

풍안짜

대수

정답과 풀이

지수함수와 로그함수

1 지수와 로그

1 지수

12~23쪽

002

- (1) -1의 세제곱근은 방정식 $x^3 = -1$ 의 근이므로
 $x^3 + 1 = 0, (x+1)(x^2 - x + 1) = 0$
 $\therefore x = -1$ 또는 $x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ ← -1의 세제곱근

이 중에서 실수인 것은 -1이다.

- (2) 81의 네제곱근은 방정식 $x^4 = 81$ 의 근이므로
 $x^4 - 81 = 0, (x^2 - 9)(x^2 + 9) = 0$
 $\therefore x = \pm 3$ 또는 $x = \pm 3i$ ← 81의 네제곱근
 이 중에서 실수인 것은 ± 3 이다.

답 (1) $x = -1$ 또는 $x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$, 실수는 -1

(2) $x = \pm 3$ 또는 $x = \pm 3i$, 실수는 ± 3

004

- (1) $\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$
 (2) $\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{(-3)^3} = -3$
 (3) $-\sqrt[6]{\frac{1}{64}} = -\sqrt[6]{\left(\frac{1}{2}\right)^6} = -\frac{1}{2}$
 (4) $\sqrt[3]{-0.001} = \sqrt[3]{(-0.1)^3} = -0.1$

답 (1) 3 (2) -3 (3) $-\frac{1}{2}$ (4) -0.1

006

- (1) $\sqrt[3]{9} \times \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{9 \times 3} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$
 (2) $\frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{\frac{32}{2}} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$
 (3) $(\sqrt[4]{4})^2 = \sqrt[4]{4^2} = \sqrt[4]{(2^2)^2} = \sqrt[4]{2^4} = 2$

답 (1) 3 (2) 2 (3) 2

008

- (1) $\sqrt[3]{81} \times \sqrt[4]{3\sqrt[3]{81}} = \sqrt[3]{81} \times \sqrt[4]{3\sqrt[3]{81}}$
 $= \sqrt[3]{9} \times \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$

$$\begin{aligned} (2) \sqrt[8]{7^6} \times \sqrt[12]{7^3} &= 4 \times 2 \sqrt[7]{7^{3 \times 2}} \times 4 \times 3 \sqrt[7]{7^{1 \times 3}} \\ &= 4 \sqrt[7]{7^3} \times 4 \sqrt[7]{7} \\ &= 4 \sqrt[7]{7^4} = 7 \end{aligned}$$

답 (1) 3 (2) 7

010

- (1) (주어진 식) $= \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{a}} \times \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{a}} \times \frac{\sqrt[4]{3a}}{\sqrt[4]{a}}$
 $= \frac{\sqrt[8]{a}}{\sqrt[6]{a}} \times \frac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[12]{a}} \times \frac{\sqrt[12]{a}}{\sqrt[8]{a}} = 1$
 (2) (주어진 식) $= \sqrt[4]{\frac{2^9 + (2^2)^7}{2^5 + (2^2)^5}} = \sqrt[4]{\frac{2^9 + 2^{14}}{2^5 + 2^{10}}}$
 $= \sqrt[4]{\frac{2^9(1 + 2^5)}{2^5(1 + 2^5)}} = \sqrt[4]{2^4} = 2$

답 (1) 1 (2) 2

012

2, 3, 6의 최소공배수인 6으로 근호 앞 수를 통일하면

$$\sqrt{2} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{8}$$

$$\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[6]{9}$$

이때 $\sqrt[6]{6} < \sqrt[6]{8} < \sqrt[6]{9}$ 이므로

$$\sqrt[6]{6} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$$

답 $\sqrt[6]{6} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$

014

- (1) (주어진 식) $= \left(\frac{9}{16}\right)^{-\frac{4}{3} \times \frac{3}{8}} = \left(\frac{9}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}$
 $= \left\{\left(\frac{3}{4}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)}$
 $= \left(\frac{3}{4}\right)^{-1} = \frac{4}{3}$

