {}_nC_2x^2 + \cdots + {}_nC_nx^n$ 의 양변에 $x=2$, $n=10$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} 3^{10} &= {}_{10}C_0 + {}_{10}C_1 \times 2 + {}_{10}C_2 \times 2^2 + \cdots + {}_{10}C_{10} \times 2^{10} \\ \therefore {}_{10}C_0 + 2 \times {}_{10}C_1 + 2^2 \times {}_{10}C_2 + \cdots + 2^{10} \times {}_{10}C_{10} &= 3^{10} \end{aligned}$$

정답_ ②

110

$11^{13} = (1+10)^{13}$ 이므로

$(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1x + {}_nC_2x^2 + \cdots + {}_nC_nx^n$ 의 양변에 $x=10$, $n=13$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} (1+10)^{13} &= {}_{13}C_0 + {}_{13}C_1 \times 10 + {}_{13}C_2 \times 10^2 + \cdots + {}_{13}C_{13} \times 10^{13} \\ \text{이때 } 11^{13} \text{을 } 100 \text{으로 나누었을 때의 나머지는 } {}_{13}C_0 + {}_{13}C_1 \times 10 \text{을} \\ &100 \text{으로 나누었을 때의 나머지와 같다.} \\ {}_{13}C_0 + {}_{13}C_1 \times 10 &= 1 + 130 = 131 = 100 + 31 \\ \text{이므로 } 11^{13} \text{을 } 100 \text{으로 나누었을 때의 나머지는 } 31 \text{이다.} \end{aligned}$$

정답_ ⑤

111

$101^{27} = (1+100)^{27}$ 이므로

$(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1x + {}_nC_2x^2 + \cdots + {}_nC_nx^n$ 의 양변에 $x=100$, $n=27$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} (1+100)^{27} &= {}_{27}C_0 + {}_{27}C_1 \times 100 + {}_{27}C_2 \times 100^2 + {}_{27}C_3 \times 100^3 \\ &\quad + \cdots + {}_{27}C_{27} \times 100^{27} \\ &= {}_{27}C_0 + {}_{27}C_1 \times 100 \\ &\quad + 100^2({}_{27}C_2 + {}_{27}C_3 \times 100 + \cdots + {}_{27}C_{27} \times 100^{25}) \end{aligned}$$

따라서 구하는 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리의 숫자는 각각 ${}_{27}C_0 + {}_{27}C_1 \times 100$ 의 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리의 숫자와 같다.

이때 ${}_{27}C_0 + {}_{27}C_1 \times 100 = 1 + 2700 = 2701$ 이므로

$$a=7, b=0, c=1$$

$$\therefore a+b-c=7+0-1=6$$

정답_ ②

112

$(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1x + {}_nC_2x^2 + \cdots + {}_nC_nx^n$ 의 양변에 $x=9$, $n=10$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} (1+9)^{10} &= {}_{10}C_0 + {}_{10}C_1 \times 9 + {}_{10}C_2 \times 9^2 + \cdots + {}_{10}C_{10} \times 9^{10} \\ &= {}_{10}C_{10} + {}_{10}C_9 \times 9 + {}_{10}C_8 \times 9^2 + \cdots + {}_{10}C_0 \times 9^{10} (\because {}_nC_r = {}_nC_{n-r}) \\ &= {}_{10}C_0 \times 9^{10} + {}_{10}C_1 \times 9^9 + {}_{10}C_2 \times 9^8 + \cdots + {}_{10}C_{10} \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} & {}_{10}C_9 \times 9 + {}_{10}C_8 \times 9^2 + {}_{10}C_7 \times 9^3 + \cdots + {}_{10}C_0 \times 9^{10} \\ &= 10^{10} - {}_{10}C_{10} \\ &= (11-1)^{10} - 1 \\ &= ({}_{10}C_0 \times 11^{10} - {}_{10}C_1 \times 11^9 + {}_{10}C_2 \times 11^8 - {}_{10}C_3 \times 11^7 \\ &\quad + \cdots - {}_{10}C_9 \times 11 + {}_{10}C_{10}) - 1 \\ &= ({}_{10}C_0 \times 11^{10} - {}_{10}C_1 \times 11^9 + {}_{10}C_2 \times 11^8 - {}_{10}C_3 \times 11^7 \\ &\quad + \cdots - {}_{10}C_9 \times 11) + {}_{10}C_{10} - 1 \\ &= 11 \times ({}_{10}C_0 \times 11^9 - {}_{10}C_1 \times 11^8 + {}_{10}C_2 \times 11^7 - {}_{10}C_3 \times 11^6 \\ &\quad + \cdots - {}_{10}C_9) \end{aligned}$$

따라서 주어진 식을 11로 나누었을 때의 나머지는 0이다.

정답_ ①

113

$(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1x + {}_nC_2x^2 + \cdots + {}_nC_nx^n$ 의 양변에 $x=9$, $n=7$ 을 대입하면

$$(1+9)^7 = {}_7C_0 + {}_7C_1 \times 9 + {}_7C_2 \times 9^2 + \cdots + {}_7C_7 \times 9^7$$

이때 ${}_7C_1, {}_7C_2, \cdots, {}_7C_6$ 은 7의 배수이므로

$$\begin{aligned} (1+9)^7 &= {}_7C_0 + 7k + {}_7C_7 \times 9^7 \\ &= 1 + 7k + 9^7 \\ &= 9^7 + (7k+1) \quad (\text{단, } k \text{는 자연수}) \end{aligned}$$

즉, $(1+9)^7$ 일째 되는 날은 9^7 일째 되는 날보다 $(7k+1)$ 일이 더 지나야 한다.

따라서 구하는 요일은 수요일에서 $(7k+1)$ 일이 지난 후의 요일인 목요일이다.

정답_ ③

114

$(x-a)^5$ 의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r x^{5-r} (-a)^r = {}_5C_r (-a)^r x^{5-r} \quad (\text{단, } r=0, 1, 2, \cdots, 5)$$

x^2 항은 $5-r=2$ 일 때이므로

$$r=3$$

즉, x^2 의 계수는

$${}_5C_3 (-a)^3 = -10a^3 \quad \text{..... ①}$$

x^4 항은 $5-r=4$ 일 때이므로

$$r=1$$

즉, x^4 의 계수는
 ${}_5C_1(-a) = -5a$ ②
 이때 x^2 의 계수와 x^4 의 계수의 합이 15이므로
 $-10a^3 - 5a = 15, 2a^3 + a + 3 = 0$
 $(a+1)(2a^2 - 2a + 3) = 0$
 $\therefore a = -1$ ③
 정답_ -1

채점 기준	비율
① x^2 의 계수 구하기	40 %
② x^4 의 계수 구하기	40 %
③ a 의 값 구하기	20 %

115

$(1+2x)^6$ 의 전개식의 일반항은
 ${}_6C_r 1^{6-r} (2x)^r = {}_6C_r 2^r x^r$ (단, $r=0, 1, 2, \dots, 6$) ①
 $(a-x)(1+2x)^6 = a(1+2x)^6 - x(1+2x)^6$ 의 전개식에서 x^4 항은
 a 와 ①의 x^4 항, $-x$ 와 ①의 x^3 항이 곱해질 때 나타난다. ①
 (i) ①에서 x^4 항은 $r=4$ 일 때이므로 $(1+2x)^6$ 의 전개식에서 x^4 의 계수는
 ${}_6C_4 \times 2^4 = 240$
 이때의 x^4 의 계수는
 $a \times 240 = 240a$
 (ii) ①에서 x^3 항은 $r=3$ 일 때이므로 $(1+2x)^6$ 의 전개식에서 x^3 의 계수는
 ${}_6C_3 \times 2^3 = 160$
 이때의 x^4 의 계수는
 $-1 \times 160 = -160$
 (i), (ii)에서 x^4 의 계수는
 $240a - 160$ ②
 이때 x^4 의 계수가 80이므로
 $240a - 160 = 80$
 $\therefore a = 1$ ③
 정답_ 1

채점 기준	비율
① x^4 항이 나타나는 조건 알기	30 %
② x^4 의 계수를 a 에 대한 식으로 나타내기	50 %
③ a 의 값 구하기	20 %

116

$(x+2)^5$ 의 전개식의 일반항은
 ${}_5C_r x^{5-r} 2^r = {}_5C_r 2^r x^{5-r}$ (단, $r=0, 1, 2, \dots, 5$) ①
 $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^2 = x^2 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^4}$ 이므로
 $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^2 (x+2)^5 = x^2(x+2)^5 + \frac{2}{x}(x+2)^5 + \frac{1}{x^4}(x+2)^5$ 의 전개
 식에서 x^3 항은 x^2 과 ①의 x 항, $\frac{2}{x}$ 와 ①의 x^4 항이 곱해질 때 나타난
 다. ①
 (i) ①에서 x 항은 $5-r=1$ 일 때이므로
 $r=4$

따라서 $(x+2)^5$ 의 전개식에서 x 의 계수는
 ${}_5C_4 \times 2^1 = 80$
 이때의 x^3 의 계수는 80이다.
 (ii) ①에서 x^4 항은 $5-r=4$ 일 때이므로
 $r=1$
 따라서 $(x+2)^5$ 의 전개식에서 x^4 의 계수는
 ${}_5C_1 \times 2 = 10$
 이때의 x^4 의 계수는
 $2 \times 10 = 20$
 (i), (ii)에서 구하는 x^3 의 계수는
 $80 + 20 = 100$ ②
 정답_ 100

채점 기준	비율
① x^3 항이 나타나는 조건 알기	40 %
② x^3 의 계수 구하기	60 %

117

$(1+x)^n$ 의 전개식의 일반항은
 ${}_nC_r x^r$ (단, $r=0, 1, 2, \dots, n$) ①
 $x^2(1+x) + x^2(1+x)^2 + x^2(1+x)^3 + \dots + x^2(1+x)^8$ 의 전개식
 에서 x^4 항은 x^2 과 ①의 x^2 항이 곱해질 때 나타난다. ①
 ①에서 $2 \leq n \leq 8$ 인 경우에만 x^2 항이 나오므로 주어진 식의 전개식
 에서 x^4 의 계수는 $(1+x)^2, (1+x)^3, \dots, (1+x)^8$ 의 각각의 전개
 식에서 x^2 의 계수를 구하여 더하면 된다.
 $(1+x)^2$ 의 전개식에서 x^2 의 계수는 ${}_2C_2$
 $(1+x)^3$ 의 전개식에서 x^2 의 계수는 ${}_3C_2$
 $(1+x)^4$ 의 전개식에서 x^2 의 계수는 ${}_4C_2$
 $\vdots$
 $(1+x)^8$ 의 전개식에서 x^2 의 계수는 ${}_8C_2$ ②
 따라서 구하는 x^4 의 계수는
 ${}_2C_2 + {}_3C_2 + {}_4C_2 + \dots + {}_8C_2$
 $= {}_3C_3 + {}_3C_2 + {}_4C_2 + \dots + {}_8C_2$ ($\because {}_2C_2 = {}_3C_3$)
 $= {}_4C_3 + {}_4C_2 + \dots + {}_8C_2$
 $\vdots$
 $= {}_8C_3 + {}_8C_2$
 $= {}_9C_3$
 $= 84$ ③
 정답_ 84

채점 기준	비율
① x^4 항이 나타나는 조건 알기	30 %
② $2 \leq n \leq 8$ 일 때, $(1+x)^n$ 의 전개식에서 x^2 의 계수 구하기	30 %
③ x^4 의 계수 구하기	40 %

118

이항계수의 성질에 의하여
 ${}_{13}C_0 + {}_{13}C_1 + {}_{13}C_2 + \dots + {}_{13}C_{13} = 2^{13}$
 이때 ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$ ($r=0, 1, 2, \dots, n$)이므로
 ${}_{13}C_0 + {}_{13}C_1 + {}_{13}C_2 + \dots + {}_{13}C_6$
 $= {}_{13}C_{13} + {}_{13}C_{12} + {}_{13}C_{11} + \dots + {}_{13}C_7$

$$\therefore {}_{13}C_0 + {}_{13}C_1 + {}_{13}C_2 + \cdots + {}_{13}C_6 \\ = 2^{13-1} = 2^{12} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

또, 이항계수의 성질에 의하여

$${}_{10}C_0 + {}_{10}C_1 + {}_{10}C_2 + \cdots + {}_{10}C_{10} = 2^{10} \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

이므로

$$\frac{{}_{13}C_0 + {}_{13}C_1 + {}_{13}C_2 + \cdots + {}_{13}C_6}{{}_{10}C_0 + {}_{10}C_1 + {}_{10}C_2 + \cdots + {}_{10}C_{10}} \\ = \frac{2^{12}}{2^{10}} = 4 \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

정답_ 4

채점 기준	비율
① ${}_{13}C_0 + {}_{13}C_1 + {}_{13}C_2 + \cdots + {}_{13}C_6$ 의 값 구하기	50%
② ${}_{10}C_0 + {}_{10}C_1 + {}_{10}C_2 + \cdots + {}_{10}C_{10}$ 의 값 구하기	30%
③ 주어진 식의 값 구하기	20%

119

$(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1x + {}_nC_2x^2 + \cdots + {}_nC_nx^n$ 의 양변에 $x=4$ 를 대입하면

$$(1+4)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 \times 4 + {}_nC_2 \times 4^2 + \cdots + {}_nC_n \times 4^n \\ \therefore {}_nC_0 + 4 \times {}_nC_1 + 4^2 \times {}_nC_2 + \cdots + 4^n \times {}_nC_n = 5^n \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

즉, $5^n = 5^{50}$ 이므로

$$n = 50 \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

정답_ 50

채점 기준	비율
① 주어진 식을 거듭제곱의 꼴로 나타내기	70%
② n 의 값 구하기	30%

120

$\frac{(x+1)^{15} + 2x + 3}{x^2}$ 에서 분모가 x^2 이므로 x^{10} 의 계수는 $(x+1)^{15}$ 의

전개식에서 x^{12} 의 계수와 같다.

$(x+1)^{15}$ 의 전개식의 일반항은

$${}_{15}C_r x^{15-r} \text{ (단, } r=0, 1, 2, \cdots, 15)$$

x^{12} 항은 $15-r=12$ 일 때이므로

$$r=3$$

따라서 $(x+1)^{15}$ 의 전개식에서 x^{12} 의 계수는

$${}_{15}C_3 = 455$$

따라서 구하는 x^{10} 의 계수는 455이다.

정답_ ①

121

$(x+a)^n$ 의 전개식의 일반항은

$${}_nC_r x^{n-r} a^r = {}_nC_r a^r x^{n-r} \text{ (단, } r=0, 1, 2, \cdots, n) \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

x^{n-1} 항은 $r=1$ 일 때이므로 $2(x+a)^n$ 의 전개식에서 x^{n-1} 의 계수는

$$2{}_nC_1 a = 2na \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

$(x-1)(x+a)^n = x(x+a)^n - (x+a)^n$ 의 전개식에서 x^{n-1} 항은 x 와 $\textcircled{1}$ 의 x^{n-2} 항, -1 과 $\textcircled{2}$ 의 x^{n-1} 항이 곱해질 때 나타난다.

(i) $\textcircled{1}$ 에서 x^{n-2} 항은 $r=2$ 일 때이므로 $(x+a)^n$ 의 전개식에서 x^{n-2} 의 계수는

$${}_nC_2 a^2 = \frac{n(n-1)}{2} a^2$$

이때의 x^{n-1} 의 계수는

$$\frac{n(n-1)}{2} a^2$$

(ii) $\textcircled{1}$ 에서 x^{n-1} 항은 $r=1$ 일 때이므로 $(x+a)^n$ 의 전개식에서 x^{n-1} 의 계수는

$${}_nC_1 a = na$$

이때의 x^{n-1} 의 계수는

$$-1 \times na = -na$$

(i), (ii)에서 $(x-1)(x+a)^n$ 의 전개식에서 x^{n-1} 의 계수는

$$\frac{n(n-1)}{2} a^2 - na \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{1}$ 과 $\textcircled{3}$ 이 같아야 하므로

$$2na = \frac{n(n-1)}{2} a^2 - na$$

$$n(n-1)a^2 = 6na$$

$$\therefore (n-1)a = 6$$

이를 만족시키는 순서쌍 $(a, n-1)$ 은 $(1, 6), (2, 3), (3, 2),$

$(6, 1)$ 이므로 모든 순서쌍 (a, n) 은

$(1, 7), (2, 4), (3, 3), (6, 2)$

따라서 $a+n$ 의 최솟값은 6이다.

정답_ 6

122

$$(x-\sqrt{3})^4 (x+\sqrt{3})^9 = (x-\sqrt{3})^4 (x+\sqrt{3})^4 (x+\sqrt{3})^5 \\ = (x^2-3)^4 (x+\sqrt{3})^5$$

$(x+\sqrt{3})^5$ 의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r x^{5-r} (\sqrt{3})^r = {}_5C_r (\sqrt{3})^r x^{5-r} \text{ (단, } r=0, 1, 2, \cdots, 5)$$

따라서 $(x+\sqrt{3})^5$ 의 전개식에서 계수가 유리수인 경우는 r 의 값이 0, 2, 4인 경우이다.

(i) $r=0$ 일 때

$${}_5C_0 \times (\sqrt{3})^0 = 1$$

(ii) $r=2$ 일 때

$${}_5C_2 \times (\sqrt{3})^2 = 30$$

(iii) $r=4$ 일 때

$${}_5C_4 \times (\sqrt{3})^4 = 45$$

(i)~(iii)에서 $(x+\sqrt{3})^5$ 의 전개식에서 계수가 유리수인 모든 항의 계수의 합은

$$1 + 30 + 45 = 76$$

또, $(x^2-3)^4$ 의 전개식에서 계수는 모두 유리수이므로 $(x^2-3)^4$ 의 전개식에서 모든 항의 계수의 합은 $x=1$ 을 대입하면 되므로

$$(1^2-3)^4 = 16$$

따라서 $(x-\sqrt{3})^4 (x+\sqrt{3})^9$ 의 전개식에서 계수가 유리수인 모든 항의 계수의 합은

$$76 \times 16 = 1216$$

정답_ 1216

123

빨간색, 파란색, 노란색 구슬을 적어도 하나씩 포함하여 10개 이

하의 구슬을 택하는 경우의 수는 먼저 빨간색, 파란색, 노란색 구슬을 각각 1개씩 택한 후, 빨간색, 파란색, 노란색 구슬 중에서 중복을 허용하여 7개 이하로 택하는 중복조합의 수와 같다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$\begin{aligned} & {}_3H_0 + {}_3H_1 + {}_3H_2 + \cdots + {}_3H_7 \\ &= {}_2C_0 + {}_3C_1 + {}_4C_2 + \cdots + {}_9C_7 \\ &= {}_3C_0 + {}_3C_1 + {}_4C_2 + \cdots + {}_9C_7 \quad (\because {}_2C_0 = {}_3C_0) \\ &= {}_4C_1 + {}_4C_2 + \cdots + {}_9C_7 \\ &\quad \vdots \\ &= {}_9C_6 + {}_9C_7 \\ &= {}_{10}C_7 = {}_{10}C_3 \\ &= 120 \end{aligned}$$

정답_ ③

다른 풀이

빨간색, 파란색, 노란색 구슬의 개수를 각각 x, y, z 라고 하자. 이때 각 색의 구슬을 적어도 하나씩 포함하여 10개 이하의 구슬을 택해야 하므로

$$3 \leq x + y + z \leq 10 \quad (\text{단, } x, y, z \text{는 자연수})$$

이때

$$x = x' + 1, y = y' + 1, z = z' + 1$$

로 놓으면

$$3 \leq (x' + 1) + (y' + 1) + (z' + 1) \leq 10$$

(단, x', y', z' 은 음이 아닌 정수)

$$\therefore 0 \leq x' + y' + z' \leq 7 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

따라서 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는 ①을 만족시키는 음이 아닌 정수 x', y', z' 의 순서쌍 (x', y', z') 의 개수와 같다.

$x' + y' + z' = 0$ 일 때, 순서쌍 (x', y', z') 의 개수는

$${}_3H_0 = {}_2C_0$$

$x' + y' + z' = 1$ 일 때, 순서쌍 (x', y', z') 의 개수는

$${}_3H_1 = {}_3C_1$$

$\vdots$

$x' + y' + z' = 7$ 일 때, 순서쌍 (x', y', z') 의 개수는

$${}_3H_7 = {}_9C_7$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$\begin{aligned} & {}_2C_0 + {}_3C_1 + {}_4C_2 + \cdots + {}_9C_7 \\ &= {}_3C_0 + {}_3C_1 + {}_4C_2 + \cdots + {}_9C_7 \quad (\because {}_2C_0 = {}_3C_0) \\ &= {}_4C_1 + {}_4C_2 + \cdots + {}_9C_7 \\ &\quad \vdots \\ &= {}_9C_6 + {}_9C_7 \\ &= {}_{10}C_7 = {}_{10}C_3 \\ &= 120 \end{aligned}$$

124

집합 A 의 부분집합 중 세 원소 1, 2, 3을 모두 포함하고 원소의 개수가 홀수인 부분집합의 개수는 집합 $\{4, 5, 6, \cdots, 15\}$ 의 부분집합 중 원소의 개수가 짝수인 부분집합의 개수와 같다.

따라서 구하는 부분집합의 개수는

$$\begin{aligned} & {}_{12}C_0 + {}_{12}C_2 + {}_{12}C_4 + \cdots + {}_{12}C_{12} \\ &= 2^{12-1} = 2^{11} \end{aligned}$$

정답_ ②

125

$$3^{2026} + 5^{2026} = (4-1)^{2026} + (4+1)^{2026} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} & (4-1)^{2026} \\ &= {}_{2026}C_0 \times 4^{2026} - {}_{2026}C_1 \times 4^{2025} + {}_{2026}C_2 \times 4^{2024} \\ &\quad - \cdots - {}_{2026}C_{2025} \times 4 + {}_{2026}C_{2026} \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (4+1)^{2026} \\ &= {}_{2026}C_0 \times 4^{2026} + {}_{2026}C_1 \times 4^{2025} + {}_{2026}C_2 \times 4^{2024} \\ &\quad + \cdots + {}_{2026}C_{2025} \times 4 + {}_{2026}C_{2026} \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

①+②을 하면

$$\begin{aligned} & (4-1)^{2026} + (4+1)^{2026} \\ &= 2 \times ({}_{2026}C_0 \times 4^{2026} + {}_{2026}C_2 \times 4^{2024} + \cdots + {}_{2026}C_{2024} \times 4^2 + {}_{2026}C_{2026}) \\ &= 16 \times \{2 \times ({}_{2026}C_0 \times 4^{2024} + {}_{2026}C_2 \times 4^{2022} + \cdots + {}_{2026}C_{2024})\} \\ &\quad + 2 \times {}_{2026}C_{2026} \end{aligned}$$

따라서 $3^{2026} + 5^{2026}$ 을 16으로 나누었을 때의 나머지는

$2 \times {}_{2026}C_{2026} = 2$ 를 16으로 나누었을 때의 나머지와 같으므로 구하는 나머지는 2이다.

정답_ ②

II 확률

03 확률의 뜻과 활용

126

한 개의 주사위를 던지는 시행이므로 표본공간을 S 라고 하면
 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- ① $A = \{3, 6\}$
- ② $B = \{1, 3, 5\}$
- ③ $A \cup B = \{1, 3, 5, 6\}$
- ④ $A \cap B = \{3\}$
- ⑤ $A^C = \{1, 2, 4, 5\}$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

정답_ ③

127

표본공간은 $S = \{1, 3, 5, 7\}$ 이고 세 사건 A, B, C 는
 $A = \{1, 3, 5, 7\}, B = \{3, 5, 7\}, C = \{1\}$ 이다.

- ㄱ. $A = S$ 이므로 $A^C = S^C = \emptyset$ (참)
 - ㄴ. $B \subset A$ 이므로 $A \cap B = B$ (참)
 - ㄷ. $B \cup C = \{1, 3, 5, 7\} = S$ (참)
- 따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답_ ⑤

128

$A = \{1, 2, 4\}, B = \{2, 3, 5, 7\}, C = \{1, 3, 5, 7, 9\},$
 $D = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ 이므로

- ① $A \cap B = \{2\}$
- ② $A \cap C = \{1\}$
- ③ $A \cap D = \emptyset$
- ④ $B \cap C = \{3, 5, 7\}$
- ⑤ $C \cap D = \{5, 7, 9\}$

따라서 서로 배반인 사건은 A 와 D 이다.

정답_ ③

129

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하고 한 개의 동전을 두 번 던지는
 시행에서 표본공간을 S 라고 하면

$S = \{HH, HT, TH, TT\}$

두 번 모두 뒷면이 나오는 사건 A 는

$A = \{TT\}$

이때 사건 A 와 배반인 사건의 개수는 S 의 부분집합 중 TT 를 포함하지 않는 것의 개수와 같다.

따라서 구하는 사건의 개수는

$$2^{4-1} = 8$$

정답_ 8

130

사건 A 와 배반인 사건은 사건 A^C 의 부분집합이고, 사건 B 와 배반인 사건은 사건 B^C 의 부분집합이므로 두 사건 A, B 와 모두 배반인 사건은 $A^C \cap B^C$ 의 부분집합이다.

이때 표본공간은 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 이고 $A = \{4\},$

$B = \{2, 3, 5\}$ 이므로

$A^C = \{1, 2, 3, 5, 6\}, B^C = \{1, 4, 6\}$

따라서 $A^C \cap B^C = \{1, 6\}$ 이므로 구하는 사건의 개수는

$$2^2 = 4$$

정답_ ②

참고 두 사건 A, B 와 모두 배반인 사건의 개수는 표본공간 S 의 부분집합 중에서 $A \cup B$ 의 원소를 하나도 포함하지 않는 것의 개수와 같다.

131

집합 A 의 부분집합의 개수는

$$2^8 = 256$$

원소 2, 3을 모두 원소로 갖는 집합 A 의 부분집합의 개수는

$$2^{8-2} = 2^6 = 64$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{64}{256} = \frac{1}{4}$$

정답_ ②

132

1부터 100까지의 자연수 중에서

2의 배수의 개수는 50

2의 배수이면서 3의 배수인 수, 즉 6의 배수의 개수는 16

즉, 2의 배수이지만 3의 배수가 아닌 수의 개수는

$$50 - 16 = 34$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{34}{100} = \frac{17}{50}$$

정답_ ①

133

주사위 하나를 두 번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$$6 \times 6 = 36$$

(i) 두 눈의 수의 차가 4인 경우

(1, 5), (2, 6), (5, 1), (6, 2)의 4가지

(ii) 두 눈의 수의 차가 5인 경우

(1, 6), (6, 1)의 2가지

(i), (ii)에서 두 눈의 수의 차가 4 이상인 경우의 수는

$$4 + 2 = 6$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

정답_ ②

134

가능한 모든 a, b 의 순서쌍 (a, b) 의 개수는

$$4 \times 3 = 12$$

$ab \geq 17$ 을 만족시키는 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는 $(3, 6), (3, 7), (4, 5), (4, 6), (4, 7)$ 의 5가지이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{5}{12}$

정답_ ①

참고 두 수 a, b 의 곱 ab 의 값은 다음 표와 같다.

$b \backslash a$	1	2	3	4
5	5	10	15	20
6	6	12	18	24
7	7	14	21	28

135

두 주머니 A, B에서 꺼낸 카드에 적혀 있는 수를 각각 a, b 라고 하면 모든 a, b 의 순서쌍 (a, b) 의 개수는

$$3 \times 5 = 15$$

꺼낸 두 장의 카드에 적혀 있는 수의 차가 1, 즉 $|a-b|=1$ 을 만족시키는 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는 $(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4)$ 의 5가지이다.

따라서 구하는 확률은

$$\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

정답_ ①

136

$270 = 2 \times 3^3 \times 5$ 이므로 270의 양의 약수의 개수는

$$(1+1) \times (3+1) \times (1+1) = 2 \times 4 \times 2 = 16$$

270의 양의 약수 중에서 126의 약수인 수는 두 수 270, 126의 양의 공약수와 같다.

이때 $126 = 2 \times 3^2 \times 7$ 이므로 270, 126의 최대공약수는 2×3^2 이다.

즉, 270, 126의 양의 공약수의 개수는

$$(1+1) \times (2+1) = 2 \times 3 = 6$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

정답_ $\frac{3}{8}$

참고 약수의 개수

자연수 N 이 $N = p^a q^b$ (p, q 는 서로 다른 소수, a, b 는 자연수)의 꼴로 소인수 분해될 때, N 의 약수의 개수는 $(a+1)(b+1)$ 이다.

137

남학생 5명, 여학생 4명을 한 줄로 세우는 모든 경우의 수는

$$9!$$

여학생 4명을 한 사람으로 생각하여 남학생 5명과 함께 총 6명을 한 줄로 세우는 경우의 수는

$$6!$$

그 각각에 대하여 여학생 4명이 서는 순서를 바꾸는 경우의 수는

$$4!$$

즉, 여학생 4명이 이웃하도록 세우는 경우의 수는

$$6! \times 4!$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{6! \times 4!}{9!} = \frac{1}{21}$$

정답_ ②

138

맨 앞자리에는 0이 올 수 없으므로 5개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4 중에서 서로 다른 3개의 숫자를 택하여 만들 수 있는 세 자리의 자연수의 개수는

$$4 \times {}_4P_2 = 4 \times 4 \times 3 = 48$$

일의 자리의 숫자가 0 또는 2 또는 4일 때 짝수가 된다.

(i) $\square\square 0$ 의 꼴의 자연수의 개수는

$${}_4P_2 = 12$$

(ii) $\square\square 2$ 의 꼴의 자연수

맨 앞자리에는 0이 올 수 없으므로 그 개수는

$$3 \times {}_3P_1 = 9$$

(iii) $\square\square 4$ 의 꼴의 자연수

맨 앞자리에는 0이 올 수 없으므로 그 개수는

$$3 \times {}_3P_1 = 9$$

(i)~(iii)에서 짝수인 세 자리의 자연수의 개수는

$$12 + 9 + 9 = 30$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{30}{48} = \frac{5}{8}$$

정답_ $\frac{5}{8}$

139

5명의 학생 중에서 4명을 택하여 일렬로 세우는 모든 경우의 수는

$${}_5P_4 = 120$$

A와 B를 먼저 양 끝에 세우는 경우의 수는

$$2!$$

그 각각에 대하여 나머지 3명 중에서 2명을 임의로 택하여 A와 B 사이에 일렬로 세우는 경우의 수가 ${}_3P_2$ 이므로 A, B가 양 끝에 서는 경우의 수는

$$2! \times {}_3P_2 = 2 \times 6 = 12$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{12}{120} = \frac{1}{10}$$

정답_ ④

140

만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수는

$${}_5P_4 = 120$$

한편, 4300보다 큰 수는 $43\square\square$ 또는 $45\square\square$ 또는 $5\square\square\square$ 의 꼴이다.

(i) $43\square\square$ 의 꼴의 자연수의 개수는

$${}_3P_2 = 6$$

(ii) $45\square\square$ 의 꼴의 자연수의 개수는

$${}_3P_2 = 6$$

(iii) $5\square\square\square$ 의 꼴의 자연수의 개수는

$${}_4P_3 = 24$$

(i)~(iii)에서 4300보다 큰 네 자리의 자연수의 개수는

$$6 + 6 + 24 = 36$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{36}{120} = \frac{3}{10}$$

정답_ ②

141

8개의 문자를 일렬로 나열하는 모든 경우의 수는

8!

문자를 나열할 자리를 다음과 같이 나타내자.

1 2 3 4 5 6 7 8

triangle에 있는 모음은 i, a, e의 3개이고 홀수 번째 자리는 1, 3, 5, 7의 4개이므로 홀수 번째 자리에 모음을 나열하는 경우의 수는

$${}_4P_3=24$$

나머지 5개의 자리에 자음을 나열하는 경우의 수는

5!

즉, 모음이 모두 홀수 번째 자리에 오는 경우의 수는

$$24 \times 5!$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{24 \times 5!}{8!} = \frac{1}{14}$$

정답_ $\frac{1}{14}$

142

문자 A, B, C, D, E가 하나씩 적혀 있는 5장의 카드와 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 4장의 카드를 일렬로 나열하는 모든 경우의 수는

9!

문자 A의 양옆에 숫자가 적혀 있는 카드가 하나씩 놓이려면 1, 2, 3, 4 중에서 임의로 2개를 택하여 A의 양옆에 놓으면 되므로 그 경우의 수는

$${}_4P_2=12$$

그 각각에 대하여 문자 A와 양옆의 숫자를 하나로 생각하고 나머지 6장의 카드와 함께 일렬로 나열하는 경우의 수는

7!

따라서 구하는 확률은

$$\frac{12 \times 7!}{9!} = \frac{1}{6}$$

정답_ ④

143

4명의 학생이 서로 다른 4종류의 인형 중에서 임의로 한 개씩 고르는 모든 경우의 수는

$${}_4\Pi_4=4!=256$$

4명이 모두 다른 종류의 인형을 고르는 경우의 수는

$${}_4P_4=24$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{24}{256} = \frac{3}{32}$$

정답_ ①

144

세 사람이 가위바위보를 한 번 할 때, 나오는 모든 경우의 수는

$${}_3\Pi_3=3!=27$$

세 사람의 가위바위보에서 비기려면 세 사람이 모두 같은 것을 내거나 모두 다른 것을 내야 한다.

(i) 세 사람이 모두 같은 것을 내는 경우

(가위, 가위, 가위), (바위, 바위, 바위), (보, 보, 보)의 3가지이다.

(ii) 세 사람이 모두 다른 것을 내는 경우

세 사람이 각각 가위, 바위, 보 중에서 서로 다른 것을 한 개씩 택해야 하므로 이때의 경우의 수는

$$3!=6$$

(i), (ii)에서 비기는 경우의 수는

$$3+6=9$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{9}{27} = \frac{1}{3}$$

정답_ ④

145

숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허용하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 네 자리의 자연수의 개수는

$${}_5\Pi_4=5^4=625$$

이들 중에서 하나를 선택할 때, 선택한 수가 3300보다 크려면

33□□, 34□□, 35□□, 4□□□, 5□□□의 꼴이어야 한다.

(i) 33□□, 34□□, 35□□의 꼴

33□□의 꼴의 자연수의 개수는

$${}_5\Pi_2=5^2=25$$

같은 방법으로 34□□, 35□□의 꼴의 자연수의 개수도 각각 25이다.

(ii) 4□□□, 5□□□의 꼴

4□□□의 꼴의 자연수의 개수는

$${}_5\Pi_3=5^3=125$$

같은 방법으로 5□□□의 꼴의 자연수의 개수도 125이다.

(i), (ii)에서 3300보다 큰 자연수의 개수는

$$25 \times 3 + 125 \times 2 = 325$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{325}{625} = \frac{13}{25}$$

정답_ ③

146

집합 X에서 집합 Y로의 함수 f의 개수는

$${}_4\Pi_3=4^3=64$$

함수 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2 에 대하여 $x_1 < x_2$ 이면

$f(x_1) > f(x_2)$ 를 만족시키는 함수 f의 개수는

$${}_4C_3={}_4C_1=4$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{4}{64} = \frac{1}{16}$$

정답_ ②

참고 함수의 개수

두 집합 X, Y에 대하여 $n(X)=a, n(Y)=b$ 이고 $x_1 \in X, x_2 \in X$ 일 때, 각 조건을 만족시키는 함수 $f: X \rightarrow Y$ 의 개수는 다음과 같다.

(1) 함수 f의 개수 $\Rightarrow {}_b\Pi_a$

(2) $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 인 함수 f의 개수 $\Rightarrow {}_bP_a$ (단, $b \geq a$)

(3) $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) < f(x_2)$ 인 함수 f의 개수 $\Rightarrow {}_bC_a$ (단, $b \geq a$)

147

6개의 문자를 일렬로 나열하는 모든 경우의 수는

$$6! = 720$$

자음을 알파벳순으로 나열하려면 자음 m, t, h, r를 모두 V라고 생각하여 V, o, V, V, e, V를 일렬로 나열한 후, 4개의 V를 앞에서부터 각각 h, m, r, t로 바꾸면 된다.

즉, 이때의 경우의 수는

$$\frac{6!}{4!} = 30$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{30}{720} = \frac{1}{24}$$

정답_ ①

148

한 개의 주사위를 세 번 던져 나오는 모든 경우의 수는

$$6 \times 6 \times 6 = 216$$

6 이하의 세 자연수 a, b, c 에 대하여 $a \times b \times c = 4$ 가 되려면 세 수 a, b, c 가 1, 1, 4 또는 1, 2, 2이어야 한다.

(i) 1, 1, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!} = 3$$

(ii) 1, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!} = 3$$

(i), (ii)에서 $a \times b \times c = 4$ 인 경우의 수는

$$3 + 3 = 6$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{6}{216} = \frac{1}{36}$$

정답_ ②

149

A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 모든 경우의 수는

$$\frac{8!}{5! \times 3!} = 56$$

A 지점에서 P 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$$

P 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3! \times 1!} = 4$$

즉, A 지점에서 P 지점을 지나 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$6 \times 4 = 24$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{24}{56} = \frac{3}{7}$$

정답_ ②

150

집합 X 에서 집합 Y 로의 함수 f 의 개수는

$${}_2\Pi_3 = 2^3 = 8$$

$f(1) + f(2) + f(3) = 4$ 를 만족시키려면 $f(1), f(2), f(3)$ 이 1, 1, 2가 되어야 한다.

즉, 구하는 함수 f 의 개수는 1, 1, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{3!}{2!} = 3$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{3}{8}$

정답_ ③

151

A, A, A, B, B, C, C의 문자가 하나씩 적혀 있는 7장의 카드를 일렬로 나열하는 모든 경우의 수는

$$\frac{7!}{3! \times 2! \times 2!} = 210$$

양 끝에 A가 적혀 있는 카드가 나오려면 먼저 A가 적혀 있는 카드를 양 끝 자리에 하나씩 나열하고 나머지 A, B, B, C, C의 문자가 하나씩 적혀 있는 카드를 가운데 자리에 나열하면 되므로 이때의 경우의 수는

$$\frac{5!}{2! \times 2!} = 30$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{30}{210} = \frac{1}{7}$$

정답_ ①

152

남학생 3명, 여학생 5명의 8명 중에서 대표 2명을 뽑는 모든 경우의 수는

$${}_8C_2 = 28$$

여학생 5명 중에서 대표 2명을 뽑는 경우의 수는

$${}_5C_2 = 10$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{10}{28} = \frac{5}{14}$$

정답_ ⑤

153

흰 공 2개, 검은 공 3개, 빨간 공 4개의 9개의 공이 들어 있는 주머니에서 임의로 5개의 공을 동시에 꺼내는 모든 경우의 수는

$${}_9C_5 = {}_9C_4 = 126$$

흰 공 2개 중에서 1개, 검은 공 3개 중에서 1개, 빨간 공 4개 중에서 3개를 뽑는 경우의 수는

$${}_2C_1 \times {}_3C_1 \times {}_4C_3 = {}_2C_1 \times {}_3C_1 \times {}_4C_1 \\ = 2 \times 3 \times 4 = 24$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{24}{126} = \frac{4}{21}$$

정답_ ②

154

흰 공 2개, 노란 공 3개, 파란 공 2개의 7개의 공이 들어 있는 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내는 모든 경우의 수는

$${}_7C_3 = 35$$

3개의 공의 색깔이 모두 다르려면 흰 공 2개 중에서 1개, 노란 공 3개 중에서 1개, 파란 공 2개 중에서 1개를 꺼내야 하므로 이때의 경우의 수는

$${}_2C_1 \times {}_3C_1 \times {}_2C_1 = 2 \times 3 \times 2 = 12$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{12}{35}$ 이므로

$$p=35, q=12$$

$$\therefore p+q=35+12=47$$

정답_ 47

155

집합 $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ 의 10개의 원소 중에서 임의로 6개의 원소를 택하는 모든 경우의 수는

$${}_{10}C_6 = {}_{10}C_4 = 210$$

택한 6개의 원소 중 두 번째로 작은 수가 3이려면 집합 $\{1, 2\}$ 에서 원소 1개를 택하고, 집합 $\{3\}$ 에서 원소 3을 택하고, 집합 $\{4, 5, 6, \dots, 10\}$ 에서 4개의 원소를 택하면 되므로 이때의 경우의 수는

$$\begin{aligned} {}_2C_1 \times 1 \times {}_7C_4 &= {}_2C_1 \times 1 \times {}_7C_3 \\ &= 2 \times 1 \times 35 \\ &= 70 \end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{70}{210} = \frac{1}{3}$$

정답_ ③

156

주사위 2개와 동전 4개를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는 $(6 \times 6) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2) = 6^2 \times 2^4$

나오는 주사위의 눈의 수의 곱과 앞면이 나오는 동전의 개수가 같은 경우의 수는 앞면이 나오는 동전의 개수에 따라 다음과 같이 구할 수 있다.

(i) 앞면이 나온 동전의 개수가 1일 때

앞면이 나오는 동전을 정하는 경우의 수는

$${}_4C_1 = 4$$

주사위의 눈의 수의 곱이 1인 경우는 (1, 1)의 1가지

즉, 이때의 경우의 수는

$$4 \times 1 = 4$$

(ii) 앞면이 나온 동전의 개수가 2일 때

앞면이 나오는 동전을 정하는 경우의 수는

$${}_4C_2 = 6$$

주사위의 눈의 수의 곱이 2인 경우는 (1, 2), (2, 1)의 2가지

즉, 이때의 경우의 수는

$$6 \times 2 = 12$$

(iii) 앞면이 나온 동전의 개수가 3일 때

앞면이 나오는 동전을 정하는 경우의 수는

$${}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$$

주사위의 눈의 수의 곱이 3인 경우는 (1, 3), (3, 1)의 2가지

즉, 이때의 경우의 수는

$$4 \times 2 = 8$$

(iv) 앞면이 나온 동전의 개수가 4일 때

앞면이 나오는 동전을 정하는 경우의 수는

$${}_4C_4 = 1$$

주사위의 눈의 수의 곱이 4인 경우는 (1, 4), (2, 2), (4, 1)

의 3가지

즉, 이때의 경우의 수는

$$1 \times 3 = 3$$

(i)~(iv)에서 주사위의 눈의 수의 곱과 앞면이 나오는 동전의 개수가 같은 경우의 수는

$$4 + 12 + 8 + 3 = 27$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{27}{6^2 \times 2^4} = \frac{3}{64}$$

정답_ ①

참고 앞면이 나오는 동전이 0개일 수 있으나 주사위의 눈의 수의 곱이 0이 되는 경우는 없으므로 이 경우는 생각하지 않아도 된다.

157

정육면체의 8개의 꼭짓점 중에서 임의로 서로 다른 두 점을 택하는 모든 경우의 수는

$${}_8C_2 = 28$$

길이가 $\sqrt{2}$ 인 선분은 오른쪽 그림의 $\overline{AF}$ 와 같이 각 면의 대각선인 경우이므로 그 개수는

$$2 \times 6 = 12$$

길이가 $\sqrt{3}$ 인 선분은 오른쪽 그림의 $\overline{AG}$ 와 같이 정육면체의 대각선인 경우이므로 그 개수는 4

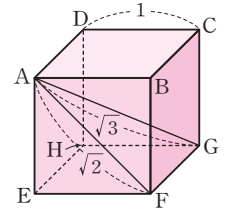
즉, 길이가 $\sqrt{2}$ 이상인 선분의 개수는

$$12 + 4 = 16$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{16}{28} = \frac{4}{7}$$

정답_ $\frac{4}{7}$



158

원의 둘레를 8등분하는 8개의 점 중에서 3개의 점을 택하는 모든 경우의 수는

$${}_8C_3 = 56$$

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 O라고 할 때, 점 O를 지나는 한 지름을 빗변으로 하는 직각삼각형은 6개 만들어진다.

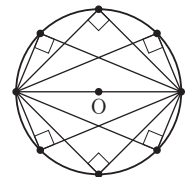
이때 주어진 8개의 점으로 만들 수 있는 지름은 모두 4개이므로 만들 수 있는 직각삼각형의 개수는

$$6 \times 4 = 24$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{24}{56} = \frac{3}{7}$$

정답_ ②



159

집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 의 공집합이 아닌 모든 부분집합의 개수는 $2^4 - 1 = 16 - 1 = 15$

이 중에서 임의로 서로 다른 두 집합을 뽑아 일렬로 나열하는 모

든 경우의 수는

$${}_{15}P_2=210$$

한편, $A \subset B$ 이고 $A \neq B$ 이므로 집합 B 는 집합 $X-A$ 의 공집합이 아닌 부분집합에 집합 A 의 원소를 추가한 것과 같다.

즉, $A \subset B$ 인 두 집합 A, B 를 정하는 경우의 수는 집합 A 의 원소의 개수에 따라 다음과 같이 경우를 나누어 구할 수 있다.

(i) $n(A)=1$ 인 경우

집합 A 를 정하는 경우의 수는

$${}_4C_1=4$$

이때 $n(X-A)=3$ 이므로 집합 B 를 정하는 경우의 수는

$$2^3-1=7$$

즉, 이때의 경우의 수는

$$4 \times 7=28$$

(ii) $n(A)=2$ 인 경우

집합 A 를 정하는 경우의 수는

$${}_4C_2=6$$

이때 $n(X-A)=2$ 이므로 집합 B 를 정하는 경우의 수는

$$2^2-1=3$$

즉, 이때의 경우의 수는

$$6 \times 3=18$$

(iii) $n(A)=3$ 인 경우

집합 A 를 정하는 경우의 수는

$${}_4C_3=4$$

이때 $n(X-A)=1$ 이므로 집합 B 를 정하는 경우의 수는

$$2^1-1=1$$

즉, 이때의 경우의 수는

$$4 \times 1=4$$

(i)~(iii)에서 $A \subset B$ 인 두 집합 A, B 를 정하는 경우의 수는

$$28+18+4=50$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{50}{210}=\frac{5}{21}$$

정답_ ②

주의 두 집합 A, B 는 서로 다른 집합이므로 집합 B 를 정할 때에는 집합 $X-A$ 의 공집합이 아닌 부분집합을 이용한다.

160

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던져 나오는 모든 경우의 수는

$$6 \times 6=36$$

$a \leq b$ 를 만족시키는 두 주사위의 눈의 수 a, b 의 값을 정하려면 1, 2, 3, 4, 5, 6에서 중복을 허용하여 2개를 택해 작거나 같은 수부터 차례대로 a, b 에 대응시키면 된다.

즉, $a \leq b$ 인 경우의 수는 서로 다른 6개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_6H_2={}_6C_2=21$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{21}{36}=\frac{7}{12}$$

정답_ ⑤

161

방정식 $x+y+z=8$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z 의 모든

순서쌍 (x, y, z) 의 개수는

$${}_3H_8={}_{10}C_8={}_{10}C_2=45$$

x, y, z 중에서 x, y 가 자연수일 때, $x=x'+1, y=y'+1$ 이라고 하면 $x+y+z=8$ 에서

$$(x'+1)+(y'+1)+z=8 \quad (\text{단, } x', y', z \text{는 음이 아닌 정수})$$

$$\therefore x'+y'+z=6$$

이를 만족시키는 x', y', z 의 순서쌍 (x', y', z) 의 개수는

$${}_3H_6={}_8C_6={}_8C_2=28$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{28}{45}$

정답_ ②

162

집합 X 에서 집합 Y 로의 함수 f 의 개수는

$${}_4\Pi_3=4^3=64$$

$f(1) \leq f(2) < f(3)$ 을 만족시키는 함수 f 의 개수는 $f(3)$ 의 값에 따라 다음과 같이 경우를 나누어 구할 수 있다.

(i) $f(3)=4$ 일 때, $f(1) \leq f(2) < 4$

이를 만족시키는 함수 f 의 개수는 1, 2, 3의 3개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_2={}_4C_2=6$$

(ii) $f(3)=3$ 일 때, $f(1) \leq f(2) < 3$

이를 만족시키는 함수 f 의 개수는 1, 2의 2개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_2H_2={}_3C_2=3$$

(iii) $f(3)=2$ 일 때, $f(1) \leq f(2) < 2$

이를 만족시키는 함수 f 는 $f(1)=f(2)=1$ 인 경우뿐이므로 함수 f 의 개수는 1

(iv) $f(3)=1$ 일 때, $f(1) \leq f(2) < 1$

이를 만족시키는 함수 f 는 존재하지 않는다.

(i)~(iv)에서 $f(1) \leq f(2) < f(3)$ 을 만족시키는 함수 f 의 개수는

$$6+3+1+0=10$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{10}{64}=\frac{5}{32}$$

정답_ $\frac{5}{32}$

다른 풀이

집합 X 에서 집합 Y 로의 함수 f 의 개수는

$${}_4\Pi_3=4^3=64$$

$f(1) \leq f(2) < f(3)$ 을 만족시키는 함수 f 의 개수는

$f(1) \leq f(2) \leq f(3)$ 을 만족시키는 함수 f 의 개수에서

$f(1) \leq f(2) = f(3)$ 을 만족시키는 함수 f 의 개수를 뺀 것과 같다.

이때 $f(1) \leq f(2) \leq f(3)$ 을 만족시키는 함수 f 의 개수는 1, 2, 3, 4의 4개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_3={}_6C_3=20$$

또, $f(1) \leq f(2) = f(3)$ 을 만족시키는 함수 f 의 개수는 1, 2, 3, 4의 4개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_2={}_5C_2=10$$

즉, $f(1) \leq f(2) < f(3)$ 을 만족시키는 함수 f 의 개수는

$$20-10=10$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{10}{64}=\frac{5}{32}$$

163

방정식 $x+y=12$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y 의 모든 순서쌍 (x, y) 의 개수는

$${}_2H_{12} = {}_{13}C_{12} = {}_{13}C_1 = 13$$

$x+y=12$ 에서 $y=12-x$ 이므로 $xy \geq 35$ 에 대입하면

$$x(12-x) \geq 35, x^2 - 12x + 35 \leq 0$$

$$(x-5)(x-7) \leq 0 \quad \therefore 5 \leq x \leq 7$$

즉, $xy \geq 35$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 는 $(5, 7), (6, 6), (7, 5)$ 의 3가지이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{3}{13}$ 이므로

$$p=13, q=3$$

$$\therefore p-q=13-3=10$$

정답_ 10

164

지난해 학생들이 등교한 날 중 비가 내린 총 날수는

$$12+33+21+15+19=100$$

따라서 비가 내린 전체 100일 중 목요일이 15일이므로 구하는 확률은

$$\frac{15}{100} = \frac{3}{20}$$

정답_ $\frac{3}{20}$

165

전체 생산량은 30000천 대이고, 한국과 일본에서의 생산량은 각각 2000천 대, 11000천 대이므로

$$a = \frac{2000}{30000} = \frac{1}{15}, b = \frac{2000+11000}{30000} = \frac{13}{30}$$

$$\therefore a+b = \frac{1}{15} + \frac{13}{30} = \frac{1}{2}$$

정답_ ⑤

166

세 선수가 각각 활을 한 번씩 쏠 때, 10점을 맞힐 확률은 각각 다음과 같다.

$$A: \frac{144}{200} = \frac{18}{25}, B: \frac{110}{150} = \frac{11}{15}, C: \frac{110}{180} = \frac{11}{18}$$

이때 $\frac{11}{18} < \frac{18}{25} < \frac{11}{15}$ 이므로 10점을 맞힐 확률이 가장 큰 선수는 B이다.