- (2) (주어진 식) $= 2^{\frac{3}{4}} \div (2^5)^{\frac{1}{2}} \times (2^3)^{\frac{1}{4}}$
 $= 2^{\frac{3}{4}} \div 2^{\frac{5}{2}} \times 2^{\frac{3}{4}}$
 $= 2^{\frac{3}{4} - \frac{5}{2} + \frac{3}{4}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

답 (1) $\frac{4}{3}$ (2) $\frac{1}{2}$

016

- (1) (주어진 식) $= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}} \times \sqrt[6]{a} = a^{\frac{1}{2}} \div a^{\frac{1}{4}} \times a^{\frac{1}{6}}$
 $= a^{\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6}} = a^{\frac{5}{12}}$

- (2) (주어진 식) $= \sqrt{a} \times \sqrt[4]{a} \times \sqrt[8]{a} = a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{4}} \times a^{\frac{1}{8}}$
 $= a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}} = a^{\frac{7}{8}}$

답 (1) $a^{\frac{5}{12}}$ (2) $a^{\frac{7}{8}}$

018

$$\begin{aligned}
 (1) \text{ (주어진 식)} &= \{(a^{\frac{1}{2}})^2 - (a^{-\frac{1}{2}})^2\}(a + a^{-1}) \\
 &= (a - a^{-1})(a + a^{-1}) \\
 &= a^2 - \frac{1}{a^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \text{ (주어진 식)} &= (a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}})\{(a^{\frac{1}{3}})^2 - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + (b^{\frac{1}{3}})^2\} \\
 &= (a^{\frac{1}{3}})^3 + (b^{\frac{1}{3}})^3 = a + b
 \end{aligned}$$

답 (1) $a^2 - \frac{1}{a^2}$ (2) $a + b$

020

$$2^{\frac{3}{2}} = A, 2^{-\frac{1}{2}} = B \text{로 놓으면}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(주어진 식)} &= (A+B)^2 + (A-B)^2 \\
 &= (A^2 + 2AB + B^2) + (A^2 - 2AB + B^2) \\
 &= 2A^2 + 2B^2 \\
 &= 2 \times (2^{\frac{3}{2}})^2 + 2 \times (2^{-\frac{1}{2}})^2 \\
 &= 2 \times 8 + 2 \times 2^{-1} = 17
 \end{aligned}$$

답 17

022

$$(1) a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}} = 2 \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$a - 2 + a^{-1} = 4$$

$$\therefore a + a^{-1} = 6$$

$$(2) a + a^{-1} = 6 \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$a^2 + 2 + a^{-2} = 36$$

$$\therefore a^2 + a^{-2} = 34$$

$$(3) a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}} = 2 \text{의 양변을 세제곱하면}$$

$$(a^{\frac{1}{2}})^3 - (a^{-\frac{1}{2}})^3 - 3 \times a^{\frac{1}{2}} \times a^{-\frac{1}{2}} (a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}) = 8$$

$$a^{\frac{3}{2}} - a^{-\frac{3}{2}} - 3 \times 1 \times 2 = 8$$

$$\therefore a^{\frac{3}{2}} - a^{-\frac{3}{2}} = 14$$

답 (1) 6 (2) 34 (3) 14

024

$$\begin{aligned}
 x^3 &= (2^{\frac{2}{3}})^3 + (2^{-\frac{2}{3}})^3 + 3 \times 2^{\frac{2}{3}} \times 2^{-\frac{2}{3}} (2^{\frac{2}{3}} + 2^{-\frac{2}{3}}) \\
 &= 2^2 + 2^{-2} + 3 \times 1 \times x \\
 &= 3x + \frac{17}{4}
 \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } x^3 - 3x = \frac{17}{4} \text{이므로}$$

$$4x^3 - 12x = 17$$

답 17

026

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{x}{2}} &= 27^{\frac{x}{2}} = (3^3)^{\frac{x}{2}} = (3^x)^{\frac{3}{2}} \leftarrow 3^x = 4 \text{를 대입} \\
 &= 4^{\frac{3}{2}} = (2^2)^{\frac{3}{2}} = 2^3 = 8
 \end{aligned}$$