정답_ B

167

자유투를 던지면 120번에 72번 꼴로 성공하므로 이 선수가 자유투를 던져 성공할 확률은

$$p = \frac{72}{120} = \frac{3}{5}$$

따라서 자유투를 250번 던질 때, 성공한다고 예상할 수 있는 횟수는

$$q = \frac{3}{5} \times 250 = 150$$

정답_ ②

168

10개의 공 중에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내는 모든 경우의 수는

$${}_{10}C_2 = 45$$

주머니 속에 들어 있는 짝수가 적혀 있는 공의 개수를 x 라고 하면

꺼낸 2개의 공에 모두 짝수가 적혀 있을 확률이 $\frac{2}{9}$ 이므로

$$\frac{x}{45} = \frac{2}{9}, \frac{x(x-1)}{90} = \frac{2}{9}$$

$$x(x-1) = 5 \times 4 \quad \therefore x=5$$

따라서 주머니에 들어 있는 공 중에서 짝수가 적혀 있는 공은 5개이다.

정답_ ①

169

반지름의 길이가 1, 2, 4인 원의 넓이는 각각

$$\pi \times 1^2 = \pi, \pi \times 2^2 = 4\pi, \pi \times 4^2 = 16\pi$$

즉, 과녁의 전체 넓이는 16π 이고 색칠한 부분의 넓이는

$$16\pi - 4\pi + \pi = 13\pi$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{13\pi}{16\pi} = \frac{13}{16}$$

정답_ $\frac{13}{16}$

170

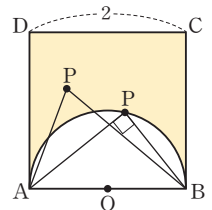
점 P가 $\overline{AB}$ 를 지름으로 하는 반원의 호 위에 있을 때 삼각형 ABP는 직각삼각형이 되고, 점 P가 반원의 내부에 있을 때 삼각형 ABP는 둔각삼각형이 된다.

즉, 오른쪽 그림의 색칠한 부분에 점 P가 있을 때, 삼각형 ABP는 예각삼각형이 된다.

따라서 구하는 확률은

$$\frac{(\text{색칠한 부분의 넓이})}{(\text{정사각형 ABCD의 넓이})}$$

$$= \frac{2^2 - \frac{1}{2} \times \pi \times 1^2}{2^2} = 1 - \frac{\pi}{8}$$



정답_ ③

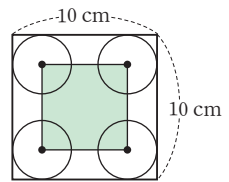
171

타일의 한 변의 길이는 10 cm이고 동전의 반지름의 길이는 2 cm이므로 오른쪽 그림에서 색칠한 정사각형의 내부 또는 경계선에 동전의 중심이 놓이면 동전이 한 장의 타일 안에 완전히 놓인다.

따라서 구하는 확률은

$$\frac{(\text{한 변의 길이가 6 cm인 정사각형의 넓이})}{(\text{한 변의 길이가 10 cm인 정사각형의 넓이})} = \frac{6^2}{10^2} = \frac{9}{25}$$

정답_ ③



172

이차방정식 $x^2 - 2ax + 4a = 0$ 이 실근을 가지려면 이차방정식의 판별식을 D 라고 할 때, $D \geq 0$ 이어야 하므로

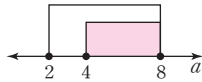
$$\frac{D}{4} = a^2 - 4a \geq 0$$

$$a(a-4) \geq 0 \quad \therefore a \leq 0 \text{ 또는 } a \geq 4$$

$$\text{이때 } 2 \leq a \leq 8 \text{ 이므로 } 4 \leq a \leq 8$$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 확률은

$$\frac{8-4}{8-2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$



정답_ $\frac{2}{3}$

173

표본공간이 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 이므로

$$A = \{2, 4, 6\}, B = \{1, 2, 4\}, C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, D = \emptyset$$

$$\neg. P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ 이므로}$$

$$P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \text{ (거짓)}$$

$$\neg. C = S \text{ 이므로 } P(C) = P(S) = 1 \text{ (참)}$$

$$\neg. D = \emptyset \text{ 이므로 } P(D) = 0 \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 $\neg.$, $\neg.$ 이다.

정답_ ④

174

$$\neg. S \text{ 는 표본공간이므로 } P(S) = 1$$

$\emptyset$ 은 절대로 일어나지 않는 사건이므로 $P(\emptyset) = 0$

$$\therefore P(S) + P(\emptyset) = 1 \text{ (참)}$$

$$\neg. P(\emptyset) = 0 \text{ 이므로}$$

$$P(A) + P(\emptyset) = P(A) + 0 = P(A) \text{ (참)}$$

$$\neg. [\text{반례}] S = \{1, 2, 3\}, A = \{1\}, B = \{3\} \text{ 이면}$$

$$P(S) = 1, P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{3}$$

$$\therefore P(A) + P(B) = \frac{2}{3} \neq P(S) \text{ (거짓)}$$

따라서 옳은 것은 $\neg.$, $\neg.$ 이다.

정답_ ②

175

$$\neg. [\text{반례}] S = \{1, 2, 3\}, A = \{1\}, B = \{3\} \text{ 이면}$$

$$P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{3}$$

$$\therefore P(A) + P(B) = \frac{2}{3} < 1 \text{ (거짓)}$$

$$\neg. 0 \leq P(A) \leq 1, 0 \leq P(B) \leq 1 \text{ 이므로}$$

$$0 \leq P(A) \times P(B) \leq 1 \text{ (참)}$$

$$\neg. [\text{반례}] S = \{1, 2, 3\}, A = \{1\}, B = \{2, 3\} \text{ 이면}$$

$$P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{2}{3}$$

$$\text{이므로 } P(A) < P(B) \text{ 이지만 } A \not\subset B \text{ (거짓)}$$

따라서 옳은 것은 $\neg.$ 이다.

정답_ ②

176

$$\neg. A \subset B \text{ 이면 } n(A) \leq n(B) \text{ 이므로}$$

$$\frac{n(A)}{n(S)} \leq \frac{n(B)}{n(S)} \quad \therefore P(A) \leq P(B) \text{ (참)}$$

$$\neg. [\text{반례}] S = \{1, 2, 3\}, A = \{1\}, B = \{3\} \text{ 이면 두 사건 } A, B$$

$$\text{는 서로 배반사건이지만 } P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{3} \text{ 이므로}$$

$$P(A) + P(B) = \frac{2}{3} \neq 1 \text{ (거짓)}$$

$$\neg. [\text{반례}] S = \{1, 2, 3\}, A = \{1\}, B = \{1, 3\} \text{ 이면}$$

$$P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{2}{3}$$

$$\text{이므로 } P(A) + P(B) = 1 \text{ 이지만 } A \subset B$$

$$\text{즉, 두 사건 } A, B \text{ 는 서로 배반사건이 아니다. (거짓)}$$

따라서 옳은 것은 $\neg.$ 이다.

정답_ ①

177

$$\textcircled{1} P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{2} P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} P(A^c \cup B^c) &= P((A \cap B)^c) \\ &= 1 - P(A \cap B) \\ &= 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{5} P(A^c \cap B^c) &= P((A \cup B)^c) \\ &= 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

정답_ ③

178

$$\begin{aligned} \neg. P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 0.3 + 0.4 - 0.2 = 0.5 \text{ (참)} \end{aligned}$$

$$\neg. A \cap C = \emptyset \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} P(A \cup C) &= P(A) + P(C) \\ &= 0.3 + 0.1 = 0.4 \text{ (거짓)} \end{aligned}$$

$$\neg. B \cup C = B \text{ 이므로}$$

$$P(B \cup C) = P(B) = 0.4 \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 $\neg.$, $\neg.$ 이다.

정답_ ⑤

179

$$P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - \frac{7}{18} = \frac{11}{18} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A \cap B^c) + P(B) \\ &= \frac{1}{9} + \frac{11}{18} = \frac{13}{18} \end{aligned}$$

정답_ ④

180

$$P(A \cup B) = P(A \cap B^c) + P(A \cap B) + P(A^c \cap B) \text{ 이므로}$$

$$\frac{7}{12} = \frac{1}{8} + P(A \cap B) + \frac{1}{8}$$

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{7}{12} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{3}$$

정답_ $\frac{1}{3}$

181

$3P(B) = \frac{2}{5}$ 에서

$$P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$$

이때 A^C, B 가 서로 배반사건이므로 $B \subset A$

따라서 $A \cap B = B$ 이므로

$$\begin{aligned} P(A \cap B^C) &= P(A) - P(A \cap B) \\ &= P(A) - P(B) \\ &= \frac{2}{5} - \frac{2}{15} = \frac{4}{15} \end{aligned}$$

정답_ ①

182

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ 에서

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{3} - P(A \cup B)$$

$$= \frac{13}{12} - P(A \cup B) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이므로 $P(A \cup B)$ 가 최소일 때 $P(A \cap B)$ 는 최대이고,

$P(A \cup B)$ 가 최대일 때 $P(A \cap B)$ 는 최소이다.

이때 $P(A) \leq P(A \cup B) \leq 1, P(B) \leq P(A \cup B) \leq 1$ 에서

$$\frac{3}{4} \leq P(A \cup B) \leq 1, \frac{1}{3} \leq P(A \cup B) \leq 1$$

$$\text{즉, } \frac{3}{4} \leq P(A \cup B) \leq 1 \text{이므로 } \textcircled{1} \text{에서 } \frac{1}{12} \leq \frac{13}{12} - P(A \cup B) \leq \frac{1}{3}$$

$$\therefore \frac{1}{12} \leq P(A \cap B) \leq \frac{1}{3}$$

따라서 $M = \frac{1}{3}, m = \frac{1}{12}$ 이므로

$$M - m = \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$$

정답_ $\frac{1}{4}$

183

개를 좋아한다고 답한 학생을 뽑는 사건을 A , 고양이를 좋아한다고 답한 학생을 뽑는 사건을 B 라고 하면 개와 고양이를 모두 좋아한다고 답한 학생을 뽑는 사건은 $A \cap B$ 이고

$$P(A) = 0.4, P(B) = 0.25, P(A \cap B) = 0.1$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 0.4 + 0.25 - 0.1 = 0.55 \end{aligned}$$

정답_ ④

184

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는 $6 \times 6 = 36$

나오는 두 눈의 수의 합이 9 이상인 사건을 A , 소수인 사건을 B 라고 하면 두 눈의 수의 합이 9 이상이면서 소수인 사건은 $A \cap B$ 이다.

두 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

$$A = \{(3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

$$B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1), (5, 6), (6, 5)\}$$

$$A \cap B = \{(5, 6), (6, 5)\}$$

$$\therefore P(A) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}, P(B) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}, P(A \cap B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{15}{18} + \frac{5}{12} - \frac{1}{18} = \frac{23}{36} \end{aligned}$$

정답_ ③

185

10개의 공이 들어 있는 주머니에서 임의로 두 개의 공을 동시에 꺼내는 모든 경우의 수는

$${}_{10}C_2 = 45$$

3이 적혀 있는 공을 꺼내는 사건을 A , 5가 적혀 있는 공을 꺼내는 사건을 B 라고 하면

$$P(A) = \frac{{}_9C_1}{45} = \frac{1}{5}, P(B) = \frac{{}_9C_1}{45} = \frac{1}{5}$$

사건 $A \cap B$ 는 3이 적혀 있는 공과 5가 적혀 있는 공을 모두 꺼내는 사건이므로

$$P(A \cap B) = \frac{1}{45}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{45} = \frac{17}{45} \end{aligned}$$

정답_ ②

186

집합 X 에서 집합 Y 로의 함수 f 의 개수는

$${}_3\Pi_4 = 3^4 = 81$$

$f(1) = 1$ 인 사건을 A , $f(2) = 3$ 인 사건을 B 라고 하면

$$P(A) = \frac{{}_3\Pi_3}{81} = \frac{3^3}{81} = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{{}_3\Pi_3}{81} = \frac{3^3}{81} = \frac{1}{3}$$

사건 $A \cap B$ 는 $f(1) = 1$ 이고 $f(2) = 3$ 인 사건이고 이때는 $f(3), f(4)$ 의 값만 정해지면 되므로

$$P(A \cap B) = \frac{{}_3\Pi_2}{81} = \frac{3^2}{81} = \frac{1}{9}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9} \end{aligned}$$

정답_ ③

187

6개의 공이 들어 있는 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내는 모든 경우의 수는

$${}_6C_3 = 20$$

흰 공이 1개이고 검은 공이 2개인 사건이 A 이므로

$$P(A) = \frac{{}_2C_1 \times {}_4C_2}{20} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

꺼낸 3개의 공에 적혀 있는 수를 모두 곱한 값이 8인 사건이 B 이고, 사건 B 는 2가 적혀 있는 공만 3개 꺼내는 경우이므로

$$P(B) = \frac{{}_4C_3}{20} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

이때 사건 $A \cap B$ 는 2가 적혀 있는 흰 공 1개, 2가 적혀 있는 검은 공 2개를 꺼내는 사건이므로

$$P(A \cap B) = \frac{1 \times {}_3C_2}{20} = \frac{3}{20}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{3}{5} + \frac{1}{5} - \frac{3}{20} = \frac{13}{20} \end{aligned}$$

정답_ ③

188

이차방정식 $6x^2 - 5ax + a^2 = 0$ 에서

$$(2x - a)(3x - a) = 0$$

$$\therefore x = \frac{a}{2} \text{ 또는 } x = \frac{a}{3}$$

이때 $x = \frac{a}{2}$ 가 정수, 즉 a 가 2의 배수인 사건을 A 라 하고 $x = \frac{a}{3}$ 가 정수, 즉 a 가 3의 배수인 사건을 B 라고 하면 사건 $A \cap B$ 는 a 가 6의 배수인 사건이므로

$$P(A) = \frac{25}{50} = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{16}{50} = \frac{8}{25}, P(A \cap B) = \frac{8}{50} = \frac{4}{25}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{8}{25} - \frac{4}{25} = \frac{33}{50} \end{aligned}$$

정답_ $\frac{33}{50}$

189

정사면체 모양의 서로 다른 주사위 2개를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$$4 \times 4 = 16$$

바닥에 닿는 면에 적혀 있는 수의 합이 3인 사건을 A , 차가 3인 사건을 B 라고 할 때, 나오는 두 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

$$A = \{(1, 2), (2, 1)\}, B = \{(1, 4), (4, 1)\}$$

$$\therefore P(A) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}, P(B) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

두 사건 A, B 는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) \\ &= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

정답_ ①

190

8개의 공이 들어 있는 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내는 모든 경우의 수는

$${}_8C_3 = 56$$

모두 같은 색의 공이 나오려면 모두 흰 공 또는 모두 검은 공이어야 한다.

꺼낸 3개의 공이 모두 흰 공인 사건을 A , 모두 검은 공인 사건을 B 라고 하면

$$P(A) = \frac{{}_5C_3}{56} = \frac{10}{56} = \frac{5}{28}, P(B) = \frac{{}_3C_3}{56} = \frac{1}{56}$$

두 사건 A, B 는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) \\ &= \frac{5}{28} + \frac{1}{56} = \frac{11}{56} \end{aligned}$$

정답_ ④

191

6개의 제비 중에서 임의로 3개의 제비를 동시에 뽑을 때, 나오는 모든 경우의 수는

$${}_6C_3 = 20$$

$\times$ 표가 적혀 있는 제비가 $\bigcirc$ 표가 적혀 있는 제비보다 많이 나오려면 $\times$ 표가 적혀 있는 제비가 2개 또는 3개 나와야 한다.

뽑은 3개의 제비 중에서 $\times$ 표가 적혀 있는 제비가 2개인 사건을 A , 3개인 사건을 B 라고 하면

$$P(A) = \frac{{}_3C_2 \times {}_3C_1}{20} = \frac{9}{20}, P(B) = \frac{{}_3C_3 \times {}_3C_0}{20} = \frac{1}{20}$$

두 사건 A, B 는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) \\ &= \frac{9}{20} + \frac{1}{20} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

정답_ ③

192

5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 서로 다른 4개를 택하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수는

$${}_5P_4 = 120$$

만든 네 자리의 자연수가 2000보다 작은 사건을 A , 5000보다 큰 사건을 B 라고 하자.

(i) 2000보다 작은 경우

천의 자리의 숫자가 1인 네 자리의 자연수이므로 그 개수는

$${}_4P_3 = 24$$

$$\therefore P(A) = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}$$

(ii) 5000보다 큰 경우

천의 자리의 숫자가 5인 네 자리의 자연수이므로 그 개수는

$${}_4P_3 = 24$$

$$\therefore P(B) = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}$$

두 사건 A, B 는 서로 배반사건이므로 (i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) \\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

정답_ ③

193

7개의 자연수 중에서 3개를 선택하는 모든 경우의 수는

$${}_7C_3 = 35$$

1부터 7까지의 자연수 중에서 짝수는 2, 4, 6의 3개이므로 선택된 3개의 수의 곱 a 와 선택되지 않은 4개의 수의 곱 b 가 모두 짝수이면 선택된 3개의 수 중에서 짝수는 1개 또는 2개이어야 한다.

선택된 3개의 수 중에서 짝수가 1개인 사건을 A , 짝수가 2개인 사건을 B 라고 하면

$$P(A) = \frac{{}_3C_1 \times {}_4C_2}{35} = \frac{18}{35}, P(B) = \frac{{}_3C_2 \times {}_4C_1}{35} = \frac{12}{35}$$

두 사건 A, B 는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \\ = \frac{18}{35} + \frac{12}{35} = \frac{6}{7}$$

정답_ ⑤

194

12개의 구슬이 들어 있는 주머니에서 3개의 구슬을 동시에 꺼내는 모든 경우의 수는

$${}_{12}C_3 = 220$$

꺼낸 구슬 중 적어도 한 개가 흰 구슬인 사건을 A 라고 하면 A^c 은 3개 모두 빨간 구슬인 사건이므로

$$P(A^c) = \frac{{}_7C_3}{220} = \frac{35}{220} = \frac{7}{44}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c) \\ = 1 - \frac{7}{44} = \frac{37}{44}$$

정답_ ⑤

195

서로 다른 세 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는 $6 \times 6 \times 6 = 216$

적어도 두 개의 주사위의 눈이 다른 사건을 A 라고 하면 A^c 은 세 개의 주사위의 눈이 모두 같은 사건이므로

$$P(A^c) = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c) \\ = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$$

정답_ ④

196

서로 다른 8개의 문자를 일렬로 나열하는 모든 경우의 수는 8!

적어도 한쪽 끝에 모음이 오는 사건을 A 라고 하면 A^c 은 양 끝에 모두 자음이 오는 사건이다.

양 끝에 모두 자음이 오는 경우의 수는 5개의 자음 c, h, m, p, n 중에서 2개를 택하여 양 끝에 놓은 후, 그 가운데에 나머지 6개의 문자를 나열하는 경우의 수와 같으므로

$${}_5P_2 \times 6!$$

$$\therefore P(A^c) = \frac{{}_5P_2 \times 6!}{8!} = \frac{5}{14}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c) \\ = 1 - \frac{5}{14} = \frac{9}{14}$$

정답_ ⑤

197

16명 중에서 임의로 3명을 선택하는 모든 경우의 수는

$${}_{16}C_3 = 560$$

선택한 3명의 학생 중에서 적어도 한 명이 과목 B를 선택한 학생인 사건을 A 라고 하면 A^c 은 과목 B를 선택한 학생이 한 명도 없는 사건, 즉 3명 모두 과목 A를 선택한 학생인 사건이다.

과목 A를 선택한 학생은 9명이므로

$$P(A^c) = \frac{{}_9C_3}{560} = \frac{84}{560} = \frac{3}{20}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c) \\ = 1 - \frac{3}{20} = \frac{17}{20}$$

정답_ ③

198

10개의 제비 중에서 임의로 2개의 제비를 동시에 뽑는 모든 경우의 수는

$${}_{10}C_2 = 45$$

10개의 제비 중에서 임의로 2개의 제비를 동시에 뽑을 때, 적어도 한 개가 당첨 제비인 사건을 A 라고 하면 A^c 은 2개 모두 당첨 제비가 아닌 사건이다.

제비 10개 중 당첨 제비가 k 개, 당첨 제비가 아닌 것은 $(10-k)$ 개이므로

$$P(A^c) = \frac{{}_{10-k}C_2}{45} = \frac{(10-k)(9-k)}{90}$$

$$\text{이때 } P(A) = \frac{8}{15} \text{ 이므로}$$

$$P(A^c) = 1 - \frac{8}{15} = \frac{7}{15}$$

$$\text{즉, } \frac{(10-k)(9-k)}{90} = \frac{7}{15} \text{ 에서}$$

$$(10-k)(9-k) = 7 \times 6$$

$$\therefore k = 3$$

정답_ ①

199

꺼낸 공에 적혀 있는 수가 6의 배수가 아닌 사건을 A 라고 하면 A^c 은 6의 배수인 사건이다.

이때 1부터 70까지의 자연수 중 6의 배수는 6, 12, 18, ..., 66의 11개이므로

$$P(A^c) = \frac{11}{70}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c) \\ = 1 - \frac{11}{70} = \frac{59}{70}$$

정답_ ⑤

200

서로 다른 5장의 카드 중 2장을 뽑아 일렬로 나열하는 모든 경우의 수는

$${}_5P_2 = 20$$

5장의 카드 중에서 임의로 뽑은 2장의 카드에 적혀 있는 수의 합이 7 이하인 사건을 A 라고 하면 A^c 은 두 수의 합이 8 이상인 사건이다.

뽑은 2장의 카드에 적혀 있는 수를 순서쌍으로 나타내면

$$A^c = \{(3, 5), (4, 5), (5, 3), (5, 4)\}$$

$$\therefore P(A^c) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

$$= 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

정답_ ④

201

6명의 학생을 일렬로 세우는 모든 경우의 수는

$$6!$$

두 학생 A, B 사이에 1명 이상의 학생이 서는 사건을 A 라고 하면 A^c 은 두 학생 A, B가 서로 이웃하는 사건이다.

이때 A, B가 서로 이웃하게 서는 경우의 수는

$$5! \times 2!$$

$$\therefore P(A^c) = \frac{5! \times 2!}{6!} = \frac{1}{3}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

$$= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

정답_ ①

202

10개의 공 중에서 4개의 공을 동시에 꺼내는 모든 경우의 수는

$${}_{10}C_4 = 210$$

꺼낸 4개의 공 중에서 흰 공이 2개 이상인 사건을 A 라고 하면 A^c 은 흰 공이 0개 또는 1개인 사건이다.

(i) 흰 공 0개, 검은 공 4개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_5C_0 \times {}_5C_4 = 1 \times 5 = 5$$

(ii) 흰 공 1개, 검은 공 3개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_5C_1 \times {}_5C_3 = 5 \times 10 = 50$$

(i), (ii)에서

$$P(A^c) = \frac{5+50}{210} = \frac{11}{42}$$

이므로 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

$$= 1 - \frac{11}{42} = \frac{31}{42}$$

즉, $p=42$, $q=31$ 이므로

$$p+q=42+31=73$$

정답_ 73

203

10장의 카드 중에서 임의로 3장의 카드를 동시에 꺼내는 모든 경우의 수는

$${}_{10}C_3 = 120$$

꺼낸 카드에 적혀 있는 세 자연수 중에서 가장 작은 수가 4 이하이거나 7 이상인 사건을 A 라고 하면 A^c 은 세 자연수 중에서 가장 작은 수가 5 또는 6인 사건이다.

(i) 세 자연수 중에서 가장 작은 수가 5인 경우

먼저 5를 꺼낸 후, 6, 7, 8, 9, 10에서 2개를 꺼내면 되므로 이 경우의 수는

$${}_5C_2 = 10$$

(ii) 세 자연수 중에서 가장 작은 수가 6인 경우

먼저 6을 꺼낸 후, 7, 8, 9, 10에서 2개를 꺼내면 되므로 이때의 경우의 수는

$${}_4C_2 = 6$$

(i), (ii)에서

$$P(A^c) = \frac{10+6}{120} = \frac{16}{120} = \frac{2}{15}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

$$= 1 - \frac{2}{15} = \frac{13}{15}$$

정답_ ③

204

9장의 카드 중에서 임의로 2장의 카드를 동시에 뽑을 때, 나오는 모든 경우의 수는

$${}_9C_2 = 36$$

두 수 $\frac{b}{a}$, $\frac{a}{b}$ 가 모두 정수가 아닌 사건을 A 라고 하면 A^c 은 두 수

$\frac{b}{a}$, $\frac{a}{b}$ 중 적어도 하나는 정수인 사건이다. 이때 두 수 $\frac{b}{a}$, $\frac{a}{b}$ 중 적어도 하나가 정수이려면 a 가 b 의 배수이거나 b 가 a 의 배수이어야 한다.

이를 만족시키는 서로 다른 두 수 a , b 로 가능한 것은 다음과 같다.

(i) $a=1$ 인 경우

$$b=2, 3, 4, \dots, 9 \text{의 } 8 \text{가지}$$

(ii) $a=2$ 인 경우

$$b=4, 6, 8 \text{의 } 3 \text{가지}$$

(iii) $a=3$ 인 경우

$$b=6, 9 \text{의 } 2 \text{가지}$$

(iv) $a=4$ 인 경우

$$b=8 \text{의 } 1 \text{가지}$$

(i)~(iv)에서 경우의 수는 $8+3+2+1=14$ 이므로

$$P(A^c) = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

$$= 1 - \frac{7}{18} = \frac{11}{18}$$

정답_ ④

205

두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$$6 \times 6 = 36 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

이차부등식 $x^2 + 2ax + b \leq 0$ 의 근이 존재하려면 이차방정식

$x^2 + 2ax + b = 0$ 이 실근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면 $D \geq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = a^2 - b \geq 0 \quad \therefore b \leq a^2 \quad \text{②}$$

(i) $a=1$ 이면 $b=1$

(ii) $a=2$ 이면 $b=1, 2, 3, 4$

(iii) $a \geq 3$ 이면 $b=1, 2, 3, 4, 5, 6$

(i)~(iii)에서 조건을 만족시키는 경우의 수는

$$1 + 4 + 4 \times 6 = 29 \quad \text{③}$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{29}{36} \quad \text{④}$$

정답 29/36

채점 기준	비율
① 모든 경우의 수 구하기	10 %
② 이차부등식의 근이 존재할 조건 찾기	30 %
③ 이차부등식의 근이 존재하는 경우의 수 구하기	40 %
④ 이차부등식의 근이 존재할 확률 구하기	20 %

206

6명의 육상 선수를 일렬로 세우는 모든 경우의 수는

$$6! = 720 \quad \text{①}$$

(i) 한국 선수부터 교대로 서는 경우의 수는

$$3! \times 3! = 36$$

(ii) 중국 선수부터 교대로 서는 경우의 수는

$$3! \times 3! = 36$$

(i), (ii)에서 서로 다른 나라 선수끼리 교대로 서는 경우의 수는

$$36 + 36 = 72 \quad \text{②}$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{72}{720} = \frac{1}{10} \quad \text{③}$$

즉, $p=10$, $q=1$ 이므로

$$p+q=10+1=11 \quad \text{④}$$

정답 11

채점 기준	비율
① 모든 경우의 수 구하기	20 %
② 서로 다른 나라 선수끼리 교대로 서는 경우의 수 구하기	40 %
③ 서로 다른 나라 선수끼리 교대로 설 확률 구하기	30 %
④ $p+q$ 의 값 구하기	10 %

207

honeymoon에 있는 문자 중 같은 문자가 있는 경우는 n 이 2개, o 가 3개이므로 이들 9개의 문자를 일렬로 나열하는 모든 경우의 수는

$$\frac{9!}{2! \times 3!} = 30240 \quad \text{①}$$

y 가 모든 o 보다 뒤에 놓으려면 o, o, o, y 를 모두 A 로 생각하여 일렬로 나열한 후, 맨 뒤의 A 를 y 로 바꾸고 나머지 A 를 o 로 바꾸면 된다.

$h, A, n, e, A, m, A, A, n$ 의 9개의 문자를 일렬로 나열하는

경우의 수는

$$\frac{9!}{2! \times 4!} = 7560 \quad \text{②}$$

따라서 구하는 확률은

$$p = \frac{7560}{30240} = \frac{1}{4} \quad \text{③}$$

$$\therefore 100p = 100 \times \frac{1}{4} = 25 \quad \text{④}$$

정답 25

채점 기준	비율
① 모든 경우의 수 구하기	20 %
② y 가 모든 o 보다 뒤에 놓이는 경우의 수 구하기	50 %
③ y 가 모든 o 보다 뒤에 놓일 확률 p 구하기	20 %
④ $100p$ 의 값 구하기	10 %

208

8개의 공이 들어 있는 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 모든 경우의 수는

$${}_8C_2 = 28 \quad \text{①}$$

주머니 안에 들어 있는 흰 공의 개수를 x 라고 할 때, 2개 모두 흰 공이 나오는 경우의 수는

$${}_xC_2 = \frac{x(x-1)}{2} \quad \text{②}$$

2개 모두 흰 공이 나올 확률이 $\frac{5}{14}$ 이므로

$$\frac{\frac{x(x-1)}{2}}{28} = \frac{5}{14}, \quad \frac{x(x-1)}{56} = \frac{5}{14}$$

$$x(x-1) = 5 \times 4 \quad \therefore x = 5$$

따라서 구하는 흰 공의 개수는 5이다. ③

정답 5

채점 기준	비율
① 모든 경우의 수 구하기	20 %
② 흰 공의 개수를 문자로 놓고, 2개 모두 흰 공이 나오는 경우의 수 구하기	30 %
③ 주머니 안에 들어 있는 흰 공의 개수 구하기	50 %

209

집합 X 에서 집합 Y 로의 함수 f 의 개수는

$${}_5\Pi_3 = 5^3 = 125 \quad \text{①}$$

$f(1)=4$ 인 사건을 A 라고 하면 $f(2), f(3)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_5\Pi_2 = 5^2 = 25$ 이므로

$$P(A) = \frac{25}{125} = \frac{1}{5} \quad \text{②}$$

$f(2) \leq 1$ 인 사건을 B 라고 하면 $f(2)$ 의 값으로 가능한 것은 0, 1의 2개이고 $f(1), f(3)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_5\Pi_2 = 5^2 = 25$ 이므로

$$P(B) = \frac{2 \times 25}{125} = \frac{2}{5} \quad \text{③}$$

사건 $A \cap B$ 는 $f(1)=4$ 이고 $f(2) \leq 1$ 인 사건이고 $f(2)$ 의 값으로 가능한 것은 0, 1의 2개이며 $f(3)$ 의 값을 정하는 경우의 수는

$${}_5\Pi_1 = 5 \text{이므로}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1 \times 2 \times 5}{125} = \frac{2}{25}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} - \frac{2}{25} = \frac{13}{25} \quad \text{정답 } \frac{13}{25}$$

채점 기준	비율
① 모든 경우의 수 구하기	10 %
② $f(1)=4$ 일 확률 구하기	30 %
③ $f(2) \leq 1$ 일 확률 구하기	30 %
④ $f(1)=4$ 또는 $f(2) \leq 1$ 일 확률 구하기	30 %

210

A, B, C 세 사람이 15종류의 강의 중에서 서로 다른 종류의 강의를 하나씩 택하는 모든 경우의 수는

$${}_{15}P_3 = 2730 \quad \text{정답 } 2730$$

적어도 한 명이 다른 분야의 강의를 택하는 사건을 A라고 하면 A^c 은 세 명 모두 같은 분야의 강의를 택하는 사건이다.

(i) 세 사람 모두 과학 분야의 강의를 택하는 경우의 수는

$${}_4P_3 = 24$$

(ii) 세 사람 모두 수학 분야의 강의를 택하는 경우의 수는

$${}_5P_3 = 60$$

(iii) 세 사람 모두 사회 분야의 강의를 택하는 경우의 수는

$${}_6P_3 = 120$$

(i)~(iii)에서

$$P(A^c) = \frac{24+60+120}{2730} = \frac{204}{2730} = \frac{34}{455} \quad \text{정답 } \frac{34}{455}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c) \\ = 1 - \frac{34}{455} = \frac{421}{455} \quad \text{정답 } \frac{421}{455}$$

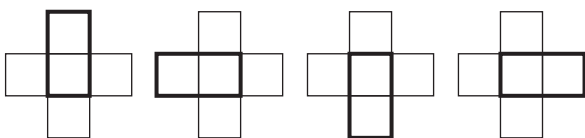
채점 기준	비율
① 모든 경우의 수 구하기	20 %
② 세 사람이 모두 같은 분야의 강의를 택할 확률 구하기	50 %
③ 적어도 한 명은 다른 분야의 강의를 택할 확률 구하기	30 %

211

두더지 인형이 두 번 튀어나오는 모든 경우의 수는

$$5 \times 5 = 25$$

이때 두 정육면체가 서로 이웃하는 경우는 다음 그림과 같다.



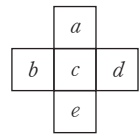
각 경우에 두더지가 튀어나오는 순서가 바뀔 수 있으므로 두더지 인형이 나온 두 정육면체가 서로 이웃하는 경우의 수는

$$4 \times 2 = 8$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{8}{25}$

정답 ⑤

참고 오른쪽 그림과 같이 각 정육면체를 a, b, c, d, e 로 정하자. 두더지 인형이 나온 두 정육면체가 이웃하는 경우를 나온 순서에 따라 순서쌍으로 나타내면 $(a, c), (c, a), (b, c), (c, b), (c, d), (d, c), (c, e), (e, c)$ 의 8가지이다.



212

0, 1, 2, ..., 9의 정수가 하나씩 적혀 있는 10장의 카드 중에서 2장의 카드를 임의로 1장씩 순서대로 꺼내는 모든 경우의 수는

$${}_{10}P_2 = 90$$

어떤 자연수가 6의 배수가 되기 위해서는 2의 배수이면서 3의 배수가 되어야 한다.

이때 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리의 숫자가 각각 5, a, b 인 세 자리의 자연수가 2의 배수이려면 일의 자리의 숫자가 2의 배수이어야 하므로 b 의 값으로 가능한 것은 0, 2, 4, 6, 8이다.

그 각각에 대하여 이 세 자리의 자연수가 3의 배수이려면 각 자리의 숫자의 합, 즉 $5+a+b$ 의 값이 3의 배수이어야 한다.

(i) $b=0$ 인 경우

$5+a+b=5+a$ 가 3의 배수이어야 하므로 a 의 값으로 가능한 것은 1, 4, 7의 3가지

(ii) $b=2$ 인 경우

$5+a+b=5+a+2=7+a$ 가 3의 배수이어야 하므로 a 의 값으로 가능한 것은 5, 8의 2가지

(iii) $b=4$ 인 경우

$5+a+b=5+a+4=9+a$ 가 3의 배수이어야 하므로 a 의 값으로 가능한 것은 0, 3, 6, 9의 4가지

(iv) $b=6$ 인 경우

$5+a+b=5+a+6=11+a$ 가 3의 배수이어야 하므로 a 의 값으로 가능한 것은 1, 4, 7의 3가지

(v) $b=8$ 인 경우

$5+a+b=5+a+8=13+a$ 가 3의 배수이어야 하므로 a 의 값으로 가능한 것은 2, 5의 2가지

(i)~(v)에서 세 자리의 자연수가 6의 배수가 되는 경우의 수는

$$3+2+4+3+2=14$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{14}{90} = \frac{7}{45}$$

정답 ①

주의 a, b 가 서로 다른 수임에 주의하여 경우의 수를 구한다.

예를 들어 (ii)에서 $b=2$ 인 경우 $5+a+b=7+a$ 의 값이 3의 배수가 되도록 하는 음이 아닌 정수 a 의 값은 2, 5, 8, 11, ...이다.

그런데 b 의 값으로 2를 이미 택했고 카드에 적혀 있는 숫자 중에서 가장 큰 값이 9이므로 (ii)의 경우에 a 의 값으로 가능한 것은 5, 8의 2가지뿐이다.

(v)에서 $b=8$ 인 경우에도 마찬가지로 $5+a+b=13+a$ 가 3의 배수가 되게 하는 수 중에서 8은 b 의 값으로 이미 택했으므로 제외해야 한다.

213

$1 \leq m \leq 12, 1 \leq n \leq 12$ 인 두 자연수 m, n 을 택하는 모든 경우의 수는

$$12 \times 12 = 144$$

$2^m + 3^n$ 의 일의 자리의 숫자가 3의 배수이려면 일의 자리의 숫자가 3 또는 6 또는 9이어야 한다.

이때 2^m 의 일의 자리의 숫자는 2, 4, 8, 6이 이 순서대로 반복되고, 3^n 의 일의 자리의 숫자는 3, 9, 7, 1이 이 순서대로 반복되므로 $2^m + 3^n$ 의 일의 자리의 숫자가 3의 배수인 경우는 다음과 같다.

(i) 2^m 의 일의 자리의 숫자가 2인 경우

m 의 값으로 가능한 것은 1, 5, 9의 3가지

그 각각에 대하여 3^n 의 일의 자리의 숫자는 1 또는 7이어야 하므로 n 의 값으로 가능한 것은 3, 4, 7, 8, 11, 12의 6가지

즉, 이때의 경우의 수는

$$3 \times 6 = 18$$

(ii) 2^m 의 일의 자리의 숫자가 4인 경우

m 의 값으로 가능한 것은 2, 6, 10의 3가지

그 각각에 대하여 3^n 의 일의 자리의 숫자는 9이어야 하므로 n 의 값으로 가능한 것은 2, 6, 10의 3가지

즉, 이때의 경우의 수는

$$3 \times 3 = 9$$

(iii) 2^m 의 일의 자리의 숫자가 8인 경우

m 의 값으로 가능한 것은 3, 7, 11의 3가지

그 각각에 대하여 3^n 의 일의 자리의 숫자는 1이어야 하므로 n 의 값으로 가능한 것은 4, 8, 12의 3가지

즉, 이때의 경우의 수는

$$3 \times 3 = 9$$

(iv) 2^m 의 일의 자리의 숫자가 6인 경우

m 의 값으로 가능한 것은 4, 8, 12의 3가지

그 각각에 대하여 3^n 의 일의 자리의 숫자는 3 또는 7이어야 하므로 n 의 값으로 가능한 것은 1, 3, 5, 7, 9, 11의 6가지

즉, 이때의 경우의 수는

$$3 \times 6 = 18$$

(i)~(iv)에서 $2^m + 3^n$ 의 일의 자리의 숫자가 3의 배수인 경우의 수는

$$18 + 9 + 9 + 18 = 54$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{54}{144} = \frac{3}{8}$$

즉, $p=8$, $q=3$ 이므로

$$p+q=8+3=11$$

정답 11

참고 $2^m + 3^n$ 의 일의 자리의 숫자를 표로 나타내면 다음과 같다.

$3^n \backslash 2^m$	2	4	8	6
3	5	7	1	9
9	1	3	7	5
7	9	1	5	3
1	3	5	9	7

214

5명이 5개의 좌석에 한 명씩 앉는 모든 경우의 수는

$$5! = 120$$

처음부터 자동차 B에 탔던 2명이 모두 처음 앉았던 좌석이 아닌 다른 좌석에 앉는 경우는 다음과 같다.

(i) 자동차 B에 탔던 2명끼리 자리를 서로 바꾸어 앉고, 나머지 3개의 좌석에 자동차 A에서 온 3명이 앉는 경우

자동차 B에 탔던 2명의 자리를 정하는 경우의 수는 1

자동차 A에서 온 3명의 자리를 정하는 경우의 수는

$$3! = 6$$

즉, 이때의 경우의 수는

$$1 \times 6 = 6$$

(ii) 자동차 B에 탔던 2명 중 1명은 다른 1명의 자리, 나머지 1명은 비어 있던 3개의 좌석 중 한 곳에 앉고, 나머지 3개의 좌석에 자동차 A에서 온 3명이 앉는 경우

자동차 B에 탔던 2명 중 이들이 앉았던 자리에 앉을 사람 1명을 정하는 경우의 수는

$${}_2P_1 = 2$$

자동차 B에 탔던 나머지 1명의 자리를 정하는 경우의 수는

$${}_3P_1 = 3$$

자동차 A에서 온 3명의 자리를 정하는 경우의 수는

$$3! = 6$$

즉, 이때의 경우의 수는

$$2 \times 3 \times 6 = 36$$

(iii) 자동차 B에 탔던 2명이 비어 있던 3개의 좌석 중 두 곳에 앉고, 나머지 3개의 좌석에 자동차 A에서 온 사람이 앉는 경우
자동차 B에 탔던 2명의 자리를 정하는 경우의 수는

$${}_3P_2 = 6$$

자동차 A에서 온 3명의 자리를 정하는 경우의 수는

$$3! = 6$$

즉, 이때의 경우의 수는

$$6 \times 6 = 36$$

(i)~(iii)에서 처음부터 자동차 B에 타고 있던 2명이 모두 처음 앉았던 좌석이 아닌 다른 좌석에 앉는 경우의 수는

$$6 + 36 + 36 = 78$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{78}{120} = \frac{13}{20}$$

정답 $\frac{13}{20}$

215

집합 A에서 A로의 함수 f 의 개수는

$${}_4P_4 = 4^4 = 256$$

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ 이므로 $f(1) \times f(2) \geq 9$ 를 만족시키려면

$f(1) \times f(2) = 9$ 또는 $f(1) \times f(2) = 12$ 또는 $f(1) \times f(2) = 16$ 이어야 한다.

(i) $f(1) \times f(2) = 9$ 일 때, $f(1) = f(2) = 3$ 만 가능하다.

조건 (나)에서 함수 f 의 치역의 원소의 개수가 3이므로 $f(3)$, $f(4)$ 의 값은 공역의 나머지 원소 1, 2, 4 중에서 서로 다른 2개를 택하여 하나씩 대응시키면 된다.

즉, 이때의 함수의 개수는

$${}_3P_2 = 6$$

(ii) $f(1) \times f(2) = 12$ 일 때, $f(1) = 3$, $f(2) = 4$ 또는 $f(1) = 4$, $f(2) = 3$ 이 가능하다.

$f(1) = 3$, $f(2) = 4$ 인 경우에 조건 (나)를 만족시키도록 $f(3)$, $f(4)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 다음과 같다.

㉠ $f(3) = 3$ 또는 $f(3) = 4$ 일 때, $f(4)$ 의 값은 1 또는 2가 되어야 하므로 이때의 함수의 개수는

$$2 \times 2 = 4$$

㉡ $f(4) = 3$ 또는 $f(4) = 4$ 일 때, $f(3)$ 의 값은 1 또는 2가 되

어야 하므로 이때의 함수의 개수는

$$2 \times 2 = 4$$

㉔ $f(3)=f(4)=1$ 일 때, 함수의 개수는 1

㉕ $f(3)=f(4)=2$ 일 때, 함수의 개수는 1

㉖~㉔에서 $f(1)=3, f(2)=4$ 인 함수의 개수는

$$4 + 4 + 1 + 1 = 10$$

같은 방법으로 $f(1)=4, f(2)=3$ 인 함수의 개수도 10이다.

즉, 이때의 함수 f 의 개수는

$$10 + 10 = 20$$

(iii) $f(1) \times f(2) = 16$ 일 때, $f(1)=f(2)=4$ 만 가능하다.

(i)과 같은 방법으로 생각하면 이때의 함수의 개수는

$${}_3P_2 = 6$$

(i)~(iii)에서 조건을 만족시키는 함수 f 의 개수는

$$6 + 20 + 6 = 32$$

따라서 구하는 확률은

$$p = \frac{32}{256} = \frac{1}{8}$$

$$\therefore 120p = 120 \times \frac{1}{8} = 15$$

정답_ 15

216

두 사람이 가위바위보 게임을 3번 할 때, 나오는 모든 경우의 수는

$${}_3P_3 = 3^3 = 27$$

은희가 x 번 이기고 y 번 지고 z 번 비긴다고 하면 조건 (가), (나)에 의하여 은희의 점수는

$$14 + 3x - 4y + 2z = (\text{짝수})$$

이때 14, 4y, 2z는 모두 짝수이므로 3x의 값이 짝수이어야 한다.

또, $x+y+z=3$ 이므로 x, y, z 의 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는 다음과 같다.

(i) $x=0$ 일 때, $y+z=3, 14-4y+2z=(\text{짝수})$ 인 경우이므로 $x,$

y, z 의 순서쌍 (x, y, z) 는

$$(0, 0, 3), (0, 1, 2), (0, 2, 1), (0, 3, 0)$$

즉, 이때의 경우의 수는

$$1 + \frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} + 1 = 8$$

(ii) $x=2$ 일 때, $y+z=1, 14+6-4y+2z=(\text{짝수})$ 인 경우이므로

x, y, z 의 순서쌍 (x, y, z) 는

$$(2, 0, 1), (2, 1, 0)$$

즉, 이때의 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} = 6$$

(i), (ii)에서 은희의 점수가 짝수인 경우의 수는

$$8 + 6 = 14$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{14}{27}$

정답_ ①

참고 (i)을 만족시키는 순서쌍 중 $(0, 1, 2)$ 는 은희가 0번 이기고 1번 지고 2번 비기는 경우를 의미한다.

이때의 경우의 수는 y, z 를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로 같은 것

이 있는 순열의 수를 이용하여 $\frac{3!}{2!} = 3$ 과 같이 구할 수 있다.

나머지 경우의 수 역시 이와 같이 같은 것이 있는 순열의 수를 이용하여 구할 수 있다.

217

6개의 문자를 일렬로 나열하는 모든 경우의 수는

$$6! = 720$$

두 문자 a 와 b 가 이웃하고 두 문자 a 와 c 는 이웃하지 않아야 하므로 a, b 의 나열 순서에 따라 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) a, b 의 순서로 이웃하는 경우

a 와 c 는 이웃하지 않으면서 a 가 c 보다 왼쪽에 있어야 하므로 (a, b) 의 한 묶음과 c 를 각각 V로 생각하여 V, V, d, e, f 를 일렬로 나열한 후, 첫 번째 V는 a, b , 두 번째 V는 c 로 바꾸면 된다.

즉, 이때의 경우의 수는

$$\frac{5!}{2!} = 60$$

(ii) b, a 의 순서로 이웃하는 경우

a 와 c 는 이웃하지 않으면서 a 가 c 보다 왼쪽에 있어야 하므로 d, e, f 를 먼저 일렬로 나열한 후, 그 사이사이와 양 끝의 네 자리 중 두 자리를 택하여 왼쪽 자리에 (b, a) 의 한 묶음을 나열하고 오른쪽 자리에 c 를 나열하면 된다.

즉, 이때의 경우의 수는

$$3! \times {}_4C_2 = 6 \times 6 = 36$$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 경우의 수는

$$60 + 36 = 96$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{96}{720} = \frac{2}{15}$$

정답_ ②

218

원 위의 10개의 점 중에서 3개의 점을 택하는 모든 경우의 수는

$${}_{10}C_3 = 120$$

원 위의 한 점을 A라고 하면 오른쪽 그림과 같이 $\angle A$ 를 꼭지각으로 하는 서로 다른 이등변삼각형 4개를 그릴 수 있다.

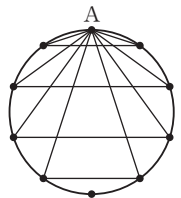
같은 방법으로 나머지 꼭지점에 대하여 4개씩 서로 다른 이등변삼각형을 그릴 수 있고, 원 위의 점은 10개이므로 만들 수 있는 이등변삼각형의 개수는

$$4 \times 10 = 40$$

따라서 구하는 확률은

$$p = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore 150p = 150 \times \frac{1}{3} = 50$$



정답_ 50

219

9개의 공이 들어 있는 상자에서 5개의 공을 동시에 꺼내는 모든 경우의 수는

$${}_9C_5 = {}_9C_4 = 126$$

9개의 숫자 1, 2, 3, ..., 9 중에서 홀수는 5개, 짝수는 4개이므로 공에 적혀 있는 수의 합이 홀수가 되려면 홀수를 홀수 개 뽑아야

하고, 곱이 5의 배수이려면 5는 반드시 뽑아야 한다.

(i) 홀수 1개, 짝수 4개를 뽑는 경우

5는 반드시 뽑혀야 하므로 홀수를 뽑는 경우의 수는 1

짝수 4개 중에서 4개를 뽑는 경우의 수는

$${}_4C_4=1$$

즉, 이때의 경우의 수는

$$1 \times 1 = 1$$

(ii) 홀수 3개, 짝수 2개를 뽑는 경우

5는 반드시 뽑혀야 하므로 나머지 4개의 홀수 중에서 2개를 뽑아야 한다.

즉, 홀수를 뽑는 경우의 수는

$${}_4C_2=6$$

짝수 4개 중에서 2개를 뽑는 경우의 수는

$${}_4C_2=6$$

즉, 이때의 경우의 수는

$$6 \times 6 = 36$$

(iii) 홀수 5개를 뽑는 경우

홀수가 모두 5개이므로 이때의 경우의 수는 1

(i)~(iii)에서 조건을 만족시키는 경우의 수는

$$1 + 36 + 1 = 38$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{38}{126} = \frac{19}{63}$$

정답_ ③

220

5명의 연주 순서를 임의로 정하는 모든 경우의 수는

$$5! = 120$$

A가 B보다 먼저 연주하는 순서로 정해지는 사건을 A, A, B 사이에 2명의 연주자만이 연주하는 순서로 정해지는 사건을 B라고 하면 사건 $A \cap B$ 는 A가 먼저 연주한 뒤에 바로 이어서 B가 아닌 2명의 연주자가 연주하고 그 뒤에 바로 B가 연주하는 사건이다.

(i) A가 B보다 먼저 연주하는 순서로 정해지는 경우

A, B 두 사람을 모두 V로 생각하여 5명의 순서를 정한 후, 첫 번째 V를 A, 두 번째 V를 B로 바꾸면 된다.

즉, 이때의 경우의 수는

$$\frac{5!}{2!} = 60$$

$$\therefore P(A) = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$$

(ii) A, B 사이에 2명의 연주자만이 연주하는 순서로 정해지는 경우

먼저 A, B의 연주 순서를 정하고 A, B를 제외한 나머지 3명 중에서 A, B 사이에 연주할 2명을 택하여 발표 순서를 정한 다음, 연주 순서가 정해진 4명을 한 묶음으로 생각하여 나머지 1명과 함께 연주 순서를 정하면 된다.

즉, 이때의 경우의 수는

$$2! \times {}_3P_2 \times 2! = 24$$

$$\therefore P(B) = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}$$

(iii) A가 B보다 먼저 연주하고 A, B 사이에 2명의 연주자만이 연주하는 순서로 정해지는 경우

A가 먼저 연주한 뒤에 바로 이어서 B가 아닌 2명의 연주자가

연주하고 그 뒤에 바로 B가 연주하는 경우는 사건 B 중에서 A, B의 연주 순서가 정해져 있는 경우이다.

즉, 이때의 경우의 수는

$${}_3P_2 \times 2! = 12$$

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{12}{120} = \frac{1}{10}$$

(i)~(iii)에서 구하는 확률은

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

정답_ ②

221

5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 서로 다른 4개를 택하여 만들 수 있는 모든 네 자리의 자연수의 개수는

$${}_5P_4 = 120$$

이 중에서 하나의 수를 택할 때, 택한 수가 홀수인 사건을 A, 3400 이상인 사건을 B라고 하면 사건 $A \cap B$ 는 택한 수가 홀수이면서 3400 이상인 사건이다.

(i) 택한 수가 홀수인 경우

일의 자리의 숫자로 가능한 것은 1, 3, 5의 3가지

그 각각에 대하여 나머지 세 자리의 숫자를 정하는 경우의 수는

$${}_4P_3 = 24$$

즉, 택한 수가 홀수인 경우의 수는

$$3 \times 24 = 72$$

$$\therefore P(A) = \frac{72}{120} = \frac{3}{5}$$

(ii) 택한 수가 3400 이상인 경우

3400 이상인 수는 $34\square\square$, $35\square\square$, $4\square\square\square$, $5\square\square\square$ 의 꼴이다.

$34\square\square$ 의 꼴의 자연수의 개수는

$${}_3P_2 = 6$$

$35\square\square$ 의 꼴의 자연수의 개수는

$${}_3P_2 = 6$$

$4\square\square\square$ 의 꼴의 자연수의 개수는

$${}_4P_3 = 24$$

$5\square\square\square$ 의 꼴의 자연수의 개수는

$${}_4P_3 = 24$$

즉, 택한 수가 3400 이상인 경우의 수는

$$6 + 6 + 24 + 24 = 60$$

$$\therefore P(B) = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$$

(iii) 택한 수가 홀수이면서 3400 이상인 경우

홀수이면서 3400 이상인 수는 다음과 같다.

㉠ $34\square1$ 또는 $34\square5$ 의 꼴의 자연수의 개수는

$$2 \times {}_2P_1 = 2 \times 2 = 4$$

㉡ $35\square1$ 의 꼴의 자연수의 개수는

$${}_2P_1 = 2$$

㉢ $4\square\square1$ 또는 $4\square\square3$ 또는 $4\square\square5$ 의 꼴의 자연수의 개수는

$$3 \times {}_3P_2 = 3 \times 6 = 18$$

㉣ $5\square\square1$ 또는 $5\square\square3$ 의 꼴의 자연수의 개수는

$$2 \times {}_3P_2 = 2 \times 6 = 12$$

㉠~㉣에서 택한 수가 홀수이면서 3400 이상인 경우의 수는

$$4+2+18+12=36$$

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$$

(i)~(iii)에서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{3}{5} + \frac{1}{2} - \frac{3}{10} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

즉, $p=5$, $q=4$ 이므로

$$p+q=5+4=9$$

정답 9

222

8개의 공이 들어 있는 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내는 모든 경우의 수는

$${}_8C_2=28$$

서로 다른 색의 공을 꺼내고 얻은 점수가 24 이하의 짝수인 사건을 A , 같은 색의 공을 꺼내고 얻은 점수가 24 이하의 짝수인 사건을 B 라고 하자.

꺼낸 공이 서로 다른 색이면 점수가 12이므로 24 이하의 짝수 조건을 만족시킨다. 즉, 서로 다른 색의 공을 꺼내기만 하면 되므로 이때의 경우의 수는

$${}_4C_1 \times {}_4C_1 = 4 \times 4 = 16$$

$$\therefore P(A) = \frac{16}{28} = \frac{4}{7}$$

같은 색의 공을 꺼내고 얻은 점수가 24 이하의 짝수인 경우의 수는 다음과 같이 공의 색에 따라 나누어 구할 수 있다.

(i) 흰 공을 2개 꺼내는 경우

흰 공에 적혀 있는 수는 1, 2, 3, 4이므로 꺼낸 두 공에 적혀 있는 수의 곱이 24 이하의 짝수가 되는 경우는 흰 공 4개 중에서 2개를 꺼내는 경우에서 홀수가 적혀 있는 공 2개를 꺼내는 경우를 제외하면 된다.

즉, 이때의 경우의 수는

$${}_4C_2 - {}_2C_2 = 6 - 1 = 5$$

(ii) 검은 공을 2개 꺼내는 경우

검은 공에 적혀 있는 수는 4, 5, 6, 7이므로 꺼낸 두 공에 적혀 있는 수의 곱이 24 이하의 짝수가 되는 경우는 4와 5, 4와 6을 뽑는 2가지이다.

(i), (ii)에서 같은 색의 공을 꺼내고 얻은 점수가 24 이하의 짝수인 경우의 수는 $5+2=7$ 이므로

$$P(B) = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$$

두 사건 A , B 는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{4}{7} + \frac{1}{4} = \frac{23}{28}$$

즉, $p=28$, $q=23$ 이므로

$$p+q=28+23=51$$

정답 51

223

정의역 X 의 원소가 6개, 공역 Y 의 원소가 5개이므로 치역과 공역이 같은 함수가 되려면 정의역의 원소 중 2개는 함수값이 같고 나머지는 모두 달라야 한다.

정의역의 원소 중 함수값이 같은 두 원소를 택하는 경우의 수는

${}_6C_2=15$ 이므로 치역과 공역이 같은 함수 $f: X \rightarrow Y$ 의 개수는 $15 \times 5! = 1800$

함수 f 에 대하여 $f(1)f(2)f(3)=f(4)f(5)f(6)$ 이라면

$$\begin{aligned} f(1)f(2)f(3)f(4)f(5)f(6) &= \{f(1)f(2)f(3)\}^2 \\ &= \{f(4)f(5)f(6)\}^2 \end{aligned}$$

에서 함수 f 의 모든 함수값의 곱이 어떤 자연수의 제곱인 수가 되어야 한다.

함숫값이 같은 정의역의 두 원소의 함수값이 k 인 사건을 A_k 라고 하면 $P(A_k)$ 의 값은 다음과 같다.

(i) $k=1$ 인 경우

$f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), f(6)$ 의 값은 1, 1, 2, 3, 4, 6이므로 모든 함수값의 곱은

$$1 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 6 = 144 = 12^2$$

이때 $f(1)f(2)f(3)=f(4)f(5)f(6)=12$ 에서

$$f(1)f(2)f(3)=1 \times 2 \times 6, f(4)f(5)f(6)=1 \times 3 \times 4$$

인 함수 f 의 개수는

$$3! \times 3! = 36$$

$$f(1)f(2)f(3)=1 \times 3 \times 4, f(4)f(5)f(6)=1 \times 2 \times 6$$

인 함수 f 의 개수는

$$3! \times 3! = 36$$

$$\therefore P(A_1) = \frac{36+36}{1800} = \frac{1}{25}$$

(ii) $k=2$ 인 경우

$f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), f(6)$ 의 값은 1, 2, 2, 3, 4, 6이므로 모든 함수값의 곱은

$$1 \times 2 \times 2 \times 3 \times 4 \times 6 = 288$$

이 값은 어떤 자연수의 제곱인 수가 아니므로 $k=2$ 일 때 조건을 만족시키는 함수 f 는 존재하지 않는다.

$$\therefore P(A_2) = 0$$

(iii) $k=3$ 인 경우

$f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), f(6)$ 의 값은 1, 2, 3, 3, 4, 6이므로 모든 함수값의 곱은

$$1 \times 2 \times 3 \times 3 \times 4 \times 6 = 432$$

이 값은 어떤 자연수의 제곱인 수가 아니므로 $k=3$ 일 때 조건을 만족시키는 함수 f 는 존재하지 않는다.

$$\therefore P(A_3) = 0$$

(iv) $k=4$ 인 경우

$f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), f(6)$ 의 값은 1, 2, 3, 4, 4, 6이므로 모든 함수값의 곱은

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 4 \times 6 = 576 = 24^2$$

이때 $f(1)f(2)f(3)=f(4)f(5)f(6)=24$ 에서

$$f(1)f(2)f(3)=1 \times 4 \times 6, f(4)f(5)f(6)=2 \times 3 \times 4$$

인 함수 f 의 개수는

$$3! \times 3! = 36$$

$$f(1)f(2)f(3)=2 \times 3 \times 4, f(4)f(5)f(6)=1 \times 4 \times 6$$

인 함수 f 의 개수는

$$3! \times 3! = 36$$

$$\therefore P(A_4) = \frac{36+36}{1800} = \frac{1}{25}$$

(v) $k=6$ 인 경우

$f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), f(6)$ 의 값은 1, 2, 3, 4, 6, 6이므로 모든 함수값의 곱은

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 6 \times 6 = 864$$

이 값은 어떤 자연수의 제곱인 수가 아니므로 $k=6$ 일 때 조건을 만족시키는 함수 f 는 존재하지 않는다.

$$\therefore P(A_6)=0$$

(i)~(v)에서 사건 A_1, A_2, A_3, A_4, A_6 은 모두 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+P(A_4)+P(A_6) \\ = \frac{1}{25}+0+0+\frac{1}{25}+0=\frac{2}{25}$$

정답_ ②

224

8장의 카드 중에서 3장의 카드를 동시에 꺼내는 모든 경우의 수는 ${}_8C_3=56$

카드에 적혀 있는 수 중에서 연속하는 자연수가 적어도 2개인 사건을 A 라고 하면 A^c 은 연속하는 자연수가 1개 이하, 즉 연속하는 자연수가 없는 사건이다.

카드에 적혀 있는 세 수를 a, b, c ($a < b < c$)라고 할 때, 세 수가 연속하지 않는 자연수이려면 b 의 값으로 가능한 것은 3, 4, 5, 6이므로 a, b, c 의 값을 정하는 경우의 수는 다음과 같다.

(i) $b=3$ 인 경우

a 의 값으로 가능한 것은 1의 1개

c 의 값으로 가능한 것은 5, 6, 7, 8의 4개

즉, 이때의 경우의 수는

$$1 \times 4 = 4$$

(ii) $b=4$ 인 경우

a 의 값으로 가능한 것은 1, 2의 2개

c 의 값으로 가능한 것은 6, 7, 8의 3개

즉, 이때의 경우의 수는

$$2 \times 3 = 6$$

(iii) $b=5$ 인 경우

a 의 값으로 가능한 것은 1, 2, 3의 3개

c 의 값으로 가능한 것은 7, 8의 2개

즉, 이때의 경우의 수는

$$3 \times 2 = 6$$

(iv) $b=6$ 인 경우

a 의 값으로 가능한 것은 1, 2, 3, 4의 4개

c 의 값으로 가능한 것은 8의 1개

즉, 이때의 경우의 수는

$$4 \times 1 = 4$$

(i)~(iv)에서 세 수가 연속하지 않는 경우의 수는

$$4+6+6+4=20 \text{이므로}$$

$$P(A^c) = \frac{20}{56} = \frac{5}{14}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{5}{14} = \frac{9}{14}$$

정답_ ④

225

한 개의 주사위를 세 번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$$6 \times 6 \times 6 = 216$$

눈의 수의 최솟값이 2 이하인 사건을 A 라고 하면 A^c 은 눈의 수의 최솟값이 3 이상인 사건이다.

이때 한 개의 주사위를 세 번 던져서 나오는 눈의 수의 최솟값이 3 이상이라면 세 눈의 수가 모두 3, 4, 5, 6 중 하나이어야 하므로 그 경우의 수는

$$4 \times 4 \times 4 = 64$$

$$\therefore P(A^c) = \frac{64}{216} = \frac{8}{27}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$$

즉, $p=27$, $q=19$ 이므로

$$p+q=27+19=46$$

정답_ 46

주의 세 눈의 수의 최솟값이 2 이하인 경우를 최솟값이 1인 경우와 2인 경우로 나누어 구하는 것은 다소 복잡하다.

세 눈의 최솟값이 1인 경우는 나온 세 눈 중에서 1이 한 개인 경우와 1이 두 개인 경우로 나누어서 생각해야 한다.

또, 1이 한 개인 경우도 나머지 두 눈의 수가 서로 다른 수일 때와 같은 수일 때로 나누어 경우의 수를 각각 구해야 한다.

따라서 이 문제의 경우에는 여사건을 이용하는 것이 훨씬 간단하다.

226

한 개의 주사위를 5번 던져서 나오는 모든 경우의 수는 6^5

$(a-b)(b-c)(c-d)(d-e)=0$ 인 사건을 A 라고 하면 A^c 은 $(a-b)(b-c)(c-d)(d-e) \neq 0$, 즉

$a \neq b$ 이고 $b \neq c$ 이고 $c \neq d$ 이고 $d \neq e$

인 사건이다.

이때 a, b, c, d, e 는 주사위의 눈의 수이므로 다음과 같이 순서대로 경우의 수를 구할 수 있다.

(i) a 의 값으로 가능한 것은 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6가지

(ii) $a \neq b$ 이므로 b 의 값으로 가능한 것은 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 a 의 값으로 정해진 것을 제외한 5가지

(iii) $b \neq c$ 이므로 c 의 값으로 가능한 것은 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 b 의 값으로 정해진 것을 제외한 5가지

(iv) $c \neq d$ 이므로 d 의 값으로 가능한 것은 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 c 의 값으로 정해진 것을 제외한 5가지

(v) $d \neq e$ 이므로 e 의 값으로 가능한 것은 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 d 의 값으로 정해진 것을 제외한 5가지

(i)~(v)에서 ' $a \neq b$ 이고 $b \neq c$ 이고 $c \neq d$ 이고 $d \neq e$ '인 경우의 수는 $6 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 6 \times 5^4$

$$\therefore P(A^c) = \frac{6 \times 5^4}{6^5} = \frac{5^4}{6^4} = \frac{625}{1296}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c) \\ = 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296}$$

정답_ ④

주의 사건 A^c 을 눈의 수 a, b, c, d, e 가 모두 서로 다른 수인 사건으로 착각하여 A^c 의 경우의 수를 ${}_5P_5=720$ 으로 구하지 않도록 주의한다.

예를 들어 $a=1, b=2, c=1, d=2, e=1$ 인 경우에도

$$(a-b)(b-c)(c-d)(d-e)=1 \neq 0 \text{이 성립함을 확인할 수 있다.}$$

이를 놓치지 않도록 유의하자.

04 조건부확률

227

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

정답_ $\frac{1}{3}$

228

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{에서} \\ P(A \cap B) &= P(A) + P(B) - P(A \cup B) \\ &= \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{5}{6} = \frac{1}{3} \\ \therefore P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

정답_ $\frac{2}{3}$

229

$$\begin{aligned} P(A|B) &= P(B|A) \text{에서} \\ \frac{P(A \cap B)}{P(B)} &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \therefore P(A) = P(B) \\ \text{이때 } P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{이므로} \\ 1 &= 2P(A) - \frac{1}{4} \\ 2P(A) &= \frac{5}{4} \quad \therefore P(A) = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

정답_ ③

230

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{3} \text{이므로} \\ P(A \cap B) &= \frac{1}{3}P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \\ \text{따라서} \\ P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{2} \\ \text{이므로} \\ P(A^c \cap B^c) &= P((A \cup B)^c) \\ &= 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

정답_ $\frac{1}{2}$

231

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0.2 \text{이므로} \\ P(A \cap B) &= 0.2P(B) \\ P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{에서} \\ 0.8 &= 0.4 + P(B) - 0.2P(B) \\ 0.8P(B) &= 0.4 \quad \therefore P(B) = 0.5 \end{aligned}$$

..... ㉠

$P(B) = 0.5$ 를 ㉠에 대입하면

$$P(A \cap B) = 0.2 \times 0.5 = 0.1$$

$$\therefore P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.1}{0.4} = 0.25$$

정답_ 0.25

232

뽑은 한 명이 여학생인 사건을 A , 학원 버스를 이용하는 학생인 사건을 B 라고 하면

$$P(A) = \frac{5}{6}, P(A \cap B) = \frac{1}{3}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{6}} = \frac{2}{5}$$

정답_ $\frac{2}{5}$

233

조사에 참여한 학생 20명 중에서 임의로 선택한 한 명이 진로활동 B 를 선택한 학생인 사건을 A , 1학년 학생인 사건을 B 라고 하면 주어진 표에서

$$P(A) = \frac{9}{20}, P(A \cap B) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{9}{20}} = \frac{5}{9}$$

정답_ ②

다른 풀이

조사에 참여한 학생 20명 중에서 임의로 선택한 한 명이 진로활동 B 를 선택한 학생인 사건을 A , 1학년 학생인 사건을 B 라고 하면 주어진 표에서

$$n(A) = 9, n(A \cap B) = 5$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{5}{9}$$

234

뽑은 한 명이 수학 가형을 선택한 학생인 사건을 A , 여학생인 사건을 B 라고 하면 수학 가형을 선택한 여학생인 사건은 $A \cap B$ 이다.

전체 학생 수는

$$18 + 16 = 34$$

수학 가형을 선택한 여학생 수는

$$16 - 7 = 9$$

수학 가형을 선택한 전체 학생 수는

$$12 + 9 = 21$$

$$\therefore P(A) = \frac{21}{34}, P(A \cap B) = \frac{9}{34}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{9}{34}}{\frac{21}{34}} = \frac{3}{7}$$

정답_ $\frac{3}{7}$

다른 풀이

뽑은 한 명이 수학 가형을 선택한 학생인 사건을 A , 여학생인 사건을 B 라고 하면 수학 가형을 선택한 여학생인 사건은 $A \cap B$ 이다. 여학생 16명 중에서 수학 나형을 선택한 여학생이 7명이므로 수학 가형을 선택한 여학생 수는

$$n(A \cap B) = 16 - 7 = 9$$

$$\therefore n(A) = 12 + 9 = 21$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ &= \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7} \end{aligned}$$

참고 주어진 조건을 표로 나타내면 다음과 같다.

(단위: 명)

	남학생	여학생	합계
가형	12	9	21
나형	6	7	13
합계	18	16	34

235

주사위의 두 눈의 수 a, b 에 대하여 $a \times b$ 가 8의 배수인 사건을 A , $a+b \geq 10$ 인 사건을 B 라고 하자.

한 개의 주사위를 두 번 던져 나오는 모든 경우의 수는

$$6 \times 6 = 36$$

눈의 수 a, b 를 순서쌍 (a, b) 로 나타내면 $a \times b$ 가 8의 배수인 경우는 다음과 같다.

(i) $ab=8$ 인 경우: $(2, 4), (4, 2)$ 의 2가지

(ii) $ab=16$ 인 경우: $(4, 4)$ 의 1가지

(iii) $ab=24$ 인 경우: $(4, 6), (6, 4)$ 의 2가지

(i)~(iii)에서 $a \times b$ 가 8의 배수인 경우의 수는

$$2+1+2=5$$

이므로

$$P(A) = \frac{5}{36}$$

$a \times b$ 가 8의 배수이면서 $a+b \geq 10$ 인 경우는 $(4, 6), (6, 4)$ 의 2가지이므로

$$P(A \cap B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{5}{36}} = \frac{2}{5}$$

정답 ①

참고 두 사건 $A, A \cap B$ 의 경우의 수를 각각 구했다면

$$P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} \text{를 이용하여 빠르게 조건부확률을 계산해도 된다.}$$

236

임의로 뽑은 한 명이 노란색 등산 모자를 쓴 회원인 사건을 A , 여자인 사건을 B 라고 하면 주어진 표에서

$$P(A) = \frac{9}{45} = \frac{1}{5}, P(B) = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}, P(A \cap B) = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$$

임의로 뽑은 한 명의 모자가 노란색이었을 때 그 사람이 여자일 확률 p_1 은 사건 A 가 일어났을 때의 사건 B 의 조건부확률이므로

$$p_1 = P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{1}{5}} = \frac{2}{3}$$

임의로 뽑은 한 명이 여자였을 때 그 사람의 모자가 노란색일 확률 p_2 는 사건 B 가 일어났을 때의 사건 A 의 조건부확률이므로

$$p_2 = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{8}{15}} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore p_1 - p_2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

정답 $\frac{5}{12}$

다른 풀이

임의로 뽑은 한 명이 노란색 등산 모자를 쓴 회원인 사건을 A , 여자인 사건을 B 라고 하면 주어진 표에서 $n(A)=9, n(B)=24, n(A \cap B)=6$ 이므로

$$p_1 = P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3},$$

$$p_2 = P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore p_1 - p_2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

237

반 전체 학생 수는

$$x+15+8+7=x+30$$

이 반 학생 중에서 임의로 뽑은 한 명이 남학생인 사건을 A , 동생이 있는 학생인 사건을 B 라고 하면

$$P(A) = \frac{x+15}{x+30}, P(A \cap B) = \frac{x}{x+30}$$

임의로 뽑은 한 명이 남학생일 때, 그 학생이 동생이 있는 학생일 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{x}{x+30}}{\frac{x+15}{x+30}} = \frac{x}{x+15}$$

$$\text{즉, } \frac{x}{x+15} = \frac{1}{4} \text{이므로}$$

$$4x = x+15, 3x = 15$$

$$\therefore x = 5$$

정답 5

다른 풀이

이 반 학생 중에서 임의로 뽑은 한 명이 남학생인 사건을 A , 동생이 있는 학생인 사건을 B 라고 하면 주어진 표에서

$$n(A) = x+15, n(A \cap B) = x$$

임의로 뽑은 한 명이 남학생일 때, 그 학생이 동생이 있는 학생일 확률은

$$P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{x}{x+15} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore x = 5$$

238

봉사 활동에만 참가한 115명의 학생 중에서 남학생은 45명이므로 봉사 활동에만 참가한 여학생 수는

$$115-45=70$$

환경 미화에만 참가한 95명의 학생 중에서 여학생은 60명이므로
환경 미화에만 참가한 남학생 수는

$$95-60=35$$

이때 여학생은 150명, 남학생은 100명이므로 두 종류의 체험 학습에 모두 참가한 여학생, 남학생 수는 각각

$$150-70-60=20, 100-45-35=20$$

따라서 표로 정리하면 다음과 같다.

(단위: 명)

	봉사 활동	환경 미화	둘 다	합계
남학생	45	35	20	100
여학생	70	60	20	150
합계	115	95	40	250

이 학생들 중에서 임의로 뽑은 한 명이 두 종류의 체험 학습에 모두 참가한 학생인 사건을 A , 여학생인 사건을 B 라고 하면

$$P(A)=\frac{40}{250}=\frac{4}{25}, P(A \cap B)=\frac{20}{250}=\frac{2}{25}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A \cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{25}}{\frac{4}{25}}=\frac{1}{2}$$

정답_ ①

다른 풀이

뽑은 한 명이 두 종류의 체험 학습에 모두 참가한 학생인 사건을 A , 여학생인 사건을 B 라고 하면

$$n(A)=40, n(A \cap B)=20$$

$$\therefore P(B|A)=\frac{n(A \cap B)}{n(A)}=\frac{20}{40}=\frac{1}{2}$$

239

이 학교 학생 350명 중에서 남학생 수를 x 라고 하면 여학생 수는 $350-x$ 이다.

이 학교의 학생 중에서 임의로 선택한 1명이 동아리에 가입한 학생인 사건을 A , 남학생인 사건을 B 라고 하면

$$P(A)=\frac{0.8x+0.6(350-x)}{350}, P(A \cap B)=\frac{0.8x}{350},$$

$$P(A \cap B^c)=\frac{0.6(350-x)}{350}$$

동아리에 가입한 학생 중 임의로 선택한 1명이 남학생일 확률 p_1 은 사건 A 가 일어났을 때의 사건 B 의 조건부확률이므로

$$\begin{aligned} p_1 &= P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ &= \frac{\frac{0.8x}{350}}{\frac{0.8x+0.6(350-x)}{350}} = \frac{0.8x}{0.8+0.6(350-x)} \end{aligned}$$

동아리에 가입한 학생 중 임의로 선택한 1명이 여학생일 확률 p_2 는 사건 A 가 일어났을 때의 사건 B^c 의 조건부확률이므로

$$\begin{aligned} p_2 &= P(B^c|A) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(A)} \\ &= \frac{\frac{0.6(350-x)}{350}}{\frac{0.8x+0.6(350-x)}{350}} = \frac{0.6(350-x)}{0.8+0.6(350-x)} \end{aligned}$$

이때 $p_1=p_2$ 이므로

$$\frac{0.8x}{0.8+0.6(350-x)} = \frac{0.6(350-x)}{0.8+0.6(350-x)}$$

$$8x=6(350-x), 8x=2100-6x$$

$$14x=2100 \quad \therefore x=150$$

따라서 이 학교의 남학생 수는 150이다.

정답_ 150

다른 풀이

이 학교 학생 350명 중에서 남학생 수를 x 라고 하면 여학생 수는 $350-x$ 이다.

이 학교의 학생 중에서 임의로 선택한 1명이 동아리에 가입한 학생인 사건을 A , 남학생인 사건을 B 라고 하면

$$n(A)=0.8x+0.6(350-x), n(A \cap B)=0.8x,$$

$$n(A \cap B^c)=0.6(350-x)$$

이므로

$$p_1=P(B|A)=\frac{n(A \cap B)}{n(A)}=\frac{0.8x}{0.8+0.6(350-x)}$$

$$p_2=P(B^c|A)=\frac{n(A \cap B^c)}{n(A)}=\frac{0.6(350-x)}{0.8+0.6(350-x)}$$

참고 이 학교의 남학생 수를 x 라고 하면 여학생 수는 $350-x$ 이므로 주어진 조건을 정리하면 다음 표와 같다.

(단위: 명)

	가입	미가입	합계
남학생	0.8x	0.2x	x
여학생	0.6(350-x)	0.4(350-x)	350-x
합계	210+0.2x	140-0.2x	350

240

첫 번째에 흰색 탁구공이 나오는 사건을 A , 두 번째에 노란색 탁구공이 나오는 사건을 B 라고 하면

$$P(A)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}, P(B|A)=\frac{8}{11}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B|A) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{8}{11} = \frac{8}{33} \end{aligned}$$

정답_ ④

241

경수만 당첨 제비를 뽑으려면 먼저 뽑는 은희는 당첨 제비가 아닌 것을 뽑고, 나중에 뽑는 경수는 당첨 제비를 뽑아야 한다.

은희가 당첨 제비가 아닌 것을 뽑는 사건을 A , 경수가 당첨 제비를 뽑는 사건을 B 라고 하면

$$P(A)=\frac{12-n}{12}, P(B|A)=\frac{n}{11}$$

이때 경수만 당첨 제비를 뽑을 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B|A) \\ &= \frac{12-n}{12} \times \frac{n}{11} = \frac{5}{33} \end{aligned}$$

즉, $33n(12-n)=660$ 에서

$$n(12-n)=20, n^2-12n+20=0$$

$$(n-2)(n-10)=0$$

$$\therefore n=2 \text{ 또는 } n=10$$

따라서 모든 n 의 값의 합은

$$2+10=12$$

정답_ 12

242

일곱 번째 뚜껑을 확인하고 작업이 끝나려면 여섯 번째까지 맞는 뚜껑 3개를 찾고 일곱 번째에 맞는 뚜껑을 찾아야 한다.

여섯 번째까지 맞는 뚜껑 3개를 찾는 사건을 A , 일곱 번째에 맞는 뚜껑을 찾는 사건을 B 라고 하면

$$P(A) = \frac{{}_4C_3 \times {}_6C_3}{{}_{10}C_6} = \frac{{}_4C_1 \times {}_6C_3}{{}_{10}C_4} = \frac{8}{21}$$

$$P(B|A) = \frac{1}{4} \text{ — 남은 뚜껑은 총 4개이고 그중 맞는 뚜껑은 1개이다.}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) \\ = \frac{8}{21} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{21}$$

정답_ ①

243

지민이가 딸기 맛 사탕을 뽑는 사건을 A , 태형이가 딸기 맛 사탕을 뽑는 사건을 B 라고 하자.

(i) 지민이가 딸기 맛 사탕을 뽑고, 태형이도 딸기 맛 사탕을 뽑을 확률은

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) \\ = \frac{2}{12} \times \frac{1}{11} = \frac{1}{66}$$

(ii) 지민이가 포도 맛 사탕을 뽑고, 태형이는 딸기 맛 사탕을 뽑을 확률은

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B|A^c) \\ = \frac{10}{12} \times \frac{2}{11} = \frac{5}{33}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B) \\ = \frac{1}{66} + \frac{5}{33} = \frac{1}{6}$$

정답_ ⑤

244

주머니 A에서 흰 공을 꺼내는 사건을 A , 주머니 B에서 검은 공을 꺼내는 사건을 B 라고 하자.

(i) 주머니 A에서 흰 공을 꺼내고, 주머니 B에서 검은 공을 꺼내는 경우

흰 공 2개를 주머니 B에 넣은 후 주머니 B에서 임의로 꺼낸 공 1개가 검은 공인 경우이므로 이때의 확률은

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) \\ = \frac{3}{5} \times \frac{5}{8+2} = \frac{3}{10}$$

(ii) 주머니 A에서 검은 공을 꺼내고, 주머니 B에서 검은 공을 꺼내는 경우

검은 공 1개를 주머니 B에 넣은 후 주머니 B에서 임의로 꺼낸 공 1개가 검은 공인 경우이므로 이때의 확률은

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B|A^c) \\ = \frac{2}{5} \times \frac{5+1}{8+1} = \frac{4}{15}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B) \\ = \frac{3}{10} + \frac{4}{15} = \frac{17}{30}$$

정답_ ⑤

245

첫 번째 시도에서 10점을 맞힌 이 선수가 두 번째 시도에서 10점을 맞히는 사건을 A , 세 번째 시도에서 10점을 맞히는 사건을 B 라고 하자.

(i) 두 번째 시도에서 10점을 맞히고 세 번째 시도에서도 10점을 맞힐 확률은

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) \\ = \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{16}{25}$$

(ii) 두 번째 시도에서 10점을 맞지 못하고 세 번째 시도에서 10점을 맞힐 확률은

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B|A^c) \\ = \left(1 - \frac{4}{5}\right) \times \frac{2}{3} = \frac{2}{15}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B) \\ = \frac{16}{25} + \frac{2}{15} = \frac{58}{75}$$

정답_ $\frac{58}{75}$

246

택한 학생 한 명이 걸어서 등교한 학생인 사건을 A , 버스로 등교한 학생인 사건을 B , 지각한 학생인 사건을 C 라고 하면 주어진 조건에 의하여

$$P(A) = \frac{80}{100} = \frac{4}{5}, P(B) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}, P(C|A) = \frac{1}{10},$$

$$P(C|B) = \frac{1}{20}$$

따라서 구하는 확률은

$$p = P(C) \\ = P(A \cap C) + P(B \cap C) \\ = P(A)P(C|A) + P(B)P(C|B) \\ = \frac{4}{5} \times \frac{1}{10} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{20} = \frac{9}{100}$$

$$\therefore 100p = 100 \times \frac{9}{100} = 9$$

정답_ 9

247

3개의 동전을 동시에 던져 앞면이 나오는 동전의 개수가 3인 사건을 A , 카드에 적혀 있는 두 수의 합이 소수인 사건을 B 라고 하자.

(i) 주머니 A에서 임의로 꺼낸 2장의 카드에 적혀 있는 두 수의 합이 소수인 경우

3개의 동전 모두 앞면이 나올 확률은

$$P(A) = \frac{1}{2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{8}$$

주머니 A에는 숫자 1, 1, 2, 2, 3, 3이 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 들어 있으므로 1과 1, 1과 2, 2와 3이 적혀 있는 카드를 동시에 꺼낼 때 두 수의 합이 소수이다.

즉, 이때의 확률은

$$P(B|A) = \frac{{}_2C_2 + {}_2C_1 \times {}_2C_1 + {}_2C_1 \times {}_2C_1}{{}_6C_2} = \frac{3}{5}$$

$$\therefore P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

$$= \frac{1}{8} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{40}$$

(ii) 주머니 B에서 임의로 꺼낸 2장의 카드에 적혀 있는 두 수의 합이 소수인 경우

앞면이 나오는 동전의 개수가 2 이하일 확률은

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

$$= 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

주머니 B에는 3, 3, 4, 4, 5, 5가 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 들어 있으므로 3과 4가 적혀 있는 카드를 동시에 꺼낼 때에만 두 수의 합이 소수이다.

즉, 이때의 확률은

$$P(B|A^c) = \frac{{}_2C_1 \times {}_2C_1}{{}_6C_2} = \frac{4}{15}$$

$$\therefore P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B|A^c)$$

$$= \frac{7}{8} \times \frac{4}{15} = \frac{7}{30}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$$

$$= \frac{3}{40} + \frac{7}{30} = \frac{37}{120}$$

정답_ ⑤

248

남학생 60명, 여학생 40명 중에서 임의로 뽑은 한 명이 모자를 쓴 학생인 사건을 A, 여학생인 사건을 B라고 하자.

사건 $A \cap B$ 는 모자를 쓴 여학생을 뽑는 사건이고, 사건 $A \cap B^c$ 은 모자를 쓴 남학생을 뽑는 사건이므로

$$P(A \cap B) = \frac{10}{60+40} = \frac{1}{10}$$

$$P(A \cap B^c) = \frac{15}{60+40} = \frac{3}{20}$$

$$\therefore P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{3}{20} = \frac{1}{4}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{5}$$

정답_ ③

249

이 회사의 제품 P 중에서 임의로 택한 하나가 공장 A에서 생산된 제품인 사건을 A, 공장 B에서 생산된 제품인 사건을 B, 불량품인 사건을 E라고 하면

$$P(A \cap E) = P(A)P(E|A)$$

$$= \frac{60}{100} \times \frac{1}{100} = \frac{3}{500}$$

$$P(B \cap E) = P(B)P(E|B)$$

$$= \frac{40}{100} \times \frac{2}{100} = \frac{1}{125}$$

$$\therefore P(E) = P(A \cap E) + P(B \cap E)$$

$$= \frac{3}{500} + \frac{1}{125} = \frac{7}{500}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|E) = \frac{P(B \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{125}}{\frac{7}{500}} = \frac{4}{7}$$

즉, $p=7$, $q=4$ 이므로

$$p+q=7+4=11$$

정답_ 11

250

두 주머니 A, B에서 각각 임의로 한 장씩 꺼낸 카드에 적혀 있는 두 수의 합이 짝수인 사건을 A, 주머니 A에서 꺼낸 카드에 적혀 있는 수가 홀수인 사건을 B라고 하자.

사건 $A \cap B$ 는 모두 홀수가 적혀 있는 카드를 꺼내는 사건이고, 사건 $A \cap B^c$ 은 모두 짝수가 적혀 있는 카드를 꺼내는 사건이므로

$$P(A \cap B) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$$

$$P(A \cap B^c) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$$

$$\therefore P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$$

$$= \frac{9}{25} + \frac{4}{25} = \frac{13}{25}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{9}{25}}{\frac{13}{25}} = \frac{9}{13}$$

정답_ ⑤

참고 두 자연수의 덧셈에서 가능한 모든 경우는 (짝수)+(짝수)=(짝수), (짝수)+(홀수)=(홀수), (홀수)+(짝수)=(홀수), (홀수)+(홀수)=(짝수)이므로 두 자연수의 합이 짝수이려면 두 수가 모두 짝수이거나 두 수가 모두 홀수이어야 한다.

251

상자 A를 택하는 사건을 A, 상자 B를 택하는 사건을 B, 흰 공 1개, 검은 공 1개를 꺼내는 사건을 E라고 하면

$$P(A \cap E) = P(A)P(E|A)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{{}_2C_1 \times {}_4C_1}{{}_6C_2} = \frac{4}{15}$$

$$P(B \cap E) = P(B)P(E|B)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{{}_3C_1 \times {}_2C_1}{{}_5C_2} = \frac{3}{10}$$

$$\therefore P(E) = P(A \cap E) + P(B \cap E)$$

$$= \frac{4}{15} + \frac{3}{10} = \frac{17}{30}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{4}{15}}{\frac{17}{30}} = \frac{8}{17}$$

정답_ ①

252

양면에 모두 '당첨'이 적혀 있는 카드, 양면에 아무 것도 적혀 있지 않은 카드, 한 면에는 '당첨'이 적혀 있고 다른 면에는 아무 것도

적혀 있지 않은 카드를 꺼내는 사건을 순서대로 A, B, C 라 하고, 책상 위에 놓인 카드의 보이는 면에 '당첨'이 적혀 있는 사건을 E 라고 하면

$$P(A \cap E) = P(A)P(E|A) \\ = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$$

$$P(B \cap E) = P(B)P(E|B) \\ = \frac{1}{3} \times 0 = 0$$

$$P(C \cap E) = P(C)P(E|C) \\ = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$\therefore P(E) = P(A \cap E) + P(B \cap E) + P(C \cap E) \\ = \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

따라서 구하는 확률은

$$p = P(A|E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore 30p = 30 \times \frac{2}{3} = 20$$

정답_ 20

253

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라고 하면 표본공간 S 는

$S = \{HH, HT, TH, TT\}$ 이고

$A = \{HH, HT, TH\}$, $B = \{HH, TT\}$, $A \cap B = \{HH\}$

$\neg$. $A = \{HH, HT, TH\}$ 이므로 $P(A) = \frac{3}{4}$ (거짓)

$\neg$. $A \cap B = \{HH\}$ 이므로 $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ (참)

$\neg$. $B = \{HH, TT\}$ 이므로 $P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$$\therefore P(A)P(B) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

$\neg$ 에서 $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ 이므로

$$P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$$

즉, 두 사건 A, B 는 서로 종속이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 $\neg$ 이다.

정답_ ②

254

표본공간을 S 라고 하면 $S = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ 이고

$A = \{1, 2, 5, 10\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $C = \{2, 3, 5, 7\}$

$\neg$. $A \cap B = \{2, 10\}$ 이므로 $P(A \cap B) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

$$\text{이때 } P(A)P(B) = \frac{4}{10} \times \frac{5}{10} = \frac{1}{5} \text{이므로}$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

즉, 두 사건 A, B 는 서로 독립이다.

$\neg$. $B \cap C = \{2\}$ 이므로 $P(B \cap C) = \frac{1}{10}$

$$\text{이때 } P(B)P(C) = \frac{5}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{1}{5} \text{이므로}$$

$$P(B \cap C) \neq P(B)P(C)$$

즉, 두 사건 B, C 는 서로 종속이다.

$\neg$. $A \cap C = \{2, 5\}$ 이므로 $P(A \cap C) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

$$\text{이때 } P(A)P(C) = \frac{4}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{4}{25} \text{이므로}$$

$$P(A \cap C) \neq P(A)P(C)$$

즉, 두 사건 A, C 는 서로 종속이다.

따라서 두 사건이 서로 독립인 것은 $\neg$ 이다.

정답_ ①

255

$A = \{1, 2, 3\}$ 이라고 하면

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

① $B = \{2, 3\}$ 이라고 하면 $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ 이므로

$$P(A)P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

이때 $A \cap B = \{2, 3\}$ 이므로

$$P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$$

② $C = \{3, 4\}$ 라고 하면 $P(C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ 이므로

$$P(A)P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

이때 $A \cap C = \{3\}$ 이므로

$$P(A \cap C) = \frac{1}{6}$$

$$\therefore P(A \cap C) = P(A)P(C)$$

③ $D = \{4, 5\}$ 라고 하면 $P(D) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ 이므로

$$P(A)P(D) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

이때 $A \cap D = \emptyset$ 이므로

$$P(A \cap D) = 0$$

$$\therefore P(A \cap D) \neq P(A)P(D)$$

④ $E = \{3, 4, 5\}$ 라고 하면 $P(E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ 이므로

$$P(A)P(E) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

이때 $A \cap E = \{3\}$ 이므로

$$P(A \cap E) = \frac{1}{6}$$

$$\therefore P(A \cap E) \neq P(A)P(E)$$

⑤ $F = \{4, 5, 6\}$ 이라고 하면 $P(F) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ 이므로

$$P(A)P(F) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

이때 $A \cap F = \emptyset$ 이므로

$$P(A \cap F) = 0$$

$$\therefore P(A \cap F) \neq P(A)P(F)$$

따라서 주어진 사건과 독립인 사건은 ②이다.

정답_ ②

256

표본공간을 S 라고 하면

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\neg$. $A_3 = \{3, 6\}$, $A_4 = \{4\}$ 이므로 $A_3 \cap A_4 = \emptyset$
 $\therefore P(A_3 \cap A_4) = 0$
 즉, 두 사건 A_3, A_4 는 서로 배반이다. (참)
 $\cup$. $A_2 = \{2, 4, 6\}$, $A_3 = \{3, 6\}$, $A_2 \cap A_3 = \{6\}$ 이므로
 $P(A_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $P(A_3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $P(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{6}$
 이때 $P(A_2)P(A_3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ 이므로
 $P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3)$
 즉, 두 사건 A_2, A_3 은 서로 독립이다. (참)
 $\cap$. $A_2 = \{2, 4, 6\}$, $A_4 = \{4\}$, $A_2 \cap A_4 = \{4\}$ 이므로
 $P(A_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $P(A_4) = \frac{1}{6}$, $P(A_2 \cap A_4) = \frac{1}{6}$
 이때 $P(A_2)P(A_4) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$ 이므로
 $P(A_2 \cap A_4) \neq P(A_2)P(A_4)$
 즉, 두 사건 A_2, A_4 는 서로 종속이다. (거짓)
 따라서 옳은 것은 $\neg, \cup$ 이다.

정답_ ④

257

$\neg$. $A \subset B$ 이면 $A \cap B = A$ 이므로
 $P(A \cap B) = P(A)$
 $\therefore P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$ (참)
 $\cup$. 두 사건 A, B 가 서로 배반이면 $A \cap B = \emptyset$ 이므로
 $P(A \cap B) = 0$
 $\therefore P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0}{P(A)} = 0$ (참)
 $\cap$. 두 사건 A, B 가 서로 독립이면
 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
 이때 $P(A) > 0$, $P(B) > 0$ 이므로
 $P(A \cap B) = P(A)P(B) > 0$
 즉, $P(A \cap B) \neq 0$ 이므로 서로 독립인 두 사건 A, B 는 서로 배반이 아니다. (거짓)
 따라서 옳은 것은 $\neg, \cup$ 이다.

정답_ $\neg, \cup$

258

$\neg$. 두 사건 A, B 가 서로 독립이면
 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
 $\therefore P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$,
 $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B)$
 이때 $P(A) \neq P(B)$ 이면 $P(A|B) \neq P(B|A)$ (거짓)
 $\cup$. 두 사건 A, B 가 서로 독립이면 두 사건 A^c, B^c 도 서로 독립
 이므로
 $P(A^c \cap B^c) = P(A^c)P(B^c)$ (참)
 $\cap$. 두 사건 A, B 가 서로 배반이면 $A \cap B = \emptyset$ 이므로
 $P(A \cap B) = 0$
 $\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
 이때 $P(A \cup B) \leq 1$ 이므로
 $P(A) + P(B) \leq 1$ (참)

따라서 옳은 것은 $\cup, \cap$ 이다.

정답_ ④

참고 두 사건 A, B 가 서로 독립이면 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ 이므로
 $P(A^c)P(B^c) = \{1 - P(A)\}\{1 - P(B)\}$
 $= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B)$
 $= 1 - \{P(A) + P(B) - P(A \cap B)\}$
 $= 1 - P(A \cup B)$
 $= P((A \cup B)^c)$
 $= P(A^c \cap B^c)$

따라서 두 사건 A^c, B^c 도 서로 독립이다.

259

$\neg$. 두 사건 A, B 가 서로 독립이면
 $P(A|B) = P(A)$
 또, 두 사건 A, B^c 도 서로 독립이므로
 $P(A|B^c) = P(A)$
 $\therefore P(A|B) = P(A|B^c)$ (참)
 $\cup$. 두 사건 A, B 가 서로 독립이면 A 와 B^c , A^c 과 B^c 도 각각 서로 독립이므로
 $P(A|B^c) = P(A)$, $P(A^c|B^c) = P(A^c)$
 $\therefore P(A^c|B^c) = P(A^c)$
 $= 1 - P(A)$
 $= 1 - P(A|B^c)$ (참)
 $\cap$. 두 사건 A, B 가 서로 독립이면
 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
 또, 두 사건 A, B^c 도 서로 독립이므로
 $P(A \cap B^c) = P(A)P(B^c)$
 $\therefore P(A)P(B) + P(A)P(B^c) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$
 $= P(A)$ (참)

따라서 옳은 것은 $\neg, \cup, \cap$ 이다.

정답_ $\neg, \cup, \cap$

참고 두 사건 A, B 가 서로 독립이면 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ 이므로
 $P(A)P(B^c) = P(A)\{1 - P(B)\}$
 $= P(A) - P(A)P(B)$
 $= P(A) - P(A \cap B)$
 $= P(A \cap B^c)$

따라서 두 사건 A, B^c 도 서로 독립이다.

260

두 사건 A, B 가 서로 독립이므로
 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
 따라서 $\frac{1}{12} = \frac{1}{3}P(B)$ 이므로 $P(B) = \frac{1}{4}$

정답_ $\frac{1}{4}$

261

$P(B^c) = 3P(B)$ 에서
 $1 - P(B) = 3P(B)$, $4P(B) = 1$
 $\therefore P(B) = \frac{1}{4}$
 이때 두 사건 A, B 가 서로 독립이므로
 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
 따라서 $\frac{1}{6} = P(A) \times \frac{1}{4}$ 이므로

$$P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

정답_ 2/3

262

두 사건 A, B 에 대하여 $P(A|B) = P(A)$ 가 성립하므로 두 사건 A, B 는 서로 독립이다.

즉, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ 에서

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{2}P(B) \quad \therefore P(B) = \frac{2}{5}$$

$$\begin{aligned} \therefore P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5} = \frac{7}{10} \end{aligned}$$

정답_ ③

263

두 사건 A, B 가 서로 독립이므로

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{5}$$

..... ㉠

이때

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{7}{10}$$

..... ㉡

이므로 ㉠을 ㉡에 대입하면

$$P(A) + P(B) - \frac{1}{5} = \frac{7}{10}$$

$$\therefore P(A) + P(B) = \frac{9}{10}$$

..... ㉢

$P(A) = x, P(B) = y$ 로 놓으면 ㉠, ㉢에서

$$xy = \frac{1}{5}, x + y = \frac{9}{10}$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$x\left(\frac{9}{10} - x\right) = \frac{1}{5}, x^2 - \frac{9}{10}x + \frac{1}{5} = 0$$

$$10x^2 - 9x + 2 = 0, (2x - 1)(5x - 2) = 0$$

$$\text{즉, } x = \frac{1}{2} \text{ 또는 } x = \frac{2}{5} \text{ 이므로}$$

$$x = \frac{1}{2}, y = \frac{2}{5} \text{ 또는 } x = \frac{2}{5}, y = \frac{1}{2}$$

이때 $P(A) > P(B)$ 이므로

$$P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{2}{5}$$

즉, $p = 2, q = 1$ 이므로

$$p + q = 2 + 1 = 3$$

정답_ 3

264

(i) 두 사건 A, B 가 서로 배반인 경우

$$P(A \cap B) = 0 \text{ 이므로 } P(A \cup B) = P(A) + P(B) \text{ 에서}$$

$$0.8 = 0.5 + P(B)$$

$$\therefore a = P(B) = 0.3$$

(ii) 두 사건 A, B 가 서로 독립인 경우

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \text{ 이므로}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) \text{ 에서}$$

$$0.8 = 0.5 + P(B) - 0.5P(B), 0.5P(B) = 0.3$$

$$\text{즉, } P(B) = 0.6 \text{ 이므로}$$

$$P(B^c) = 1 - 0.6 = 0.4$$

이때 두 사건 A, B 가 서로 독립이면 두 사건 A, B^c 도 서로 독립이므로

$$P(A \cap B^c) = P(A)P(B^c)$$

$$\therefore \beta = P(A \cup B^c)$$

$$= P(A) + P(B^c) - P(A \cap B^c)$$

$$= P(A) + P(B^c) - P(A)P(B^c)$$

$$= 0.5 + 0.4 - 0.5 \times 0.4 = 0.7$$

(i), (ii)에서

$$a\beta = 0.3 \times 0.7 = 0.21$$

정답_ ②

265

두 사건 A, B 가 서로 독립이므로

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{4}$$

$$\therefore P(B) = \frac{1}{4P(A)}$$

또, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ 이므로

$$a - \frac{1}{4} = P(A) + \frac{1}{4P(A)} - \frac{1}{4}$$

$$\therefore a = P(A) + \frac{1}{4P(A)}$$

이때 $P(A) > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\boxed{P(A \cap B) = \frac{1}{4} \text{ 이므로 } P(A) \geq \frac{1}{4}}$$

$$a = P(A) + \frac{1}{4P(A)}$$

$$\geq 2\sqrt{P(A) \times \frac{1}{4P(A)}} = 1$$

(단, 등호는 $P(A) = \frac{1}{4P(A)}$ 일 때 성립한다.)

따라서 실수 a 의 최솟값은 1이다.

정답_ ④

참고 산술평균과 기하평균의 관계

$$a > 0, b > 0 \text{ 일 때, } \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \text{ (단, 등호는 } a=b \text{ 일 때 성립한다.)}$$

266

두 명 중 한 명만 명중시키는 경우는 찬우는 명중시키고 영수는 명중시키지 못하거나 찬우는 명중시키지 못하고 영수는 명중시키는 경우이다.

찬우와 영수가 동시에 활을 쏘 때, 찬우가 명중시키는 사건을 A , 영수가 명중시키는 사건을 B 라고 하면 두 사건 A, B 는 서로 독립이므로 A 와 B^c , A^c 과 B 도 각각 서로 독립이다.