답 8

028

$$(1) \text{ 분모, 분자에 각각 } a^{-1} \text{을 곱하면}$$

$$\text{(주어진 식)} = \frac{1 - a^{-2}}{1 + a^{-2}} \leftarrow a^{-2} = 3 \text{을 대입}$$

$$= \frac{1 - 3}{1 + 3} = -\frac{1}{2}$$

$$(2) \text{ 분모, 분자에 각각 } a^{-1} \text{을 곱하면}$$

$$\text{(주어진 식)} = \frac{a^2 - a^{-4}}{a^2 + a^{-4}}$$

$$= \frac{\frac{1}{a^{-2}} - (a^{-2})^2}{\frac{1}{a^{-2}} + (a^{-2})^2} \leftarrow a^{-2} = 3 \text{을 대입}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} - 9}{\frac{1}{3} + 9} = -\frac{13}{14}$$

답 (1) $-\frac{1}{2}$ (2) $-\frac{13}{14}$

참고

$a^{-2} = 3$ 에서 $a^2 = \frac{1}{3}$ 이므로 분모, 분자에 각각 a 를 곱하여 풀 수도 있다.

030

$$(1) 40^x = 32 \text{에서 } 40 = 32^{\frac{1}{x}} = (2^5)^{\frac{1}{x}} = 2^{\frac{5}{x}} \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$10^y = 8 \text{에서 } 10 = 8^{\frac{1}{y}} = (2^3)^{\frac{1}{y}} = 2^{\frac{3}{y}} \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A} \div \textcircled{B} \text{을 하면 } \frac{40}{10} = 2^{\frac{5}{x}} \div 2^{\frac{3}{y}}$$

$$4 = 2^{\frac{5}{x} - \frac{3}{y}}, 2^2 = 2^{\frac{5}{x} - \frac{3}{y}}$$

$$\therefore \frac{5}{x} - \frac{3}{y} = 2$$

$$(2) 3^x = 4^y = 12^z = k \text{로 놓으면 } k > 0 \text{이고, } xyz \neq 0 \text{에서 } k \neq 1 \text{이다.}$$

$$3^x = k \text{에서 } 3 = k^{\frac{1}{x}} \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$4^y = k \text{에서 } 4 = k^{\frac{1}{y}} \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$$12^z = k \text{에서 } 12 = k^{\frac{1}{z}} \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

$$\textcircled{A} \times \textcircled{B} \div \textcircled{C} \text{을 하면 } \frac{3 \times 4}{12} = k^{\frac{1}{x}} \times k^{\frac{1}{y}} \div k^{\frac{1}{z}}$$

$$1 = k^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z}} \text{에서 } k > 0 \text{이고, } k \neq 1 \text{이므로}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = 0$$

답 (1) 2 (2) 0

031

- ① 5의 다섯제곱근은 $x^5=5$ 를 만족시키는 다섯 개의 근이고, 이 중 실수인 것이 단 하나 있는데 이것을 $\sqrt[5]{5}$ 로 나타낸다. (거짓)
- ② -3의 세제곱근은 $x^3=-3$ 을 만족시키는 세 개의 근이고, 이 중 실수인 것이 단 하나 있는데 이것을 $\sqrt[3]{-3}$ 으로 나타낸다. (거짓)
- ③ 4의 네제곱근은 $x^4=4$ 를 만족시키는 네 개의 근이고, 이 중 실수인 것이 두 개 있는데 그중 양수를 $\sqrt[4]{4}$, 음수를 $-\sqrt[4]{4}$ 로 나타낸다. (참)
- ④ n 의 n 제곱근은 $x^n=n$ 을 만족시키는 n 개의 근이고, n 이 홀수일 때는 이 중 실수인 것이 단 하나 있는데 이것을 $\sqrt[n]{n}$ 으로 나타낸다. (참)
- ⑤ $-n$ 의 n 제곱근은 $x^n=-n$ 을 만족시키는 n 개의 근인데, n 이 짝수일 때는 이 중 실수인 것이 없다. (거짓)
- 따라서 옳은 것은 ③, ④이다. **답 ③, ④**