(i) 찬우는 명중시키고 영수는 명중시키지 못할 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cap B^c) &= P(A)P(B^c) \\ &= \frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{3}{5}\right) = \frac{4}{15} \end{aligned}$$

(ii) 찬우는 명중시키지 못하고 영수는 명중시킬 확률은

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B) &= P(A^c)P(B) \\ &= \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \frac{3}{5} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B) = \frac{4}{15} + \frac{1}{5} = \frac{7}{15}$$

정답_ ④

267

구슬에 적혀 있는 두 수의 합이 짝수이려면 두 수 모두 짝수이거나 두 수 모두 홀수이어야 한다.

두 상자 A, B에서 꺼낸 구슬에 적혀 있는 수가 짝수인 사건을 각각 A, B라고 하면

$$P(A) = \frac{2}{5}, P(B) = \frac{3}{5}, P(A^c) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5},$$

$$P(B^c) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

이때 두 사건 A, B는 서로 독립이므로 두 사건 A^c , B^c 도 서로 독립이다.

(i) 두 상자 A, B에서 꺼낸 구슬에 적혀 있는 수가 모두 짝수일 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B) \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25} \end{aligned}$$

(ii) 두 상자 A, B에서 꺼낸 구슬에 적혀 있는 수가 모두 홀수일 확률은

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B^c) &= P(A^c)P(B^c) \\ &= \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{25} \end{aligned}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$p = P(A \cap B) + P(A^c \cap B^c)$$

$$= \frac{6}{25} + \frac{6}{25} = \frac{12}{25}$$

$$\therefore 100p = 100 \times \frac{12}{25} = 48$$

정답_ 48

268

전체 학생 중에서 임의로 뽑은 한 명이 여학생인 사건을 A, 지난 달에 교내 도서관을 이용한 경험이 있는 학생인 사건을 B라고 하면 주어진 표에서

$$P(A) = \frac{150}{350} = \frac{3}{7}, P(B) = \frac{280}{350} = \frac{4}{5}, P(A \cap B) = \frac{c}{350}$$

이때 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$\text{즉, } \frac{c}{350} = \frac{3}{7} \times \frac{4}{5} \text{ 이므로}$$

$$c = 120$$

정답_ 120

269

A반이 우승하려면 B반보다 두 세트를 먼저 이겨야 한다.

이때 각 세트의 경기는 서로 독립이므로 A반이 우승할 확률은 다음과 같다.

(i) A반이 1세트, 2세트에서 모두 이길 확률은

$$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

(ii) A반이 1세트에서 이기고, 2세트에서 지고, 3세트에서 이길 확률은

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{27}$$

(iii) A반이 1세트에서 지고, 2세트, 3세트에서 모두 이길 확률은

$$\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{27}$$

(i)~(iii)에서 구하는 확률은

$$\frac{4}{9} + \frac{4}{27} + \frac{4}{27} = \frac{20}{27}$$

정답_ ③

270

이 선수가 두 투수 A, B와의 대결에서 안타를 치는 사건은 모두 독립이므로 각 확률은 다음과 같다.

(i) 투수 A와의 2회 대결에서 모두 안타를 치고 투수 B와의 대결에서도 안타를 칠 확률은

$$0.2 \times 0.2 \times 0.25 = 0.01$$

(ii) 투수 A와의 2회 대결에서 모두 안타를 치고 투수 B와의 대결에서는 안타를 치지 못할 확률은

$$0.2 \times 0.2 \times (1 - 0.25) = 0.03$$

(iii) 투수 A와의 2회 대결 중 한 번만 안타를 치고 투수 B와의 대결에서 안타를 칠 확률은

$${}_2C_1 \times 0.2 \times (1 - 0.2) \times 0.25 = 0.08$$

(i)~(iii)에서 구하는 확률은

$$0.01 + 0.03 + 0.08 = 0.12$$

정답_ ②

참고 안타를 치는 경우를 ○, 치지 못하는 경우를 ×로 나타내면 다음과 같다.

	투수 A	투수 B	안타 친 횟수(회)
(i)	○	○	3
(ii)	○	○	2
(iii)	○	×	2
	×	○	2

271

임의로 택한 한 명이 남학생인 사건을 A, 대중교통을 이용하여 등교하는 학생인 사건을 B라고 하면

$$P(A) = \frac{240}{450} = \frac{8}{15}, P(B) = \frac{150}{450} = \frac{1}{3}$$

이때 두 사건 A, B는 서로 독립이므로 두 사건 A^c , B도 서로 독립이다.

임의로 택한 한 명이 대중교통을 이용하여 등교하는 여학생일 확률은

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B) &= P(A^c)P(B) \\ &= \{1 - P(A)\}P(B) \\ &= \left(1 - \frac{8}{15}\right) \times \frac{1}{3} = \frac{7}{45} \end{aligned}$$

대중교통을 이용하여 등교하는 여학생 수를 n이라고 하면

$$\frac{n}{450} = \frac{7}{45} \quad \therefore n = 70$$

따라서 대중교통을 이용하여 등교하는 여학생 수는 70이다.

정답_ 70

272

한 개의 주사위를 네 번 던져 나오는 네 눈의 수 a, b, c, d의 곱 $a \times b \times c \times d$ 가 27의 배수이려면 a, b, c, d 중 적어도 3개가 3의 배수이어야 한다.

즉, 3의 배수인 눈이 3번 또는 4번 나와야 한다.

한 개의 주사위를 한 번 던져 3의 배수인 눈이 나올 확률은

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ 이므로}$$

(i) 3의 배수인 눈이 3번 나올 확률은

$${}_4C_3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{8}{81}$$

(ii) 3의 배수인 눈이 4번 나올 확률은

$${}_4C_4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{81}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{8}{81} + \frac{1}{81} = \frac{1}{9}$$

정답_ ①

273

20인 이상 단체 식사를 위한 방이 2개, 예약이 4건이므로 단체 식사를 위한 방이 부족한 경우는 예약 4건 중 취소가 1건 이하일 때이다.

각 예약 건에 대하여 예약을 취소할 확률이 $\frac{2}{5}$ 이므로

(i) 취소가 0건일 확률은

$${}_4C_0 \times \left(\frac{2}{5}\right)^0 \times \left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{81}{625}$$

(ii) 취소가 1건일 확률은

$${}_4C_1 \times \left(\frac{2}{5}\right)^1 \times \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{216}{625}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{81}{625} + \frac{216}{625} = \frac{297}{625}$$

정답_ $\frac{297}{625}$

274

적어도 2명이 완치되는 사건을 A라고 하면 A^C 은 0명 또는 1명이 완치되는 사건이다.

이 의약품의 완치율이 50 %, 즉 $\frac{1}{2}$ 이므로

(i) 0명이 완치될 확률은

$${}_5C_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

(ii) 1명이 완치될 확률은

$${}_5C_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{32}$$

(i), (ii)에서 5명 중 0명 또는 1명이 완치될 확률은

$$P(A^C) = \frac{1}{32} + \frac{5}{32} = \frac{3}{16}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^C) \\ = 1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}$$

정답_ ④

275

주사위 한 개를 한 번 던질 때, 4의 약수의 눈이 나올 확률은

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

8회의 시행에서 4의 약수의 눈이 나오는 횟수를

x ($x=0, 1, 2, \dots, 8$)라고 하면 4의 약수가 아닌 눈이 나오는 횟

수는 $8-x$ 이므로 얻은 점수의 합은

$$20x + 10(8-x) = 10x + 80$$

얻은 점수의 합이 140점이려면

$$10x + 80 = 140$$

$$10x = 60 \quad \therefore x = 6$$

따라서 구하는 확률은 8회의 시행 중 4의 약수의 눈이 6번 나올 확률과 같으므로

$${}_8C_6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{7}{64}$$

정답_ ④

276

주사위 한 개를 한 번 던질 때, 소수의 눈이 나올 확률은

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

주사위 한 개를 10번 던질 때, 소수의 눈이 나오는 횟수를

x ($x=0, 1, 2, \dots, 10$)라고 하면 소수가 아닌 눈이 나오는 횟수는 $10-x$ 이므로 원점에서 출발한 점 P의 좌표는

$$x - (10-x) = 2x - 10$$

점 P의 좌표가 2가 되려면

$$2x - 10 = 2, 2x = 12 \quad \therefore x = 6$$

따라서 구하는 확률은 10번의 시행 중 소수의 눈이 6번 나올 확률과 같으므로

$${}_{10}C_6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{105}{512}$$

즉, $p=512$, $q=105$ 이므로

$$p+q=512+105=617$$

정답_ 617

277

(i) 주사위를 던져서 나오는 눈의 수가 짝수이고, 동전 2개를 던져 2개 모두 앞면이 나올 확률은

$$\frac{3}{6} \times {}_2C_2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8}$$

(ii) 주사위를 던져서 나오는 눈의 수가 홀수이고, 동전 3개를 던져 앞면이 2개 나올 확률은

$$\frac{3}{6} \times {}_3C_2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{16}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{8} + \frac{3}{16} = \frac{5}{16}$$

정답_ ⑤

278

(i) 주머니에서 흰 공을 꺼내고, 화살을 3번 쏘아 2번 명중시킬 확률은

$$\frac{3}{4} \times {}_3C_2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{1}{6}$$

(ii) 주머니에서 검은 공을 꺼내고, 화살을 4번 쏘아 2번 명중시킬 확률은

$$\frac{1}{4} \times {}_4C_2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{27}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{6} + \frac{2}{27} = \frac{13}{54}$$

정답 $\frac{13}{54}$

279

A팀이 5:4로 이기려면 A팀의 선수 5명은 모두 승부차기에 성공하고 B팀의 선수 5명 중 4명은 성공, 1명은 실패해야 한다.

따라서 구하는 확률은

$${}_5C_5 \times (0.8)^5 \times {}_5C_4 \times (0.8)^4 \times (0.2)^1 = 0.8^5 \times 5 \times 0.8^4 \times 0.2 = 0.8^9$$

정답 ④

280

a로 가능한 값은 0, 1, 2, 3, 4, 5

b로 가능한 값은 0, 1, 2, 3, 4

즉, $a-b=3$ 이 되도록 하는 순서쌍 (a, b) 는

$(5, 2), (4, 1), (3, 0)$

이다.

(i) 주사위를 5번 던져 홀수의 눈이 5회 나오고, 동전을 4번 던져 앞면이 2회 나올 확률은

$${}_5C_5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 \times {}_4C_2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{256}$$

(ii) 주사위를 5번 던져 홀수의 눈이 4회 나오고, 동전을 4번 던져 앞면이 1회 나올 확률은

$${}_5C_4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 \times {}_4C_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{128}$$

(iii) 주사위를 5번 던져 홀수의 눈이 3회 나오고, 동전을 4번 던져 앞면이 0회 나올 확률은

$${}_5C_3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times {}_4C_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{256}$$

(i)~(iii)에서 구하는 확률은

$$\frac{3}{256} + \frac{5}{128} + \frac{5}{256} = \frac{9}{128}$$

즉, $p=128, q=9$ 이므로

$$p+q=128+9=137$$

정답 137

281

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던져서 나오는 눈의 수가 서로 같은 사건을 A, 동전의 앞면이 나온 횟수와 뒷면이 나온 횟수가 서로 같은 사건을 B라고 하면 사건 A에서 동전을 2개 던지므로 구하는 확률은 $P(A|B)$ 이다.

(i) 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던져서 나오는 눈의 수가 서로 같고, 동전 2개를 동시에 던져 동전의 앞면이 나온 횟수와 뒷면이 나온 횟수가 서로 같을 확률은 앞면 1개, 뒷면 1개

$$\frac{6}{36} \times {}_2C_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{12}$$

(ii) 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던져서 나오는 눈의 수가 서로 다르고, 동전 4개를 동시에 던져 동전의 앞면이 나온 횟수와 뒷면이 나온 횟수가 서로 같을 확률은 앞면 2개, 뒷면 2개

$$\frac{30}{36} \times {}_4C_2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{16}$$

(i), (ii)에서

$$P(B) = \frac{1}{12} + \frac{5}{16} = \frac{19}{48}$$

또, 사건 $A \cap B$ 는 위의 (i)과 같으므로

$$P(A \cap B) = \frac{1}{12}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{19}{48}} = \frac{4}{19}$$

정답 $\frac{4}{19}$

282

서로 다른 주사위 A, B를 동시에 던져 나오는 모든 경우의 수는

$$6 \times 6 = 36$$

$a > b$ 인 사건을 A, $a+b$ 가 짝수인 사건을 B라 하고 눈의 수 a, b 를 순서쌍 (a, b) 로 나타내면

$$A = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5)\}$$

$$\therefore P(A) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12} \quad \text{①}$$

사건 $A \cap B$ 는 $a > b$ 이면서 $a+b$ 가 짝수인 사건이므로

$$A \cap B = \{(3, 1), (4, 2), (5, 1), (5, 3), (6, 2), (6, 4)\}$$

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \quad \text{②}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{12}} = \frac{2}{5} \quad \text{③}$$

즉, $p=5, q=2$ 이므로

$$p+q=5+2=7 \quad \text{④}$$

정답 7

채점 기준	비율
① $a > b$ 일 확률 구하기	40 %
② $a > b$ 이면서 $a+b$ 가 짝수일 확률 구하기	30 %
③ $a > b$ 일 때, $a+b$ 가 짝수일 확률 구하기	20 %
④ $p+q$ 의 값 구하기	10 %

283

임의로 택한 한 사람이 암이라고 진단을 받는 사건을 A, 실제로 암에 걸린 사람인 사건을 B라고 하면

$$P(A|B) = \frac{80}{100} = \frac{4}{5}, P(A|B^c) = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$$

조사 대상은 암에 걸린 사람 48명과 암에 걸리지 않은 사람 432명
이므로

$$P(B) = \frac{48}{48+432} = \frac{1}{10}, P(B^c) = \frac{432}{48+432} = \frac{9}{10}$$

임의로 택한 한 사람이 암에 걸린 사람이고, 이 사람이 암에 걸렸다고 진단받을 확률은

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B) = \frac{1}{10} \times \frac{4}{5} = \frac{2}{25} \quad \text{①}$$

또, 임의로 택한 한 사람이 암에 걸리지 않은 사람이고, 이 사람이 암에 걸렸다고 진단받을 확률은

$$P(A \cap B^c) = P(B^c)P(A|B^c) \\ = \frac{9}{10} \times \frac{1}{20} = \frac{9}{200} \quad \text{②}$$

$$\therefore P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c) \\ = \frac{2}{25} + \frac{9}{200} = \frac{25}{200} = \frac{1}{8} \quad \text{③}$$

따라서 구하는 확률은

$$p = P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{25}}{\frac{1}{8}} = \frac{16}{25} \\ \therefore 100p = 100 \times \frac{16}{25} = 64 \quad \text{④}$$

정답_ 64

채점 기준	비율
① 암에 걸린 사람이 암이라고 진단받을 확률 구하기	30 %
② 암에 걸리지 않은 사람이 암이라고 진단받을 확률 구하기	30 %
③ 암이라고 진단받을 확률 구하기	30 %
④ 100p의 값 구하기	10 %

284

표본공간을 S 라고 하면 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$,
 $A = \{2, 3, 5, 7\}$ 이므로

$$P(A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \quad \text{①}$$

두 사건 A, B 가 서로 독립이므로

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{2}{5}P(B)$$

이때 $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$ 이므로

$$\frac{2}{5}P(B) = \frac{1}{5} \quad \therefore P(B) = \frac{1}{2} \quad \text{②}$$

즉, $n(B) = 5$ 이고 $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$ 에서 $n(A \cap B) = 2$ 이므로 사건 B 는 사건 A 의 원소 중에서 2개, 사건 A^c 의 원소 중에서 3개를 원소로 가진다.

따라서 사건 B 의 개수는

$${}_4C_2 \times {}_6C_3 = 120 \quad \text{③}$$

정답_ 120

채점 기준	비율
① 사건 A 의 확률 구하기	20 %
② 사건 B 의 확률 구하기	40 %
③ 사건 B 의 개수 구하기	40 %

285

전체 회원 수는

$$30 + 30 + 6 + x = 66 + x$$

임의로 택한 1명이 여성인 사건을 A , 미혼인 사건을 B 라고 하면

$$P(A) = \frac{30+x}{66+x}, P(B) = \frac{6+x}{66+x}$$

택한 1명이 미혼의 여성인 사건은 $A \cap B$ 이므로

$$P(A \cap B) = \frac{x}{66+x} \quad \text{①}$$

이때 두 사건 A, B 가 서로 독립이므로

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$\frac{x}{66+x} = \frac{30+x}{66+x} \times \frac{6+x}{66+x} \quad \text{②}$$

$$x(66+x) = (30+x)(6+x)$$

$$66x + x^2 = x^2 + 36x + 180$$

$$30x = 180$$

$$\therefore x = 6 \quad \text{③}$$

정답_ 6

채점 기준	비율
① 임의로 택한 1명이 여성인 사건, 미혼인 사건을 각각 A, B 라 하고 $A, B, A \cap B$ 의 확률 구하기	30 %
② 두 사건 A, B 가 서로 독립임을 이용하여 식 세우기	40 %
③ x 의 값 구하기	30 %

286

수학 문제 3개를 풀면 2개를 맞히는 실력을 가진 학생이므로 이 학생이 수학 문제 1개를 풀어서 맞힐 확률은 $\frac{2}{3}$ 이다. ①

이 학생이 시험에서 합격하려면 3문제 또는 4문제 또는 5문제를 맞혀야 한다.

(i) 3문제를 맞힐 확률은

$${}_5C_3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{80}{243}$$

(ii) 4문제를 맞힐 확률은

$${}_5C_4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{80}{243}$$

(iii) 5문제를 맞힐 확률은

$${}_5C_5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^0 = \frac{32}{243} \quad \text{②}$$

(i)~(iii)에서 구하는 확률은

$$\frac{80}{243} + \frac{80}{243} + \frac{32}{243} = \frac{192}{243} = \frac{64}{81} \quad \text{③}$$

즉, $p = 81, q = 64$ 이므로

$$p + q = 81 + 64 = 145 \quad \text{④}$$

정답_ 145

채점 기준	비율
① 1문제를 풀어 맞힐 확률 구하기	10 %
② 3문제, 4문제, 5문제를 맞힐 확률 각각 구하기	60 %
③ 시험에서 합격할 확률 구하기	20 %
④ $p+q$ 의 값 구하기	10 %

287

흰 공 2개와 검은 공 3개가 들어 있는 상자에서 임의로 2개의 공을 꺼내어 같은 색의 공이 나오려면 흰 공을 2개 꺼내거나 검은 공을 2개 꺼내야 하므로 그 확률은

$$\frac{{}_2C_2 + {}_3C_2}{{}_5C_2} = \frac{2}{5} \quad \text{①}$$

이 게임을 한 번 하여 선물을 받으려면 3개의 동전을 던져 앞면이 3개 나오거나 4개의 동전을 던져 앞면이 3개 또는 4개 나와야 한다.

- (i) 주머니에서 같은 색의 공을 2개 꺼내고, 동전을 3개 던져 앞면이 3개 나올 확률은

$$\frac{2}{5} \times {}_3C_3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{20}$$

- (ii) 주머니에서 서로 다른 색의 공을 1개씩 꺼내고, 동전을 4개 던져 앞면이 3개 또는 4개 나올 확률은

$$\left(1 - \frac{2}{5}\right) \times \left\{{}_4C_3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 + {}_4C_4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0\right\} \\ = \frac{3}{5} \times \frac{5}{16} = \frac{3}{16} \quad \text{정답 2}$$

- (i), (ii)에서 구하는 확률은

$$p = \frac{1}{20} + \frac{3}{16} = \frac{19}{80} \quad \text{정답 3}$$

$$\therefore 400p = 400 \times \frac{19}{80} = 95 \quad \text{정답 4}$$

정답 95

채점 기준	비율
① 같은 색의 공이 나올 확률 구하기	30 %
② 공의 색에 따라 동전의 앞면이 3개 이상 나올 확률 각각 구하기	40 %
③ p의 값 구하기	20 %
④ 400p의 값 구하기	10 %

288

모든 경우의 수는

$${}_6C_2 \times {}_4C_2 = 90$$

- (i) 하연이가 흰 공을 2개 꺼내는 경우

주머니에 남아 있는 것은 흰 공 1개, 검은 공 3개이므로 범수가 어떻게 꺼내더라도 하연이가 꺼낸 흰 공이 범수가 꺼낸 흰 공보다 많다.

즉, 이때의 경우의 수는

$${}_3C_2 \times {}_4C_2 = 18$$

- (ii) 하연이가 흰 공 1개, 검은 공 1개를 꺼내는 경우

주머니에 남아 있는 것은 흰 공 2개, 검은 공 2개이므로 하연이가 꺼낸 흰 공이 범수가 꺼낸 흰 공보다 많으려면 범수는 검은 공만 2개 꺼내야 한다.

즉, 이때의 경우의 수는

$$({}_3C_1 \times {}_3C_1) \times {}_2C_2 = 9$$

- (i), (ii)에서 하연이가 꺼낸 흰 공이 범수가 꺼낸 흰 공보다 많은 사건을 A, 범수가 꺼낸 공이 모두 검은 공인 사건을 B라고 하면

$$P(A) = \frac{18+9}{90} = \frac{3}{10}$$

한편, 사건 $A \cap B$ 는 (i)에서 범수가 검은 공만 2개 꺼내는 경우와 (ii)의 경우이므로

$$P(A \cap B) = \frac{{}_3C_2 \times {}_3C_2 + 9}{90} = \frac{1}{5}$$

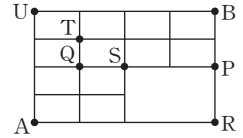
따라서 구하는 확률은

$$p = P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{10}} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore 300p = 300 \times \frac{2}{3} = 200 \quad \text{정답 200}$$

289

오른쪽 그림과 같이 네 지점 R, S, T, U를 정하고 택한 경로가 P 지점을 지나는 경로인 사건을 A, Q 지점을 지나지 않는 경로인 사건을 B라고 하자.



A 지점에서 출발하여 B 지점까지 최단 거리로 가려면 네 지점 R, S, T, U 중 하나를 반드시 지나야 한다.

A → R → B인 경우의 수는

$$1 \times 1 = 1$$

A → S → B인 경우의 수는

$$\frac{4!}{2! \times 2!} \times \frac{4!}{2! \times 2!} = 6 \times 6 = 36$$

A → T → B인 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!} \times \frac{4!}{3!} = 4 \times 4 = 16$$

A → U → B인 경우의 수는

$$1 \times 1 = 1$$

즉, A 지점에서 출발하여 B 지점까지 최단 거리로 가는 모든 경우의 수는

$$1 + 36 + 16 + 1 = 54$$

- (i) A → P → B로 갈 때, 최단 거리로 가는 경우 두 지점 R, S 중 하나를 반드시 지나야 한다.

A → R → P → B인 경우의 수는

$$1 \times 1 = 1$$

A → S → P → B인 경우의 수는

$$\frac{4!}{2! \times 2!} \times 1 \times 1 = 6 \times 1 \times 1 = 6$$

즉, A 지점에서 출발하여 P 지점을 지나 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 $1 + 6 = 7$ 이므로

$$P(A) = \frac{7}{54}$$

- (ii) A → Q → P → B로 갈 때, 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!} \times 1 \times 1 = 3 \times 1 \times 1 = 3$$

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{3}{54} = \frac{1}{18}$$

- (i), (ii)에서 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{7}{54}} = \frac{3}{7}$$

정답 3/7

다른 풀이

택한 경로가 P 지점을 지나지 않는 경로인 사건을 A, Q 지점을 지나지 않는 사건을 B라고 하면 (i), (ii)에서

$$n(A) = 7, n(A \cap B) = 3$$

$$\therefore P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{3}{7}$$

290

n회째의 시행 후에 말이 세 점 A, B, C에 도착하는 사건을 각각 A, B, C라 하고, (n+1)회째 시행 후에 말이 점 A에 도착하는 사건을 E라고 하면

$$P(E) = P(A \cap E) + P(B \cap E) + P(C \cap E)$$

이때 $(n+1)$ 회 시행 후에 말이 점 A에 있는 경우는 n 회 시행 후의 결과에 따라 다음과 같다.

(i) n 회 시행 후에 점 A에 도착하고, $(n+1)$ 회째 시행에서 6의 눈이 나오면 다시 점 A에 도착할 수 있으므로 이때의 확률은 $P(A \cap E) = P(A)P(E|A)$

$$= p_n \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6} p_n$$

(ii) n 회 시행 후에 점 B에 도착하고, $(n+1)$ 회째 시행에서 2의 눈이 나오면 다시 점 A에 도착할 수 있으므로 이때의 확률은 $P(B \cap E) = P(B)P(E|B)$

$$= q_n \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6} q_n$$

(iii) n 회 시행 후에 점 C에 도착하고, $(n+1)$ 회째 시행에서 1, 3, 4, 5의 눈이 나오면 다시 점 A에 도착할 수 있으므로 이때의 확률은

$$P(C \cap E) = P(C)P(E|C) = r_n \times \frac{4}{6} = \frac{2}{3} r_n$$

(i)~(iii)에서

$$P(E) = P(A \cap E) + P(B \cap E) + P(C \cap E)$$

$$= \frac{1}{6} p_n + \frac{1}{6} q_n + \frac{2}{3} r_n$$

따라서 $(n+1)$ 회 시행 후에 말이 점 A에 있을 확률은

$$p_{n+1} = \frac{1}{6} p_n + \frac{1}{6} q_n + \frac{2}{3} r_n \text{ 이므로}$$

$$a = \frac{1}{6}, b = \frac{1}{6}, c = \frac{2}{3}$$

$$\therefore a - b + 9c = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + 9 \times \frac{2}{3} = 6$$

정답 6

참고 (i)에서 n 회 시행 후에 점 A에 도착하고, $(n+1)$ 회째 시행에서 3의 배수만큼 움직여야 다시 점 A에 도착할 수 있다.

이때 3의 눈은 홀수이므로 규칙에 의하여 1만큼 움직여야 한다.

따라서 (i)의 경우에는 6의 눈이 나올 때만 가능하다.

마찬가지로 (ii)에서 5의 눈이 나오면 점 A에 도착할 수 없다.

291

상자 B에 들어 있는 공의 개수가 8인 사건을 A, 상자 B에 들어 있는 검은 공의 개수가 2인 사건을 B라고 하자.

한 번의 시행에서 상자 B에 넣는 공의 개수는 1 또는 2 또는 3이므로 4번의 시행 후 상자 B에 들어 있는 공의 개수가 8인 경우는 다음과 같다.

(i) 3개씩 두 번, 1개씩 두 번 넣는 경우

흰 공 2개와 검은 공 1개를 두 번 넣고 흰 공 1개와 검은 공 1개를 두 번 넣는 경우이므로 상자 B에 들어 있는 검은 공의 개수는 2이다.

이와 같이 되려면 주머니에서 숫자 1이 적혀 있는 카드를 2번, 숫자 4가 적혀 있는 카드를 2번 꺼내야 하므로 이때의 확률은

$$\frac{4!}{2! \times 2!} \times \left\{ \left(\frac{1}{4} \right)^2 \times \left(\frac{1}{4} \right)^2 \right\} = \frac{3}{128}$$

1, 1, 4, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수

(ii) 3개씩 한 번, 2개씩 두 번, 1개씩 한 번 넣는 경우

흰 공 2개와 검은 공 1개를 한 번 넣고 흰 공 1개와 검은 공 1개를 두 번 넣고 흰 공 1개를 한 번 넣는 경우이므로 상자 B에 들어 있는 검은 공의 개수는 3이다.

이와 같이 되려면 주머니에서 숫자 1이 적혀 있는 카드를 1번, 숫자 2 또는 3이 적혀 있는 카드를 2번, 숫자 4가 적혀 있는 카

드를 1번 꺼내야 하므로 이때의 확률은

$$\frac{4!}{2!} \times \left\{ \frac{1}{4} \times \left(\frac{2}{4} \right)^2 \times \frac{1}{4} \right\} = \frac{3}{16}$$

1, (2 또는 3), (2 또는 3), 4를 일렬로 나열하는 경우의 수

(iii) 2개씩 네 번 넣는 경우

흰 공 1개와 검은 공 1개를 네 번 넣는 경우이므로 상자 B에 들어 있는 검은 공의 개수는 4이다.

이와 같이 되려면 주머니에서 숫자 2 또는 3이 적혀 있는 카드를 4번 꺼내야 하므로 이때의 확률은

$$\left(\frac{2}{4} \right)^4 = \frac{1}{16}$$

(i)~(iii)에서

$$P(A) = \frac{3}{128} + \frac{3}{16} + \frac{1}{16} = \frac{35}{128}$$

또, 사건 $A \cap B$ 는 (i)의 경우이므로

$$P(A \cap B) = \frac{3}{128}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{128}}{\frac{35}{128}} = \frac{3}{35}$$

정답 ④

참고 1, 2, 3에서 중복을 허용하여 4개를 택하여 더한 값이 8이 되는 경우는

$$8 = 3 + 3 + 1 + 1 \text{ 또는 } 8 = 3 + 2 + 2 + 1 \text{ 또는 } 8 = 2 + 2 + 2 + 2$$

의 세 종류뿐이다.

292

헤미는 두 사건 A, B가 서로 독립이라고 생각하여

$P(A \cup B) = 0.7$ 을 얻었으므로 헤미의 계산에 의하여

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$

$$= 0.7$$

..... ㉠

지은이는 두 사건 A, B가 서로 배반이라고 생각하여

$P(A \cup B) = 0.9$ 를 얻었으므로 지은이의 계산에 의하여

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.9$$

..... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$$0.9 - P(A)P(B) = 0.7$$

즉, $P(A)P(B) = 0.2$ 이므로

$$\{P(A) - P(B)\}^2 = \{P(A) + P(B)\}^2 - 4P(A)P(B)$$

$$= 0.9^2 - 4 \times 0.2$$

$$= 0.81 - 0.8 = 0.01$$

$$\therefore |P(A) - P(B)| = \sqrt{0.01} = 0.1$$

정답 ①

293

$P(A)$ 는 첫 번째 던진 동전이 앞면이 나올 확률이므로

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

양수 k 에 대하여 $P(B)$ 는 동전을 10번 던졌을 때 앞면이 k 번 나올 확률이므로

$$P(B) = {}_{10}C_k \left(\frac{1}{2} \right)^k \left(\frac{1}{2} \right)^{10-k}$$

$$= {}_{10}C_k \left(\frac{1}{2} \right)^{10} \quad (\text{단, } k=1, 2, \dots, 10)$$

사건 $A \cap B$ 는 첫 번째 던진 동전이 앞면이 나오고, 이후 던진 9번 중 동전의 앞면이 $(k-1)$ 번 나올 확률이므로

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= \frac{1}{2} \times {}_9C_{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{9-(k-1)} \\ &= \frac{1}{2} \times {}_9C_{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^9 \quad (\text{단, } k=1, 2, \dots, 10) \end{aligned}$$

두 사건 A, B 가 서로 독립이므로

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$\frac{1}{2} \times {}_9C_{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1}{2} \times {}_{10}C_k \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \quad (\text{단, } k=1, 2, \dots, 10)$$

즉, $2 \times {}_9C_{k-1} = {}_{10}C_k$ 에서

$$\begin{aligned} 2 \times \frac{9!}{(k-1)! \times \{9-(k-1)\}!} &= \frac{10!}{k! \times (10-k)!} \\ 2 \times \frac{9!}{(k-1)! \times (10-k)!} &= \frac{10 \times 9!}{k \times (k-1)! \times (10-k)!} \\ 2 &= \frac{10}{k} \\ \therefore k &= 5 \end{aligned}$$

정답_ 5

294

A가 상금을 모두 가지려면 앞으로의 게임에서 A는 4번 더 이기고 그동안 B는 최대 2번만 더 이겨야 한다.

(i) 5번째 게임 후 A가 상금을 모두 가지는 경우

2번째, 3번째, 4번째, 5번째 게임에서 A가 모두 이겨야 하므로 이때의 확률은

$${}_4C_4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

(ii) 6번째 게임 후 A가 상금을 모두 가지는 경우

2번째, 3번째, 4번째, 5번째 게임 중에서 A가 세 번 이기고 6번째 게임에서 A가 이기는 경우이므로 이때의 확률은

4: 2로 A가 상금을 갖는다.

$${}_4C_3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

(iii) 7번째 게임 후 A가 상금을 모두 가지는 경우

2번째, 3번째, 4번째, 5번째, 6번째 게임 중에서 A가 세 번 이기고 7번째 게임에서 A가 이기는 경우이므로 이때의 확률은

4: 3으로 A가 상금을 갖는다.

$${}_5C_3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{32}$$

(i)~(iii)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{5}{32} = \frac{11}{32}$$

정답_ ③

295

동전을 두 번 던져 앞면이 나온 횟수가 2일 확률은

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

앞면이 나온 횟수가 0 또는 1일 확률은

$$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

처음에 문자 A가 보이도록 놓여 있던 카드가 시행 후 문자 B가 보이도록 놓으려면 뒤집는 횟수가 홀수이어야 한다.

즉, 구하는 확률은 5번의 시행 중 앞면이 2회 나오는 횟수가 1 또는 3 또는 5일 확률과 같으므로

$$\begin{aligned} p &= {}_5C_1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^4 + {}_5C_3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 + {}_5C_5 \times \left(\frac{1}{4}\right)^5 \times \left(\frac{3}{4}\right)^0 \\ &= \frac{5 \times 3^4}{4^5} + \frac{10 \times 3^2}{4^5} + \frac{1}{4^5} \\ &= \frac{31}{64} \end{aligned}$$

$$\therefore 128 \times p = 128 \times \frac{31}{64} = 62$$

정답_ 62

296

주사위를 던지는 상우는 0번 다리를 건널 수 없으므로 지수와 상우가 같은 다리를 건넌다면 1번, 2번, 3번, ..., 6번 다리를 동시에 건너게 된다.

즉, $n=1, 2, 3, \dots, 6$ 일 때, 지수가 동전 6개를 던져서 앞면이 n 개 나와 n 번 다리를 건널 확률은

$${}_6C_n \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{6-n} = {}_6C_n \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

또, $n=1, 2, 3, \dots, 6$ 일 때, 상우가 주사위 한 개를 던져서 n 의 눈이 나와 n 번 다리를 건널 확률은 $\frac{1}{6}$ 씩이다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} &{}_6C_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times \frac{1}{6} + {}_6C_2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times \frac{1}{6} + {}_6C_3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times \frac{1}{6} \\ &+ \dots + {}_6C_6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times \frac{1}{6} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times \frac{1}{6} \times ({}_6C_1 + {}_6C_2 + {}_6C_3 + \dots + {}_6C_6) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times \frac{1}{6} \times \{({}_6C_0 + {}_6C_1 + {}_6C_2 + \dots + {}_6C_6) - {}_6C_0\} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times \frac{1}{6} \times (2^6 - 1) \\ &= \frac{21}{128} \end{aligned}$$

즉, $p=128, q=21$ 이므로

$$p+q=128+21=149$$

정답_ 149

참고 이항계수의 성질

자연수 n 에 대하여

$$(1) {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \dots + {}_nC_n = 2^n$$

$$(2) {}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - {}_nC_3 + \dots + (-1)^n {}_nC_n = 0$$

$$(3) {}_nC_0 + {}_nC_2 + {}_nC_4 + \dots = 2^{n-1}$$

$$(4) {}_nC_0 + {}_nC_3 + {}_nC_5 + \dots = 2^{n-1}$$

III 통계

05 확률변수와 확률분포

297

확률의 총합은 1이므로

$$P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = 1$$

$$\frac{a}{4} + \frac{5}{8} + a^2 = 1, a^2 + \frac{a}{4} - \frac{3}{8} = 0$$

$$8a^2 + 2a - 3 = 0, (2a-1)(4a+3) = 0$$

$$\therefore a = \frac{1}{2} \text{ 또는 } a = -\frac{3}{4}$$

$$\text{이때 } 0 \leq P(X=x) \leq 1 \text{ 이어야 하므로 } a = \frac{1}{2}$$

정답_ ④

참고 $a = \frac{1}{2}$ 이므로 주어진 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
P(X=x)	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{4}$	1

298

확률의 총합은 1이므로

$$P(X=-3) + P(X=-1) + P(X=1) + P(X=3) = 1$$

$$\left(k - \frac{1}{3}\right) + \left(k - \frac{1}{9}\right) + \left(k - \frac{1}{9}\right) + \left(k - \frac{1}{3}\right) = 1$$

$$4k - \frac{8}{9} = 1, 4k = \frac{17}{9} \therefore k = \frac{17}{36}$$

정답_ $\frac{17}{36}$

299

$$P(X=x) = \frac{k}{x(x+1)} = k \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right)$$

확률의 총합은 1이므로

$$P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + \dots + P(X=20) = 1$$

$$k \left(1 - \frac{1}{2} \right) + k \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + k \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + k \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{21} \right) = 1$$

$$k \left(1 - \frac{1}{21} \right) = 1, \frac{20}{21} k = 1 \therefore k = \frac{21}{20}$$

정답_ $\frac{21}{20}$

300

$$\begin{aligned} P(X=x) &= \frac{a}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{a(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})} \\ &= a(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \end{aligned}$$

확률의 총합은 1이므로

$$P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + \dots + P(X=80) = 1$$

$$a\{(\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{4}-\sqrt{3}) + \dots + (\sqrt{81}-\sqrt{80})\} = 1$$

$$a(\sqrt{81}-1) = 1, 8a = 1 \therefore a = \frac{1}{8}$$

정답_ ②

301

확률의 총합은 1이므로

$$P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 1$$

$$a + \left(a + \frac{1}{4}\right) + \left(a + \frac{1}{2}\right) = 1$$

$$3a + \frac{3}{4} = 1, 3a = \frac{1}{4} \therefore a = \frac{1}{12}$$

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
P(X=x)	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{12}$	1

$$\therefore P(X \leq 2) = P(X=1) + P(X=2)$$

$$= \frac{1}{12} + \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$$

정답_ ⑤

302

확률의 총합은 1이므로

$$P(X=-2) + P(X=-1) + P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = 1$$

$$\frac{4}{a+1} + \frac{1}{a+1} + 0 + \frac{1}{a+1} + \frac{4}{a+1} = 1$$

$$\frac{10}{a+1} = 1, a+1 = 10 \therefore a = 9$$

$$\therefore P(X=x) = \frac{x^2}{10}$$

한편, $X^2 - X - 2 = 0$ 에서

$$(X+1)(X-2) = 0 \therefore X = -1 \text{ 또는 } X = 2$$

$$\therefore P(X^2 - X - 2 = 0) = P(X = -1) + P(X = 2)$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{2}{5} = \frac{1}{2}$$

정답_ $\frac{1}{2}$

303

확률의 총합은 1이므로

$$P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 1$$

$$\frac{a \times {}_4C_0}{12} + \frac{a \times {}_4C_1}{12} + \frac{a \times {}_4C_2}{12} + \frac{a \times {}_4C_3}{12} = 1$$

$$\frac{a}{12} \times (1 + 4 + 6 + 4) = 1$$

$$\frac{5}{4}a = 1 \therefore a = \frac{4}{5}$$

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
P(X=x)	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{15}$	1

$$\therefore P(2 \leq X \leq 3) = P(X=2) + P(X=3)$$

$$= \frac{2}{5} + \frac{4}{15} = \frac{2}{3}$$

정답_ ④

304

확률의 총합은 1이므로

$$P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 1$$

$$4a + \frac{3}{2}a + 2b + \frac{1}{2}b = 1$$

$$\frac{11}{2}a + \frac{5}{2}b = 1 \quad \therefore 11a + 5b = 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

한편, $P(X=2) = \frac{1}{4}P(X=0)$ 이므로

$$2b = \frac{1}{4} \times 4a \quad \therefore a = 2b \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면 $a = \frac{4}{27}, b = \frac{2}{27}$

따라서 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{16}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{1}{27}$	1

$$\therefore P(X=1 \text{ 또는 } X=3) = P(X=1) + P(X=3)$$

$$= \frac{2}{9} + \frac{1}{27} = \frac{7}{27}$$

정답 $\frac{7}{27}$

305

(1) 6개의 젤리 중에서 2개의 젤리를 꺼내는 경우의 수는

$${}_6C_2$$

꺼낸 2개의 젤리 중에서 분홍색 곰 모양의 젤리가 x 개인 경우의 수는

$${}_2C_x \times {}_4C_{2-x} \quad (x=0, 1, 2)$$

따라서 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = \frac{{}_2C_x \times {}_4C_{2-x}}{{}_6C_2} \quad (x=0, 1, 2)$$

(2) 분홍색 곰 모양의 젤리가 1개 이하로 나올 확률은

$$P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1)$$

$$= \frac{{}_2C_0 \times {}_4C_2}{{}_6C_2} + \frac{{}_2C_1 \times {}_4C_1}{{}_6C_2}$$

$$= \frac{2}{5} + \frac{8}{15} = \frac{14}{15}$$

$$\text{정답 } (1) P(X=x) = \frac{{}_2C_x \times {}_4C_{2-x}}{{}_6C_2} \quad (x=0, 1, 2) \quad (2) \frac{14}{15}$$

다른 풀이

(2) 분홍색 곰 모양의 젤리가 1개 이하로 나올 확률은

$$P(X \leq 1) = 1 - P(X=2)$$

$$= 1 - \frac{{}_2C_2 \times {}_4C_0}{{}_6C_2}$$

$$= 1 - \frac{1}{15} = \frac{14}{15}$$

306

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때 나오는 모든 경우의 수는

$$6 \times 6 = 36$$

$$X^2 - 6X + 8 = 0 \text{에서}$$

$$(X-2)(X-4) = 0 \quad \therefore X=2 \text{ 또는 } X=4$$

(i) $X=2$ 인 경우

두 주사위의 눈의 수의 합이 2가 되는 경우를 순서쌍으로 나타

내면 (1, 1)의 1가지이므로

$$P(X=2) = \frac{1}{36}$$

(ii) $X=4$ 인 경우

두 주사위의 눈의 수의 합이 4가 되는 경우를 순서쌍으로 나타내면 (1, 3), (2, 2), (3, 1)의 3가지이므로

$$P(X=4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

(i), (ii)에서

$$P(X^2 - 6X + 8 = 0) = P(X=2) + P(X=4)$$

$$= \frac{1}{36} + \frac{1}{12} = \frac{1}{9}$$

정답 $\frac{1}{9}$

307

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4이고 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = \frac{{}_4C_x \times {}_3C_{4-x}}{{}_7C_4} \quad (x=1, 2, 3, 4)$$

따라서 검은 공이 적어도 3개 나올 확률은

$$P(X=3) + P(X=4) = \frac{{}_4C_3 \times {}_3C_1}{{}_7C_4} + \frac{{}_4C_4 \times {}_3C_0}{{}_7C_4}$$

$$= \frac{12}{35} + \frac{1}{35} = \frac{13}{35}$$

정답 ③

308

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = {}_3C_x \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{3-x} \quad (x=0, 1, 2, 3)$$

따라서 앞면이 하나도 안 나오거나 3개 모두 앞면이 나올 확률은

$$P(X=0) + P(X=3) = {}_3C_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + {}_3C_3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

정답 ②

309

3의 배수가 적힌 공은 3, 6, 9의 3개이므로 확률변수 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = \frac{{}_3C_x \times {}_7C_{5-x}}{{}_{10}C_5} \quad (x=0, 1, 2, 3)$$

$$X^2 - 2X = 0 \text{에서}$$

$$X(X-2) = 0 \quad \therefore X=0 \text{ 또는 } X=2$$

$$\therefore P(X^2 - 2X = 0) = P(X=0) + P(X=2)$$

$$= \frac{{}_3C_0 \times {}_7C_5}{{}_{10}C_5} + \frac{{}_3C_2 \times {}_7C_3}{{}_{10}C_5}$$

$$= \frac{1}{12} + \frac{5}{12} = \frac{1}{2}$$

정답 $\frac{1}{2}$

310

6개의 숫자 중에서 3개의 수를 선택하는 경우의 수는

$${}_6C_3 = 20$$

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이므로

$X \leq 1$ 인 경우는 $X=0$ 또는 $X=1$

(i) $X=0$ 인 경우

0은 반드시 선택하고 1, 2, 3, 4, 5 중에서 2개를 선택하면 되므로 경우의 수는

$${}_5C_2=10$$

$$\therefore P(X=0)=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$$

(ii) $X=1$ 인 경우

1은 반드시 선택하고 2, 3, 4, 5 중에서 2개를 선택하면 되므로 경우의 수는

$${}_4C_2=6$$

$$\therefore P(X=1)=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$$

(i), (ii)에서

$$P(X \leq 1)=P(X=0)+P(X=1)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{3}{10}=\frac{4}{5}$$

정답_ ④

311

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고 5명의 학생을 일렬로 세우는 경우의 수는

$$5!=120$$

(i) $X=0$ 인 경우

여학생 사이에 남학생이 없어야 하므로

여학생 두 명을 한 사람으로 생각하여

4명을 일렬로 세우고, 여학생 2명이 서로 자리를 바꾸는 경우를 생각하면 그 경우의 수는

$$4! \times 2! = 24 \times 2 = 48$$

$$\therefore P(X=0)=\frac{48}{120}=\frac{2}{5}$$

(ii) $X=1$ 인 경우

남학생 3명 중에서 1명을 선택하여 여

학생 사이에 세운 다음, 여학생 2명을 한 사

람으로 생각하여 3명을 일렬로 세우고, 여학생 2명이 서로 자리를 바꾸는 경우를 생각하면 그 경우의 수는

$${}_3P_1 \times 3! \times 2! = 3 \times 6 \times 2 = 36$$

$$\therefore P(X=1)=\frac{36}{120}=\frac{3}{10}$$

(iii) $X=2$ 인 경우

남학생 3명 중에서 2명을 선택하여 여

학생 사이에 세운 다음, 여학생 2명을 한 사

람으로 생각하여 2명을 일렬로 세우고, 여학생 2명이 서로 자리를 바꾸는 경우를 생각하면 그 경우의 수는

$${}_3P_2 \times 2! \times 2! = 6 \times 2 \times 2 = 24$$

$$\therefore P(X=2)=\frac{24}{120}=\frac{1}{5}$$

(iv) $X=3$ 인 경우

남학생 3명을 일렬로 세우고 양 끝에 여

학생 2명을 세우면 되므로 그 경우의 수

는

$$3! \times 2! = 6 \times 2 = 12$$

$$\therefore P(X=3)=\frac{12}{120}=\frac{1}{10}$$

(i)~(iv)에서 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

위의 표에서

$$P(X=2)+P(X=3)=\frac{1}{5}+\frac{1}{10}=\frac{3}{10}$$

이므로

$$P(X \geq 2)=\frac{3}{10} \quad \therefore a=2$$

정답_ 2

312

숫자 1, 2, 3이 적혀 있는 공의 개수를 각각 a, b, c 라고 하면

$$a+b+c=7 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$P(X=4)=\frac{1}{21}$ 에서 숫자 2가 적힌 2개의 공을 꺼낼 확률이 $\frac{1}{21}$

이므로

$$\frac{{}_bC_2}{{}_7C_2}=\frac{1}{21}, \quad \frac{b(b-1)}{21}=\frac{1}{21}$$

$$b(b-1)=2, \quad b^2-b-2=0$$

$$(b+1)(b-2)=0 \quad \therefore b=2 (\because b>0)$$

$$\text{이것을 } \textcircled{A} \text{에 대입하면 } a+c=5 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

또, $2P(X=2)=3P(X=6)$ 에서 $P(X=2)$ 는 1이 적힌 공 1개와 2가 적힌 공 1개를 꺼낼 확률이고, $P(X=6)$ 은 2가 적힌 공 1개와 3이 적힌 공 1개를 꺼낼 확률이므로

$$2 \times \frac{{}_aC_1 \times {}_2C_1}{{}_7C_2} = 3 \times \frac{{}_2C_1 \times {}_cC_1}{{}_7C_2}$$

$$2 \times \frac{2a}{21} = 3 \times \frac{2c}{21} \quad \therefore 2a=3c \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

$$\textcircled{B}, \textcircled{C} \text{을 연립하여 풀면 } a=3, c=2$$

따라서 상자에는 1이 적힌 공이 3개, 2가 적힌 공이 2개, 3이 적힌 공이 2개 들어 있으므로

$$P(X \leq 3)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$$

$$=\frac{{}_3C_2}{{}_7C_2}+\frac{{}_3C_1 \times {}_2C_1}{{}_7C_2}+\frac{{}_3C_1 \times {}_2C_1}{{}_7C_2}$$

$$=\frac{1}{7}+\frac{2}{7}+\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$$

정답_ ④

313

$y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

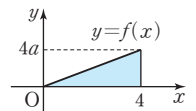
$y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 직선 $x=4$ 로

둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 4a = 1$$

$$8a=1 \quad \therefore a=\frac{1}{8}$$

정답_ $\frac{1}{8}$



314

확률밀도함수의 그래프와 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이

가 1이므로

$$\frac{1}{2} \times a + \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times a = 1$$

$$\frac{3}{4}a = 1 \quad \therefore a = \frac{4}{3}$$

정답_ ③

315

① $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=-1$, $x=1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \neq 1$$

따라서 확률밀도함수의 그래프가 아니다.

② $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 직선 $x=1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$$

따라서 확률밀도함수의 그래프이다.

③ $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=-1$, $x=1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$2 \times 1 = 2 \neq 1$$

따라서 확률밀도함수의 그래프가 아니다.

④ $-1 \leq x < 0$ 에서 $f(x) < 0$ 이므로 확률밀도함수의 그래프가 아니다.

⑤ $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 직선 $x=1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 1 \times 1 + \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \neq 1$$

따라서 확률밀도함수의 그래프가 아니다.

따라서 확률밀도함수의 그래프는 ②이다.