032

- 6의 제곱근 중 실수인 것은 $\pm\sqrt{6}$ 의 2개이므로 $f_2(6)=2$
- 7의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{7}$ 의 1개이므로 $f_3(7)=1$
- 8의 네제곱근 중 실수인 것은 존재하지 않으므로 $f_4(-8)=0$
- $-\sqrt{9}=-3$ 의 다섯제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[5]{-3}$ 의 1개이므로 $f_5(-\sqrt{9})=1$
- $\therefore f_2(6)+f_3(7)+f_4(-8)+f_5(-\sqrt{9})$
 $=2+1+0+1=4$ **답 4**

033

- 2, 3, 6의 최소공배수인 6으로 근호 앞 수를 통일하면
- $$A=\sqrt{3}=\sqrt[6]{3^3}=\sqrt[6]{27}$$
- $$B=\sqrt[3]{5}=\sqrt[6]{5^2}=\sqrt[6]{25}$$
- $$C=\sqrt[3]{15}=\sqrt[6]{15^2}$$
- 이때 $\sqrt[6]{15}<\sqrt[6]{25}<\sqrt[6]{27}$ 이므로 $C<B<A$ **답 ⑤**

034

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식}) &= a^{\frac{3}{2}} \times a^{\frac{4}{3}} \times a^{\frac{1}{6}} \div a^{-\frac{3}{2}} \\ &= a^{\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\frac{1}{6}-(-\frac{3}{2})} = a^{\frac{9}{2}}\end{aligned}$$

따라서 $a^{\frac{9}{2}}=a^{\frac{n}{2}}$ 이므로

$$n=9$$

답 9

035

$$3^6=a^{\frac{1}{6}} \text{에서 } 3=a^{\frac{1}{6}}$$

$$4^4=b^{\frac{1}{4}} \text{에서 } (2^2)^4=b, 2^8=b \quad \therefore 2=b^{\frac{1}{8}}$$

$$\therefore 108^{20}=(2^2 \times 3^3)^{20}=2^{40} \times 3^{60}$$

$$=(b^{\frac{1}{8}})^{40} \times (a^{\frac{1}{6}})^{60}$$

$$=a^{10}b^5$$

답 ②

036

$$a^{\frac{4}{3}}=2^{\frac{3}{4}} \text{에서 } a=2^{\frac{3}{4}}$$

$$b^{\frac{3}{2}}=5^{\frac{2}{3}} \text{에서 } b=5^{\frac{2}{3}}$$

$$c^{\frac{2}{5}}=7^{\frac{5}{2}} \text{에서 } c=7^{\frac{5}{2}}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sqrt[4]{(abc)^n} &= (abc)^{\frac{n}{4}} = (2^{\frac{3}{4}} \times 5^{\frac{2}{3}} \times 7^{\frac{5}{2}})^{\frac{n}{4}} \\ &= 2^{\frac{3n}{16}} \times 5^{\frac{n}{6}} \times 7^{\frac{5n}{8}}\end{aligned}$$

따라서 $\sqrt[4]{(abc)^n}$ 이 자연수가 되도록 하는 자연수 n 은 16, 6, 8의 공배수이므로 자연수 n 의 최솟값은 48이다.

답 48

2 로그

25~35쪽

038

(1) $\log_2 x=1.5$ 에서

$$x=2^{1.5}=2^{\frac{3}{2}}=\sqrt{2^3}=2\sqrt{2}$$

(2) $\log_{1000} x=\frac{2}{3}$ 에서

$$x=1000^{\frac{2}{3}}=(10^3)^{\frac{2}{3}}=10^2=100$$

(3) $\log_3 \{\log_3 (\log_3 x)\}=0$ 에서

$$\log_3 (\log_3 x)=3^0=1$$

$$\log_3 (\log_3 x)=1 \text{에서 } \log_3 x=3^1=3$$

$$\therefore x=3^3=27$$

답 ① $2\sqrt{2}$ ② 100 ③ 27

040

(1) $\log_x 3 = -3$ 에서 $x^{-3} = 3$

$$(x^{-3})^{-\frac{1}{3}} = 3^{-\frac{1}{3}}$$

$$\therefore x = 3^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$$

(2) $\log_x 27 = \frac{3}{2}$ 에서 $x^{\frac{3}{2}} = 27$

$$(x^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}} = 27^{\frac{2}{3}}$$

$$\therefore x = 27^{\frac{2}{3}} = (3^3)^{\frac{2}{3}} = 3^2 = 9$$

(3) $\log_x 32 = -\frac{5}{2}$ 에서 $x^{-\frac{5}{2}} = 32$

$$(x^{-\frac{5}{2}})^{-\frac{2}{5}} = 32^{-\frac{2}{5}}$$

$$\therefore x = 32^{-\frac{2}{5}} = (2^5)^{-\frac{2}{5}} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

답 (1) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ (2) 9 (3) $\frac{1}{4}$

042

(1) 밑 조건에서 $4-x > 0$, $4-x \neq 1$

$$\therefore x < 4, x \neq 3$$

..... ㉠

진수 조건에서 $x-1 > 0$

$$\therefore x > 1$$

..... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$$1 < x < 3 \text{ 또는 } 3 < x < 4$$

(2) 밑 조건에서 $x-3 > 0$, $x-3 \neq 1$

$$\therefore x > 3, x \neq 4$$

..... ㉢

진수 조건에서 $-x^2 + 10x - 16 > 0$

$$x^2 - 10x + 16 < 0, (x-2)(x-8) < 0$$

$$\therefore 2 < x < 8$$

..... ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면

$$3 < x < 4 \text{ 또는 } 4 < x < 8$$

답 (1) $1 < x < 3$ 또는 $3 < x < 4$

(2) $3 < x < 4$ 또는 $4 < x < 8$

044

(1) $\log_2 1 = 0$

(2) $\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4 \log_2 2 = 4$

(3) $\log_2 \frac{1}{8} = \log_2 2^{-3} = -3 \log_2 2 = -3$

답 (1) 0 (2) 4 (3) -3

046

(1) (주어진 식) $= \log_{10} 2^3 + \log_{10} 125 = \log_{10} (8 \times 125)$

$$= \log_{10} 1000 = \log_{10} 10^3 = 3$$

(2) (주어진 식) $= \log_3 \sqrt{15} - \log_3 \sqrt{5} = \log_3 \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}}$

$$= \log_3 \sqrt{3} = \log_3 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

(3) (주어진 식) $= \log_{10} \left(\frac{1}{4} \div 9 \div \frac{25}{9} \right)$

$$= \log_{10} \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{9} \times \frac{9}{25} \right)$$

$$= \log_{10} \frac{1}{100} = \log_{10} 10^{-2} = -2$$

답 (1) 3 (2) $\frac{1}{2}$ (3) -2

048

(1) (주어진 식) $= \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} \times \frac{\log_{10} 4}{\log_{10} 3} \times \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 4} = 1$

(2) (주어진 식) $= \log_2 24 - \log_2 6 = \log_2 \frac{24}{6}$

$$= \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2$$

(3) (주어진 식) $= 2 \log_3 54 - \log_3 6$

$$= \frac{2}{2} \log_3 54 - \log_3 6$$

$$= \log_3 54 - \log_3 6 = \log_3 \frac{54}{6}$$

$$= \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$$

(4) (주어진 식) $= \log_3 3^{-\frac{1}{2}} = \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2} \log_3 3 = -\frac{1}{4}$

답 (1) 1 (2) 2 (3) 2 (4) $-\frac{1}{4}$

참고

(3)은 밑을 9로 통일하여 풀 수도 있다.