정답_ ②

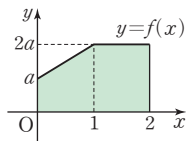
316

$y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=0$, $x=2$ 로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$$\frac{1}{2} \times (a+2a) \times 1 + (2-1) \times 2a = 1$$

$$\frac{3}{2}a + 2a = 1, \quad \frac{7}{2}a = 1 \quad \therefore a = \frac{2}{7}$$



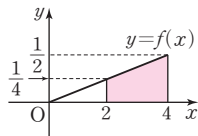
정답_ $\frac{2}{7}$

317

$y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$P(2 \leq X \leq 4)$ 는 오른쪽 그림에서 색칠한 도형의 넓이와 같으므로

$$P(2 \leq X \leq 4) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) \times (4-2) = \frac{3}{4}$$



정답_ $\frac{3}{4}$

318

확률밀도함수의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

로

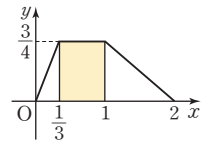
$$\frac{1}{2} \times \left\{ \left(a - \frac{1}{3}\right) + 2 \right\} \times \frac{3}{4} = 1$$

$$\frac{3}{8} \left(a + \frac{5}{3}\right) = 1, \quad a + \frac{5}{3} = \frac{8}{3} \quad \therefore a = 1$$

$P\left(\frac{1}{3} \leq X \leq a\right)$, 즉 $P\left(\frac{1}{3} \leq X \leq 1\right)$ 은 오른쪽

쪽 그림에서 색칠한 도형의 넓이와 같으므로

$$P\left(\frac{1}{3} \leq X \leq a\right) = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$



정답_ ④

319

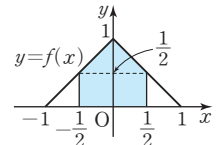
$y=f(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$$\frac{1}{2} \times 2 \times a = 1 \quad \therefore a = 1$$

$P\left(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2}\right)$ 은 오른쪽 그림에서 색

칠한 도형의 넓이와 같으므로

$$\begin{aligned} P\left(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2}\right) &= P\left(-\frac{1}{2} \leq X \leq 0\right) + P\left(0 \leq X \leq \frac{1}{2}\right) \\ &= 2P\left(0 \leq X \leq \frac{1}{2}\right) \\ &= 2 \times \left\{ \frac{1}{2} \times \left(1 + \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2} \right\} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$



정답_ ⑤

320

$y=f(x)$ 의 그래프와 x 축, y 축 및 직선 $x=1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이가

$$1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} < \frac{7}{12}$$

이므로

$$-2 < a < 0$$

따라서 $P(a \leq X \leq 1)$ 은 오른쪽 그림에서 색칠한 도형의 넓이와 같으므로

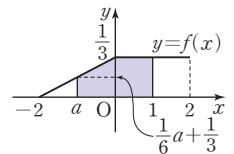
$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq 1) &= \frac{1}{2} \times \left\{ \left(\frac{1}{6}a + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \right\} \times (-a) \\ &\quad + 1 \times \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{12}a^2 - \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}$$

$$\text{즉, } -\frac{1}{12}a^2 - \frac{1}{3}a + \frac{1}{3} = \frac{7}{12} \text{ 이므로}$$

$$\frac{1}{12}a^2 + \frac{1}{3}a + \frac{1}{4} = 0, \quad a^2 + 4a + 3 = 0$$

$$(a+1)(a+3) = 0 \quad \therefore a = -1 \quad (\because -2 < a < 0)$$



정답_ -1

321

$y=f(x)$ 의 그래프와 x 축, y 축 및 직선 $x=4$ 로 둘러싸인 도형의

넓이가 1이므로

$$\frac{1}{2} \times (k+2k) \times 1 + (3-1) \times 2k + \frac{1}{2} \times (2k+k) \times (4-3) = 1$$

$$\frac{3}{2}k + 4k + \frac{3}{2}k = 1, 7k = 1$$

$$\therefore k = \frac{1}{7}$$

$P(0 \leq X \leq \frac{5}{2})$ 는 오른쪽 그림에서 색칠

한 도형의 넓이와 같으므로

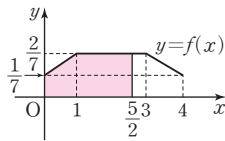
$$P(0 \leq X \leq \frac{5}{2})$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{7} + \frac{2}{7}\right) \times 1 + \left(\frac{5}{2} - 1\right) \times \frac{2}{7}$$

$$= \frac{3}{14} + \frac{3}{7} = \frac{9}{14}$$

따라서 $p=14, q=9$ 이므로

$$p+q=14+9=23$$



정답_ 23

322

주어진 그래프에서

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}x - \frac{1}{5} & (1 \leq x \leq 3) \\ -\frac{2}{15}x + \frac{4}{5} & (3 \leq x \leq 6) \end{cases}$$

$P(1 \leq X \leq 3)$ 은 오른쪽 그림

에서 A의 넓이와 같으므로

$$P(1 \leq X \leq 3)$$

$$= \frac{1}{2} \times (3-1) \times \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

$P(3 \leq X \leq k)$ 는 위의 그림에서 B의 넓이와 같으므로

$$P(3 \leq X \leq k) = \frac{1}{2} \times \left\{ \frac{2}{5} + \left(-\frac{2}{15}k + \frac{4}{5} \right) \right\} \times (k-3)$$

$$= \left(-\frac{1}{15}k + \frac{3}{5} \right) (k-3)$$

$P(1 \leq X \leq 3) = P(3 \leq X \leq k)$ 에서

$$\frac{2}{5} = \left(-\frac{1}{15}k + \frac{3}{5} \right) (k-3)$$

$$k^2 - 12k + 33 = 0 \quad \therefore k = 6 - \sqrt{3} \quad (\because 3 < k < 6)$$

정답_ ③

323

연속확률변수 X 가 갖는 값의 범위가 $0 \leq X \leq 8$ 이고, X 의 확률밀도함수 $f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=4$ 에 대하여 대칭이므로

$$P(0 \leq X \leq 4) = P(4 \leq X \leq 8) = \frac{1}{2}$$

또, $P(0 \leq X \leq 2) = P(6 \leq X \leq 8)$, $P(2 \leq X \leq 4) = P(4 \leq X \leq 6)$ 이므로

$$P(0 \leq X \leq 2) = a, P(2 \leq X \leq 4) = b$$

라고 하면

$$P(0 \leq X \leq 4) = P(0 \leq X \leq 2) + P(2 \leq X \leq 4) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a+b = \frac{1}{2}$$

..... ㉠

$3P(2 \leq X \leq 4) = 4P(6 \leq X \leq 8)$ 에서

$$3b = 4a$$

..... ㉡

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a = \frac{3}{14}, b = \frac{2}{7}$$

$$\therefore P(2 \leq X \leq 6) = P(2 \leq X \leq 4) + P(4 \leq X \leq 6)$$

$$= 2P(2 \leq X \leq 4)$$

$$= 2b$$

$$= 2 \times \frac{2}{7} = \frac{4}{7}$$

정답_ ③

324

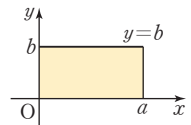
$y=f(x)$ 가 확률밀도함수이므로 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 1이다.

즉, $\frac{1}{2}ab = 1$ 이므로 $ab = 2$

ㄱ. $y=b$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 색칠한 도형의 넓이는

$$ab = 2 \neq 1$$

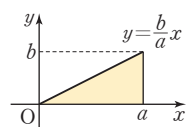
이므로 확률밀도함수가 아니다.



ㄴ. $y=\frac{b}{a}x$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고,

색칠한 도형의 넓이는

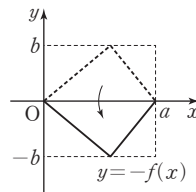
$$\frac{1}{2}ab = 1$$



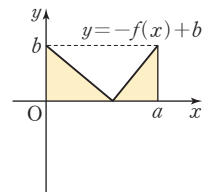
또, $0 \leq x \leq a$ 에서 $y \geq 0$ 이므로 $y=\frac{b}{a}x$ 는 확률밀도함수이다.

ㄷ. $y=-f(x)$ 의 그래프는 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 [그림 1]과 같다.

$y=-f(x)+b$ 의 그래프는 $y=-f(x)$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 것이므로 [그림 2]와 같다.



[그림 1]



[그림 2]

[그림 2]에서 색칠한 도형의 넓이는

$$ab - \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ab = 1$$

또, $0 \leq x \leq a$ 에서 $y \geq 0$ 이므로 $y=-f(x)+b$ 는 확률밀도함수이다.

따라서 확률밀도함수인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

정답_ ⑤

325

$$(1) E(X) = 2 \times \frac{1}{3} + 5 \times \frac{1}{3} + 8 \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{15}{3} = 5$$

$$(2) V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$$

$$= 2^2 \times \frac{1}{3} + 5^2 \times \frac{1}{3} + 8^2 \times \frac{1}{3} - 5^2$$

$$= 31 - 25 = 6$$

$$(3) \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{6}$$

정답_ (1) 5 (2) 6 (3) $\sqrt{6}$

326

확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	1

따라서

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{10} + 2 \times \frac{1}{5} + 3 \times \frac{3}{10} + 4 \times \frac{2}{5} = 3$$

$$E(X^2) = 1^2 \times \frac{1}{10} + 2^2 \times \frac{1}{5} + 3^2 \times \frac{3}{10} + 4^2 \times \frac{2}{5} = 10$$

이므로

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 10 - 3^2 = 1$$

정답_ 1

327

확률의 총합은 1이므로

$$P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 1$$

$$\frac{1}{16} + \frac{a+1}{16} + \frac{2a+1}{16} + \frac{3a+1}{16} = 1$$

$$\frac{6a+4}{16} = 1, 6a+4=16$$

$$\therefore a=2$$

즉, $P(X=x) = \frac{2x+1}{16}$ ($x=0, 1, 2, 3$)이므로 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$	1

따라서

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{16} + 1 \times \frac{3}{16} + 2 \times \frac{5}{16} + 3 \times \frac{7}{16} = \frac{17}{8}$$

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{1}{16} + 1^2 \times \frac{3}{16} + 2^2 \times \frac{5}{16} + 3^2 \times \frac{7}{16} = \frac{43}{8}$$

이므로

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{43}{8} - \left(\frac{17}{8}\right)^2 = \frac{55}{64}$$

$$\therefore \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

$$= \sqrt{\frac{55}{64}} = \frac{\sqrt{55}}{8}$$

정답_ ②

328

확률의 총합은 1이므로

$$P(X=0) + P(X=a) + P(X=b) = 1$$

$$\frac{1}{3} + a + b = 1 \quad \therefore a + b = \frac{2}{3}$$

$$E(X) = \frac{5}{18} \text{이므로}$$

$$0 \times \frac{1}{3} + a \times a + b \times b = \frac{5}{18} \quad \therefore a^2 + b^2 = \frac{5}{18}$$

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab \text{이므로}$$

$$\frac{5}{18} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 2ab, 2ab = \frac{1}{6}$$

$$\therefore ab = \frac{1}{12}$$

정답_ ⑤

329

$P(X=1)=k$ 라고 하면

$$P(X=2) = \frac{1}{3}P(X=1) = \frac{1}{3}k$$

$$P(X=3) = \frac{1}{3}P(X=2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}k = \frac{1}{9}k$$

확률의 총합은 1이므로

$$P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 1$$

$$k + \frac{1}{3}k + \frac{1}{9}k = 1, \frac{13}{9}k = 1 \quad \therefore k = \frac{9}{13}$$

확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{9}{13}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{1}{13}$	1

따라서

$$E(X) = 1 \times \frac{9}{13} + 2 \times \frac{3}{13} + 3 \times \frac{1}{13} = \frac{18}{13}$$

$$E(X^2) = 1^2 \times \frac{9}{13} + 2^2 \times \frac{3}{13} + 3^2 \times \frac{1}{13} = \frac{30}{13}$$

이므로

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{30}{13} - \left(\frac{18}{13}\right)^2 = \frac{66}{169}$$

정답_ $\frac{66}{169}$

330

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 확률변수 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = \frac{{}_3C_x \times {}_3C_{2-x}}{{}_6C_2} \quad (x=0, 1, 2)$$

이므로 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

$$(1) E(X) = 0 \times \frac{1}{5} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{1}{5} = 1$$

$$(2) E(X^2) = 0^2 \times \frac{1}{5} + 1^2 \times \frac{3}{5} + 2^2 \times \frac{1}{5} = \frac{7}{5}$$

이므로

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{7}{5} - 1^2 = \frac{2}{5}$$

$$(3) \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

정답_ (1) 1 (2) $\frac{2}{5}$ (3) $\frac{\sqrt{10}}{5}$

331

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 확률변수 X 의

확률질량함수는

$$P(X=x) = {}_3C_x \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{3-x} \quad (x=0, 1, 2, 3)$$

이므로 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

따라서

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$$

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{1}{8} + 1^2 \times \frac{3}{8} + 2^2 \times \frac{3}{8} + 3^2 \times \frac{1}{8} = 3$$

이므로

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$$

$$= 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

정답_ ④

332

집합 A 의 부분집합의 개수는

$$2^5 = 32$$

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3, 4, 5이고, 확률변수 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = \frac{{}_5C_x}{32} \quad (x=0, 1, 2, 3, 4, 5)$$

이므로 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	5	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$	1

따라서

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{32} + 1 \times \frac{5}{32} + 2 \times \frac{5}{16} + 3 \times \frac{5}{16} + 4 \times \frac{5}{32} + 5 \times \frac{1}{32} = \frac{5}{2}$$

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{1}{32} + 1^2 \times \frac{5}{32} + 2^2 \times \frac{5}{16} + 3^2 \times \frac{5}{16} + 4^2 \times \frac{5}{32} + 5^2 \times \frac{1}{32} = \frac{15}{2}$$

이므로

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$$

$$= \frac{15}{2} - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

정답_ ③

333

서로 다른 두 개의 주사위를 던질 때 나오는 모든 경우의 수는

$$6 \times 6 = 36$$

서로 다른 두 개의 주사위를 던져서 나오는 두 눈의 수 a, b 의 곱 ab 를 4로 나누었을 때의 나머지를 표로 나타내면 다음과 같다.

$b \backslash a$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	0	1	2
2	2	0	2	0	2	0
3	3	2	1	0	3	2
4	0	0	0	0	0	0
5	1	2	3	0	1	2
6	2	0	2	0	2	0

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	1

$$\therefore E(X) = 0 \times \frac{5}{12} + 1 \times \frac{5}{36} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{9} = \frac{41}{36}$$

정답_ $\frac{41}{36}$

334

1, 2, 3, 4의 4개의 숫자 중에서 서로 다른 2개의 숫자를 사용하여 만들 수 있는 두 자리 자연수의 개수는

$${}_4P_2 = 4 \times 3 = 12$$

이므로 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, ..., 12이다.

이때

$$P(X=1) = \frac{1}{12}$$

$$P(X=2) = \frac{11}{12} \times \frac{1}{11} = \frac{1}{12}$$

$$P(X=3) = \frac{11}{12} \times \frac{10}{11} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{12}$$

⋮

$$P(X=12) = \frac{11}{12} \times \frac{10}{11} \times \frac{9}{10} \times \cdots \times \frac{1}{1} = \frac{1}{12}$$

이므로

$$P(X=x) = \frac{1}{12} \quad (x=1, 2, 3, \dots, 12)$$

따라서

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{12} + 2 \times \frac{1}{12} + 3 \times \frac{1}{12} + \cdots + 12 \times \frac{1}{12} = \frac{13}{2}$$

$$E(X^2) = 1^2 \times \frac{1}{12} + 2^2 \times \frac{1}{12} + 3^2 \times \frac{1}{12} + \cdots + 12^2 \times \frac{1}{12} = \frac{325}{6}$$

이므로

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$$

$$= \frac{325}{6} - \left(\frac{13}{2}\right)^2 = \frac{143}{12}$$

정답_ ②

335

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3, 4이고, 확률변수 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = {}_4C_x \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{4-x} \quad (x=0, 1, 2, 3, 4)$$

이므로 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	1

따라서

$$P(Y=0)=P(X=0)=\frac{1}{16}$$

$$P(Y=1)=P(X=1)=\frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} P(Y=2) &= P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) \\ &= \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{11}{16} \end{aligned}$$

이므로

$$E(Y) = 0 \times \frac{1}{16} + 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{11}{16} = \frac{13}{8}$$

정답_ ②

336

주사위를 던져서 나온 눈의 수가 짝수인 경우는 2, 4, 6의 3가지, 눈의 수가 홀수인 경우는 1, 3, 5의 3가지이므로 한 개의 주사위를 던져서 나온 눈의 수가 짝수일 확률과 홀수일 확률은 각각 $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ 이다.

이때 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4, 5, 6이고 주사위를 던져서 나온 눈의 수가 짝수와 홀수인 것을 순서쌍으로 나타내면 각 확률은 다음과 같다.

(i) $X=2$ 인 경우

(짝, 짝)이 나오는 경우이므로
 $3+3=6(\text{점})$

$$P(X=2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

(ii) $X=3$ 인 경우

(홀, 짝, 짝), (짝, 홀, 짝)이 나오는 경우이므로
 $1+3+3=7(\text{점})$ $3+1+3=7(\text{점})$

$$P(X=3) = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

(iii) $X=4$ 인 경우

(홀, 홀, 홀, 짝), (홀, 홀, 짝, 홀),
 $1+1+1+3=6(\text{점})$ $1+1+3+1=6(\text{점})$
(홀, 짝, 홀, 홀), (짝, 홀, 홀, 홀),
 $1+3+1+1=6(\text{점})$ $3+1+1+1=6(\text{점})$
(홀, 홀, 짝, 짝), (홀, 짝, 홀, 짝),
 $1+1+3+3=8(\text{점})$ $1+3+1+3=8(\text{점})$
(짝, 홀, 홀, 짝)이 나오는 경우이므로
 $3+1+1+3=8(\text{점})$

$$P(X=4) = 7 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{16}$$

(iv) $X=5$ 인 경우

(홀, 홀, 홀, 홀, 짝)이 나오는 경우이므로
 $1+1+1+1+3=7(\text{점})$

$$P(X=5) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$$

(v) $X=6$ 인 경우

(홀, 홀, 홀, 홀, 홀, 홀), (홀, 홀, 홀, 홀, 홀, 짝)이 나오는 경우
 $1+1+1+1+1+1=6(\text{점})$ $1+1+1+1+1+3=8(\text{점})$
우이므로

$$P(X=6) = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$$

(i)~(v)에서

$$E(X) = 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{7}{16} + 5 \times \frac{1}{32} + 6 \times \frac{1}{32} = \frac{107}{32}$$

정답_ $\frac{107}{32}$

주의 주사위를 던져서 얻은 점수가 6점 이상이면 던지는 것을 중단하므로 (ii)에서 (짝, 짝, 짝), (짝, 짝, 홀)인 경우는 없음에 주의한다.

앞의 2회에서 $3+3=6$ 으로 이미 6점 이상이 된다.

(iii)~(v)에서도 앞에서 먼저 6점 이상을 얻는 경우는 없는지 잘 살펴보아야 한다.

337

행운권 1장으로 받을 수 있는 상금을 X 원이라 하고 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	100000	50000	5000	0	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{9}{25}$	$\frac{2}{5}$	1

$$\begin{aligned} \therefore E(X) &= 100000 \times \frac{1}{25} + 50000 \times \frac{1}{5} + 5000 \times \frac{9}{25} + 0 \times \frac{2}{5} \\ &= 15800 \end{aligned}$$

따라서 구하는 상금의 기댓값은 15800원이다.

정답_ 15800원

338

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하고 주어진 게임의 결과를 표로 나타내면 다음과 같다.

500원	500원	100원	받는 금액(원)
H	H	H	1100
H	H	T	1000
H	T	H	600
H	T	T	500
T	H	H	600
T	H	T	500
T	T	H	100
T	T	T	0

게임에서 받을 수 있는 금액을 X 원이라 하고 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	100	500	600	1000	1100	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$$\begin{aligned} \therefore E(X) &= 0 \times \frac{1}{8} + 100 \times \frac{1}{8} + 500 \times \frac{1}{4} + 600 \times \frac{1}{4} + 1000 \times \frac{1}{8} \\ &\quad + 1100 \times \frac{1}{8} \\ &= 550 \end{aligned}$$

따라서 구하는 기댓값은 550원이다.

정답_ ②

339

시합을 예정대로 진행했을 때, 각 팀이 우승할 확률은 다음과 같다.

1회전	2회전	3회전	우승팀	확률
B	A	A	A	$\left(\frac{3}{4}\right)^2$
B	A	B	B	$1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2$
B	B			

(i) A팀이 우승할 확률은 $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$, 준우승할 확률은

$$1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16} \text{이므로 A팀의 상금의 기댓값은}$$

$$P \times \frac{9}{16} + \frac{P}{2} \times \frac{7}{16} = \frac{25}{32}P(\text{원})$$

(ii) B팀이 우승할 확률은 $\frac{7}{16}$, 준우승할 확률은 $\frac{9}{16}$ 이므로 B팀의

상금의 기댓값은

$$P \times \frac{7}{16} + \frac{P}{2} \times \frac{9}{16} = \frac{23}{32}P(\text{원})$$

(i), (ii)에서 A, B 두 팀의 상금의 기댓값의 비는

$$\frac{25}{32}P : \frac{23}{32}P = 25 : 23$$

정답_ ⑤

340

$$E(X)=5, V(X)=2, \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{2} \text{이므로}$$

$$E(-3X+1)=-3E(X)+1$$

$$=-3 \times 5 + 1 = -14$$

$$\sigma(-3X+1)=3\sigma(X)=3\sqrt{2}$$

즉, 확률변수 $-3X+1$ 의 평균은 -14 , 표준편차는 $3\sqrt{2}$ 이다.

정답_ ⑤

341

$$E(X)=10 \text{이므로}$$

$$E(aX+b)=aE(X)+b=10a+b$$

이때 $E(aX+b)=0$ 이므로

$$10a+b=0$$

..... ①

$$\sigma(X)=2 \text{에서 } V(X)=2^2=4 \text{이므로}$$

$$V(aX+b)=a^2V(X)$$

$$=a^2 \times 4 = 4a^2$$

이때 $V(aX+b)=1$ 이므로

$$4a^2=1, a^2=\frac{1}{4} \quad \therefore a=\frac{1}{2} (\because a>0)$$

$$a=\frac{1}{2} \text{을 ①에 대입하면 } b=-5$$

$$\therefore a+b=\frac{1}{2}+(-5)=-\frac{9}{2}$$

정답_ $-\frac{9}{2}$

342

$$E(Y)=3 \text{이므로}$$

$$E\left(\frac{9}{4}X-1\right)=3, \frac{9}{4}E(X)-1=3$$

$$\frac{9}{4}E(X)=4 \quad \therefore E(X)=\frac{16}{9}$$

$$E(Y)=3, E(Y^2)=36 \text{이므로}$$

$$V(Y)=E(Y^2)-\{E(Y)\}^2=36-3^2=27$$

$$\text{즉, } V\left(\frac{9}{4}X-1\right)=27 \text{이므로}$$

$$\left(\frac{9}{4}\right)^2 V(X)=27, \frac{81}{16}V(X)=27 \quad \therefore V(X)=\frac{16}{3}$$

$$\therefore E(X)+V(X)=\frac{16}{9}+\frac{16}{3}=\frac{64}{9}$$

정답_ $\frac{64}{9}$

343

$$E(X)=m (m>0) \text{이라고 하면}$$

$$E(2X+k)=16 \text{에서}$$

$$2E(X)+k=16, 2m+k=16$$

$$\therefore k=16-2m$$

..... ㉠

$$E(2-kX)=42 \text{에서}$$

$$2-kE(X)=42 \quad \therefore 2-km=42$$

..... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$$2-(16-2m)m=42, 2m^2-16m-40=0$$

$$2(m+2)(m-10)=0 \quad \therefore m=10 (\because m>0)$$

$$m=10 \text{을 ㉠에 대입하면 } k=-4$$

$$\therefore E(3X-k)=E(3X+4)=3E(X)+4 \\ =3 \times 10 + 4 = 34$$

정답_ ②

344

$$E(X)=-2 \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = 0$$

$$E(X^2)=(-2)^2 \times \frac{1}{4} + 0^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{4} = 2$$

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$

$$=2-0^2=2$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{2}$$

$$(1) E(-5X+4)=-5E(X)+4$$

$$=-5 \times 0 + 4 = 4$$

$$(2) V(4X-3)=4^2V(X)$$

$$=16 \times 2 = 32$$

$$(3) \sigma(3X+2)=3\sigma(X)=3\sqrt{2}$$

정답_ (1) 4 (2) 32 (3) $3\sqrt{2}$

345

$$E(X)=-1 \text{이므로}$$

$$-3 \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{4} + a \times \frac{1}{4} = -1$$

$$\frac{1}{4}a=\frac{1}{2} \quad \therefore a=2$$

따라서 확률변수 X 의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	-3	0	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

이때

$$E(X^2)=(-3)^2 \times \frac{1}{2} + 0^2 \times \frac{1}{4} + 2^2 \times \frac{1}{4} = \frac{11}{2}$$

이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$

$$=\frac{11}{2}-(-1)^2=\frac{9}{2}$$

$$\therefore V(aX)=V(2X)=2^2V(X)$$

$$=4 \times \frac{9}{2} = 18$$

정답_ ③

346

확률의 총합은 1이므로

$$P(X=1)+P(X=4)+P(X=9)+P(X=16)=1$$

$$\frac{{}_5C_1}{a}+\frac{{}_5C_2}{a}+\frac{{}_5C_3}{a}+\frac{{}_5C_4}{a}=1$$

$$\frac{5}{a}+\frac{10}{a}+\frac{10}{a}+\frac{5}{a}=1$$

$$\frac{30}{a}=1 \quad \therefore a=30$$

따라서 확률변수 X 의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	1	4	9	16	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

이때

$$E(X)=1 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{3} + 9 \times \frac{1}{3} + 16 \times \frac{1}{6} = \frac{43}{6}$$

이므로

$$E(6X+1)=6E(X)+1$$

$$=6 \times \frac{43}{6} + 1 = 44$$

정답_ ⑤

347

확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{10}$	1

따라서

$$E(X)=1 \times \frac{1}{10} + 2 \times \frac{3}{20} + 3 \times \frac{1}{5} + 4 \times \frac{1}{4} + 5 \times \frac{3}{10} = \frac{7}{2}$$

$$E(X^2)=1^2 \times \frac{1}{10} + 2^2 \times \frac{3}{20} + 3^2 \times \frac{1}{5} + 4^2 \times \frac{1}{4} + 5^2 \times \frac{3}{10} = 14$$

이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$

$$=14-\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{7}{4}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{7}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$\therefore \sigma(Y)=\sigma(2X+8)=2\sigma(X)$$

$$=2 \times \frac{\sqrt{7}}{2} = \sqrt{7}$$

정답_ ④

348

$P(X=a)=P(X=2a+3)$ ($a=-2, -1, 0$)이므로

$a=-2$ 일 때, $P(X=-2)=P(X=-1)$

$a=-1$ 일 때, $P(X=-1)=P(X=1)$

$a=0$ 일 때, $P(X=0)=P(X=3)$

따라서

$$P(X=-2)=P(X=-1)=P(X=1)=m,$$

$$P(X=0)=P(X=3)=n$$

이러 하고 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-2	-1	0	1	3	합계
$P(X=x)$	m	m	n	m	n	1

확률의 총합은 1이므로

$$P(X=-2)+P(X=-1)+P(X=0)+P(X=1)+P(X=3)$$

$$=1$$

$$m+m+n+m+n=1 \quad \therefore 3m+2n=1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$E(X^2)=\frac{21}{8} \text{이므로}$$

$$(-2)^2 \times m + (-1)^2 \times m + 0^2 \times n + 1^2 \times m + 3^2 \times n = \frac{21}{8}$$

$$6m+9n=\frac{21}{8} \quad \therefore 2m+3n=\frac{7}{8} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } m=\frac{1}{4}, n=\frac{1}{8}$$

즉, 확률변수 X 의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	-2	-1	0	1	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	1

따라서

$$E(X)=-2 \times \frac{1}{4} + (-1) \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{8} = -\frac{1}{8}$$

이므로

$$E(3-16X)=3-16E(X)$$

$$=3-16 \times \left(-\frac{1}{8}\right) = 5$$

정답_ ②

349

주어진 두 확률변수 X, Y 의 확률분포표에서

$$Y=10X+1$$

임을 알 수 있다.

이때 $E(X)=2$ 이므로

$$E(Y)=E(10X+1)=10E(X)+1$$

$$=10 \times 2 + 1 = 21$$

또, $E(X)=2, E(X^2)=5$ 이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$

$$=5-2^2=1$$

$$\therefore V(Y)=V(10X+1)=10^2V(X)$$

$$=100 \times 1 = 100$$

$$\therefore E(Y)+V(Y)=21+100=121$$

정답_ 121

350

확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

따라서

$$E(X)=1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{4} = 2$$

이므로

$$E(4X+3)=4E(X)+3$$

$$=4 \times 2 + 3 = 11$$

정답_ 11

351

주머니 안의 모든 구슬의 개수는

$$1+2+3+\cdots+10=55$$

이므로 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	...	10	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{55}$	$\frac{2}{55}$	$\frac{3}{55}$	...	$\frac{10}{55}$	1

따라서

$$E(X)=1 \times \frac{1}{55} + 2 \times \frac{2}{55} + 3 \times \frac{3}{55} + \cdots + 10 \times \frac{10}{55} = 7$$

이므로

$$E(5X+2)=5E(X)+2 \\ =5 \times 7 + 2 = 37$$

정답_ ④

352

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 확률변수 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = \frac{{}_2C_x \times {}_3C_{2-x}}{{}_5C_2} \quad (x=0, 1, 2)$$

이므로 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

따라서

$$E(X)=0 \times \frac{3}{10} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{1}{10} = \frac{4}{5}$$

$$E(X^2)=0^2 \times \frac{3}{10} + 1^2 \times \frac{3}{5} + 2^2 \times \frac{1}{10} = 1$$

이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2 \\ =1-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$$

$$\therefore V(5X+1)=5^2V(X) \\ =25 \times \frac{9}{25} = 9$$

정답_ ⑤

353

8의 약수가 적힌 카드는 1, 2, 4, 8의 4장이므로 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 확률변수 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = \frac{{}_4C_x \times {}_6C_{3-x}}{{}_{10}C_3} \quad (x=0, 1, 2, 3)$$

이므로 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$	1

따라서

$$E(X)=0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{1}{30} = \frac{6}{5}$$

$$E(X^2)=0^2 \times \frac{1}{6} + 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{3}{10} + 3^2 \times \frac{1}{30} = 2$$

이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2 \\ =2-\left(\frac{6}{5}\right)^2=\frac{14}{25}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{14}{25}}=\frac{\sqrt{14}}{5} \\ \therefore \sigma(10X-3)=10\sigma(X) \\ =10 \times \frac{\sqrt{14}}{5} = 2\sqrt{14}$$

정답_ $2\sqrt{14}$

354

$a+b+c=9$ 이므로

$$c=9-a-b \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{a}{9}$	$\frac{b}{9}$	$\frac{9-a-b}{9}$	1

$E(Y)=28$ 에서

$$E(9X)=28, 9E(X)=28$$

따라서 $E(X)=\frac{28}{9}$ 이므로

$$2 \times \frac{a}{9} + 3 \times \frac{b}{9} + 4 \times \frac{9-a-b}{9} = \frac{28}{9}$$

$$2a+3b+36-4a-4b=28 \quad \therefore 2a+b=8 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$V(Y)=44$ 에서

$$V(9X)=44, 9^2V(X)=44$$

따라서 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{44}{81}$ 이므로

$$2^2 \times \frac{a}{9} + 3^2 \times \frac{b}{9} + 4^2 \times \frac{9-a-b}{9} - \left(\frac{28}{9}\right)^2 = \frac{44}{81}$$

$$\frac{-12a-7b+144}{9} = \frac{92}{9} \quad \therefore 12a+7b=52 \quad \cdots \cdots \textcircled{9}$$

⑧, ⑨를 연립하여 풀면 $a=2, b=4$

$a=2, b=4$ 를 ⑦에 대입하면 $c=3$

$$\therefore 2a+b-c=2 \times 2 + 4 - 3 = 5$$

정답_ 5

355

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4, 5이고 여학생 2명과 남학생 3명이 5개의 수 중에서 서로 다른 수를 한 개씩 선택하는 모든 경우의 수는

$$5!=120$$

(i) $X=2$ 인 경우

2를 선택하는 여학생을 정하는 경우의 수는

$${}_2C_1=2$$

나머지 한 여학생은 1을 선택해야 하고, 남학생 3명은 3, 4, 5 중에서 1개씩 선택해야 하므로 그 경우의 수는

$$1 \times 3! = 6$$

$$\therefore P(X=2) = \frac{2 \times 6}{120} = \frac{1}{10}$$

(ii) $X=3$ 인 경우

3을 선택하는 여학생을 정하는 경우의 수는

$${}_2C_1=2$$

나머지 한 여학생은 1, 2 중에서 하나를 선택해야 하고, 남학생 3명은 여학생 2명이 선택하고 남은 3개의 수 중에서 1개씩 선택해야 하므로 그 경우의 수는

$$2 \times 3! = 12$$

$$\therefore P(X=3) = \frac{2 \times 12}{120} = \frac{1}{5}$$

(iii) $X=4$ 인 경우

4를 선택하는 여학생을 정하는 경우의 수는

$${}_2C_1=2$$

나머지 한 여학생은 1, 2, 3 중에서 하나를 선택해야 하고, 남학생 3명은 여학생 2명이 선택하고 남은 3개의 수 중에서 1개씩 선택해야 하므로 그 경우의 수는

$$3 \times 3! = 18$$

$$\therefore P(X=4) = \frac{2 \times 18}{120} = \frac{3}{10}$$

(iv) $X=5$ 인 경우

5를 선택하는 여학생을 정하는 경우의 수는

$${}_2C_1=2$$

나머지 한 여학생은 1, 2, 3, 4 중에서 하나를 선택해야 하고, 남학생 3명은 여학생 2명이 선택하고 남은 3개의 수 중에서 1개씩 선택해야 하므로 그 경우의 수는

$$4 \times 3! = 24$$

$$\therefore P(X=5) = \frac{2 \times 24}{120} = \frac{2}{5}$$

(i)~(iv)에서 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	5	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	1

따라서

$$E(X) = 2 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{1}{5} + 4 \times \frac{3}{10} + 5 \times \frac{2}{5} = 4$$

$$E(X^2) = 2^2 \times \frac{1}{10} + 3^2 \times \frac{1}{5} + 4^2 \times \frac{3}{10} + 5^2 \times \frac{2}{5} = 17$$

이므로

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 17 - 4^2 = 1$$

$$\therefore \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1} = 1$$

$$\therefore \sigma(-4X+2) = 4\sigma(X) = 4 \times 1 = 4$$

정답_ ③

356

a, b 는 1, 2, 3, 4 중에서 하나의 값을 가질 수 있으므로 모든 경우의 수는

$$4 \times 4 = 16$$

$a-b$ 의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

$b \backslash a$	1	2	3	4
1	0	1	2	3
2	-1	0	1	2
3	-2	-1	0	1
4	-3	-2	-1	0

따라서 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3이므로 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-3	-2	-1	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	1

이때

$$E(X) = -3 \times \frac{1}{16} + (-2) \times \frac{1}{8} + (-1) \times \frac{3}{16} + 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{3}{16} + 2 \times \frac{1}{8} + 3 \times \frac{1}{16} = 0$$

$$E(X^2) = (-3)^2 \times \frac{1}{16} + (-2)^2 \times \frac{1}{8} + (-1)^2 \times \frac{3}{16} + 0^2 \times \frac{1}{4} + 1^2 \times \frac{3}{16} + 2^2 \times \frac{1}{8} + 3^2 \times \frac{1}{16} = \frac{5}{2}$$

이므로

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{5}{2} - 0^2 = \frac{5}{2}$$

$$\therefore V(Y) = V(2X+1) = 2^2 V(X) = 4 \times \frac{5}{2} = 10$$

정답_ 10

357

확률의 총합은 1이므로

$$P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 1$$

$$\frac{2}{a} + \frac{6}{a} + \frac{12}{a} = 1, \frac{20}{a} = 1$$

$$\therefore a = 20 \dots\dots\dots ①$$

$$\therefore P(X=x) = \frac{x^2+x}{20} \quad (x=1, 2, 3)$$

한편, $X^2-4X+3 < 0$ 에서

$$(X-1)(X-3) < 0 \quad \therefore 1 < X < 3$$

$$\begin{aligned} \therefore P(X^2-4X+3 < 0) &= P(1 < X < 3) \\ &= P(X=2) \\ &= \frac{3}{10} \dots\dots\dots ② \end{aligned}$$

정답_ $\frac{3}{10}$

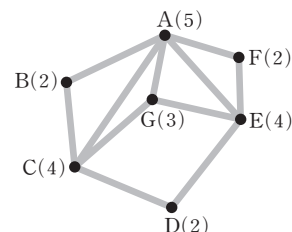
채점 기준	비율
① a 의 값 구하기	50%
② $P(X^2-4X+3 < 0)$ 구하기	50%

참고 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	1

358

각 지점에 연결된 도로의 개수를 괄호 안에 써 주면 다음 그림과 같다.



따라서 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	5	합계
$P(X=x)$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	1

한편, $3X-2 < 10$ 에서

$$3X < 12 \quad \therefore X < 4$$

$$\therefore P(3X-2 < 10) = P(X < 4)$$

$$= P(X=2) + P(X=3)$$

$$= \frac{3}{7} + \frac{1}{7} = \frac{4}{7}$$

따라서 $a=7, b=4$ 이므로

$$a+b=7+4=11$$

정답_ 11

채점 기준	비율
① 확률변수 X 의 확률분포 구하기	40%
② $P(3X-2 < 10)$ 구하기	40%
③ $a+b$ 의 값 구하기	20%

359

$f(4-x)=f(4+x)$ 이므로 $f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=4$ 에 대하여 대칭이다.

확률밀도함수의 성질에 의하여 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=0, x=8$ 로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$$P(0 \leq X \leq 4) = P(4 \leq X \leq 8) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore P(3 \leq X \leq 5) = 2P(3 \leq X \leq 4)$$

$$= 2\{P(0 \leq X \leq 4) - P(0 \leq X \leq 3)\}$$

$$= 2 \times \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{8}\right) = \frac{1}{4}$$

정답_ $\frac{1}{4}$

채점 기준	비율
① $f(x)$ 의 그래프가 직선 $x=4$ 에 대하여 대칭임을 알기	20%
② $P(0 \leq X \leq 4) = P(4 \leq X \leq 8) = \frac{1}{2}$ 임을 알기	30%
③ $P(3 \leq X \leq 5)$ 구하기	50%

360

확률의 총합은 1이므로

$$P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 1$$

$$a + 3a + 7a + 13a = 1, 24a = 1$$

$$\therefore a = \frac{1}{24}$$

따라서 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{13}{24}$	1

이때

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{24} + 1 \times \frac{1}{8} + 2 \times \frac{7}{24} + 3 \times \frac{13}{24} = \frac{7}{3}$$

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{1}{24} + 1^2 \times \frac{1}{8} + 2^2 \times \frac{7}{24} + 3^2 \times \frac{13}{24} = \frac{37}{6}$$

이므로

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$$

$$= \frac{37}{6} - \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{13}{18}$$

따라서 $p=18, q=13$ 이므로

$$p+q=18+13=31$$

정답_ 31

채점 기준	비율
① a 의 값 구하기	30%
② $V(X)$ 구하기	50%
③ $p+q$ 의 값 구하기	20%

361

뒤집은 3개의 동전의 종류에 따라 다음의 네 가지 경우로 분류할 수 있다.

(i) 뒤집은 동전이 앞면 3개일 때

뒤집은 후 앞면은 1개이고, 그 확률은

$$\frac{{}_4C_3}{{}_7C_3} = \frac{4}{35} \quad X=1$$

(ii) 뒤집은 동전이 앞면 2개, 뒷면 1개일 때

뒤집은 후 앞면은 3개이고, 그 확률은

$$\frac{{}_4C_2 \times {}_3C_1}{{}_7C_3} = \frac{18}{35} \quad X=3$$

(iii) 뒤집은 동전이 앞면 1개, 뒷면 2개일 때

뒤집은 후 앞면은 5개이고, 그 확률은

$$\frac{{}_4C_1 \times {}_3C_2}{{}_7C_3} = \frac{12}{35} \quad X=5$$

(iv) 뒤집은 동전이 뒷면 3개일 때

뒤집은 후 앞면은 7개이고, 그 확률은

$$\frac{{}_3C_3}{{}_7C_3} = \frac{1}{35} \quad X=7$$

(i)~(iv)에서 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	3	5	7	합계
$P(X=x)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$	1

따라서

$$E(X) = 1 \times \frac{4}{35} + 3 \times \frac{18}{35} + 5 \times \frac{12}{35} + 7 \times \frac{1}{35} = \frac{25}{7}$$

이므로 $m=7, n=25$

$$\therefore m+n=7+25=32$$

정답_ 32

채점 기준	비율
① 확률변수 X 의 확률분포 구하기	50%
② $E(X)$ 구하기	30%
③ $m+n$ 의 값 구하기	20%

362

$E(X)=k+1, E(X^2)=3k+1$ 이므로

$$\begin{aligned}
 V(X) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 \\
 &= 3k + 1 - (k+1)^2 = -k^2 + k \quad \text{①} \\
 \therefore V(4X+3) &= 4^2 V(X) \\
 &= 16(-k^2 + k) \quad \text{②} \\
 &= 16\left\{-\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right\} \\
 &= -16\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 + 4
 \end{aligned}$$

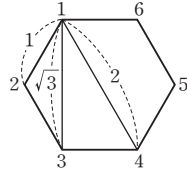
따라서 $k = \frac{1}{2}$ 일 때 $V(4X+3)$ 의 최댓값이 4이므로 $\sigma(4X+3)$ 의 최댓값은 $\sqrt{4} = 2$ ③

정답 2

채점 기준	비율
① $V(X)$ 를 k 로 나타내기	30%
② $V(4X+3)$ 을 k 로 나타내기	30%
③ $\sigma(4X+3)$ 의 최댓값 구하기	40%

363

정육각형의 서로 다른 두 꼭짓점 사이의 거리는 오른쪽 그림과 같이 1, $\sqrt{3}$, 2의 세 가지 경우가 있으므로 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, $\sqrt{3}$, 2이다.



한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$$6 \times 6 = 36$$

주사위를 두 번 던져서 나오는 눈의 수를 각각 p, q 라 하고, 이를 순서쌍 (p, q) 로 나타내어 각 확률을 구하면 다음과 같다.

(i) $X=0$ 인 경우

(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)의 6가지가 있으므로

$$P(X=0) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(ii) $X=1$ 인 경우

(1, 2), (1, 6), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3), (4, 5), (5, 4), (5, 6), (6, 1), (6, 5)의 12가지가 있으므로

$$P(X=1) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

(iii) $X=\sqrt{3}$ 인 경우

(1, 3), (1, 5), (2, 4), (2, 6), (3, 1), (3, 5), (4, 2), (4, 6), (5, 1), (5, 3), (6, 2), (6, 4)의 12가지가 있으므로

$$P(X=\sqrt{3}) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

(iv) $X=2$ 인 경우

(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 1), (5, 2), (6, 3)의 6가지가 있으므로

$$P(X=2) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(i)~(iv)에서 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

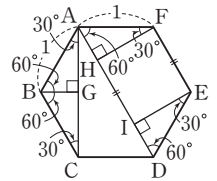
X	0	1	$\sqrt{3}$	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

$$\therefore P(0 \leq X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

정답 ③

참고 오른쪽 그림과 같이 정육각형의 각 꼭짓점을 A, B, C, D, E, F라 하고, 점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 G, 두 점 F, E에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 각각 H, I라고 하자. 이때 정육각형의 한 내각의 크기는



$$\frac{180^\circ \times (6-2)}{6} = 120^\circ$$

이므로 직각삼각형 ABG에서

$$\angle ABG = 60^\circ, \angle BAG = 30^\circ$$

삼각형 ABG에서 $\overline{AB} : \overline{BG} : \overline{AG} = 2 : 1 : \sqrt{3}$ 이고 $\overline{AB} = 10$ 이므로

$$\overline{AG} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \overline{AC} = 2\overline{AG} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

같은 방법으로 $\overline{AH} = \overline{DI} = \frac{1}{2}$ 이고 $\overline{HI} = \overline{FE} = 10$ 이므로

$$\overline{AD} = \overline{AH} + \overline{HI} + \overline{DI} = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} = 2$$

364

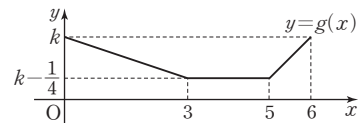
주어진 그래프에서

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{12}x & (0 \leq x \leq 3) \\ \frac{1}{4} & (3 \leq x \leq 5) \\ -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2} & (5 \leq x \leq 6) \end{cases}$$

$0 \leq x \leq 6$ 인 모든 x 에 대하여 $f(x) + g(x) = k$ (k 는 상수)이므로

$$g(x) = k - f(x) = \begin{cases} k - \frac{1}{12}x & (0 \leq x \leq 3) \\ k - \frac{1}{4} & (3 \leq x \leq 5) \\ k + \frac{1}{4}x - \frac{3}{2} & (5 \leq x \leq 6) \end{cases}$$

따라서 $y=g(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



확률밀도함수의 성질에 의하여 $y=g(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=0, x=6$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이는 1이므로

$$\frac{1}{2} \times \left\{ k + \left(k - \frac{1}{4} \right) \right\} \times 3 + (5-3) \times \left(k - \frac{1}{4} \right)$$

$$+ \frac{1}{2} \times \left\{ \left(k - \frac{1}{4} \right) + k \right\} \times (6-5)$$

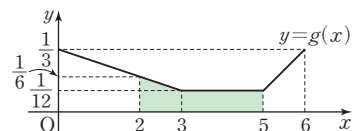
$$= 1$$

$$6k - 1 = 1, 6k = 2$$

$$\therefore k = \frac{1}{3}$$

따라서 $P(6k \leq Y \leq 15k) = P(2 \leq Y \leq 5)$ 이므로 $P(6k \leq Y \leq 15k)$

는 다음 그림의 색칠한 도형의 넓이와 같다.



$$\begin{aligned}\therefore P(6k \leq Y \leq 15k) &= P(2 \leq Y \leq 5) \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12} \right) \times (3-2) + (5-3) \times \frac{1}{12} \\ &= \frac{7}{24}\end{aligned}$$

즉, $p=24$, $q=7$ 이므로

$$p+q=24+7=31$$

정답_ 31

365

$f(k)=P(X \leq k)$ ($k=1, 2, 3, \dots, 7$)이므로 $f(k)$ 의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

k	1	2	3	4	5	6	7
$f(k)$	$\frac{1}{28}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{13}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{11}{14}$	$\frac{27}{28}$	1

ㄱ. $k=1$, 6일 때

$$f(1)+f(6)=\frac{1}{28}+\frac{27}{28}=1$$

$k=2$, 5일 때

$$f(2)+f(5)=\frac{3}{14}+\frac{11}{14}=1$$

$k=3$, 4일 때

$$f(3)+f(4)=\frac{13}{28}+\frac{15}{28}=1$$

$\therefore f(k)+f(7-k)=1$ (단, $k=1, 2, 3, \dots, 6$) (참)

$$\begin{aligned}\text{ㄴ. } E(X) &= 1 \times \frac{1}{28} + 2 \times \frac{5}{28} + 3 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{14} + 5 \times \frac{1}{4} \\ &\quad + 6 \times \frac{5}{28} + 7 \times \frac{1}{28} \\ &= 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(1)+f(2)+f(3)+\dots+f(7) \\ = \frac{1}{28} + \frac{3}{14} + \frac{13}{28} + \frac{15}{28} + \frac{11}{14} + \frac{27}{28} + 1 = 4\end{aligned}$$

$\therefore E(X)=f(1)+f(2)+f(3)+\dots+f(7)$ (참)

$$\begin{aligned}\text{ㄷ. } E(X^2) &= 1^2 \times \frac{1}{28} + 2^2 \times \frac{5}{28} + 3^2 \times \frac{1}{4} + 4^2 \times \frac{1}{14} + 5^2 \times \frac{1}{4} \\ &\quad + 6^2 \times \frac{5}{28} + 7^2 \times \frac{1}{28} \\ &= \frac{130}{7} \\ f(1)+2f(2)+3f(3)+\dots+7f(7) \\ &= \frac{1}{28} + 2 \times \frac{3}{14} + 3 \times \frac{13}{28} + 4 \times \frac{15}{28} + 5 \times \frac{11}{14} + 6 \times \frac{27}{28} + 7 \times 1 \\ &= \frac{145}{7}\end{aligned}$$

$\therefore E(X^2) \neq f(1)+2f(2)+3f(3)+\dots+7f(7)$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

정답_ ④

366

확률변수 X 의 확률분포표에서 확률이 $X=5$ 에 대하여 좌우대칭이므로

$$E(X)=5$$

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{31}{5}$$

$$E(X^2)=\frac{31}{5}+\{E(X)\}^2=\frac{31}{5}+5^2=\frac{156}{5}$$

한편,

$$\begin{aligned}E(X^2) &= 1^2 \times a + 3^2 \times b + 5^2 \times c + 7^2 \times b + 9^2 \times a \\ &= 82a + 58b + 25c\end{aligned}$$

이므로

$$82a + 58b + 25c = \frac{156}{5} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또, 확률변수 Y 의 확률분포표에서 확률이 $Y=5$ 에 대하여 좌우대칭이므로

$$E(Y)=5$$

$$\begin{aligned}E(Y^2) &= 1^2 \times \left(a + \frac{1}{20}\right) + 3^2 \times b + 5^2 \times \left(c - \frac{1}{10}\right) + 7^2 \times b \\ &\quad + 9^2 \times \left(a + \frac{1}{20}\right) \\ &= 82a + 58b + 25c + \frac{8}{5} \\ &= \frac{156}{5} + \frac{8}{5} \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= \frac{164}{5}\end{aligned}$$

$$V(Y)=E(Y^2)-\{E(Y)\}^2$$

$$= \frac{164}{5} - 5^2 = \frac{39}{5}$$

$$\therefore 10 \times V(Y) = 10 \times \frac{39}{5} = 78$$

정답_ 78

참고 대칭성을 이용하지 않고 주어진 표에서 두 확률변수 X, Y 를 다음과 같이 구할 수도 있다.