050

(1) $2^{\log_2 3} = 3^{\log_2 2} = 3$

(2) $4^{\log_2 3} = 3^{\log_2 4} = 3^{2 \log_2 2} = 3^{2 \log_2 2} = 3^2 = 9$

(3) (지수) $= \log_7 4^2 - \log_7 2^3 = \log_7 \frac{4^2}{2^3} = \log_7 2$

$$\therefore (\text{주어진 식}) = 7^{\log_7 2} = 2^{\log_7 7} = 2$$

답 (1) 3 (2) 9 (3) 2

052

(1) $\log_3 18 = \log_3 (2 \times 3^2) = \log_3 2 + \log_3 3^2$

$$= \log_3 2 + 2 \log_3 3 = a + 2$$

(2) $\log_3 42 = \log_3 (2 \times 3 \times 7)$

$$= \log_3 2 + \log_3 3 + \log_3 7$$

$$= a + 1 + b = a + b + 1$$

$$\begin{aligned}
 (3) \log_{56} 6 &= \frac{\log_3 6}{\log_3 56} = \frac{\log_3 (2 \times 3)}{\log_3 (2^3 \times 7)} \\
 &= \frac{\log_3 2 + \log_3 3}{\log_3 2^3 + \log_3 7} = \frac{\log_3 2 + 1}{3 \log_3 2 + \log_3 7} \\
 &= \frac{a+1}{3a+b}
 \end{aligned}$$

답 (1) $a+2$ (2) $a+b+1$ (3) $\frac{a+1}{3a+b}$

054

[1단계] 주어진 조건식의 로그의 밑을 3으로 통일한다.

$$\log_7 3 = \frac{1}{\log_3 7} = b \quad \therefore \log_3 7 = \frac{1}{b}$$

[2단계] 주어진 식의 로그의 밑을 3으로 통일한다.

$$\begin{aligned}
 \log_{84} 126 &= \frac{\log_3 126}{\log_3 84} = \frac{\log_3 (2 \times 3^2 \times 7)}{\log_3 (2^2 \times 3 \times 7)} \\
 &= \frac{\log_3 2 + 2 \log_3 3 + \log_3 7}{2 \log_3 2 + \log_3 3 + \log_3 7} \\
 &= \frac{a+2+\frac{1}{b}}{2a+1+\frac{1}{b}} \\
 &= \frac{ab+2b+1}{2ab+b+1}
 \end{aligned}$$

답 $\frac{ab+2b+1}{2ab+b+1}$

056

$$10^x = a, 10^y = b, 10^z = c \text{에서}$$

$$x = \log_{10} a, y = \log_{10} b, z = \log_{10} c$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \log_{ab} c^2 &= \frac{\log_{10} c^2}{\log_{10} ab} = \frac{2 \log_{10} c}{\log_{10} a + \log_{10} b} \\
 &= \frac{2z}{x+y}
 \end{aligned}$$

답 $\frac{2z}{x+y}$

다른 풀이

$$\begin{aligned}
 \log_{ab} c^2 &= \log_{10^x \times 10^y} (10^z)^2 = \log_{10^{x+y}} 10^{2z} \\
 &= \frac{2z}{x+y} \log_{10} 10 = \frac{2z}{x+y}
 \end{aligned}$$

058

$a^4 = b^5$ 의 양변에 밑이 a 인 로그를 취하면

$$\log_a a^4 = \log_a b^5, 4 = 5 \log_a b$$

$$\therefore \log_a b = \frac{4}{5}$$

$$\therefore 20 \log_a b = 20 \times \frac{4}{5} = 16$$

답 16

060

$$7^x = 16, 14^y = 8 \text{에서 } x = \log_7 16, y = \log_{14} 8$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \frac{4}{x} - \frac{3}{y} &= \frac{4}{\log_7 16} - \frac{3}{\log_{14} 8} = \frac{4}{\log_7 2^4} - \frac{3}{\log_{14} 2^3} \\
 &= \frac{4}{4 \log_7 2} - \frac{3}{3 \log_{14} 2} = \frac{1}{\log_7 2} - \frac{1}{\log_{14} 2} \\
 &= \log_2 7 - \log_2 14 = \log_2 \frac{7}{14} = \log_2 \frac{1}{2} \\
 &= \log_2 2^{-1} = -1
 \end{aligned}$$