확률변수 X 의 확률분포표에서 확률의 총합은 1이므로

$$a+b+c+b+a=1, 2(a+b)+c=1$$

$$\therefore c=1-2(a+b)$$

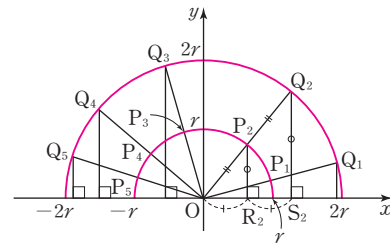
$\dots\dots \textcircled{1}$

따라서

$$\begin{aligned}E(X) &= a+3b+5c+7b+9a=10(a+b)+5c \\ &= 10(a+b)+5\{1-2(a+b)\} \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= 5\end{aligned}$$

같은 방법으로 확률변수 Y 의 확률분포표에서 $E(Y)=5$

367



두 점 P_i, Q_i ($i=1, 2, 3, 4, 5$)에서 각각 x 축에 내린 수선의 발을 R_i, S_i 라 하고, 점 P_i 의 x 좌표를 a_i , 점 Q_i 의 x 좌표를 b_i 라고 하면 $\triangle O P_i R_i \sim \triangle O Q_i S_i$ (AA 닮음)

이고 닮음비는

$$\overline{O P_i} : \overline{O Q_i} = r : 2r = 1 : 2$$

이므로

$$b_i = 2a_i$$

이때 a_i 의 평균을 m_a , 표준편차를 σ_a , b_i 의 평균을 m_b , 표준편차를 σ_b 라고 하면

(i) $m_a=10$ 에서

$$m_b = 2m_a = 2 \times 10 = 20$$

(ii) $\sigma_a = \frac{5}{2}$ 에서

$$\sigma_b = |2| \sigma_a = 2 \times \frac{5}{2} = 5$$

(i), (ii)에서 점 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 의 x 좌표의 평균과 표준편차의 곱은

$$m_b \sigma_b = 20 \times 5 = 100$$

정답_ ①

368

7개의 관광 코스와 내야 하는 코스별 관광 요금은 다음과 같다.

$P \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow Q$

$$: 5 \times 14000 = 70000(\text{원})$$

$P \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow Q$

$$: 4 \times 14000 = 56000(\text{원})$$

$P \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow Q$

$$: 3 \times 14000 = 42000(\text{원})$$

$P \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow Q$

$$: 5 \times 14000 = 70000(\text{원})$$

$P \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow Q$

$$: 4 \times 14000 = 56000(\text{원})$$

$P \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow Q$

$$: 5 \times 14000 = 70000(\text{원})$$

$P \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow Q$

$$: 4 \times 14000 = 56000(\text{원})$$

따라서 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 42000, 56000, 70000
이므로 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	42000	56000	70000	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	1

이때

$$E(X) = 42000 \times \frac{1}{7} + 56000 \times \frac{3}{7} + 70000 \times \frac{3}{7} = 60000$$

이므로

$$E\left(\frac{X}{1000}\right) = \frac{1}{1000} E(X) = \frac{60000}{1000} = 60$$

따라서 확률변수 $\frac{X}{1000}$ 의 기댓값은 60원이다.

정답_ 60원

369

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은

0, 1, 2, 3, ..., 19

확률변수 Y 가 가질 수 있는 값은

0, 3, 6, 9, ..., 57

확률변수 Z 가 가질 수 있는 값은

0, 4, 8, 12, ..., 76

세 확률변수 X, Y, Z 가 각 값을 가질 확률은 모두 $\frac{1}{20}$ 이므로

$$Y = 3X, Z = 4X$$

따라서

$$V(Y) = V(3X) = 3^2 V(X) = 9V(X),$$

$$V(Z) = V(4X) = 4^2 V(X) = 16V(X)$$

이므로

$$b = 9a, c = 16a$$

$$\therefore a < b < c$$

정답_ ①

370

A, B, C, D, E에게 5개의 수를 배정하는 모든 경우의 수는

$$5! = 120$$

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3, 4이므로 A, B, C, D, E가 받은 카드에 적힌 숫자를 각각 a, b, c, d, e 라 하고, 각 확률을 구하면 다음과 같다.

(i) $X=0$ 인 경우

$a < b$ 이어야 하므로 5개의 숫자 중에서 2개를 선택하여 A에게 작은 수, B에게 큰 수를 배정하고 나머지 3개의 수를 C, D, E에게 배정하면 되므로 그 경우의 수는

$${}_5C_2 \times 3! = 10 \times 6 = 60$$

$$\therefore P(X=0) = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$$

(ii) $X=1$ 인 경우

$b < a < c$ 이어야 하므로 5개의 숫자 중에서 3개를 선택하여 작은 수부터 차례대로 B, A, C에게 배정하고 나머지 2개의 수를 D, E에게 배정하면 되므로 그 경우의 수는

$${}_5C_3 \times 2! = 10 \times 2 = 20$$

$$\therefore P(X=1) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$$

(iii) $X=2$ 인 경우

$a > b, a > c, a < d$ 이어야 하므로 다음 두 경우가 있다.

㉔ $a=3, d=4$ 또는 $a=3, d=5$ 인 경우

B, C에게 1, 2 중에서 하나씩 배정하고 A에게 3을, D에게 4 또는 5를 배정하고 나머지 한 수를 E에게 배정하면 되므로 그 경우의 수는

$$2! \times 1 \times 2 \times 1 = 4$$

㉕ $a=4, d=5$ 인 경우

1, 2, 3 중에서 2개의 수를 선택하여 B, C에게 배정하고 A에게 4를, D에게 5를 배정하고 나머지 한 수를 E에게 배정하면 되므로 그 경우의 수는

$${}_3P_2 \times 1 \times 1 \times 1 = 6$$

㉔, ㉕에서 그 경우의 수는

$$4 + 6 = 10$$

$$\therefore P(X=2) = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}$$

(iv) $X=3$ 인 경우

$a > b, a > c, a > d, a < e$ 이어야 하므로

$$a=4, e=5$$

따라서 1, 2, 3의 세 수를 B, C, D에게 배정하고 A에게 4를, E에게 5를 배정하면 되므로 그 경우의 수는

$$3! \times 1 \times 1 = 6$$

$$\therefore P(X=3) = \frac{6}{120} = \frac{1}{20}$$

(v) $X=4$ 인 경우

$a > b, a > c, a > d, a > e$ 이어야 하므로

$$a=5$$

따라서 1, 2, 3, 4의 네 수를 B, C, D, E에게 배정하고 A에게 5를 배정하면 되므로 그 경우의 수는

$$4! \times 1 = 24$$

$$\therefore P(X=4) = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}$$

(i)~(v)에서 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$	1

따라서

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{12} + 3 \times \frac{1}{20} + 4 \times \frac{1}{5} = \frac{77}{60}$$

이므로

$$\begin{aligned} E(120X - 45) &= 120E(X) - 45 \\ &= 120 \times \frac{77}{60} - 45 = 109 \end{aligned}$$

정답_ 109

06 이항분포와 정규분포

371

확률변수 X 가 이항분포 $B(6, \frac{1}{2})$ 를 따르므로 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = {}_6C_x \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{6-x} \quad (x=0, 1, 2, \dots, 6)$$

$$\begin{aligned} \therefore P(X \leq 2) &= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) \\ &= {}_6C_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 + {}_6C_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 \\ &\quad + {}_6C_2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \\ &= \frac{1}{64} + \frac{6}{64} + \frac{15}{64} = \frac{11}{32} \end{aligned}$$

정답_ $\frac{11}{32}$

372

확률변수 X 가 이항분포 $B(8, p)$ 를 따르므로 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = {}_8C_x p^x (1-p)^{8-x} \quad (x=0, 1, 2, \dots, 8)$$

$$5P(X=2) = 2P(X=4) \text{에서}$$

$$5 \times {}_8C_2 p^2 (1-p)^6 = 2 \times {}_8C_4 p^4 (1-p)^4$$

$$140p^2 (1-p)^6 = 140p^4 (1-p)^4$$

이때 $0 < p < 1$ 이므로 양변을 $140p^2(1-p)^4$ 으로 나누면

$$(1-p)^2 = p^2, \quad 2p-1=0 \quad \therefore p = \frac{1}{2}$$

$$\therefore P(X=6) = {}_8C_6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{7}{64}$$

정답_ ③

373

한 개의 주사위를 한 번 던져 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

이므로 확률변수 X 는 이항분포 $B(6, \frac{1}{3})$ 을 따른다.

따라서 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = {}_6C_x \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{6-x} \quad (x=0, 1, 2, \dots, 6)$$

이므로

$$\frac{P(X=3)}{P(X=2)} = \frac{{}_6C_3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3}{{}_6C_2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^4} = \frac{2}{3}$$

정답_ ②

374

자유투 성공률이 $0.8 = \frac{4}{5}$ 이므로 자유투를 성공하는 횟수를 확률

변수 X 라고 하면 X 는 이항분포 $B(4, \frac{4}{5})$ 를 따른다.

따라서 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = {}_4C_x \left(\frac{4}{5}\right)^x \left(\frac{1}{5}\right)^{4-x} \quad (x=0, 1, 2, 3, 4)$$

이므로 자유투를 3번 이상 성공할 확률은

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= P(X=3) + P(X=4) \\ &= {}_4C_3 \times \left(\frac{4}{5}\right)^3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^1 + {}_4C_4 \times \left(\frac{4}{5}\right)^4 \times \left(\frac{1}{5}\right)^0 \\ &= \frac{256}{625} + \frac{256}{625} = \frac{512}{625} \end{aligned}$$

즉, $p=625$, $q=512$ 이므로

$$p-q=625-512=113$$

정답_ 113

375

버스 패키지 여행의 예약을 취소하는 예약자 수를 확률변수 X 라고 하면 X 는 이항분포 $B(28, 0.1)$ 을 따른다.

따라서 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = {}_{28}C_x 0.1^x 0.9^{28-x} \quad (x=0, 1, 2, \dots, 28)$$

좌석이 부족하려면 $X \leq 1$ 이어야 하므로 구하는 확률은

$\hookrightarrow X=20$ 이면 좌석이 딱 맞고,
 $X > 20$ 이면 좌석이 남는다.

$$\begin{aligned} P(X \leq 1) &= P(X=0) + P(X=1) \\ &= {}_{28}C_0 \times 0.1^0 \times 0.9^{28} + {}_{28}C_1 \times 0.1^1 \times 0.9^{27} \\ &= 0.052 + 0.1624 = 0.2144 \end{aligned}$$

정답_ ⑤

376

$$E(X) = 30 \times \frac{1}{5} = 6$$

정답_ ①

377

$$E(X) = 60 \text{이므로}$$

$$80p = 60 \quad \therefore p = \frac{3}{4}$$

즉, 확률변수 X 가 이항분포 $B\left(80, \frac{3}{4}\right)$ 을 따르므로

$$V(X) = 80 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = 15$$

정답_ 15

378

확률변수 X 의 평균과 표준편차가 모두 $\frac{19}{20}$ 이므로

$$E(X) = np = \frac{19}{20} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{npq} = \frac{19}{20} \quad (\text{단, } q=1-p)$$

$$\therefore npq = \left(\frac{19}{20}\right)^2 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦을 ⑧에 대입하면

$$\frac{19}{20}q = \left(\frac{19}{20}\right)^2 \quad \therefore q = \frac{19}{20}$$

$$\text{즉, } 1-p = \frac{19}{20} \text{이므로 } p = \frac{1}{20}$$

$$p = \frac{1}{20} \text{을 } \textcircled{7} \text{에 대입하면}$$

$$\frac{1}{20}n = \frac{19}{20} \quad \therefore n = 19$$

정답_ ②

379

$$E(X) = n \times \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$$

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 \text{이므로}$$

$$E(X^2) = V(X) + \{E(X)\}^2$$

이때 $E(X^2) = V(X) + 25$ 이므로

$$\{E(X)\}^2 = 25, \quad \frac{n^2}{4} = 25$$

$$n^2 = 100 \quad \therefore n = 10 \quad (\because n > 0)$$

정답_ ①

380

$$E(X) = 18 \times \frac{2}{3} = 12, \quad V(X) = 18 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = 4$$

12와 4가 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a = 12 + 4 = 16, \quad b = 12 \times 4 = 48$$

$$\therefore b - a = 48 - 16 = 32$$

정답_ ④

참고 이차방정식의 근과 계수의 관계

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 하면

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

381

확률변수 X 의 확률질량함수가

$$P(X=x) = {}_{50}C_x p^x (1-p)^{50-x} \quad (x=0, 1, 2, \dots, 50)$$

이므로 X 는 이항분포 $B(50, p)$ 를 따른다.

$$V(X) = 8 \text{이므로}$$

$$50p(1-p) = 8, \quad 25p(1-p) = 4$$

$$25p^2 - 25p + 4 = 0, \quad (5p-1)(5p-4) = 0$$

$$\therefore p = \frac{1}{5} \quad \left(\because 0 < p < \frac{1}{3} \right)$$

따라서 X 는 이항분포 $B\left(50, \frac{1}{5}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = 50 \times \frac{1}{5} = 10$$

이때 $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$ 이므로

$$\begin{aligned} E(X^2) &= V(X) + \{E(X)\}^2 \\ &= 8 + 10^2 = 108 \end{aligned}$$

정답_ 108

382

한 개의 동전을 한 번 던져 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$ 이므로 확률변수

X 는 이항분포 $B\left(100, \frac{1}{2}\right)$ 을 따른다.

$$(1) E(X) = 100 \times \frac{1}{2} = 50$$

$$(2) V(X) = 100 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 25$$

$$(3) \sigma(X) = \sqrt{25} = 5$$

정답_ (1) 50 (2) 25 (3) 5

383

3의 배수는 3, 6의 2개이므로 한 개의 주사위를 한 번 던져 3의 배

수의 눈이 나올 확률은

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

따라서 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(36, \frac{1}{3}\right)$ 을 따르므로

$$V(X) = 36 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = 8$$

정답_ ②

384

주어진 그래프에서 $k=1, 2, 3, 4$ 일 때 $f(k) < 0$ 이므로 한 개의 주사위를 한 번 던져 사건 A 가 일어날 확률은

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

따라서 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(120, \frac{2}{3}\right)$ 를 따르므로

$$E(X) = 120 \times \frac{2}{3} = 80$$

정답_ 80

385

상자에서 임의로 3개의 공을 꺼낼 때, 3개 모두 같은 색의 공이 나올 확률은

$$\frac{{}_6C_3 + {}_3C_3}{{}_9C_3} = \frac{20+1}{84} = \frac{1}{4}$$

따라서 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{4}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = n \times \frac{1}{4} = \frac{n}{4}$$

이때 $E(X) = 60$ 이므로

$$\frac{n}{4} = 60 \quad \therefore n = 240$$

따라서

$$V(X) = 240 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = 45$$

이므로

$$n - V(X) = 240 - 45 = 195$$

정답_ ②

386

한 개의 제품이 불량품일 확률은 $\frac{1}{4}$ 이고, 한 개의 포장하는 상자가 불량품일 확률은 $\frac{1}{5}$ 이므로 2개의 제품을 한 개의 상자에 넣어 상품으로 만들 때 제품과 포장한 상자가 모두 합격품일 확률은

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{9}{20}$$

따라서 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(800, \frac{9}{20}\right)$ 를 따르므로

$$V(X) = 800 \times \frac{9}{20} \times \frac{11}{20} = 198$$

정답_ ①

387

확률변수 X 가 이항분포 $B\left(150, \frac{1}{5}\right)$ 을 따르므로

$$V(X) = 150 \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} = 24$$

$$\begin{aligned} \therefore V(5X-1) &= 5^2 V(X) \\ &= 25 \times 24 = 600 \end{aligned}$$

정답_ 600

388

확률변수 X 가 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{3}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = n \times \frac{1}{3} = \frac{n}{3}$$

$$\therefore E(3X-1) = 3E(X) - 1$$

$$= 3 \times \frac{n}{3} - 1 = n - 1$$

이때 $E(3X-1) = 17$ 이므로

$$n - 1 = 17 \quad \therefore n = 18$$

즉, 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(18, \frac{1}{3}\right)$ 을 따르므로

$$V(X) = 18 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = 4$$

정답_ ④

389

확률변수 X 가 이항분포 $B\left(180, \frac{1}{6}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = 180 \times \frac{1}{6} = 30$$

$$\sigma(X) = \sqrt{180 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}} = 5$$

$$\therefore E\left(\frac{X - \sigma(X)}{\sigma(X)}\right) + \sigma\left(\frac{X - E(X)}{E(X)}\right)$$

$$= E\left(\frac{X-5}{5}\right) + \sigma\left(\frac{X-30}{30}\right)$$

$$= E\left(\frac{1}{5}X - 1\right) + \sigma\left(\frac{1}{30}X - 1\right)$$

$$= \frac{1}{5}E(X) - 1 + \frac{1}{30}\sigma(X)$$

$$= \frac{1}{5} \times 30 - 1 + \frac{1}{30} \times 5 = \frac{31}{6}$$

정답_ ③

390

한 개의 동전을 한 번 던져 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$ 이므로 확률변수

X 는 이항분포 $B\left(10, \frac{1}{2}\right)$ 을 따른다.

따라서

$$E(X) = 10 \times \frac{1}{2} = 5$$

이므로

$$E(2X+1) = 2E(X) + 1$$

$$= 2 \times 5 + 1 = 11$$

따라서 구하는 상금의 기댓값은 11원이다.

정답_ ③

391

한 개의 주사위를 한 번 던져 2 이하의 눈이 나올 확률은

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

한 개의 주사위를 15번 던져 2 이하의 눈이 나온 횟수를 확률변수 Y 라고 하면 Y 는 이항분포 $B(15, \frac{1}{3})$ 을 따른다.

$$\therefore E(Y) = 15 \times \frac{1}{3} = 5$$

한 개의 주사위를 15번 던져 2 이하의 눈이 나온 횟수가 Y 이면 3 이상의 눈이 나온 횟수는 $15 - Y$ 이므로 점 P 의 좌표는 $(3Y, 15 - Y)$ 이다.

점 $P(3Y, 15 - Y)$ 와 직선 $3x + 4y = 0$ 사이의 거리 X 는

$$\begin{aligned} X &= \frac{|3 \times 3Y + 4(15 - Y)|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|5Y + 60|}{5} \\ &= Y + 12 \quad (\because Y \geq 0) \\ \therefore E(X) &= E(Y + 12) = E(Y) + 12 \\ &= 5 + 12 = 17 \end{aligned}$$

정답_ ③

392

정규분포곡선은 직선 $x = (\text{평균})$ 에 대하여 대칭이다. 따라서 평균이 클수록 대칭축이 오른쪽에 있으므로 평균이 가장 큰 것은 B 이다.

또, 표준편차가 클수록 그래프의 높이는 낮아지고 폭이 넓어지므로 표준편차가 가장 큰 것은 C 이다.

정답_ ③

393

ㄱ. 두 고등학교 A, B의 평균은 60으로 같지만 표준편차는 B 고등학교보다 A 고등학교가 더 크므로 B 고등학교는 평균을 중심으로 학생들의 점수가 모여 있고 A 고등학교는 학생들의 성적이 넓게 퍼져 있다.

즉, 성적이 우수한 학생들은 B 고등학교보다 A 고등학교에 더 많다. (거짓)

ㄴ. 두 고등학교 A, B의 평균이 60으로 같으므로 두 고등학교의 성적은 평균적으로 같다. (거짓)

ㄷ. B 고등학교가 C 고등학교보다 표준편차가 작으므로 C 고등학교 학생들보다 B 고등학교 학생들의 성적이 더 고르다. (참) 따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

정답_ ③

394

ㄱ. 모든 실수 x 에서 정의된 정규분포곡선과 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이므로

$$P(-\infty \leq X \leq \infty) = 1 \quad (\text{참})$$

ㄴ. 정규분포곡선은 직선 $x = m$ 에 대하여 대칭이므로

$$P(X \leq m) = P(X \geq m) = 0.5 \quad (\text{참})$$

ㄷ. 연속확률변수 X 가 어떤 특정한 값을 가질 확률은 0이므로 임의의 실수 a 에 대하여

$$P(X = a) = 0 \quad (\text{참})$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답_ ⑤

395

조건 ㄴ에서 모든 실수 X 에 대하여 $f(10 - x) = f(10 + x)$ 이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 직선 $x = 10$ 에 대하여 대칭이다.

이때 정규분포곡선은 직선 $x = (\text{평균})$ 에 대하여 대칭이므로

$$E(X) = 10$$

조건 ㄱ에서 $\sigma(X) = 7$ 이므로

$$V(X) = 7^2 = 49$$

이때 $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$ 이므로

$$\begin{aligned} E(X^2) &= V(X) + \{E(X)\}^2 \\ &= 49 + 10^2 = 149 \end{aligned}$$

정답_ 149

396

확률변수 X 가 정규분포 $N(m, 4)$ 를 따르므로 X 의 확률밀도함수는 $x = m$ 에서 최댓값을 갖고, 정규분포곡선은 직선 $x = m$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 $P(k - 8 \leq X \leq k)$ 가 최대가 되려면

$$m = \frac{(k - 8) + k}{2}$$

이어야 한다.

$k = 12$ 일 때 최대이므로

$$m = \frac{(12 - 8) + 12}{2} = 8$$

정답_ 8

397

확률변수 X 가 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따르므로 정규분포곡선은 직선 $x = m$ 에 대하여 대칭이고, 조건 ㄱ에서

$$P(X \leq -3) = P(X \geq 17) \text{이므로}$$

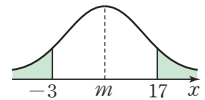
$$m = \frac{-3 + 17}{2} = 7$$

조건 ㄴ에서 $V\left(\frac{1}{3}X - 1\right) = 4$ 이므로

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 V(X) = 4 \quad \therefore V(X) = 36$$

$$\therefore \sigma = \sqrt{36} = 6 \quad (\because \sigma > 0)$$

$$\therefore m - \sigma = 7 - 6 = 1$$



정답_ 1

398

확률변수 X 가 정규분포 $N(6, 2^2)$ 을 따르므로

$$m = 6, \sigma = 2$$

$$\therefore P(4 \leq X \leq 8) = P(6 - 2 \leq X \leq 6 + 2)$$

$$= P(m - \sigma \leq X \leq m + \sigma)$$

$$= P(m - \sigma \leq X \leq m) + P(m \leq X \leq m + \sigma)$$

$$= 2P(m \leq X \leq m + \sigma)$$

$$= 2 \times 0.3413 = 0.6826 \quad (\text{참})$$

$$\therefore P(X \geq 12) = P(X \geq 6 + 3 \times 2)$$

$$= P(X \geq m + 3\sigma)$$

$$= P(X \geq m) - P(m \leq X \leq m + 3\sigma)$$

$$= 0.5 - 0.4987 = 0.0013 \quad (\text{참})$$

$$\therefore P(X \leq 10) = P(X \leq 6 + 2 \times 2)$$

$$= P(X \leq m + 2\sigma)$$

$$= P(X \leq m) + P(m \leq X \leq m + 2\sigma)$$

$$= 0.5 + 0.4772 = 0.9772 \quad (\text{참})$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답_ ⑤

참고 확률변수 X 가 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따를 때, 정규분포곡선은 직선 $x=m$ 에 대하여 대칭이므로 다음이 모두 성립한다.

- (1) $P(X \leq m) = P(X \geq m) = 0.5$
 (2) $P(m - \sigma \leq X \leq m) = P(m \leq X \leq m + \sigma)$
 (3) $P(m - \sigma \leq X \leq m + \sigma) = 2P(m \leq X \leq m + \sigma)$

399

확률변수 X 가 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따르므로 정규분포곡선은 직선 $x=m$ 에 대하여 대칭이다.

$P(m - 2\sigma \leq X \leq m + 2\sigma) = a$ 에서

$$2P(m \leq X \leq m + 2\sigma) = a \quad \therefore P(m \leq X \leq m + 2\sigma) = \frac{a}{2}$$

$P(m - 3\sigma \leq X \leq m + 3\sigma) = b$ 에서

$$2P(m \leq X \leq m + 3\sigma) = b \quad \therefore P(m \leq X \leq m + 3\sigma) = \frac{b}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore P(m + 2\sigma \leq X \leq m + 3\sigma) \\ &= P(m \leq X \leq m + 3\sigma) - P(m \leq X \leq m + 2\sigma) \\ &= \frac{b}{2} - \frac{a}{2} = \frac{b-a}{2} \end{aligned}$$

정답 $\frac{b-a}{2}$

400

확률변수 X 가 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따르므로 정규분포곡선은 직선 $x=m$ 에 대하여 대칭이다.

$P(X \leq 18) = 0.65$ 에서

$$\begin{aligned} P(X \geq 18) &= 1 - P(X \leq 18) \\ &= 1 - 0.65 = 0.35 \end{aligned}$$

즉, $P(X \leq 2) = P(X \geq 18)$ 이므로

$$m = \frac{2+18}{2} = 10$$

$$\begin{aligned} \therefore P(|X - m| \leq 8) &= P(|X - 10| \leq 8) \\ &= P(-8 \leq X - 10 \leq 8) \\ &= P(2 \leq X \leq 18) \\ &= P(X \leq 18) - P(X \leq 2) \\ &= 0.65 - 0.35 = 0.3 \end{aligned}$$

정답 0.3

401

두 확률변수 X, Y 가 각각 정규분포 $N(25, 2^2), N(36, 4^2)$ 을 따르므로 $Z_X = \frac{X-25}{2}, Z_Y = \frac{Y-36}{4}$ 으로 놓으면 Z_X, Z_Y 는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$P(X \leq 28) = P(Y \leq k)$ 에서

$$P\left(Z_X \leq \frac{28-25}{2}\right) = P\left(Z_Y \leq \frac{k-36}{4}\right)$$

$$\therefore P\left(Z_X \leq \frac{3}{2}\right) = P\left(Z_Y \leq \frac{k-36}{4}\right)$$

$$\text{따라서 } \frac{3}{2} = \frac{k-36}{4} \text{이므로}$$

$$k - 36 = 6 \quad \therefore k = 42$$

정답 42

402

확률변수 X 가 정규분포 $N(4, \sigma^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-4}{\sigma}$ 로 놓으

면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$P(-2 \leq X \leq 10) = P(-0.6 \leq Y \leq 0.6)$ 에서

$$P\left(\frac{-2-4}{\sigma} \leq Z \leq \frac{10-4}{\sigma}\right) = P(-0.6 \leq Y \leq 0.6)$$

$$\therefore P\left(-\frac{6}{\sigma} \leq Z \leq \frac{6}{\sigma}\right) = P(-0.6 \leq Y \leq 0.6)$$

$$\text{따라서 } \frac{6}{\sigma} = 0.6 \text{이므로 } \sigma = 10$$

$$\therefore V(X) = 10^2 = 100$$

이때 $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$ 이므로

$$\begin{aligned} E(X^2) &= V(X) + \{E(X)\}^2 \\ &= 100 + 4^2 = 116 \end{aligned}$$

정답 ③

403

두 확률변수 X, Y 가 각각 정규분포 $N(m, 2^2), N(16, 5^2)$ 을 따르므로 $Z_X = \frac{X-m}{2}, Z_Y = \frac{Y-16}{5}$ 으로 놓으면 Z_X, Z_Y 는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$P(8 \leq X \leq 2m-8) = 2P(16 \leq Y \leq 21)$ 에서

$$P\left(\frac{8-m}{2} \leq Z_X \leq \frac{(2m-8)-m}{2}\right) = 2P\left(\frac{16-16}{5} \leq Z_Y \leq \frac{21-16}{5}\right)$$

$$P\left(-\frac{m-8}{2} \leq Z_X \leq \frac{m-8}{2}\right) = 2P(0 \leq Z_Y \leq 1)$$

$$2P\left(0 \leq Z_X \leq \frac{m-8}{2}\right) = 2P(0 \leq Z_Y \leq 1)$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z_X \leq \frac{m-8}{2}\right) = P(0 \leq Z_Y \leq 1)$$

$$\text{따라서 } \frac{m-8}{2} = 1 \text{이므로}$$

$$m - 8 = 2 \quad \therefore m = 10$$

정답 10

404

확률변수 X 가 정규분포 $N(70, 10^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-70}{10}$ 으로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\therefore P(60 \leq X \leq 90) = P\left(\frac{60-70}{10} \leq Z \leq \frac{90-70}{10}\right)$$

$$= P(-1 \leq Z \leq 2)$$

$$= P(-1 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 2)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 1) + P(0 \leq Z \leq 2)$$

$$= 0.3413 + 0.4772 = 0.8185$$

정답 0.8185

405

확률변수 X 가 정규분포 $N(45, 4^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-45}{4}$ 로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\therefore P(43 \leq X \leq 47) = P\left(\frac{43-45}{4} \leq Z \leq \frac{47-45}{4}\right)$$

$$= P(-0.5 \leq Z \leq 0.5)$$

$$= 2P(0 \leq Z \leq 0.5)$$

이때 $P(43 \leq X \leq 47) = 0.383$ 이므로

$$2P(0 \leq Z \leq 0.5) = 0.383 \quad \therefore P(0 \leq Z \leq 0.5) = 0.1915$$

$$P(-0.5 \leq Z \leq 0) + P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-50}{8}\right) = 0.6247$$

$$P(0 \leq Z \leq 0.5) + P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-50}{8}\right) = 0.6247$$

$$\begin{aligned} \therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-50}{8}\right) &= 0.6247 - P(0 \leq Z \leq 0.5) \\ &= 0.6247 - 0.1915 = 0.4332 \end{aligned}$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.5) = 0.4332$ 이므로

$$\frac{a-50}{8} = 1.5, \quad a-50 = 12$$

$$\therefore a = 62$$

정답_ 62

410

확률변수 X 가 정규분포 $N(8, 5^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-8}{5}$ 로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$P(X \geq a) = 0.1151$ 에서

$$P\left(Z \geq \frac{a-8}{5}\right) = 0.1151 \quad \text{..... 0.1151 < 0.50이므로 } \frac{a-8}{5} > 0$$

$$P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-8}{5}\right) = 0.1151$$

$$\begin{aligned} \therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-8}{5}\right) &= P(Z \geq 0) - 0.1151 \\ &= 0.5 - 0.1151 = 0.3849 \end{aligned}$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.2) = 0.3849$ 이므로

$$\frac{a-8}{5} = 1.2, \quad a-8 = 6$$

$$\therefore a = 14$$

정답_ ④

411

확률변수 X 가 정규분포 $N(m, 8^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-m}{8}$ 으로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$P(X \geq 90) = 0.1587$ 에서

$$P\left(Z \geq \frac{90-m}{8}\right) = 0.1587$$

$$P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{90-m}{8}\right) = 0.1587$$

$$\begin{aligned} \therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{90-m}{8}\right) &= P(Z \geq 0) - 0.1587 \\ &= 0.5 - 0.1587 = 0.3413 \end{aligned}$$

이때 $P(|Z| \leq 1) = 0.6826$ 이므로

$$2P(0 \leq Z \leq 1) = 0.6826 \quad \therefore P(0 \leq Z \leq 1) = 0.3413$$

$$\text{즉, } \frac{90-m}{8} = 1 \text{이므로}$$

$$90-m=8 \quad \therefore m=82$$

정답_ ④

412

두 확률변수 X, Y 가 각각 정규분포 $N(m, 2^2), N(2m, \sigma^2)$ 을 따르므로 $Z_X = \frac{X-m}{2}, Z_Y = \frac{Y-2m}{\sigma}$ 으로 놓으면 Z_X, Z_Y 는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$P(X \leq 8) + P(Y \leq 8) = 1$ 에서

$$P\left(Z_X \leq \frac{8-m}{2}\right) + P\left(Z_Y \leq \frac{8-2m}{\sigma}\right) = 1$$

$$P\left(Z_X \leq \frac{8-m}{2}\right) = 1 - P\left(Z_Y \leq \frac{8-2m}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(Z_Y \geq \frac{8-2m}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(Z_Y \leq \frac{2m-8}{\sigma}\right)$$

$$\therefore \frac{8-m}{2} = \frac{2m-8}{\sigma} \quad \text{..... ㉠}$$

$P(Y \leq m+4) = 0.3085$ 에서

$$P\left(Z_Y \leq \frac{(m+4)-2m}{\sigma}\right) = 0.3085$$

$$P\left(Z_Y \leq \frac{4-m}{\sigma}\right) = 0.3085$$

$$\text{..... 0.3085 < 0.50이므로 } \frac{4-m}{\sigma} < 0$$

$$P(Z_Y \leq 0) - P\left(\frac{4-m}{\sigma} \leq Z_Y \leq 0\right) = 0.3085$$

$$\begin{aligned} \therefore P\left(0 \leq Z_Y \leq \frac{m-4}{\sigma}\right) &= P(Z_Y \leq 0) - 0.3085 \\ &= 0.5 - 0.3085 = 0.1915 \end{aligned}$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 0.5) = 0.1915$ 이므로

$$\frac{m-4}{\sigma} = 0.5 \quad \therefore \sigma = 2m-8 \quad \text{..... ㉡}$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\frac{8-m}{2} = \frac{2m-8}{2m-8}, \quad \frac{8-m}{2} = 1$$

$$8-m=2 \quad \therefore m=6$$

$m=6$ 을 ㉡에 대입하면 $\sigma=4$

$$\therefore P(X \leq \sigma) = P(X \leq 4) = P\left(Z_X \leq \frac{4-6}{2}\right)$$

$$= P(Z_X \leq -1) = P(Z_X \geq 1)$$

$$= P(Z_X \geq 0) - P(0 \leq Z_X \leq 1)$$

$$= 0.5 - 0.3413 = 0.1587$$

정답_ ④

413

수학 시험 점수를 X 점이라고 하면 확률변수 X 는 정규분포

$N(68, 10^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-68}{10}$ 로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$P(55 \leq X \leq 78) = P\left(\frac{55-68}{10} \leq Z \leq \frac{78-68}{10}\right)$$

$$= P(-1.3 \leq Z \leq 1)$$

$$= P(-1.3 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 1.3) + P(0 \leq Z \leq 1)$$

$$= 0.4032 + 0.3413 = 0.7445$$

정답_ ②

414

빨래를 하는 데 걸리는 시간을 X 분이라고 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(30, 4^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-30}{4}$ 으로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}
 P(X \geq 35) &= P\left(Z \geq \frac{35-30}{4}\right) \\
 &= P(Z \geq 1.25) \\
 &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1.25) \\
 &= 0.5 - 0.3944 = 0.1056
 \end{aligned}$$

정답_ 0.1056

415

과자 한 봉지의 무게를 X g이라고 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(160, 3^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-160}{3}$ 으로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.
과자 한 봉지의 무게가 152.5 g 이하이면 불량품으로 판정하므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}
 P(X \leq 152.5) &= P\left(Z \leq \frac{152.5-160}{3}\right) \\
 &= P(Z \leq -2.5) = P(Z \geq 2.5) \\
 &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 2.5) \\
 &= 0.5 - 0.4938 = 0.0062
 \end{aligned}$$

정답_ 0.0062

416

소형견의 몸무게와 대형견의 몸무게를 각각 X kg, Y kg이라고 하면 두 확률변수 X, Y 는 각각 정규분포 $N(8, 2^2)$, $N(27, 3^2)$ 을 따르므로 $Z_X = \frac{X-8}{2}$, $Z_Y = \frac{Y-27}{3}$ 로 놓으면 Z_X, Z_Y 는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.
임의로 택한 소형견 한 마리의 몸무게가 10 kg 이상일 확률과 임의로 택한 대형견 한 마리의 몸무게가 a kg 이하일 확률이 같으므로 $P(X \geq 10) = P(Y \leq a)$ 에서

$$P\left(Z_X \geq \frac{10-8}{2}\right) = P\left(Z_Y \leq \frac{a-27}{3}\right)$$

$$P(Z_X \geq 1) = P\left(Z_Y \leq \frac{a-27}{3}\right)$$

$$\therefore P(Z_X \leq -1) = P\left(Z_Y \leq \frac{a-27}{3}\right)$$

$$\text{따라서 } \frac{a-27}{3} = -1 \text{ 이므로}$$

$$a-27 = -3 \quad \therefore a = 24$$

정답_ 24

417

우석이가 집에서 체육관까지 가는 데 걸리는 시간을 X 분이라고 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(40, 2^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-40}{2}$ 으로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.
우석이가 약속 시간에 늦지 않으려면 2시까지 도착해야 하므로 $X \leq 37$ 이어야 한다.
따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}
 P(X \leq 37) &= P\left(Z \leq \frac{37-40}{2}\right) \\
 &= P(Z \leq -1.5) = P(Z \geq 1.5) \\
 &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1.5) \\
 &= 0.5 - 0.43 = 0.07
 \end{aligned}$$

정답_ ②

418

자동차의 속력을 X km/h라고 하면 확률변수 X 는 정규분포

$N(72, 8^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-72}{8}$ 로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

속력이 80 km/h를 초과하면 과속으로 단속되므로 자동차 한 대가 과속으로 단속될 확률은

$$\begin{aligned}
 P(X > 80) &= P\left(Z > \frac{80-72}{8}\right) \\
 &= P(Z > 1) \\
 &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1) \\
 &= 0.5 - 0.34 = 0.16 \\
 &= \frac{16}{100} = \frac{4}{25}
 \end{aligned}$$

A와 B의 속력은 서로 영향을 주지 않으므로, 즉 독립이므로 두 자동차 A, B가 모두 과속으로 단속될 확률은

$$\frac{4}{25} \times \frac{4}{25} = \frac{16}{625}$$

정답_ ⑤

419

신입 사원의 키를 X cm라고 하면 확률변수 X 는 정규분포

$N(172, \sigma^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-172}{\sigma}$ 로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

전체 신입 사원 500명 중에서 키가 175 cm 이상인 사원이 80명 이므로

$$P(X \geq 175) = \frac{80}{500} = 0.16$$

$$P\left(Z \geq \frac{175-172}{\sigma}\right) = 0.16$$

$$P\left(Z \geq \frac{3}{\sigma}\right) = 0.16$$

$$P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{3}{\sigma}\right) = 0.16$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{3}{\sigma}\right) = P(Z \geq 0) - 0.16$$

$$= 0.5 - 0.16 = 0.34$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1) = 0.34$ 이므로

$$\frac{3}{\sigma} = 1 \quad \therefore \sigma = 3$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}
 P(X \leq 166) &= P\left(Z \leq \frac{166-172}{3}\right) \\
 &= P(Z \leq -2) = P(Z \geq 2) \\
 &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 2) \\
 &= 0.5 - 0.48 = 0.02
 \end{aligned}$$

정답_ 0.02

420

파프리카의 무게를 X g이라고 하면 확률변수 X 는 정규분포

$N(160, 10^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-160}{10}$ 으로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore P(155 \leq X \leq 170) &= P\left(\frac{155-160}{10} \leq Z \leq \frac{170-160}{10}\right) \\ &= P(-0.5 \leq Z \leq 1) \\ &= P(-0.5 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= P(0 \leq Z \leq 0.5) + P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 0.1915 + 0.3413 = 0.5328\end{aligned}$$

따라서 무게가 155 g 이상 170 g 이하인 파프리카의 개수는
 $10000 \times 0.5328 = 5328$

정답_ 5328

421

통학 시간을 X 분이라고 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(22, 5^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-22}{5}$ 로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore P(X \leq 15) &= P\left(Z \leq \frac{15-22}{5}\right) \\ &= P(Z \leq -1.4) = P(Z \geq 1.4) \\ &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1.4) \\ &= 0.5 - 0.42 = 0.08\end{aligned}$$

따라서 통학 시간이 15분 이하인 학생 수는
 $30000 \times 0.08 = 2400$

정답_ ④

422

건전지의 수명을 X 시간이라고 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(100, 5^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-100}{5}$ 으로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore P(X \geq 110) &= P\left(Z \geq \frac{110-100}{5}\right) \\ &= P(Z \geq 2) \\ &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 0.5 - 0.48 = 0.02\end{aligned}$$

따라서 수명이 110시간 이상인 건전지의 개수는
 $800 \times 0.02 = 16$

정답_ 16

423

영어 성적을 X 점이라고 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(82, 4^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-82}{4}$ 로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore P(X \geq 88) &= P\left(Z \geq \frac{88-82}{4}\right) \\ &= P(Z \geq 1.5) \\ &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1.5) \\ &= 0.5 - 0.43 = 0.07\end{aligned}$$

따라서 영어 성적이 88점 이상인 학생 수는
 $200 \times 0.07 = 14$

이므로 영어 성적이 88점인 학생은 14번째로 성적이 좋다고 할 수 있다.

정답_ ④

424

몸무게를 X kg이라고 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(m, 10^2)$

을 따르므로 $Z = \frac{X-m}{10}$ 으로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$

을 따른다.

몸무게가 80 kg 이상인 회원 수가 315명이므로

$$P(X \geq 80) = \frac{315}{1500} = 0.21$$

$$P\left(Z \geq \frac{80-m}{10}\right) = 0.21$$

$$P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{80-m}{10}\right) = 0.21$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{80-m}{10}\right) = P(Z \geq 0) - 0.21$$

$$= 0.5 - 0.21 = 0.29$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 0.8) = 0.29$ 이므로

$$\frac{80-m}{10} = 0.8, 80-m=8$$

$$\therefore m=72$$

따라서 회원의 몸무게가 63 kg 이하일 확률은

$$\begin{aligned}P(X \leq 63) &= P\left(Z \leq \frac{63-72}{10}\right) \\ &= P(Z \leq -0.9) = P(Z \geq 0.9) \\ &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 0.9) \\ &= 0.5 - 0.32 = 0.18\end{aligned}$$

이므로

$$a = 1500 \times 0.18 = 270$$

$$\therefore m+a=72+270=342$$

정답_ 342

425

수험생의 시험 점수를 X 점이라고 하면 확률변수 X 는 정규분포

$N(50, 20^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-50}{20}$ 으로 놓으면 Z 는 표준정규분

포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

상위 4% 이내에 속하기 위한 최저 점수를 a 점이라고 하면

$$P(X \geq a) = 0.04$$

$$P\left(Z \geq \frac{a-50}{20}\right) = 0.04$$

$$P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-50}{20}\right) = 0.04$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-50}{20}\right) = P(Z \geq 0) - 0.04$$

$$= 0.5 - 0.04 = 0.46$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.75) = 0.46$ 이므로

$$\frac{a-50}{20} = 1.75, a-50=35$$

$$\therefore a=85$$

따라서 성적이 상위 4% 이내에 속하기 위한 최저 점수는 85점이다.

정답_ ①

426

응시자들의 점수를 X 점이라고 하면 확률변수 X 는 정규분포

$N(250, 40^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-250}{40}$ 으로 놓으면 Z 는 표준정규

분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

합격하기 위한 최저 점수를 a 점이라고 하면

$$P(X \geq a) = \frac{1340}{20000} = 0.067$$

$$P\left(Z \geq \frac{a-250}{40}\right) = 0.067$$

$$P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-250}{40}\right) = 0.067$$

$$\begin{aligned} \therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-250}{40}\right) &= P(Z \geq 0) - 0.067 \\ &= 0.5 - 0.067 = 0.433 \end{aligned}$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.5) = 0.433$ 이므로

$$\frac{a-250}{40} = 1.5, a-250 = 60$$

$$\therefore a = 310$$

따라서 입학시험에 합격하기 위한 최저 점수는 310점이다.

정답_ 310점

427

수학 성적을 X 점이라고 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(40, 25^2)$

을 따르므로 $Z = \frac{X-40}{25}$ 으로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$

을 따른다.

교내 대표로 나갈 학생의 최저 점수를 a 점이라고 하면

$$P(X \geq a) = \frac{4}{200} = 0.02$$

$$P\left(Z \geq \frac{a-40}{25}\right) = 0.02$$

$$P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-40}{25}\right) = 0.02$$

$$\begin{aligned} \therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-40}{25}\right) &= P(Z \geq 0) - 0.02 \\ &= 0.5 - 0.02 = 0.48 \end{aligned}$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 2) = 0.48$ 이므로

$$\frac{a-40}{25} = 2, a-40 = 50$$

$$\therefore a = 90$$

따라서 교내 대표로 나갈 학생의 최저 점수는 90점이다.

정답_ 90점

428

수박의 무게를 X kg이라고 하면 확률변수 X 는 정규분포

$N(m, 5^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-m}{5}$ 으로 놓으면 Z 는 표준정규분

포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

무게가 무거운 쪽에서 3150번째인 수박의 무게가 12 kg이므로

$$P(X \geq 12) = \frac{3150}{15000} = 0.21$$

$$P\left(Z \geq \frac{12-m}{5}\right) = 0.21$$

$$P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{12-m}{5}\right) = 0.21$$

$$\begin{aligned} \therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{12-m}{5}\right) &= P(Z \geq 0) - 0.21 \\ &= 0.5 - 0.21 = 0.29 \end{aligned}$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 0.8) = 0.29$ 이므로

$$\frac{12-m}{5} = 0.8, 12-m = 4$$

$$\therefore m = 8$$

정답_ 8

429

국어 성적을 X 점, 영어 성적을 Y 점이라고 하면 두 확률변수 X , Y 는 각각 정규분포 $N(60, 10^2)$, $N(52, 8^2)$ 을 따르므로

$Z_X = \frac{X-60}{10}$, $Z_Y = \frac{Y-52}{8}$ 로 놓으면 Z_X , Z_Y 는 모두 표준정규

분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

국어 성적이 70점 이상인 학생의 비율이 $p\%$ 이므로

$$P(X \geq 70) = P\left(Z_X \geq \frac{70-60}{10}\right)$$

$$= P(Z_X \geq 1) = \frac{p}{100} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또, 영어 성적이 상위 $p\%$ 이내에 들기 위한 최저 점수를 k 점이라고 하면

$$P(Y \geq k) = P\left(Z_Y \geq \frac{k-52}{8}\right) = \frac{p}{100} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } P(Z_X \geq 1) = P\left(Z_Y \geq \frac{k-52}{8}\right) \text{이므로}$$

$$1 = \frac{k-52}{8}, k-52 = 8$$

$$\therefore k = 60$$

따라서 영어 성적이 상위 $p\%$ 이내에 들기 위한 최저 점수는 60점이다.

정답_ 60점

430

확률변수 X 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르고, 두 확률변수 Y ,

T 는 각각 정규분포 $N(1, 2^2)$, $N(2, 3^2)$ 을 따르므로 $Z_Y = \frac{Y-1}{2}$,

$Z_T = \frac{T-2}{3}$ 로 놓으면 Z_Y , Z_T 는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을

따른다.

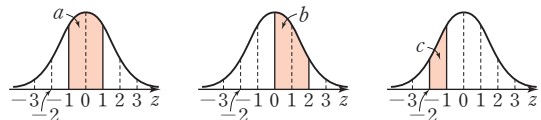
$$a = P(-1 < X < 1)$$

$$b = P(1 < Y < 5) = P\left(\frac{1-1}{2} < Z_Y < \frac{5-1}{2}\right)$$

$$= P(0 < Z_Y < 2)$$

$$c = P(-4 < T < -1) = P\left(\frac{-4-2}{3} < Z_T < \frac{-1-2}{3}\right)$$

$$= P(-2 < Z_T < -1)$$



a , b , c 는 위의 그림의 색칠한 부분과 같으므로

$$c < b < a$$

정답_ ⑤

431

려원이네 반 전체 학생의 국어 성적을 X 점, 영어 성적을 Y 점, 수학 성적을 T 점이라고 하면 세 확률변수 X , Y , T 는 각각 정규분

포 $N(75, 10^2)$, $N(70, 15^2)$, $N(65, 12^2)$ 을 따르므로
 $Z_X = \frac{X-75}{10}$, $Z_Y = \frac{Y-70}{15}$, $Z_T = \frac{T-65}{12}$ 로 놓으면 Z_X, Z_Y, Z_T
 는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.
 다른 학생들이 려원이보다 국어, 영어, 수학 성적이 높을 확률은 각각

$$P(X \geq 84) = P\left(Z_X \geq \frac{84-75}{10}\right) = P(Z_X \geq 0.9)$$

$$P(Y \geq 82) = P\left(Z_Y \geq \frac{82-70}{15}\right) = P(Z_Y \geq 0.8)$$

$$P(T \geq 77) = P\left(Z_T \geq \frac{77-65}{12}\right) = P(Z_T \geq 1)$$

이므로

$$P(T \geq 77) < P(X \geq 84) < P(Y \geq 82)$$

↳ 려원이보다 성적이 높을 확률이 낮은 과목일수록 상대적으로 려원의의 성적이 좋다.

따라서 려원의의 성적이 상대적으로 가장 좋은 과목은 수학이다.
 정답_ 수학

432

농구부, 배구부, 야구부 학생들의 키를 각각 X cm, Y cm, T cm라고 하면 세 확률변수 X, Y, T 는 각각 정규분포 $N(178, 5^2)$, $N(176, 10^2)$, $N(180, 12^2)$ 을 따르므로
 $Z_X = \frac{X-178}{5}$, $Z_Y = \frac{Y-176}{10}$, $Z_T = \frac{T-180}{12}$ 으로 놓으면 Z_X, Z_Y, Z_T 는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.
 농구부의 다른 학생들이 A보다 키가 클 확률은

$$P(X \geq 182) = P\left(Z_X \geq \frac{182-178}{5}\right) = P(Z_X \geq 0.8)$$

배구부의 다른 학생들이 B보다 키가 클 확률은

$$P(Y \geq 180) = P\left(Z_Y \geq \frac{180-176}{10}\right) = P(Z_Y \geq 0.4)$$

야구부의 다른 학생들이 C보다 키가 클 확률은

$$P(T \geq 184) = P\left(Z_T \geq \frac{184-180}{12}\right) = P\left(Z_T \geq \frac{1}{3}\right)$$

$$\therefore P(X \geq 182) < P(Y \geq 180) < P(T \geq 184)$$

따라서 세 운동선수 A, B, C를 각자 소속된 운동부에서 상대적으로 키가 큰 순서대로 나열하면 A, B, C이다.

정답_ A, B, C

433

확률변수 X 가 이항분포 $B\left(100, \frac{1}{5}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = 100 \times \frac{1}{5} = \boxed{(가) 20}$$

$$V(X) = 100 \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} = 16 = \boxed{(나) 4}^2$$

이때 100은 충분히 큰 수이므로 X 는 근사적으로 정규분포 $N\left(\boxed{(가) 20}, \boxed{(나) 4}^2\right)$ 을 따른다.

정답_ (가) 20, (나) 4

434

확률변수 X 가 이항분포 $B\left(150, \frac{3}{5}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = 150 \times \frac{3}{5} = 90$$

$$V(X) = 150 \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = 36 = 6^2$$

이때 150은 충분히 큰 수이므로 X 는 근사적으로 정규분포 $N(90, 6^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{X-90}{6}$ 으로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로

$$\begin{aligned} P(X \leq 99) &= P\left(Z \leq \frac{99-90}{6}\right) \\ &= P(Z \leq 1.5) \\ &= P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1.5) \\ &= 0.5 + 0.4332 = 0.9332 \end{aligned}$$

정답_ ④

435

확률변수 X 의 확률질량함수가

$$P(X=x) = {}_{288}C_x p^x (1-p)^{288-x} \quad (x=0, 1, 2, \dots, 288)$$

이므로 X 는 이항분포 $B(288, p)$ 를 따른다.