답 -1

다른 풀이

16과 8은 2의 거듭제곱 $\Rightarrow$ 주어진 조건의 양변에 밑이 2인 로그를 취한다.

$$\log_2 7^x = \log_2 16 \text{에서}$$

$$x \log_2 7 = 4 \quad \therefore \frac{4}{x} = \log_2 7$$

$$\log_2 14^y = \log_2 8 \text{에서}$$

$$y \log_2 14 = 3 \quad \therefore \frac{3}{y} = \log_2 14$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \frac{4}{x} - \frac{3}{y} &= \log_2 7 - \log_2 14 = \log_2 \frac{7}{14} \\
 &= \log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1
 \end{aligned}$$

062

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 6, \alpha\beta = 2$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \log_3 (\alpha^{-1} + \beta^{-1}) &= \log_3 \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) = \log_3 \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} \\
 &= \log_3 \frac{6}{2} = \log_3 3 = 1
 \end{aligned}$$

답 1

064

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_2 a + \log_2 b = 4, \log_2 a \times \log_2 b = 1$$

$$\therefore \log_a b + \log_b a$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\log_2 b}{\log_2 a} + \frac{\log_2 a}{\log_2 b} \\
 &= \frac{(\log_2 b)^2 + (\log_2 a)^2}{\log_2 a \times \log_2 b} \\
 &= \frac{(\log_2 a + \log_2 b)^2 - 2 \log_2 a \times \log_2 b}{\log_2 a \times \log_2 b} \\
 &= \frac{4^2 - 2 \times 1}{1} = 14
 \end{aligned}$$

답 14

참고

$\log_2 a \times \log_2 b \neq \log_2 ab$ 임에 주의한다.

065

$\log_a 4 = 2$ 에서 $a^2 = 4$

$\log_4 b = \frac{5}{2}$ 에서 $b = 4^{\frac{5}{2}} = (2^2)^{\frac{5}{2}} = 2^5 = 32$

$$\therefore \frac{a^4}{b} = \frac{4^2}{32} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

참고

$\log_a 4 = 2$ 에서 로그의 정의에 의하여 $a^2 = 4$
이때 밑 조건에서 $a > 0$ 이어야 하므로 $a = 2$

066

밑 조건에서 $k+4 > 0$, $k+4 \neq 1$

$$\therefore k > -4, k \neq -3 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

진수 조건에서 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + kx - k > 0$ 이어야 하므로 이차방정식 $x^2 + kx - k = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = k^2 - 4 \times 1 \times (-k) = k^2 + 4k$$

이때 $D < 0$ 이어야 하므로

$$k^2 + 4k < 0, k(k+4) < 0$$

$$\therefore -4 < k < 0 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 의 공통부분을 구하면

$$-4 < k < -3 \text{ 또는 } -3 < k < 0$$

따라서 정수 k 는 $-2, -1$ 이므로 모든 정수 k 의 값의 합은

$$-2 + (-1) = -3 \quad \text{답 } -3$$

참고

이차부등식이 항상 성립할 조건

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 판별식을 $D = b^2 - 4ac$ 라 할 때, 모든 실수 x 에 대하여

$$\textcircled{1} ax^2 + bx + c > 0 \text{ 이 성립} \Rightarrow a > 0, D < 0$$

$$\textcircled{2} ax^2 + bx + c \geq 0 \text{ 이 성립} \Rightarrow a > 0, D \leq 0$$

$$\textcircled{3} ax^2 + bx + c < 0 \text{ 이 성립} \Rightarrow a < 0, D < 0$$

$$\textcircled{4} ax^2 + bx + c \leq 0 \text{ 이 성립} \Rightarrow a < 0, D \leq 0$$