이때 $V(X) = 64$ 이므로

$$288p(1-p) = 64, \quad 9p(1-p) = 2$$

$$9p^2 - 9p + 2 = 0, \quad (3p-1)(3p-2) = 0$$

$$\therefore p = \frac{1}{3} \quad \left(\because 0 < p < \frac{1}{2}\right)$$

따라서 확률변수 X 가 이항분포 $B\left(288, \frac{1}{3}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = 288 \times \frac{1}{3} = 96$$

$$V(X) = 288 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = 64 = 8^2$$

이때 288은 충분히 큰 수이므로 X 는 근사적으로 정규분포 $N(96, 8^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{X-96}{8}$ 으로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로

$$\begin{aligned} P(88 \leq X \leq 104) &= P\left(\frac{88-96}{8} \leq Z \leq \frac{104-96}{8}\right) \\ &= P(-1 \leq Z \leq 1) \\ &= 2P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 2 \times 0.3413 = 0.6826 \end{aligned}$$

정답_ 0.6826

436

주어진 식의 값은 확률변수 X 가 이항분포 $B\left(100, \frac{9}{10}\right)$ 를 따를 때, 확률 $P(X \geq 96)$ 을 구하는 것과 같다.

이때

$$E(X) = 100 \times \frac{9}{10} = 90$$

$$V(X) = 100 \times \frac{9}{10} \times \frac{1}{10} = 9 = 3^2$$

이고 100은 충분히 큰 수이므로 X 는 근사적으로 정규분포 $N(90, 3^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{X-90}{3}$ 으로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 구하는 값은

$$\begin{aligned}
 P(X \geq 96) &= P\left(Z \geq \frac{96-90}{3}\right) \\
 &= P(Z \geq 2) \\
 &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 2) \\
 &= 0.5 - 0.4772 = 0.0228
 \end{aligned}$$

정답_ 0.0228

437

확률변수 X 는 이항분포 $B\left(720, \frac{1}{6}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = 720 \times \frac{1}{6} = 120$$

$$V(X) = 720 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = 100 = 10^2$$

이때 720은 충분히 큰 수이므로 X 는 근사적으로 정규분포 $N(120, 10^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{X-120}{10}$ 으로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로

$$\begin{aligned}
 P(X \geq 135) &= P\left(Z \geq \frac{135-120}{10}\right) \\
 &= P(Z \geq 1.5) \\
 &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1.5) \\
 &= 0.5 - 0.4332 = 0.0668
 \end{aligned}$$

정답_ 0.0668

438

서로 다른 세 개의 동전을 동시에 던져서 세 개 모두 같은 면이 나올 확률은

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

세 개 모두 앞면이 나오거나 세 개 모두 뒷면이 나올 확률

세 개 모두 같은 면이 나오는 횟수를 X 라고 하면 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(768, \frac{1}{4}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = 768 \times \frac{1}{4} = 192$$

$$V(X) = 768 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = 144 = 12^2$$

이때 768은 충분히 큰 수이므로 X 는 근사적으로 정규분포 $N(192, 12^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{X-192}{12}$ 로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}
 P(X \leq 186) &= P\left(Z \leq \frac{186-192}{12}\right) \\
 &= P(Z \leq -0.5) = P(Z \geq 0.5) \\
 &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 0.5) \\
 &= 0.5 - 0.1915 = 0.3085
 \end{aligned}$$

정답_ 0.3085

439

합격자 192명 중에서 등록한 학생을 X 명이라고 하면 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(192, \frac{3}{4}\right)$ 을 따르므로 $\frac{75}{100} = \frac{3}{4}$

$$E(X) = 192 \times \frac{3}{4} = 144$$

$$V(X) = 192 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = 36 = 6^2$$

이때 192는 충분히 큰 수이므로 X 는 근사적으로 정규분포 $N(144, 6^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{X-144}{6}$ 로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}
 P(X \geq 132) &= P\left(Z \geq \frac{132-144}{6}\right) \\
 &= P(Z \geq -2) = P(Z \leq 2) \\
 &= P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 2) \\
 &= 0.5 + 0.4772 = 0.9772
 \end{aligned}$$

정답_ ⑤

440

1600번의 게임 중에서 10점을 얻은 횟수를 X 라고 하면 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(1600, \frac{1}{5}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = 1600 \times \frac{1}{5} = 320$$

$$V(X) = 1600 \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} = 256 = 16^2$$

이때 1600은 충분히 큰 수이므로 X 는 근사적으로 정규분포 $N(320, 16^2)$ 을 따른다.

10점을 얻은 횟수가 X 이므로 2점을 잃은 횟수는 $1600 - X$ 이고, 이때의 점수는

$$10X - 2(1600 - X) = 12X - 3200$$

한편, 얻은 점수가 832점 이상이어야 하므로

$$12X - 3200 \geq 832, 12X \geq 4032$$

$$\therefore X \geq 336$$

따라서 $Z = \frac{X-320}{16}$ 으로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}
 P(X \geq 336) &= P\left(Z \geq \frac{336-320}{16}\right) \\
 &= P(Z \geq 1) \\
 &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1) \\
 &= 0.5 - 0.34 = 0.16
 \end{aligned}$$

정답_ ③

441

주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 4 이하일 확률은 $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, 눈의

수가 5 이상일 확률은 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ 이므로 주사위를 16200번 던져서 4 이하의 눈이 나오는 횟수를 X 라고 하면 확률변수 X 는 이항분포

$B\left(16200, \frac{2}{3}\right)$ 를 따른다.

$$\therefore E(X) = 16200 \times \frac{2}{3} = 10800$$

$$V(X) = 16200 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = 3600 = 60^2$$

이때 16200은 충분히 큰 수이므로 X 는 근사적으로 정규분포 $N(10800, 60^2)$ 을 따른다.

4 이하의 눈의 수가 나온 횟수가 X 이므로 5 이상의 눈의 수가 나오는 횟수는 $16200 - X$ 이고, 이때 점 A 의 위치는

$$X - (16200 - X) = 2X - 16200$$

한편, 점 A의 위치가 5700 이하이어야 하므로

$$2X - 16200 \leq 5700, 2X \leq 21900$$

$$\therefore X \leq 10950$$

따라서 $Z = \frac{X - 10800}{60}$ 으로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$

을 따르므로

$$k = P(X \leq 10950) = P\left(Z \leq \frac{10950 - 10800}{60}\right)$$

$$= P(Z \leq 2.5)$$

$$= P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 2.5)$$

$$= 0.5 + 0.494 = 0.994$$

$$\therefore 1000 \times k = 1000 \times 0.994 = 994$$

정답_ 994

442

100개의 과자 중에서 중량 미달인 과자의 개수를 X 라고 하면 확률변수 X 는 이항분포 $B(100, 0.1)$ 을 따르므로

$$E(X) = 100 \times 0.1 = 10$$

$$V(X) = 100 \times 0.1 \times 0.9 = 9 = 3^2$$

이때 100은 충분히 큰 수이므로 X 는 근사적으로 정규분포 $N(10, 3^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{X - 10}{3}$ 으로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 $P(X \geq a) = 0.0228$ 에서

$$P\left(Z \geq \frac{a - 10}{3}\right) = 0.0228$$

$$P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{a - 10}{3}\right) = 0.0228$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{a - 10}{3}\right) = P(Z \geq 0) - 0.0228$$

$$= 0.5 - 0.0228 = 0.4772$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772$ 이므로

$$\frac{a - 10}{3} = 2, a - 10 = 6$$

$$\therefore a = 16$$

정답_ ③

443

예매한 사람 400명 중에서 예매를 취소하는 사람을 X 명이라고 하면 확률변수 X 는 이항분포 $B(400, 0.2)$ 를 따르므로

$$E(X) = 400 \times 0.2 = 80$$

$$V(X) = 400 \times 0.2 \times 0.8 = 64 = 8^2$$

이때 400은 충분히 큰 수이므로 X 는 근사적으로 정규분포 $N(80, 8^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{X - 80}{8}$ 으로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 $P(X \geq a) = 0.0013$ 에서

$$P\left(Z \geq \frac{a - 80}{8}\right) = 0.0013$$

$$P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{a - 80}{8}\right) = 0.0013$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{a - 80}{8}\right) = P(Z \geq 0) - 0.0013$$

$$= 0.5 - 0.0013 = 0.4987$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 3) = 0.4987$ 이므로

$$\frac{a - 80}{8} = 3, a - 80 = 24$$

$$\therefore a = 104$$

정답_ 104

444

확률변수 X 는 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{2}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = n \times \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$$

$$V(X) = n \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{n}{4} = \left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)^2$$

이때 n 은 충분히 큰 수이므로 X 는 근사적으로 정규분포

$N\left(\frac{n}{2}, \left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)^2\right)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{X - \frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}}$ 으로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로

르므로

$$P\left(\left|X - \frac{n}{2}\right| \leq \frac{21}{2}\right) = P\left(-\frac{21}{2} \leq X - \frac{n}{2} \leq \frac{21}{2}\right)$$

$$= P\left(-\frac{\frac{21}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}} \leq Z \leq \frac{\frac{21}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}}\right)$$

$$= P\left(-\frac{21}{\sqrt{n}} \leq Z \leq \frac{21}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= 2P\left(0 \leq Z \leq \frac{21}{\sqrt{n}}\right)$$

$$P\left(\left|X - \frac{n}{2}\right| \leq \frac{21}{2}\right) \geq 0.954 \text{에서}$$

$$2P\left(0 \leq Z \leq \frac{21}{\sqrt{n}}\right) \geq 0.954 \quad \therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{21}{\sqrt{n}}\right) \geq 0.477$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 2) = 0.477$ 이므로

$$\frac{21}{\sqrt{n}} \geq 2, \sqrt{n} \leq \frac{21}{2}$$

$$\therefore n \leq \frac{441}{4} = 110.25$$

따라서 구하는 자연수 n 의 최댓값은 110이다.

정답_ 110

445

확률변수 X 가 이항분포 $B(4, p)$ 를 따르므로 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = {}_4C_x p^x (1-p)^{4-x} \quad (x=0, 1, 2, 3, 4) \quad \text{..... ①}$$

$$P(X \leq 3) = \frac{65}{81} \text{에서}$$

$$1 - P(X=4) = \frac{65}{81}, P(X=4) = \frac{16}{81}$$

$${}_4C_4 p^4 (1-p)^0 = \frac{16}{81}, p^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^4$$

$$\therefore p = \frac{2}{3} \quad (\because 0 < p < 1) \quad \text{..... ②}$$

따라서 확률변수 Y 는 이항분포 $B\left(5, \frac{1}{3}\right)$ 을 따르므로 Y 의 확률질량함수는

$$P(Y=y) = {}_5C_y \left(\frac{1}{3}\right)^y \left(\frac{2}{3}\right)^{5-y} \quad (y=0, 1, 2, 3, 4, 5)$$

$$\therefore P(Y \geq 2) = 1 - P(Y=0) - P(Y=1)$$

$$= 1 - {}_5C_0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^0 \times \left(\frac{2}{3}\right)^5 - {}_5C_1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^4$$

$$= 1 - \frac{32}{243} - \frac{80}{243} = \frac{131}{243} \quad \text{정답} \frac{131}{243}$$

채점 기준	비율
① X 의 확률질량함수 구하기	20 %
② p 의 값 구하기	40 %
③ $P(Y \geq 2)$ 구하기	40 %

446

확률변수 X 는 이항분포 $B\left(20, \frac{1}{6}\right)$ 을 따르므로

$$V(X) = 20 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{9} \quad \text{①}$$

확률변수 Y 는 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{2}\right)$ 을 따르므로

$$V(Y) = n \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{n}{4} \quad \text{②}$$

$V(Y) > V(X)$ 에서

$$\frac{n}{4} > \frac{25}{9} \quad \therefore n > \frac{100}{9} = 11.11 \dots$$

이때 n 은 자연수이므로 n 의 최솟값은 12이다. 정답 12

채점 기준	비율
① X 의 분산 구하기	30 %
② Y 의 분산을 n 으로 나타내기	30 %
③ n 의 최솟값 구하기	40 %

447

상자에서 임의로 한 개의 공을 꺼낼 때, 빨간 공이 나올 확률은 $\frac{4}{15}$ 이므로 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(90, \frac{4}{15}\right)$ 를 따른다. ①

$$\therefore V(X) = 90 \times \frac{4}{15} \times \frac{11}{15} = \frac{88}{5} \quad \text{②}$$

$$\therefore V(5X-2) = 5^2 V(X)$$

$$= 25 \times \frac{88}{5} = 440 \quad \text{정답} 440$$

채점 기준	비율
① X 가 따르는 분포 구하기	30 %
② $V(X)$ 구하기	30 %
③ $V(5X-2)$ 구하기	40 %

448

신입 사원의 평가 점수를 X 점이라고 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(83, 5^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-83}{5}$ 으로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다. ①

해외 연수의 기회를 얻기 위한 최저 점수를 a 점이라고 하면

$$P(X \geq a) = \frac{36}{300} = 0.12 \quad \text{②}$$

$$P\left(Z \geq \frac{a-83}{5}\right) = 0.12$$

$$P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-83}{5}\right) = 0.12$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-83}{5}\right) = P(Z \geq 0) - 0.12$$

$$= 0.5 - 0.12 = 0.38$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.2) = 0.38$ 이므로

$$\frac{a-83}{5} = 1.2, \quad a-83 = 6$$

$$\therefore a = 89$$

따라서 해외 연수의 기회를 얻기 위한 최저 점수는 89점이다. ③

채점 기준	비율
① 신입 사원의 평가 점수를 X 점으로 놓고 확률변수 X 를 표준화하기	30 %
② 해외 연수의 기회를 얻기 위한 최저 점수를 a 점으로 놓고 $P(X \geq a) = 0.12$ 임을 알기	20 %
③ 해외 연수의 기회를 얻기 위한 최저 점수 구하기	50 %

449

임의로 뽑은 고객 한 명이 캐릭터 E를 선호할 확률이 $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ 이므로 432명 중에서 캐릭터 E를 선호하는 고객이 X 명이라고 하면 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(432, \frac{1}{4}\right)$ 을 따른다. ①

$$\therefore E(X) = 432 \times \frac{1}{4} = 108$$

$$V(X) = 432 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = 81 = 9^2$$

이때 432는 충분히 큰 수이므로 X 는 근사적으로 정규분포 $N(108, 9^2)$ 을 따른다. ②

따라서 $Z = \frac{X-108}{9}$ 로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 구하는 확률은

$$P(X \geq 126) = P\left(Z \geq \frac{126-108}{9}\right)$$

$$= P(Z \geq 2)$$

$$= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 2)$$

$$= 0.5 - 0.48 = 0.02 \quad \text{정답} 0.02$$

채점 기준	비율
① 캐릭터 E를 선호하는 고객의 수를 X 로 놓고 확률변수 X 가 따르는 분포 구하기	30 %
② X 가 근사적으로 따르는 정규분포 구하기	30 %
③ 표준화하여 캐릭터 E를 선호하는 고객이 126명 이상 일 확률 구하기	40 %

450

손 100발 중에서 명중시킨 화살이 X 발이라고 하면 확률변수 X

는 이항분포 $B(100, 0.8)$ 을 따르므로

$$E(X) = 100 \times 0.8 = 80$$

$$V(X) = 100 \times 0.8 \times 0.2 = 16 = 4^2$$

이때 100은 충분히 큰 수이므로 X 는 근사적으로 정규분포 $N(80, 4^2)$ 을 따른다. ①

따라서 $Z = \frac{X-80}{4}$ 으로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 $P(X \geq n) = 0.16$ 에서

$$P\left(Z \geq \frac{n-80}{4}\right) = 0.16$$

$$P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{n-80}{4}\right) = 0.16$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{n-80}{4}\right) = P(Z \geq 0) - 0.16 = 0.5 - 0.16 = 0.34 \quad \text{②}$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1) = 0.34$ 이므로

$$\frac{n-80}{4} = 1, \quad n-80 = 4$$

$$\therefore n = 84 \quad \text{③}$$

정답_ 84

채점 기준	비율
① 명중시킨 화살 수를 X 로 놓고 확률변수 X 가 근사적으로 따르는 정규분포 구하기	30%
② 표준화를 이용하여 $P\left(0 \leq Z \leq \frac{n-80}{4}\right)$ 구하기	40%
③ n 의 값 구하기	30%

451

확률변수 X 가 이항분포 $B\left(80, \frac{1}{5}\right)$ 을 따르므로 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = {}_{80}C_x \left(\frac{1}{5}\right)^x \left(\frac{4}{5}\right)^{80-x} \quad (x=0, 1, 2, \dots, 80)$$

$$\frac{P(X=a)}{P(X=a+1)} = \frac{14}{37} \text{에서}$$

$$\frac{{}_{80}C_a \left(\frac{1}{5}\right)^a \left(\frac{4}{5}\right)^{80-a}}{{}_{80}C_{a+1} \left(\frac{1}{5}\right)^{a+1} \left(\frac{4}{5}\right)^{79-a}} = \frac{14}{37}$$

$$\frac{\frac{80!}{a!(80-a)!} \times \frac{4}{5}}{\frac{80!}{(a+1)!(79-a)!} \times \frac{1}{5}} = \frac{14}{37}$$

$$\frac{a+1}{80-a} \times 4 = \frac{14}{37}, \quad \frac{a+1}{80-a} \times 2 = \frac{7}{37}$$

$$74a + 74 = 560 - 7a, \quad 81a = 486$$

$$\therefore a = 6$$

정답_ ②

452

두 주사위 A, B를 동시에 던질 때 나오는 모든 경우의 수는

$$6 \times 6 = 36$$

$1 \leq a \leq 6, 1 \leq b \leq 6$ 이므로 $a^2 + b^2 \leq 15$ 를 만족시키는 순서쌍 (a, b) 는

$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2)$

의 8개이므로 사건 E 가 일어날 확률은

$$\frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

따라서 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(36, \frac{2}{9}\right)$ 을 따르므로

$$V(X) = 36 \times \frac{2}{9} \times \frac{7}{9} = \frac{56}{9}$$

즉, $p=9, q=56$ 이므로

$$p+q=9+56=65$$

정답_ ③

453

주머니 A를 택한 후 10의 약수인 1 또는 5가 적힌 공을 꺼낼 확률은

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$$

주머니 B를 택한 후 10의 약수인 2 또는 10이 적힌 공을 꺼낼 확률은

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$$

따라서 한 번의 시행에서 10의 약수가 적힌 공을 꺼낼 확률은

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{9}{20}$$

이므로 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(120, \frac{9}{20}\right)$ 을 따른다.

$$\therefore V(X) = 120 \times \frac{9}{20} \times \frac{11}{20} = \frac{297}{10}$$

$$\therefore V(\sqrt{10}X) = (\sqrt{10})^2 V(X)$$

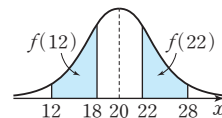
$$= 10 \times \frac{297}{10} = 297$$

정답_ 297

454

확률변수 X 가 정규분포 $N(20, \sigma^2)$ 을 따르므로 정규분포곡선은 직선 $x=20$ 에 대하여 대칭이다.

$$\therefore f(12) = P(12 \leq X \leq 18), \quad f(22) = P(22 \leq X \leq 28)$$



$$\text{이때 } \frac{12+28}{2} = 20, \quad \frac{18+22}{2} = 20 \text{이므로}$$

$$f(12) = f(22) \text{ (참)}$$

$$\therefore \frac{k+(k+6)}{2} = 20 \text{에서}$$

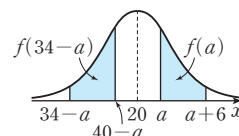
$$2k+6=40, \quad 2k=34 \quad \therefore k=17$$

즉, $P(k \leq X \leq k+6)$ 의 최댓값은 $P(17 \leq X \leq 23)$ 이므로

$f(k)$ 는 $k=17$ 일 때 최댓값을 갖는다. (참)

$$\therefore f(a) = P(a \leq X \leq a+6),$$

$$f(34-a) = P(34-a \leq X \leq 40-a)$$



$$\text{이때 } \frac{a+(40-a)}{2} = 20, \quad \frac{(a+6)+(34-a)}{2} = 20 \text{이므로}$$

$f(a)=f(34-a)$ (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답_ ⑤

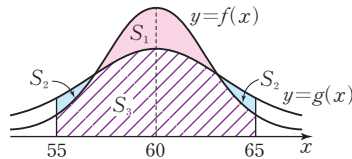
455

두 확률변수 X, Y 가 각각 정규분포 $N(60, 2^2), N(60, 4^2)$ 을 따르므로 두 정규분포곡선은 모두 직선 $x=60$ 에 대하여 대칭이다.

이때 $\sigma(X) < \sigma(Y)$ 이므로 X, Y 의 정규분포곡선을 각각

표준편차가 작을수록 곡선은 높아지고 폭은 좁아진다.

$y=f(x), y=g(x)$ 라고 하면 다음 그림과 같다.



$Z_X = \frac{X-60}{2}, Z_Y = \frac{Y-60}{4}$ 으로 놓으면 Z_X, Z_Y 는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 위의 그림에서 빗금 친 부분의 넓이를 S_3 이라고 하면

$$\begin{aligned} S_1 - 2S_2 &= (S_1 + S_3) - (2S_2 + S_3) \\ &= P(55 \leq X \leq 65) - P(55 \leq Y \leq 65) \\ &= P\left(\frac{55-60}{2} \leq Z_X \leq \frac{65-60}{2}\right) \\ &\quad - P\left(\frac{55-60}{4} \leq Z_Y \leq \frac{65-60}{4}\right) \\ &= P(-2.5 \leq Z_X \leq 2.5) - P(-1.25 \leq Z_Y \leq 1.25) \\ &= 2P(0 \leq Z_X \leq 2.5) - 2P(0 \leq Z_Y \leq 1.25) \\ &= 2 \times 0.4938 - 2 \times 0.3944 \\ &= 0.9876 - 0.7888 = 0.1988 \end{aligned}$$

$$\therefore 10000(S_1 - 2S_2) = 10000 \times 0.1988 = 1988$$

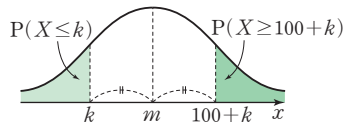
정답_ 1988

456

확률변수 X 가 정규분포 $N(m, 8^2)$ 을 따르므로 정규분포곡선은 직선 $x=m$ 에 대하여 대칭이다.

조건 (가)에서 $P(X \leq k) + P(X \leq 100+k) = 1$ 이므로

$$P(X \leq k) = P(X \geq 100+k)$$



$$\text{즉, } \frac{k + (100+k)}{2} = m \text{ 이므로}$$

$$k + 50 = m \quad \therefore k = m - 50 \quad \dots\dots ①$$

한편, $Z = \frac{X-m}{8}$ 으로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

조건 (나)에서 $P(X \geq 2k) = 0.0668$ 이므로

$$P(X \geq 2m - 100) = 0.0668 \quad (\because ①)$$

$$P\left(Z \geq \frac{(2m-100)-m}{8}\right) = 0.0668$$

$$P\left(Z \geq \frac{m-100}{8}\right) = 0.0668$$

$$P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{m-100}{8}\right) = 0.0668$$

$$\begin{aligned} \therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{m-100}{8}\right) &= P(Z \geq 0) - 0.0668 \\ &= 0.5 - 0.0668 = 0.4332 \end{aligned}$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.5) = 0.4332$ 이므로

$$\frac{m-100}{8} = 1.5, \quad m-100=12$$

$$\therefore m=112$$

정답_ 112

457

두 확률변수 X, Y 가 각각 정규분포 $N(m, 1^2),$

$N(m^2+2m+16, \sigma^2)$ 을 따르므로 $Z_X = \frac{X-m}{1},$

$Z_Y = \frac{Y-m^2-2m-16}{\sigma}$ 으로 놓으면 Z_X, Z_Y 는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$P(X \leq 0) = P(Y \leq 0)$ 에서

$$P\left(Z_X \leq \frac{0-m}{1}\right) = P\left(Z_Y \leq \frac{0-m^2-2m-16}{\sigma}\right)$$

$$P(Z_X \leq -m) = P\left(Z_Y \leq -\frac{m^2+2m+16}{\sigma}\right)$$

$$\text{즉, } m = \frac{m^2+2m+16}{\sigma} \text{ 이므로}$$

$$\sigma = \frac{m^2+2m+16}{m} = m + \frac{16}{m} + 2$$

이때 $m > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\sigma = m + \frac{16}{m} + 2 \geq 2\sqrt{m \times \frac{16}{m}} + 2 = 10$$

(단, 등호는 $m=4$ 일 때 성립한다.)

$$m = \frac{16}{m} \text{ 일 때 성립하므로 } \dots\dots$$

$$m^2 = 16 \quad \therefore m = 4 \quad (\because m > 0)$$

즉, σ 의 값이 최소가 되도록 하는 m 의 값은 4이므로

$$m_1 = 4$$

$m = m_1 = 4$ 일 때, $\sigma = 10$ 이므로 두 확률변수 X, Y 는 각각 정규분포 $N(4, 1^2), N(40, 10^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z_X = \frac{X-4}{1}, Z_Y = \frac{Y-40}{10}$ 으로 놓으면 Z_X, Z_Y 는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 $P(X \geq 1) = P(Y \leq k)$ 에서

$$P\left(Z_X \geq \frac{1-4}{1}\right) = P\left(Z_Y \leq \frac{k-40}{10}\right)$$

$$P(Z_X \geq -3) = P\left(Z_Y \leq \frac{k-40}{10}\right)$$

정규분포곡선이 직선 $z=0$ 에 대하여 대칭이므로
 $P(Z_X \geq -3) = P(Z_X \leq 3)$

$$\therefore P(Z_X \leq 3) = P\left(Z_Y \leq \frac{k-40}{10}\right)$$

$$\text{즉, } 3 = \frac{k-40}{10} \text{ 이므로}$$

$$k-40=30 \quad \therefore k=70$$

정답_ 70

458

포도 한 송이의 무게를 X g이라고 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(500, 50^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-500}{50}$ 으로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

(i) 포도 한 송이 가격이 1000원일 확률은

$$P(X < 500) = P\left(Z < \frac{500-500}{50}\right) \\ = P(Z < 0) = P(Z \leq 0) \\ = 0.5$$

(ii) 포도 한 송이 가격이 1100원일 확률은

$$P(500 \leq X < 550) = P\left(\frac{500-500}{50} \leq Z < \frac{550-500}{50}\right) \\ = P(0 \leq Z < 1) = P(0 \leq Z \leq 1) \\ = 0.34$$

(iii) 포도 한 송이 가격이 1200원일 확률은

$$P(X \geq 550) = P\left(Z \geq \frac{550-500}{50}\right) \\ = P(Z \geq 1) \\ = P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1) \\ = 0.5 - 0.34 = 0.16$$

(i)~(iii)에서 포도 한 송이의 가격의 기댓값은

$$1000 \times 0.5 + 1100 \times 0.34 + 1200 \times 0.16 = 1066 \text{ (원)}$$

정답 ③

참고 포도 한 송이의 가격을 Y 원이라 하고 확률변수 Y 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

Y	1000	1100	1200	합계
$P(Y=y)$	0.5	0.34	0.16	1

459

출근 시간을 X 분이라고 하면 확률변수 X 는 정규분포

$N(66.4, 15^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-66.4}{15}$ 로 놓으면 Z 는 표준정규

분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

이 날 출근한 회사 직원들 중에서 임의로 1명을 선택할 때, 출근 시간이 73분 이상일 확률은

$$P(X \geq 73) = P\left(Z \geq \frac{73-66.4}{15}\right) \\ = P(Z \geq 0.44) \\ = P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 0.44) \\ = 0.5 - 0.17 = 0.33$$

따라서 이 날 출근한 회사 직원들 중에서 임의로 1명을 선택할 때, 출근 시간이 73분 미만일 확률은

$$P(X < 73) = 1 - P(X \geq 73) \\ = 1 - 0.33 = 0.67$$

임의로 선택한 직원의 어느 날의 출근 시간이 73분 이상인 사건을 A , 임의로 선택한 직원이 지하철을 이용하여 출근하는 사건을 B 라고 하면

$$P(A) = 0.33, P(A^c) = 0.67, P(B|A) = 0.4, P(B|A^c) = 0.2$$

출근 시간이 73분 이상이고 지하철을 이용할 확률은

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) \\ = 0.33 \times 0.4 = 0.132$$

출근 시간이 73분 미만이고 지하철을 이용할 확률은

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B|A^c) \\ = 0.67 \times 0.2 = 0.134$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B) \\ = 0.132 + 0.134 = 0.266$$

정답 ⑤

460

입학시험에 응시한 학생들의 점수를 X 점이라고 하면 확률변수

X 는 정규분포 $N(m, 12^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-m}{12}$ 으로 놓으면

Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$P(X \geq a) = \frac{200}{1000} = 0.2 \text{에서}$$

$$P\left(Z \geq \frac{a-m}{12}\right) = 0.2$$

$$P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-m}{12}\right) = 0.2$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-m}{12}\right) = P(Z \geq 0) - 0.2 \\ = 0.5 - 0.2 = 0.3$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 0.85) = 0.30$ 이므로

$$\frac{a-m}{12} = 0.85, a-m = 10.2$$

$$\therefore a = m + 10.2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\text{또, } P(X \geq b) = \frac{200 \times 0.2}{1000} = 0.04 \text{에서}$$

$$P\left(Z \geq \frac{b-m}{12}\right) = 0.04$$

$$P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{b-m}{12}\right) = 0.04$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{b-m}{12}\right) = P(Z \geq 0) - 0.04 \\ = 0.5 - 0.04 = 0.46$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.75) = 0.46$ 이므로

$$\frac{b-m}{12} = 1.75, b-m = 21$$

$$\therefore b = m + 21 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧에서

$$b-a = (m+21) - (m+10.2) = 10.8$$

$$\therefore 10(b-a) = 108$$

정답 108

461

제품 한 개의 무게를 X g이라고 하면 확률변수 X 는 정규분포

$N(30, 5^2)$ 을 따르므로 $Z_X = \frac{X-30}{5}$ 으로 놓으면 Z 는 표준정규분

포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

따라서 임의로 선택한 제품이 불량품일 확률은

$$P(X \geq 40) = P\left(Z_X \geq \frac{40-30}{5}\right) \\ = P(Z_X \geq 2) \\ = P(Z_X \geq 0) - P(0 \leq Z_X \leq 2) \\ = 0.5 - 0.48 = 0.02$$

임의로 택한 2500개의 제품 중에서 불량품의 개수를 Y 라고 하면 확률변수 Y 는 이항분포 $B(2500, 0.02)$ 를 따르므로

$$E(Y) = 2500 \times 0.02 = 50$$

$$V(Y) = 2500 \times 0.02 \times 0.98 = 49 = 7^2$$

이때 2500은 충분히 큰 수이므로 Y 는 근사적으로 정규분포

$N(50, 7^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z_Y = \frac{Y-50}{7}$ 으로 놓으면 Z_Y 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을

따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}
 P(Y \geq 57) &= P\left(Z_Y \geq \frac{57-50}{7}\right) \\
 &= P(Z_Y \geq 1) \\
 &= P(Z_Y \geq 0) - P(0 \leq Z_Y \leq 1) \\
 &= 0.5 - 0.34 = 0.16
 \end{aligned}$$

정답_ ③

462

100개의 동전 중에서 앞면이 나온 동전의 개수를 X 라고 하면 확률 변수 X 는 이항분포 $B(100, \frac{1}{2})$ 을 따르므로

$$E(X) = 100 \times \frac{1}{2} = 50$$

$$V(X) = 100 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 25 = 5^2$$

이때 100은 충분히 큰 수이므로 X 는 근사적으로 정규분포 $N(50, 5^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{X-50}{5}$ 으로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로

$$\begin{aligned}
 P(X \geq 55) &= P\left(Z \geq \frac{55-50}{5}\right) \\
 &= P(Z \geq 1) \\
 &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1) \\
 &= 0.5 - 0.34 = 0.16
 \end{aligned}$$

따라서 100원짜리 동전 100개를 모두 가질, 즉 10000원을 받을 확률은 0.16이고, 1000원을 낼 확률은 $1 - 0.16 = 0.84$ 이므로 한 번의 시행에서 얻을 수 있는 기댓값은

$$10000 \times 0.16 - 1000 \times 0.84 = 1600 - 840 = 760(\text{원})$$

정답_ ①

07 통계적 추정

463

ㄱ, ㄴ은 표본조사가 적합하고, ㄷ은 전수조사가 적합하다. 따라서 전수조사보다 표본조사가 더 적합한 것은 ㄱ, ㄴ

정답_ ②

464

(1) 구하는 경우의 수는 10장의 카드 중에서 3장을 뽑는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_{10}\Pi_3 = 10^3 = 1000$$

(2) 구하는 경우의 수는 10장의 카드 중에서 3장을 뽑는 순열의 수와 같으므로

$${}_{10}P_3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$$

(3) 구하는 경우의 수는 10장의 카드 중에서 3장을 뽑는 조합의 수와 같으므로

$${}_{10}C_3 = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

정답_ (1) 1000 (2) 720 (3) 120

465

$$(1) m = 1 \times \frac{1}{8} + 2 \times \frac{1}{8} + 3 \times \frac{1}{8} + \dots + 8 \times \frac{1}{8} = \frac{36}{8} = \frac{9}{2}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma^2 &= 1^2 \times \frac{1}{8} + 2^2 \times \frac{1}{8} + 3^2 \times \frac{1}{8} + \dots + 8^2 \times \frac{1}{8} - \left(\frac{9}{2}\right)^2 \\
 &= \frac{204}{8} - \frac{81}{4} = \frac{21}{4}
 \end{aligned}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{21}{4}} = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

$$(2) \bar{X} = \frac{3+5+7}{3} = \frac{15}{3} = 5$$

$$S^2 = \frac{1}{3-1} \{ (3-5)^2 + (5-5)^2 + (7-5)^2 \} = \frac{8}{2} = 4$$

$$S = \sqrt{4} = 2$$

정답_ (1) $m = \frac{9}{2}, \sigma = \frac{\sqrt{21}}{2}$ (2) $\bar{X} = 5, S = 2$

466

모표준편차가 12, 표본의 크기가 36이므로

$$\sigma(\bar{X}) = \frac{12}{\sqrt{36}} = 2$$

정답_ ②

467

모평균이 10이므로

$$E(\bar{X}) = 10$$

모표준편차가 σ , 표본의 크기가 49, 표본평균 $\bar{X}$ 의 표준편차가 2이므로

$$\sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{49}} = 2 \quad \therefore \sigma = 14$$

$$\therefore \sigma \times E(\bar{X}) = 14 \times 10 = 140$$

정답_ ⑤

468

모표준편차가 15, 표본의 크기가 n 이므로

$$\sigma(\bar{X}) = \frac{15}{\sqrt{n}}$$

$$\text{즉, } \frac{15}{\sqrt{n}} \leq 3 \text{ 이므로}$$

$$\sqrt{n} \geq 5 \quad \therefore n \geq 25$$

따라서 n 의 최솟값은 25이다.

정답_ 25

469

모평균이 5이므로

$$E(\bar{X}) = 5$$

모표준편차가 10, 표본의 크기가 25이므로

$$\sigma(\bar{X}) = \frac{10}{\sqrt{25}} = 2$$

$$V(\bar{X}) = E(\bar{X}^2) - \{E(\bar{X})\}^2 \text{ 이므로}$$

$$E(\bar{X}^2) = V(\bar{X}) + \{E(\bar{X})\}^2 \\ = 2^2 + 5^2 = 29$$

정답_ ③

470

모평균이 12이므로

$$E(\bar{X}) = 12$$

$$\text{즉, } \frac{n}{6} = 12 \text{ 이므로 } n = 72$$

모분산이 σ^2 , 표본의 크기가 72이므로

$$V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{72}$$

$$\text{즉, } \frac{\sigma^2}{72} = \frac{1}{9} \text{ 이므로}$$

$$\sigma^2 = 8 \quad \therefore \sigma = 2\sqrt{2} \quad (\because \sigma > 0)$$

정답_ $2\sqrt{2}$

471

확률변수 X 에 대하여

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{3}{10} + 2 \times \frac{1}{5} = \frac{7}{10}$$

$$V(X) = 0^2 \times \frac{1}{2} + 1^2 \times \frac{3}{10} + 2^2 \times \frac{1}{5} - \left(\frac{7}{10}\right)^2 = \frac{61}{100}$$

$$(1) E(\bar{X}) = \frac{7}{10}$$

$$(2) V(\bar{X}) = \frac{\frac{61}{100}}{4} = \frac{61}{400}$$

$$(3) \sigma(\bar{X}) = \sqrt{\frac{61}{400}} = \frac{\sqrt{61}}{20}$$

정답_ (1) $\frac{7}{10}$ (2) $\frac{61}{400}$ (3) $\frac{\sqrt{61}}{20}$

472

확률변수 X 에 대하여

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{4} = 2$$

$$V(X) = 1^2 \times \frac{1}{4} + 2^2 \times \frac{1}{2} + 3^2 \times \frac{1}{4} - 2^2 = \frac{1}{2}$$

이때 표본의 크기가 n 이고 표본평균 $\bar{X}$ 의 분산이 $\frac{1}{10}$ 이므로

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{10} \quad \therefore n = 5$$

정답_ ④

473

확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{6} + a + b = 1 \quad \therefore a + b = \frac{5}{6} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$E(X^2) = \frac{16}{3} \text{ 이므로}$$

$$0^2 \times \frac{1}{6} + 2^2 \times a + 4^2 \times b = \frac{16}{3}$$

$$4a + 16b = \frac{16}{3} \quad \therefore a + 4b = \frac{4}{3} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ 을 연립하여 풀면 } a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{6}$$

따라서 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	2	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

$$\therefore E(X) = 0 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{2}{3} + 4 \times \frac{1}{6} = 2$$

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 \\ = \frac{16}{3} - 2^2 = \frac{4}{3}$$

이때 표본의 크기가 20이므로

$$V(\bar{X}) = \frac{\frac{4}{3}}{20} = \frac{1}{15}$$

정답_ ④

474

주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼낼 때, 공에 적혀 있는 수를 확률변수 X 라고 하면

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{9} + 2 \times \frac{1}{9} + 3 \times \frac{1}{9} + \dots + 9 \times \frac{1}{9} = 5$$

$$V(X) = 1^2 \times \frac{1}{9} + 2^2 \times \frac{1}{9} + 3^2 \times \frac{1}{9} + \dots + 9^2 \times \frac{1}{9} - 5^2 = \frac{20}{3}$$

이때 표본의 크기가 4이므로

$$V(\bar{X}) = \frac{\frac{20}{3}}{4} = \frac{5}{3}$$

정답_ $\frac{5}{3}$

475

상자에서 임의로 한 장의 카드를 꺼낼 때, 카드에 적혀 있는 숫자를 확률변수 X 라 하고 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	4	6	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$	1

$$\therefore E(X) = 2 \times \frac{2}{7} + 4 \times \frac{3}{7} + 6 \times \frac{2}{7} = 4$$

$$V(X) = 2^2 \times \frac{2}{7} + 4^2 \times \frac{3}{7} + 6^2 \times \frac{2}{7} - 4^2 = \frac{16}{7}$$

표본의 크기가 n 일 때, $V(\bar{X}) = \frac{4}{7}$ 이므로

$$\frac{16}{\frac{7}{n}} = \frac{4}{7} \quad \therefore n=4$$

정답_ 4

476

주머니에서 임의로 1장의 카드를 꺼낼 때, 카드에 적혀 있는 수를 확률변수 X 라고 하면

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{5} + 3 \times \frac{1}{5} + 5 \times \frac{1}{5} + 7 \times \frac{1}{5} + 9 \times \frac{1}{5} = 5$$

$$V(X) = 1^2 \times \frac{1}{5} + 3^2 \times \frac{1}{5} + 5^2 \times \frac{1}{5} + 7^2 \times \frac{1}{5} + 9^2 \times \frac{1}{5} - 5^2 = 8$$

이때 표본의 크기가 3이므로

$$V(\bar{X}) = \frac{8}{3}$$

$$V(a\bar{X}+6) = 24 \text{에서}$$

$$a^2 V(\bar{X}) = 24, \quad a^2 \times \frac{8}{3} = 24$$

$$a^2 = 9 \quad \therefore a = 3 (\because a > 0)$$

정답_ ③

477

8개의 숫자 1, 2, 2, 2, a , a , a , b 에서 임의로 택한 한 개의 수를 확률변수 X 라 하고 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	a	b	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$$\therefore E(X) = 1 \times \frac{1}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + a \times \frac{3}{8} + b \times \frac{1}{8} = \frac{3a+b+7}{8}$$

$$\text{이때 } E(\bar{X}) = E(X) = \frac{5}{2} \text{이므로}$$

$$\frac{3a+b+7}{8} = \frac{5}{2}, \quad 3a+b=13$$

$$\therefore b = 13 - 3a$$

..... ㉠

한편,

$$\begin{aligned} V(X) &= 1^2 \times \frac{1}{8} + 2^2 \times \frac{3}{8} + a^2 \times \frac{3}{8} + b^2 \times \frac{1}{8} - \left(\frac{5}{2}\right)^2 \\ &= \frac{3a^2+b^2-37}{8} \end{aligned}$$

이고 표본의 크기가 3이므로

$$V(\bar{X}) = \frac{\frac{3a^2+b^2-37}{8}}{3} = \frac{3a^2+b^2-37}{24}$$

$$\text{이때 } E(\bar{X}) = \frac{5}{2}, \quad E(\bar{X}^2) = \frac{13}{2} \text{이고}$$

$$\begin{aligned} V(\bar{X}) &= E(\bar{X}^2) - \{E(\bar{X})\}^2 \\ &= \frac{13}{2} - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

이므로

$$\frac{3a^2+b^2-37}{24} = \frac{1}{4} \quad \therefore 3a^2+b^2=43$$

..... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$$3a^2 + (13-3a)^2 = 43, \quad 12a^2 - 78a + 126 = 0$$

$$2a^2 - 13a + 21 = 0, \quad (2a-7)(a-3) = 0$$

$$\therefore a = 3 (\because a \text{는 자연수})$$

$$a = 3 \text{을 ㉠에 대입하면 } b = 4$$

$$\therefore a+b=3+4=7$$

정답_ 7

478

모집단이 정규분포 $N(30, 5^2)$ 을 따르므로 임의추출한 제품 100개의 무게의 평균을 $\bar{X}$ g이라고 하면 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포

$$N\left(30, \frac{5^2}{100}\right), \text{ 즉 } N(30, 0.5^2) \text{을 따른다.}$$

따라서 $Z = \frac{\bar{X}-30}{0.5}$ 으로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(29.5 \leq \bar{X} \leq 31) &= P\left(\frac{29.5-30}{0.5} \leq Z \leq \frac{31-30}{0.5}\right) \\ &= P(-1 \leq Z \leq 2) \\ &= P(-1 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= P(0 \leq Z \leq 1) + P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 0.34 + 0.48 = 0.82 \end{aligned}$$

정답_ ②

479

확률변수 X 의 표준편차를 σ 라고 하면 조건 (가), (나)에 의하여 두 확률변수 X, Y 는 각각 정규분포 $N(220, \sigma^2), N(240, (1.5\sigma)^2)$

을 따르므로 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(220, \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$ 을 따르고, 표본평균 $\bar{Y}$ 는 정규분포 $N\left(240, \left(\frac{1.5\sigma}{\sqrt{9n}}\right)^2\right)$, 즉 $N\left(240, \left(\frac{0.5\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$ 을 따른다.

따라서 $Z_{\bar{X}} = \frac{\bar{X}-220}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ 으로 놓으면 $Z_{\bar{X}}$ 는 표준정규분포 $N(0, 1)$

을 따르므로 $P(\bar{X} \leq 215) = 0.1587$ 에서

$$P\left(Z_{\bar{X}} \leq \frac{215-220}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = 0.1587, \quad P\left(Z_{\bar{X}} \leq -\frac{5}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = 0.1587$$

$$P(Z_{\bar{X}} \leq 0) - P\left(-\frac{5}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq Z_{\bar{X}} \leq 0\right) = 0.1587$$

$$P(Z_{\bar{X}} \geq 0) - P\left(0 \leq Z_{\bar{X}} \leq \frac{5}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = 0.1587$$

$$\begin{aligned} \therefore P\left(0 \leq Z_{\bar{X}} \leq \frac{5}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) &= P(Z_{\bar{X}} \geq 0) - 0.1587 \\ &= 0.5 - 0.1587 = 0.3413 \end{aligned}$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1) = 0.3413$ 이므로

$$\frac{5}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = 1 \quad \therefore \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 5$$

또, $Z_{\bar{Y}} = \frac{\bar{Y}-240}{\frac{0.5\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{Y}-240}{2.5}$ 으로 놓으면 $Z_{\bar{Y}}$ 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(\bar{Y} \geq 235) &= P\left(Z_{\bar{Y}} \geq \frac{235-240}{2.5}\right) = P(Z_{\bar{Y}} \geq -2) \\ &= P(-2 \leq Z_{\bar{Y}} \leq 0) + P(Z_{\bar{Y}} \geq 0) \\ &= P(0 \leq Z_{\bar{Y}} \leq 2) + P(Z_{\bar{Y}} \geq 0) \\ &= 0.4772 + 0.5 = 0.9772 \end{aligned}$$

정답_ ⑤

480

확률변수 X 가 따르는 정규분포를 $N(m, \sigma^2)$ ($\sigma > 0$)이라고 하면

$$P(X \leq 40) = \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$m = 40$ └ 정규분포곡선은 직선 $x = m$ 에 대하여 대칭이다.

$$P(X \leq 44) + P(Z \leq -1) = 1 \text{에서}$$

$$P(X \leq 44) = 1 - P(Z \leq -1)$$

$$= P(Z \geq -1) = P(Z \leq 1) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

└ 표준정규분포곡선은 직선 $z = 0$ 에 대하여 대칭이다.

이때 $Z = \frac{X-40}{\sigma}$ 으로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로

$$P(X \leq 44) = P\left(Z \leq \frac{44-40}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{4}{\sigma}\right) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } P\left(Z \leq \frac{4}{\sigma}\right) = P(Z \leq 1)$$

$$\text{즉, } \frac{4}{\sigma} = 1 \text{이므로 } \sigma = 4$$

따라서 모집단이 정규분포 $N(40, 4^2)$ 을 따르고 표본의 크기가 36

이므로 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(40, \frac{4^2}{36}\right)$, 즉 $N\left(40, \left(\frac{2}{3}\right)^2\right)$ 을

따른다.

이때 $Z_{\bar{X}} = \frac{\bar{X}-40}{\frac{2}{3}}$ 으로 놓으면 $Z_{\bar{X}}$ 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(\bar{X} \geq 42) &= P\left(Z_{\bar{X}} \geq \frac{42-40}{\frac{2}{3}}\right) = P(Z_{\bar{X}} \geq 3) \\ &= P(Z_{\bar{X}} \geq 0) - P(0 \leq Z_{\bar{X}} \leq 3) \\ &= 0.5 - 0.4987 = 0.0013 \end{aligned}$$

정답_ ①

481

모집단이 정규분포 $N(34, 6^2)$ 을 따르고 표본의 크기가 n 이므로

표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(34, \left(\frac{6}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{\bar{X}-34}{\frac{6}{\sqrt{n}}}$ 로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로

$$P(\bar{X} \leq 30) = 0.0228 \text{에서}$$

$$P\left(Z \leq \frac{30-34}{\frac{6}{\sqrt{n}}}\right) = 0.0228$$

$$P\left(Z \leq -\frac{2\sqrt{n}}{3}\right) = 0.0228$$

$$P(Z \leq 0) - P\left(-\frac{2\sqrt{n}}{3} \leq Z \leq 0\right) = 0.0228$$

$$P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{2\sqrt{n}}{3}\right) = 0.0228$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{2\sqrt{n}}{3}\right) = P(Z \geq 0) - 0.0228$$

$$= 0.5 - 0.0228 = 0.4772$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772$ 이므로

$$\frac{2\sqrt{n}}{3} = 2, \sqrt{n} = 3 \quad \therefore n = 9$$

정답_ ②

482

모집단이 정규분포 $N(120, 8^2)$ 을 따르고 표본의 크기가 n 이므로

표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(120, \left(\frac{8}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{\bar{X}-120}{\frac{8}{\sqrt{n}}}$ 으로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을

따르므로 $P(118 \leq \bar{X} \leq 122) = 0.8664$ 에서

$$P\left(\frac{118-120}{\frac{8}{\sqrt{n}}} \leq Z \leq \frac{122-120}{\frac{8}{\sqrt{n}}}\right) = 0.8664$$

$$P\left(-\frac{\sqrt{n}}{4} \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{4}\right) = 0.8664$$

$$2P\left(0 \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{4}\right) = 0.8664 \quad \therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{4}\right) = 0.4332$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.5) = 0.4332$ 이므로

$$\frac{\sqrt{n}}{4} = 1.5, \sqrt{n} = 6$$

$$\therefore n = 36$$

정답_ 36

483

모집단이 정규분포 $N(1400, 100^2)$ 을 따르고 표본의 크기가 n 이

므로 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(1400, \left(\frac{100}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{\bar{X}-1400}{\frac{100}{\sqrt{n}}}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로 $P\left(X \geq 1350 + \frac{164}{\sqrt{n}}\right) \geq 0.9$ 에서

$$P\left(Z \geq \frac{1350 + \frac{164}{\sqrt{n}} - 1400}{\frac{100}{\sqrt{n}}}\right) \geq 0.9$$

$$P\left(Z \geq -\frac{\sqrt{n}}{2} + 1.64\right) \geq 0.9$$

$$P\left(-\frac{\sqrt{n}}{2} + 1.64 \leq Z \leq 0\right) + P(Z \geq 0) \geq 0.9 \quad \text{--- } 0.9 > 0.50 \text{이므로 } -\frac{\sqrt{n}}{2} + 1.64 < 0$$

$$P\left(0 \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{2} - 1.64\right) + P(Z \geq 0) \geq 0.9$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{2} - 1.64\right) \geq 0.9 - P(Z \geq 0)$$

$$= 0.9 - 0.5 = 0.4$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.28) = 0.4$ 이므로

$$\frac{\sqrt{n}}{2} - 1.64 \geq 1.28, \frac{\sqrt{n}}{2} \geq 2.92$$

$$\sqrt{n} \geq 5.84 \quad \therefore n \geq 34.1056$$

따라서 구하는 자연수 n 의 최솟값은 35이다.

정답_ 35

484

이 공장에서 생산하는 제품 A 한 개의 무게를 X kg이라고 하면

X 는 정규분포 $N(5, 1^2)$ 을 따른다.

임의추출한 제품 A n 개의 무게의 평균을 $\bar{X}$ kg이라고 하면 표본

평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(5, \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$ 을 따르므로 $Z = \frac{\bar{X}-5}{\frac{1}{\sqrt{n}}}$ 으로 놓으

면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

이때 $P(n\bar{X} \geq 74) = 0.9332$ 이므로
 $\hookrightarrow$ 한 상자에 n 개의 제품을 넣으므로 정상 제품일 확률은 $P(\bar{X} \geq 74)$ 가 아닌 $P(n\bar{X} \geq 74)$ 이다.

$$P\left(\bar{X} \geq \frac{74}{n}\right) = 0.9332$$

$$P\left(Z \geq \frac{\frac{74}{n} - 5}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right) = 0.9332$$

$$P\left(Z \geq \frac{74-5n}{\sqrt{n}}\right) = 0.9332$$

$$P\left(\frac{74-5n}{\sqrt{n}} \leq Z \leq 0\right) + P(Z \geq 0) = 0.9332 \quad \begin{matrix} \text{0.9332} > 0.50 \text{이므로} \\ \frac{74-5n}{\sqrt{n}} < 0 \end{matrix}$$

$$P\left(0 \leq Z \leq \frac{5n-74}{\sqrt{n}}\right) + P(Z \geq 0) = 0.9332$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{5n-74}{\sqrt{n}}\right) = 0.9332 - P(Z \geq 0) \\ = 0.9332 - 0.5 = 0.4332$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.5) = 0.4332$ 이므로

$$\frac{5n-74}{\sqrt{n}} = 1.5, \quad 10n-148 = 3\sqrt{n}$$

$$10(\sqrt{n})^2 - 3\sqrt{n} - 148 = 0, \quad (\sqrt{n}-4)(10\sqrt{n}+37) = 0$$

$$\therefore \sqrt{n} = 4 \quad (\because \sqrt{n} > 0)$$

$$\therefore n = 16$$

정답_ 16

485

모집단이 정규분포 $N(9.27, 4^2)$ 을 따르고 표본의 크기가 64이므로
 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(9.27, \frac{4^2}{64}\right)$, 즉 $N(9.27, 0.5^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{\bar{X}-9.27}{0.5}$ 로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따

르므로 $P(\bar{X} \geq c) = 0.985$ 에서

$$P\left(Z \geq \frac{c-9.27}{0.5}\right) = 0.985$$

$$P\left(\frac{c-9.27}{0.5} \leq Z \leq 0\right) + P(Z \geq 0) = 0.985 \quad \begin{matrix} \text{0.985} > 0.50 \text{이므로} \\ \frac{c-9.27}{0.5} < 0 \end{matrix}$$

$$P\left(0 \leq Z \leq \frac{9.27-c}{0.5}\right) + P(Z \geq 0) = 0.985$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{9.27-c}{0.5}\right) = 0.985 - P(Z \geq 0) \\ = 0.985 - 0.5 = 0.485$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 2.17) = 0.485$ 이므로

$$\frac{9.27-c}{0.5} = 2.17, \quad 9.27-c = 1.085$$

$$\therefore c = 8.185$$

정답_ ③

486

모집단이 정규분포 $N(100, 10^2)$ 을 따르고 표본의 크기가 25이므로
 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(100, \frac{10^2}{25}\right)$, 즉 $N(100, 2^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{\bar{X}-100}{2}$ 으로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을

따르므로 $P(|\bar{X}-100| \leq a) = 0.95$ 에서

$$P(-a \leq \bar{X} - 100 \leq a) = 0.95$$

$$P(100-a \leq \bar{X} \leq 100+a) = 0.95$$

$$P\left(\frac{100-a-100}{2} \leq Z \leq \frac{100+a-100}{2}\right) = 0.95$$

$$P\left(-\frac{a}{2} \leq Z \leq \frac{a}{2}\right) = 0.95$$

$$2P\left(0 \leq Z \leq \frac{a}{2}\right) = 0.95 \quad \therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{a}{2}\right) = 0.475$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.96) = 0.475$ 이므로

$$\frac{a}{2} = 1.96 \quad \therefore a = 3.92$$

정답_ 3.92

487

모집단이 정규분포 $N(120, \sigma^2)$ 을 따르고 표본의 크기가 4이므로
 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(120, \frac{\sigma^2}{4}\right)$, 즉 $N\left(120, \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2\right)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{\bar{X}-120}{\frac{\sigma}{2}}$ 으로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을

따르므로 $P(\bar{X} \geq 130) = 0.0228$ 에서

$$P\left(Z \geq \frac{130-120}{\frac{\sigma}{2}}\right) = 0.0228$$

$$P\left(Z \geq \frac{20}{\sigma}\right) = 0.0228 \quad \begin{matrix} \text{0.0228} < 0.50 \text{이므로} \\ \frac{20}{\sigma} > 0 \end{matrix}$$

$$P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{20}{\sigma}\right) = 0.0228$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{20}{\sigma}\right) = P(Z \geq 0) - 0.0228 \\ = 0.5 - 0.0228 = 0.4772$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772$ 이므로

$$\frac{20}{\sigma} = 2 \quad \therefore \sigma = 10$$

정답_ 10

488

정규분포 $N(m, 6^2)$ 을 따르는 모집단에서 크기가 9인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균이 $\bar{X}$ 이므로 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(m, \frac{6^2}{9}\right)$, 즉 $N(m, 2^2)$ 을 따른다.

또, 정규분포 $N(6, 2^2)$ 을 따르는 모집단에서 크기가 4인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균이 $\bar{Y}$ 이므로 $\bar{Y}$ 는 정규분포 $N\left(6, \frac{2^2}{4}\right)$, 즉 $N(6, 1^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z_{\bar{X}} = \frac{\bar{X}-m}{2}$, $Z_{\bar{Y}} = \frac{\bar{Y}-6}{1} = \bar{Y}-6$ 으로 놓으면 $Z_{\bar{X}}$ 와 $Z_{\bar{Y}}$

는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로

$$P(\bar{X} \leq 12) + P(\bar{Y} \geq 8) = 1 \text{에서}$$

$$P\left(Z_{\bar{X}} \leq \frac{12-m}{2}\right) + P(Z_{\bar{Y}} \geq 8-6) = 1$$

$$P\left(Z_{\bar{X}} \leq \frac{12-m}{2}\right) + P(Z_{\bar{Y}} \geq 2) = 1$$

$$\therefore P\left(Z_{\bar{X}} \leq \frac{12-m}{2}\right) = 1 - P(Z_{\bar{Y}} \geq 2) = P(Z_{\bar{Y}} \leq 2)$$

$$\text{즉, } \frac{12-m}{2}=2 \text{이므로}$$

$$12-m=4 \quad \therefore m=8$$

정답_ ③

489

표본평균이 168 cm, 모표준편차가 5 cm, 표본의 크기가 400이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$168 - 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{400}} \leq m \leq 168 + 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{400}}$$

$$\therefore 167.51 \leq m \leq 168.49$$

정답_ $167.51 \leq m \leq 168.49$

490

표본평균이 $\bar{x}$, 모표준편차가 5, 표본의 크기가 49이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\bar{x} - 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{49}} \leq m \leq \bar{x} + 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{49}}$$

$$\therefore \bar{x} - 1.4 \leq m \leq \bar{x} + 1.4$$

이것이 $a \leq m \leq \frac{6}{5}a$ 와 같으므로

$$\frac{6}{5}a - a = (\bar{x} + 1.4) - (\bar{x} - 1.4)$$

$$\frac{1}{5}a = 2.8 \quad \therefore a = 14$$

$a = 14$ 를 $a = \bar{x} - 1.4$ 에 대입하면

$$14 = \bar{x} - 1.4 \quad \therefore \bar{x} = 15.4$$

정답_ ②

491

표본평균을 $\bar{x}$ 라고 하면

$$\bar{x} = \frac{8+9+9+10+10+11+11+11+11}{9} = 10$$

모표준편차가 3, 표본의 크기가 9이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$10 - 1.96 \times \frac{3}{\sqrt{9}} \leq m \leq 10 + 1.96 \times \frac{3}{\sqrt{9}}$$

$$\therefore 8.04 \leq m \leq 11.96$$

정답_ ①

492

표본평균이 8 kg, 모표준편차가 1.6 kg, 표본의 크기가 64이므로

$$P(|Z| \leq k) = \frac{a}{100} \text{라고 하면 모평균 } m \text{에 대한 신뢰도 } a \% \text{의 신}$$

뢰구간은

$$8 - k \times \frac{1.6}{\sqrt{64}} \leq m \leq 8 + k \times \frac{1.6}{\sqrt{64}}$$

$$\therefore 8 - 0.2k \leq m \leq 8 + 0.2k$$

이것이 $7.736 \leq m \leq 8.264$ 와 같으므로

$$8 - 0.2k = 7.736, \quad 8 + 0.2k = 8.264$$

$$\text{즉, } 0.2k = 0.264 \text{이므로 } k = 1.32$$

이때 주어진 표준정규분포표에서

$$P(|Z| \leq 1.32) = 2P(0 \leq Z \leq 1.32)$$

$$= 2 \times 0.41 = 0.82$$

$$\text{이므로 } \frac{a}{100} = 0.82 \text{에서}$$

$$a = 82$$

정답_ 82

493

표본평균을 $\bar{x}$ 라고 하면 모표준편차가 σ , 표본의 크기가 n 이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\bar{x} - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

이것이 $70.2 \leq m \leq 89.8$ 과 같으므로

$$\bar{x} - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 70.2, \quad \bar{x} + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 89.8$$

$$\therefore \bar{x} = 80, \quad \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 5$$

같은 표본을 이용하여 얻은 모평균 m 에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$\bar{x} - 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$80 - 2.58 \times 5 \leq m \leq 80 + 2.58 \times 5$$

$$\therefore 67.1 \leq m \leq 92.9$$

따라서 $M = 92, m = 68$ 이므로

$$M - m = 92 - 68 = 24$$

정답_ 24

494

표본의 크기 64가 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 10을 사용할 수 있다.

이때 표본평균이 45이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$45 - 1.96 \times \frac{10}{\sqrt{64}} \leq m \leq 45 + 1.96 \times \frac{10}{\sqrt{64}}$$

$$\therefore 42.55 \leq m \leq 47.45$$

정답_ ②

495

표본의 크기 324가 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 12를 사용할 수 있다.

모평균 m 에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$\bar{x} - 3 \times \frac{12}{\sqrt{324}} \leq m \leq \bar{x} + 3 \times \frac{12}{\sqrt{324}}$$

$$\therefore \bar{x} - 2 \leq m \leq \bar{x} + 2$$

따라서 $k = 2$ 이므로

$$9k = 9 \times 2 = 18$$

정답_ 18

496

표본의 크기 100이 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 20 mm를 사용할 수 있다.

이때 표본평균이 245 mm이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$245 - 1.96 \times \frac{20}{\sqrt{100}} \leq m \leq 245 + 1.96 \times \frac{20}{\sqrt{100}}$$

$$\therefore 241.08 \leq m \leq 248.92$$

따라서 신뢰구간에 속하는 정수는 242, 243, 244, 245, 246, 247,

248의 7개이다.

정답_ 7

497

표본평균이 150, 모표준편차가 12, 표본의 크기가 n 이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$150 - 2 \times \frac{12}{\sqrt{n}} \leq m \leq 150 + 2 \times \frac{12}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore 150 - \frac{24}{\sqrt{n}} \leq m \leq 150 + \frac{24}{\sqrt{n}}$$

이것이 $148 \leq m \leq 152$ 와 같으므로

$$150 - \frac{24}{\sqrt{n}} = 148, \quad 150 + \frac{24}{\sqrt{n}} = 152$$

$$\text{즉, } \frac{24}{\sqrt{n}} = 2 \text{이므로}$$

$$\sqrt{n} = 12 \quad \therefore n = 144$$

정답_ ⑤

498

표본평균이 60분, 모표준편차가 15분, 표본의 크기가 n 이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$60 - 1.96 \times \frac{15}{\sqrt{n}} \leq m \leq 60 + 1.96 \times \frac{15}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore 60 - \frac{29.4}{\sqrt{n}} \leq m \leq 60 + \frac{29.4}{\sqrt{n}}$$

이것이 $56.325 \leq m \leq 63.675$ 와 같으므로

$$60 - \frac{29.4}{\sqrt{n}} = 56.325, \quad 60 + \frac{29.4}{\sqrt{n}} = 63.675$$

$$\text{즉, } \frac{29.4}{\sqrt{n}} = 3.675 \text{이므로}$$

$$\sqrt{n} = 8 \quad \therefore n = 64$$

정답_ 64

499

표본평균이 $\bar{x}$ 초, 모표준편차가 24초, 표본의 크기가 n 이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$\bar{x} - 2.58 \times \frac{24}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + 2.58 \times \frac{24}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore \bar{x} - \frac{61.92}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + \frac{61.92}{\sqrt{n}}$$

이것이 $\bar{x} - 6.88 \leq m \leq \bar{x} + 6.88$ 과 같으므로

$$\frac{61.92}{\sqrt{n}} = 6.88, \quad \sqrt{n} = 9$$

$$\therefore n = 81$$

정답_ ④

500

표본평균이 120, 모표준편차가 10, 표본의 크기가 n 이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$120 - 2 \times \frac{10}{\sqrt{n}} \leq m \leq 120 + 2 \times \frac{10}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore 120 - \frac{20}{\sqrt{n}} \leq m \leq 120 + \frac{20}{\sqrt{n}}$$

이 신뢰구간에 속하는 정수의 개수가 9이므로

$$4 \leq \frac{20}{\sqrt{n}} < 5, \quad \frac{1}{5} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{4}$$

$$4 < \sqrt{n} \leq 5 \quad \therefore 16 < n \leq 25$$

따라서 자연수 n 은 17, 18, 19, ..., 25의 9개이다.

정답_ 9

참고 $120 - \frac{20}{\sqrt{n}} \leq m \leq 120 + \frac{20}{\sqrt{n}}$ 에 속하는 정수의 개수가 9이고 그 정수들은 120의 좌우로 대칭인 형태이므로 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124이다.

즉, $115 < 120 - \frac{20}{\sqrt{n}} \leq 116, 124 \leq 120 + \frac{20}{\sqrt{n}} < 125$ 이므로 $4 \leq \frac{20}{\sqrt{n}} < 5$ 임을 알 수 있다.

501

표본평균이 $\bar{x}_1$, 모표준편차가 5, 표본의 크기가 25이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\bar{x}_1 - 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{25}} \leq m \leq \bar{x}_1 + 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{25}}$$

$$\therefore \bar{x}_1 - 1.96 \leq m \leq \bar{x}_1 + 1.96$$

이것이 $80 - a \leq m \leq 80 + a$ 와 같으므로

$$\bar{x}_1 = 80, \quad a = 1.96$$

또, 표본평균이 $\bar{x}_2$, 모표준편차가 5, 표본의 크기가 n 이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\bar{x}_2 - 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x}_2 + 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore \bar{x}_2 - \frac{9.8}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x}_2 + \frac{9.8}{\sqrt{n}}$$

$$\text{이것이 } \frac{15}{16}\bar{x}_1 - \frac{5}{7}a \leq m \leq \frac{15}{16}\bar{x}_1 + \frac{5}{7}a \text{와 같으므로}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{15}{16}\bar{x}_1 = \frac{15}{16} \times 80 = 75$$

$$\frac{9.8}{\sqrt{n}} = \frac{5}{7}a = \frac{5}{7} \times 1.96 = \frac{9.8}{7}$$

$$\sqrt{n} = 7 \quad \therefore n = 49$$

$$\therefore n + \bar{x}_2 = 49 + 75 = 124$$

정답_ ②

502

모표준편차가 8, 표본의 크기가 144이므로 모평균 m 을 신뢰도 99 %로 추정한 신뢰구간의 길이는

$$2 \times 3 \times \frac{8}{\sqrt{144}} = 4$$

정답_ ④

503

모표준편차가 2, 표본의 크기가 256일 때 모평균 m 에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간이 $a \leq m \leq b$ 이므로 $b - a$ 는 신뢰구간의 길이이다.

$$\therefore b - a = 2 \times 1.96 \times \frac{2}{\sqrt{256}} = 0.49$$

정답_ ①

504

$P(|Z| \leq k) = \frac{\alpha}{100}$ 라고 하자.

$f_{10}(10)$ 은 모표준편차가 10, 표본의 크기가 10일 때 모평균 m 을 신뢰도 α %로 추정한 신뢰구간의 길이이므로

$$f_{10}(10) = 2 \times k \times \frac{10}{\sqrt{10}} = 2\sqrt{10}k$$

$f_{50}(20)$ 은 모표준편차가 20, 표본의 크기가 50일 때 모평균 m 을 신뢰도 α %로 추정한 신뢰구간의 길이이므로

$$f_{50}(20) = 2 \times k \times \frac{20}{\sqrt{50}} = 4\sqrt{2}k$$

$f_{80}(40)$ 은 모표준편차가 40, 표본의 크기가 80일 때 모평균 m 을 신뢰도 α %로 추정한 신뢰구간의 길이이므로

$$f_{80}(40) = 2 \times k \times \frac{40}{\sqrt{80}} = 4\sqrt{5}k$$

이때 $4\sqrt{2}k < 2\sqrt{10}k < 4\sqrt{5}k$ 이므로

$$f_{50}(20) < f_{10}(10) < f_{80}(40)$$

정답_ ③

505

표본평균이 $\bar{x}_1$, 모표준편차가 σ , 표본의 크기가 100일 때 모평균 m 에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\bar{x}_1 - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{100}} \leq m \leq \bar{x}_1 + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{100}}$$

$$\bar{x}_1 - 0.196\sigma \leq m \leq \bar{x}_1 + 0.196\sigma$$

$$\therefore a = \bar{x}_1 - 0.196\sigma, b = \bar{x}_1 + 0.196\sigma$$

한편, $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 1.34$ 이므로 $\bar{x}_2 = \bar{x}_1 - 1.34$

표본평균이 $\bar{x}_2 = \bar{x}_1 - 1.34$, 모표준편차가 σ , 표본의 크기가 400일 때 모평균 m 에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$\bar{x}_1 - 1.34 - 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{400}} \leq m \leq \bar{x}_1 - 1.34 + 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{400}}$$

$$\bar{x}_1 - 1.34 - 0.129\sigma \leq m \leq \bar{x}_1 - 1.34 + 0.129\sigma$$

$$\therefore c = \bar{x}_1 - 1.34 - 0.129\sigma, d = \bar{x}_1 - 1.34 + 0.129\sigma$$

이때 $a = c$ 이므로

$$\bar{x}_1 - 0.196\sigma = \bar{x}_1 - 1.34 - 0.129\sigma$$

$$0.067\sigma = 1.34 \quad \therefore \sigma = 20$$

따라서 $b - a$ 는 모표준편차가 20, 표본의 크기가 100일 때 모평균 m 을 신뢰도 95 %로 추정한 신뢰구간의 길이이므로

$$b - a = 2 \times 1.96 \times \frac{20}{\sqrt{100}} = 7.84$$

정답_ ②

506

모표준편차가 100, 표본의 크기가 100일 때 모평균을 신뢰도 95 %로 추정한 신뢰구간의 길이는

$$2 \times 2 \times \frac{100}{\sqrt{100}} = 40 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

모표준편차가 100, 표본의 크기가 n 일 때 모평균을 신뢰도 99 %로 추정한 신뢰구간의 길이는

$$2 \times 3 \times \frac{100}{\sqrt{n}} = \frac{600}{\sqrt{n}} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 이 서로 같으므로

$$\frac{600}{\sqrt{n}} = 40, \sqrt{n} = 15$$

$$\therefore n = 225$$

정답_ ②

507

$b - a$ 는 모표준편차가 4, 표본의 크기가 n 일 때 모평균 m 을 신뢰

도 95 %로 추정한 신뢰구간의 길이이므로

$$b - a = 2 \times 1.96 \times \frac{4}{\sqrt{n}} = \frac{15.68}{\sqrt{n}}$$

이때 $100(b - a) = 112$ 이므로

$$100 \times \frac{15.68}{\sqrt{n}} = 112, \sqrt{n} = 14$$

$$\therefore n = 196$$

정답_ 196

508

표본의 크기를 n 이라고 하면 모표준편차가 5 g이므로 모평균을 신뢰도 99 %로 추정한 신뢰구간의 길이는

$$2 \times 2.58 \times \frac{5}{\sqrt{n}} = \frac{25.8}{\sqrt{n}}$$

이때 $\frac{25.8}{\sqrt{n}} \geq 4$ 이어야 하므로

$$\sqrt{n} \leq 6.45 \quad \therefore n \leq 41.6025$$

따라서 자연수 n 의 최댓값은 41이다.

$\hookrightarrow n$ 은 표본의 개수이므로 자연수이다.

정답_ 41

509

16개의 샴푸를 임의추출하여 얻은 표본평균을 $\bar{x}$ 라고 하면 모표준편차가 σ 이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\bar{x} - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{16}} \leq m \leq \bar{x} + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{16}}$$

$$\therefore \bar{x} - 0.49\sigma \leq m \leq \bar{x} + 0.49\sigma$$

이것이 $746.1 \leq m \leq 755.9$ 와 같으므로

$$\bar{x} - 0.49\sigma = 746.1, \bar{x} + 0.49\sigma = 755.9$$

$$\therefore \bar{x} = 751, \sigma = 10$$

$b - a$ 는 모표준편차가 10, 표본의 크기가 n 일 때 모평균 m 을 신뢰도 99 %로 추정한 신뢰구간의 길이이므로

$$b - a = 2 \times 2.58 \times \frac{10}{\sqrt{n}} = \frac{51.6}{\sqrt{n}}$$

$b - a$ 의 값이 6 이하가 되어야 하므로

$$\frac{51.6}{\sqrt{n}} \leq 6, \sqrt{n} \geq 8.6$$

$$\therefore n \geq 73.96$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 74이다.

정답_ ②

510

$P(|Z| \leq k) = \frac{\alpha}{100}$ 라고 하자.

모표준편차가 24, 표본의 크기가 64일 때 모평균 m 을 신뢰도 α %로 추정한 신뢰구간의 길이가 15.48이므로

$$2 \times k \times \frac{24}{\sqrt{64}} = 15.48, 6k = 15.48$$

$$\therefore k = 2.58$$

즉, $P(|Z| \leq 2.58) = \frac{\alpha}{100}$ 이므로

$$\alpha = 100P(|Z| \leq 2.58)$$

$$= 100 \times 2P(0 \leq Z \leq 2.58)$$

$$= 100 \times 2 \times 0.495 = 99$$

정답_ ⑤

511

$P(|Z| \leq k) = \frac{\alpha}{100}$ 라고 하자.

모표준편차가 3, 표본의 크기가 225일 때 모평균을 신뢰도 α %로 추정한 신뢰구간의 길이가 0.028이므로

$$2 \times k \times \frac{3}{\sqrt{225}} = 0.028, 0.4k = 0.028$$

$$\therefore k = 0.07$$

$$\text{즉, } P(|Z| \leq 0.07) = \frac{\alpha}{100} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= 100P(|Z| \leq 0.07) \\ &= 100 \times 2P(0 \leq Z \leq 0.07) \\ &= 100 \times 2 \times 0.03 = 6 \end{aligned}$$

$$P(|Z| \leq l) = \frac{3\alpha}{100} = \frac{3 \times 6}{100} = 0.18 \text{이라고 하면}$$

$$2P(0 \leq Z \leq l) = 0.18 \quad \therefore P(0 \leq Z \leq l) = 0.09$$

$$\text{이때 } P(0 \leq Z \leq 0.23) = 0.09 \text{이므로}$$

$$l = 0.23$$

따라서 같은 표본을 이용하여 모평균을 신뢰도 3α %, 즉 18 %로 추정한 신뢰구간의 길이는

$$2 \times 0.23 \times \frac{3}{\sqrt{225}} = 0.092$$

정답_ 0.092

512

$$P(|Z| \leq k) = \frac{38}{100} = 0.38 \text{이라고 하면}$$

$$2P(0 \leq Z \leq k) = 0.38 \quad \therefore P(0 \leq Z \leq k) = 0.19$$

$$\text{이때 } P(0 \leq Z \leq 0.5) = 0.19 \text{이므로}$$

$$k = 0.5$$

$L(100, 38)$ 은 모표준편차가 σ , 표본의 크기가 100일 때 모평균 m 을 신뢰도 38 %로 추정한 신뢰구간의 길이이므로

$$L(100, 38) = 2 \times 0.5 \times \frac{\sigma}{\sqrt{100}} = 0.1\sigma$$

또, $L(1600, x)$ 는 모표준편차가 σ , 표본의 크기가 1600일 때 모평균 m 을 신뢰도 x %로 추정한 신뢰구간의 길이이다.

$$\text{즉, } P(|Z| \leq l) = \frac{x}{100} \text{라고 하면}$$

$$L(1600, x) = 2 \times l \times \frac{\sigma}{\sqrt{1600}} = 0.05l\sigma$$

$$\text{이때 } L(100, 38) = L(1600, x) \text{이므로}$$

$$0.1\sigma = 0.05l\sigma \quad \therefore l = 2$$

$$\therefore x = 100P(|Z| \leq 2)$$

$$= 100 \times 2P(0 \leq Z \leq 2)$$

$$= 100 \times 2 \times 0.48 = 96$$

정답_ 96

513

표본평균을 $\bar{x}$ 라고 하면 모표준편차가 5, 표본의 크기가 625일 때 모평균 m 에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\bar{x} - 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{625}} \leq m \leq \bar{x} + 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{625}}$$

$$\bar{x} - 0.392 \leq m \leq \bar{x} + 0.392$$

$$-0.392 \leq m - \bar{x} \leq 0.392$$

$$\therefore |m - \bar{x}| \leq 0.392$$

따라서 모평균과 표본평균의 차의 최댓값은 0.392이다.

정답_ 0.392

514

표본평균이 $\bar{x}$, 모표준편차가 10, 표본의 크기가 n 일 때 모평균 m 에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$\bar{x} - 3 \times \frac{10}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + 3 \times \frac{10}{\sqrt{n}}$$

$$\bar{x} - \frac{30}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + \frac{30}{\sqrt{n}}$$

$$-\frac{30}{\sqrt{n}} \leq m - \bar{x} \leq \frac{30}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore |m - \bar{x}| \leq \frac{30}{\sqrt{n}}$$

이때 $|m - \bar{x}| \leq 6$ 이므로

$$\frac{30}{\sqrt{n}} \leq 6, \sqrt{n} \geq 5$$

$$\therefore n \geq 25$$

따라서 n 의 최솟값은 25이다.

정답_ 25

515

$P(|Z| \leq k) = \frac{\alpha}{100}$ 라고 하면 모표준편차가 σ , 표본의 크기가 n 일 때 모평균 m 을 신뢰도 α %로 추정한 신뢰구간의 길이는

$$2k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

즉, 신뢰구간의 길이는 k 에 정비례하고 $\sqrt{n}$ 에 반비례하므로 신뢰도를 낮추면서 표본의 크기를 크게 하면 신뢰구간의 길이는 짧아진다.

따라서 옳은 것은 ②이다.

정답_ ②

516

$P(|Z| \leq k) = \frac{\alpha}{100}$ 라고 하면 모표준편차가 1, 표본의 크기가 n 일 때 모평균 m 을 신뢰도 α %로 추정한 신뢰구간의 길이는

$$2k \times \frac{1}{\sqrt{n}}$$

즉, 신뢰도가 일정할 때 신뢰구간의 길이가 $\frac{1}{2}$ 배가 되려면 표본의 크기는 4배가 되어야 한다.

따라서 구하는 표본의 크기는

$$5 \times 4 = 20$$

정답_ ①

517

$P(|Z| \leq k) = \frac{\alpha}{100}$ 라고 하면 모표준편차가 σ , 표본의 크기가 n 일 때 모평균 m 을 신뢰도 α %로 추정한 신뢰구간의 길이는 $2k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

이므로 신뢰구간의 길이는 $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 의 값에 정비례한다.

$$\textcircled{1} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{36}} = \frac{2}{3}$$

$$\textcircled{2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{9}{\sqrt{36}} = \frac{3}{2}$$

$$\textcircled{3} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{9}{\sqrt{81}} = 1$$

$$\textcircled{4} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{12}{\sqrt{81}} = \frac{4}{3}$$

$$\textcircled{5} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{12}{\sqrt{100}} = \frac{6}{5}$$

따라서 신뢰구간의 길이가 가장 긴 것은 $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 의 값이 가장 큰 $\textcircled{2}$ 이다.

정답_ ②

518

$$(1) E(\hat{p}) = 0.2$$

$$(2) V(\hat{p}) = \frac{0.2 \times 0.8}{100} = 0.0016$$

$$(3) \sigma(\hat{p}) = \sqrt{0.0016} = 0.04$$

정답_ (1) 0.2 (2) 0.0016 (3) 0.04

519

모비율이 $\frac{30}{100} = 0.3$ 이므로

$$\sigma(\hat{p}) = \sqrt{\frac{0.3 \times 0.7}{2100}} = 0.01$$

정답_ ①

520

모비율이 $\frac{60}{100} = \frac{3}{5}$ 이고, 표본의 크기가 n 이므로

$$V(\hat{p}) = \frac{\frac{3}{5} \times \frac{2}{5}}{n} = \frac{6}{25n}$$

즉, $\frac{6}{25n} = \frac{1}{150}$ 이므로

$$n = 36$$

정답_ 36

521

모비율은 $\frac{80}{100} = 0.8$

임의추출한 100개 중에서 발아하는 씨앗의 비율을 $\hat{p}$ 이라고 하면 표본의 크기 100은 충분히 큰 수이므로 $\hat{p}$ 은 근사적으로 정규분포

$N\left(0.8, \frac{0.8 \times 0.2}{100}\right)$, 즉 $N(0.8, 0.04^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{\hat{p} - 0.8}{0.04}$ 로 놓으면 Z 는 근사적으로 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로 구하는 확률은

$$P(\hat{p} \geq \frac{90}{100}) = P(\hat{p} \geq 0.9)$$

$$= P\left(Z \geq \frac{0.9 - 0.8}{0.04}\right)$$

$$= P(Z \geq 2.5)$$

$$= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 2.5)$$

$$= 0.5 - 0.49 = 0.01$$

정답_ ①

522

모비율은 $\frac{64}{100} = 0.64$

임의추출한 64명 중에서 키가 170 cm 이상인 비율을 $\hat{p}$ 이라고 하면 표본의 크기 64는 충분히 큰 수이므로 $\hat{p}$ 은 근사적으로 정규분포

$N\left(0.64, \frac{0.64 \times 0.36}{64}\right)$, 즉 $N(0.64, 0.06^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{\hat{p} - 0.64}{0.06}$ 로 놓으면 Z 는 근사적으로 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로 구하는 확률은

$$P(0.61 \leq \hat{p} \leq 0.67) = P\left(\frac{0.61 - 0.64}{0.06} \leq Z \leq \frac{0.67 - 0.64}{0.06}\right)$$

$$= P(-0.5 \leq Z \leq 0.5)$$

$$= 2P(0 \leq Z \leq 0.5)$$

$$= 2 \times 0.19 = 0.38$$

정답_ 0.38

523

모비율은 $\frac{10}{100} = 0.1$

임의추출한 100개 중에서 불량품의 비율을 $\hat{p}$ 이라고 하면 표본의 크기 100은 충분히 큰 수이므로 $\hat{p}$ 은 근사적으로 정규분포

$N\left(0.1, \frac{0.1 \times 0.9}{100}\right)$, 즉 $N(0.1, 0.03^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{\hat{p} - 0.1}{0.03}$ 로 놓으면 Z 는 근사적으로 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로 구하는 확률은

$$P\left(\frac{4}{100} \leq \hat{p} \leq \frac{7}{100}\right) = P(0.04 \leq \hat{p} \leq 0.07)$$

$$= P\left(\frac{0.04 - 0.1}{0.03} \leq Z \leq \frac{0.07 - 0.1}{0.03}\right)$$

$$= P(-2 \leq Z \leq -1)$$

$$= P(1 \leq Z \leq 2)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 2) - P(0 \leq Z \leq 1)$$

$$= 0.48 - 0.34 = 0.14$$

정답_ ②

524

모비율은 $\frac{20}{100} = 0.2$

임의추출한 1600명 중에서 자격증 A를 가진 직원의 비율을 $\hat{p}$ 이라고 하면 표본의 크기 1600은 충분히 큰 수이므로 $\hat{p}$ 은 근사적으로

정규분포 $N\left(0.2, \frac{0.2 \times 0.8}{1600}\right)$, 즉 $N(0.2, 0.01^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{\hat{p} - 0.2}{0.01}$ 로 놓으면 Z 는 근사적으로 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로 $P(\hat{p} \geq \frac{a}{100}) = 0.9772$ 에서

$$P\left(Z \geq \frac{\frac{a}{100} - 0.2}{0.01}\right) = 0.9772$$

$$P(Z \geq a - 20) = 0.9772$$

$$P(Z \leq 20 - a) = 0.9772$$

$$P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 20 - a) = 0.9772$$

$$\therefore P(0 \leq Z \leq 20 - a) = 0.9772 - P(Z \leq 0)$$

$$= 0.9772 - 0.5 = 0.4772$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772$ 이므로
 $20 - a = 2 \quad \therefore a = 18$

정답_ ④

525

표본의 크기가 400, 표본비율이 $\frac{50}{100} = 0.5$ 이므로 시청률 p 에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은
 $0.5 - 2\sqrt{\frac{0.5 \times 0.5}{400}} \leq p \leq 0.5 + 2\sqrt{\frac{0.5 \times 0.5}{400}}$
 $\therefore 0.45 \leq p \leq 0.55$

정답_ $0.45 \leq p \leq 0.55$

526

표본의 크기가 400, 표본비율이 $\frac{320}{400} = 0.8$ 이므로 도시 주민 전체의 시립 도서관 개방 시간 연장을 희망하는 비율 p 에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은
 $0.8 - 1.96\sqrt{\frac{0.8 \times 0.2}{400}} \leq p \leq 0.8 + 1.96\sqrt{\frac{0.8 \times 0.2}{400}}$
 $\therefore 0.8 - 0.0392 \leq p \leq 0.8 + 0.0392$
 이것이 $\hat{p} - c \leq p \leq \hat{p} + c$ 와 같으므로
 $\hat{p} = 0.8, c = 0.0392$

정답_ 0.0392

527

표본의 크기가 1600, 표본비율이 $\frac{36}{100} = 0.36$ 이므로 지하철을 이용하여 출퇴근하는 회사원의 비율 p 에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은
 $0.36 - 3\sqrt{\frac{0.36 \times 0.64}{1600}} \leq p \leq 0.36 + 3\sqrt{\frac{0.36 \times 0.64}{1600}}$
 $0.36 - 0.036 \leq p \leq 0.36 + 0.036$
 $-0.036 \leq p - 0.36 \leq 0.036$
 $\therefore |p - 0.36| \leq 0.036$
 따라서 모비율과 표본비율의 차의 최댓값은 0.036이다.

정답_ ②

528

표본의 크기가 150, 표본비율이 $\frac{40}{100} = 0.4$ 이므로 모비율 p 를 신뢰도 99 %로 추정한 신뢰구간의 길이는
 $2 \times 2.58\sqrt{\frac{0.4 \times 0.6}{150}} = 0.2064$

정답_ ④

529

표본의 크기는 n , 표본비율은 $\frac{90}{100} = 0.9$ 이다.
 $b - a$ 는 모비율 p 를 신뢰도 95 %로 추정한 신뢰구간의 길이이므로
 $2 \times 1.96\sqrt{\frac{0.9 \times 0.1}{n}} = 0.0588$
 $\frac{1.176}{\sqrt{n}} = 0.0588, \sqrt{n} = 20 \quad \therefore n = 400$

정답_ 400

530

표본의 크기는 n , 표본비율은 $\frac{1}{5} = 0.2$ 이다.

모비율 p 를 신뢰도 95 %로 추정한 신뢰구간의 길이가 0.112 이
 하이므로

$$2 \times 1.96\sqrt{\frac{0.2 \times 0.8}{n}} \leq 0.112$$

$$\frac{1.568}{\sqrt{n}} \leq 0.112, \sqrt{n} \geq 14 \quad \therefore n \geq 196$$

따라서 n 의 최솟값은 196이다.

정답_ 196

531

모집단이 정규분포 $N(18, 5^2)$ 을 따르므로 임의추출한 16가구의 월 통신비의 평균을 $\bar{X}$ 만 원이라고 하면 표본평균 $\bar{X}$ 는

$N\left(18, \frac{5^2}{16}\right)$, 즉 $N(18, 1.25^2)$ 을 따른다. ①

따라서 $Z = \frac{\bar{X} - 18}{1.25}$ 로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다. ②

즉, 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(20 \leq \bar{X} \leq 22) &= P\left(\frac{20-18}{1.25} \leq Z \leq \frac{22-18}{1.25}\right) \\ &= P(1.6 \leq Z \leq 3.2) \\ &= P(0 \leq Z \leq 3.2) - P(0 \leq Z \leq 1.6) \\ &= 0.4993 - 0.4452 = 0.0541 \end{aligned} \quad \text{③}$$

정답_ 0.0541

채점 기준	비율
① 표본평균이 따르는 정규분포 구하기	30 %
② 표본평균을 표준화하기	30 %
③ 표본평균이 20만 원 이상 22만 원 이하일 확률 구하기	40 %

532

모집단이 정규분포 $N(1400, 10^2)$ 을 따르고 표본의 크기가 100이므로 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(1400, \frac{10^2}{100}\right)$, 즉 $N(1400, 1^2)$ 을 따른다. ①

따라서 $Z = \frac{\bar{X} - 1400}{1}$ 으로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을

따르므로 $P(|\bar{X} - 1400| \leq a) = 0.8664$ 에서

$$P(-a \leq \bar{X} - 1400 \leq a) = 0.8664$$

$$P(-a \leq Z \leq a) = 0.8664$$

$$2P(0 \leq Z \leq a) = 0.8664$$

$$\therefore P(0 \leq Z \leq a) = 0.4332 \quad \text{②}$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.5) = 0.4332$ 이므로

$$a = 1.5 \quad \text{③}$$

정답_ 1.5

채점 기준	비율
① 표본평균이 따르는 정규분포 구하기	30 %
② $P(0 \leq Z \leq a) = 0.4332$ 임을 알기	50 %
③ a 의 값 구하기	20 %

533

표본평균을 $\bar{x}$, 표본표준편차를 S 라고 하면

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{30}}{30} = \frac{150}{30} = 5$$

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{\frac{1}{30-1} \{ (x_1-5)^2 + (x_2-5)^2 + \cdots + (x_{30}-5)^2 \}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{29} \{ (x_1^2 + \cdots + x_{30}^2) - 10(x_1 + \cdots + x_{30}) + 30 \times 5^2 \}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{29} \times (1185 - 10 \times 150 + 750)} = \sqrt{15} \end{aligned} \quad \text{①}$$

표본의 크기 30이 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 $\sqrt{15}$ 를 사용할 수 있다.

이때 표본평균이 5이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$5 - 1.96 \times \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{30}} \leq m \leq 5 + 1.96 \times \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{30}}$$

$$5 - 1.96 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \leq m \leq 5 + 1.96 \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$5 - 1.96 \times \frac{1}{1.4} \leq m \leq 5 + 1.96 \times \frac{1}{1.4}$$

$$\therefore 3.6 \leq m \leq 6.4 \quad \text{②}$$

정답_ $3.6 \leq m \leq 6.4$

채점 기준	비율
① 표본평균과 표본표준편차 구하기	50 %
② 모평균에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간 구하기	50 %

534

모표준편차가 20, 표본의 크기가 900일 때 모평균을 신뢰도 99 %로 추정한 신뢰구간의 길이는

$$2 \times 3 \times \frac{20}{\sqrt{900}} = 4 \quad \text{..... ①}$$

모표준편차가 20, 표본의 크기가 n 일 때 모평균을 신뢰도 95 %로 추정한 신뢰구간의 길이는

$$2 \times 2 \times \frac{20}{\sqrt{n}} = \frac{80}{\sqrt{n}} \quad \text{..... ②}$$

①, ②이 서로 같으므로

$$\frac{80}{\sqrt{n}} = 4, \sqrt{n} = 20 \quad \text{..... ③}$$

$$\therefore n = 400 \quad \text{..... ③}$$

정답_ 400

채점 기준	비율
① 신뢰도 99 %로 추정한 신뢰구간의 길이 구하기	40 %
② 신뢰도 95 %로 추정한 신뢰구간의 길이 구하기	40 %
③ n 의 값 구하기	20 %

535

$$\text{모비율은 } \frac{4}{100} = 0.04$$

임의추출한 150개 중에서 불량품일 비율을 $\hat{p}$ 이라고 하면 표본의 크기 150은 충분히 큰 수이므로 $\hat{p}$ 은 근사적으로 정규분포

$$N\left(0.04, \frac{0.04 \times 0.96}{150}\right), \text{ 즉 } N(0.04, 0.016^2) \text{을 따른다. ①}$$

$$\text{따라서 } Z = \frac{\hat{p} - 0.04}{0.016} \text{로 놓으면 } Z \text{는 근사적으로 표준정규분포}$$

$$N(0, 1) \text{을 따른다. ②}$$

즉, 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P\left(\hat{p} \geq \frac{12}{150}\right) &= P(\hat{p} \geq 0.08) \\ &= P\left(Z \geq \frac{0.08 - 0.04}{0.016}\right) \\ &= P(Z \geq 2.5) \\ &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 2.5) \\ &= 0.5 - 0.4938 = 0.0062 \end{aligned} \quad \text{..... ③}$$

정답_ 0.0062

채점 기준	비율
① 표본비율이 따르는 정규분포 구하기	30 %
② 표본비율이 따르는 정규분포를 표준화하기	30 %
③ 150개 중에서 불량품이 12개 이상일 확률 구하기	40 %

536

표본의 크기가 400, 표본비율이 $\frac{144}{400} = 0.36$ 이므로 음료수의 선호율 p 에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$0.36 - 3 \sqrt{\frac{0.36 \times 0.64}{400}} \leq p \leq 0.36 + 3 \sqrt{\frac{0.36 \times 0.64}{400}}$$

$$\therefore 0.288 \leq p \leq 0.432 \quad \text{..... ①}$$

이때 $0.288 \times 100 = 28.8$, $0.432 \times 100 = 43.2$ 이므로 전체 국민의 28.8 % 이상 43.2 % 이하가 이 음료를 선호할 것으로 추정된다. ②

정답_ 28.8 % 이상 43.2 % 이하

채점 기준	비율
① 신뢰도 99 %의 신뢰구간 구하기	70 %
② 신뢰구간을 백분율로 나타내기	30 %

537

모평균이 2, 모분산이 1, 표본의 크기가 n 이므로

$$E(\bar{X}) = 2, V(\bar{X}) = \frac{1}{n}$$

$$V(\bar{X}) = E(\bar{X}^2) - \{E(\bar{X})\}^2 \text{에서}$$

$$E(\bar{X}^2) = V(\bar{X}) + \{E(\bar{X})\}^2$$

$$= \frac{1}{n} + 2^2 = \frac{1}{n} + 4$$

$$\therefore f(n) = E(\bar{X}^2 - 4\bar{X} + 4)$$

$$= E(\bar{X}^2) - 4E(\bar{X}) + 4$$

$$= \frac{1}{n} + 4 - 4 \times 2 + 4 = \frac{1}{n}$$

따라서 $y = f(n)$ 의 그래프의 개형으로 가장 적절한 것은 ④이다.

정답_ ④

다른 풀이

$$f(n) = E(\bar{X}^2 - 4\bar{X} + 4)$$

$$= E((\bar{X} - 2)^2) \quad \text{[(편차)²의 평균]}$$

$$= V(\bar{X}) = \frac{1}{n}$$

따라서 $y=f(n)$ 의 그래프의 개형으로 가장 적절한 것은 ④이다.

538

주머니에서 임의로 꺼낸 한 개의 공에 적혀 있는 수를 확률변수 Y 라 하고 Y 의 확률분포를 다음 표와 같다고 하자.

Y	1	2	3	4	합계
$P(Y=y)$	a	b	c	d	1

(단, $0 \leq a, b, c, d \leq 1$)

$X=4$ 인 경우는 4개의 수가 모두 1이어야 하므로
 $\downarrow 1+1+1+1=4$

$$P(X=4)=a^4$$

$X=16$ 인 경우는 4개의 수가 모두 4이어야 하므로
 $\downarrow 4+4+4+4=16$

$$P(X=16)=d^4$$

조건 ㉠에서 $P(X=4)=\frac{1}{81}$ 이므로

$$a^4=\frac{1}{81}=\left(\frac{1}{3}\right)^4 \quad \therefore a=\frac{1}{3} \quad (\because 0 \leq a \leq 1)$$

조건 ㉡에서 $16 \times P(X=16)=\frac{1}{81}$ 이므로

$$16d^4=\frac{1}{81}, \quad d^4=\frac{1}{1296}=\left(\frac{1}{6}\right)^4$$

$$\therefore d=\frac{1}{6} \quad (\because 0 \leq d \leq 1)$$

한편, $a+b+c+d=1$ 이므로

$$b+c=1-a-d \\ =1-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

주어진 시행을 4번 반복하여 확인한 4개의 수의 표본평균을 $\bar{Y}$ 라고 하면 $X=4\bar{Y}$ 이므로

$$\begin{aligned} E(X) &= E(4\bar{Y}) \\ &= 4E(\bar{Y}) \\ &= 4E(Y) \quad \left[E(\bar{Y})=E(Y) \right] \\ &= 4\left(1 \times a + 2 \times b + 3 \times c + 4 \times d\right) \\ &= 4\left(1 \times \frac{1}{3} + 2b + 3c + 4 \times \frac{1}{6}\right) \\ &= 8b + 12c + 4 \end{aligned}$$

조건 ㉢에서 $E(X)=9$ 이므로

$$8b+12c+4=9 \quad \therefore 8b+12c=5 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } b=\frac{1}{4}, c=\frac{1}{4}$$

따라서 확률변수 Y 의 확률분포표는 다음과 같다.

Y	1	2	3	4	합계
$P(Y=y)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	1

$$\begin{aligned} \therefore V(X) &= V(4\bar{Y}) \\ &= 4^2 V(\bar{Y}) \\ &= 4V(Y) \quad \left[V(\bar{Y})=\frac{V(Y)}{4} \right] \\ &= 4\left\{1^2 \times \frac{1}{3} + 2^2 \times \frac{1}{4} + 3^2 \times \frac{1}{4} + 4^2 \times \frac{1}{6} \right. \\ &\quad \left. - \left(1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{6}\right)^2\right\} \\ &= 4\left\{\frac{25}{4} - \left(\frac{9}{4}\right)^2\right\} = \frac{19}{4} \end{aligned}$$

따라서 $p=4, q=19$ 이므로

$$p+q=4+19=23$$

정답 23

참고 $X=Y_1+Y_2+Y_3+Y_4, \bar{Y}=\frac{Y_1+Y_2+Y_3+Y_4}{4}$ 이므로
 $X=4\bar{Y}$

539

$P(|Z| \leq k) = \frac{\alpha}{100}$ 라고 하자.

표본 A에서 표본의 크기 n_1 이 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 15를 사용할 수 있다.

따라서 표본 A에서 모평균 m 에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간은

$$80-k \times \frac{15}{\sqrt{n_1}} \leq m \leq 80+k \times \frac{15}{\sqrt{n_1}} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

표본 B에서 표본의 크기 n_2 가 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 12를 사용할 수 있다.

따라서 표본 B에서 모평균 m 에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간은

$$90-k \times \frac{12}{\sqrt{n_2}} \leq m \leq 90+k \times \frac{12}{\sqrt{n_2}} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

ㄱ. 표본 A보다 표본 B의 표준편차가 더 작으므로 표본 A보다 표본 B의 분포가 더 고르다. (참)

ㄴ. ㉠과 $77 \leq m \leq 83$ 이 같으므로

$$\begin{aligned} k \times \frac{15}{\sqrt{n_1}} &= 3, \quad \sqrt{n_1}=5k \\ \therefore n_1 &= 25k^2 \quad \dots\dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

㉡과 $86 \leq m \leq 94$ 가 같으므로

$$\begin{aligned} k \times \frac{12}{\sqrt{n_2}} &= 4, \quad \sqrt{n_2}=3k \\ \therefore n_2 &= 9k^2 \quad \dots\dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

㉢, ㉣에서 $n_1 > n_2$

따라서 표본 A의 크기가 표본 B의 크기보다 크다. (거짓)

ㄷ. 신뢰도를 α %보다 크게 하면 k 의 값도 커지므로 신뢰구간의

$$\text{길이 } 2k \times \frac{15}{\sqrt{n_1}}, 2k \times \frac{12}{\sqrt{n_2}} \text{도 길어진다. (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

정답 ③

540

표본의 크기가 600, 표본비율이 $\hat{p}_1=0.6$ 이고

$P(|Z| \leq 1.76)=0.92$ 이므로 모비율 p 에 대한 신뢰도 92 %의 신뢰구간은

$$0.6-1.76\sqrt{\frac{0.6 \times 0.4}{600}} \leq p \leq 0.6+1.76\sqrt{\frac{0.6 \times 0.4}{600}}$$

$$\therefore 0.6-0.0352 \leq p \leq 0.6+0.0352$$

이것이 $\hat{p}_1-c \leq p \leq \hat{p}_1+c$ 와 같으므로

$$c=0.0352$$

$p=\hat{p}_1=0.6$ 이고 임의추출한 150명 중에서 유연근무제 개정안에 찬성하는 직군의 비율을 $\hat{p}$ 이라고 하면 표본의 크기 150은 충분히

큰 수이므로 $\hat{p}$ 은 근사적으로 정규분포 $N\left(0.6, \frac{0.6 \times 0.4}{150}\right)$, 즉

$N(0.6, 0.04^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\hat{p}-0.6}{0.04}$ 으로 놓으면 Z 는 근사적으로 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}
& P(p-c \leq \hat{p} \leq p+2c) \\
&= P(0.6-0.0352 \leq \hat{p} \leq 0.6+2 \times 0.0352) \\
&= P\left(\frac{0.6-0.0352-0.6}{0.04} \leq Z \leq \frac{0.6+2 \times 0.0352-0.6}{0.04}\right) \\
&= P(-0.88 \leq Z \leq 1.76) \\
&= P(-0.88 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1.76) \\
&= P(0 \leq Z \leq 0.88) + P(0 \leq Z \leq 1.76) \\
&= 0.31 + 0.46 = 0.77
\end{aligned}$$

정답_ 0.77