067

$$\log_2 \{ \log_3 (\log_4 x) \} = 0 \text{에서}$$

$$\log_3 (\log_4 x) = 2^0 = 1$$

$$\log_4 x = 3^1 = 3 \quad \therefore x = 4^3 = 64$$

$$\text{또, } \log_4 \{ \log_3 (\log_2 y) \} = 0 \text{에서}$$

$$\log_3 (\log_2 y) = 4^0 = 1$$

$$\log_2 y = 3^1 = 3 \quad \therefore y = 2^3 = 8$$

$$\therefore x + y = 64 + 8 = 72$$

답 72

068

$$(1) (\text{주어진 식}) = \log_2 \frac{72}{5} + \log_{2^{-1}} \frac{3}{80} - \log_{2^2} \left(\frac{3}{4} \right)^2$$

$$= \log_2 \frac{72}{5} - \log_2 \frac{3}{80} - \log_2 \frac{3}{4}$$

$$= \log_2 \left(\frac{72}{5} \div \frac{3}{80} \div \frac{3}{4} \right)$$

$$= \log_2 \left(\frac{72}{5} \times \frac{80}{3} \times \frac{4}{3} \right)$$

$$= \log_2 512 = \log_2 2^9 = 9 \log_2 2 = 9$$

$$(2) (\text{지수}) = \log_3 4^2 + \log_3 5 - \log_3 2^3$$

$$= \log_3 \frac{4^2 \times 5}{2^3} = \log_3 10$$

$$\therefore (\text{주어진 식}) = 3^{\log_3 10} = 10$$

답 (1) 9 (2) 10

069

주어진 식에서 밑과 진수를 바꾸면

$$\log_2 3 + \log_2 5 + \log_2 6 = \log_2 k$$

$$\log_2 (3 \times 5 \times 6) = \log_2 k$$

$$\therefore k = 3 \times 5 \times 6 = 90$$

답 90

070

$$\sqrt[k]{a} = \sqrt[k]{b} = \sqrt[k]{c^5} = k \quad (k > 0, k \neq 1) \text{로 놓으면}$$

$$\sqrt[k]{a} = k \text{에서 } a = k^k$$

$$\sqrt[k]{b} = k \text{에서 } b = k^k$$

$$\sqrt[k]{c^5} = k \text{에서 } c = k^{\frac{6}{5}}$$

$$\therefore \log_a b + \log_b c + \log_c a$$

$$= \log_{k^k} k^k + \log_{k^k} k^{\frac{6}{5}} + \log_{k^{\frac{6}{5}}} k^k$$

$$= 3 \times \frac{1}{2} + \frac{6}{5} \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{5}{6}$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{2}{5} + \frac{5}{3} = \frac{107}{30}$$

답 $\frac{107}{30}$

3 상용로그

37~44쪽

072

$$(1) \log 1 = \log_{10} 1 = 0$$

$$(2) \log \frac{1}{100} = \log_{10} 10^{-2} = -2$$

$$(3) \log 0.1 = \log_{10} 10^{-1} = -1$$

$$(4) \log \sqrt{1000} = \log_{10} 10^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$$

답 (1) 0 (2) -2 (3) -1 (4) $\frac{3}{2}$

074

- (1) $\log 345 = \log (3.45 \times 10^2)$
 $= \log 3.45 + \log 10^2$
 $= 0.5378 + 2 = 2.5378$
- (2) $\log 345000 = \log (3.45 \times 10^5)$
 $= \log 3.45 + \log 10^5$
 $= 0.5378 + 5 = 5.5378$
- (3) $\log 0.345 = \log (3.45 \times 10^{-1})$
 $= \log 3.45 + \log 10^{-1}$
 $= 0.5378 - 1 = -0.4622$
- (4) $\log \log 0.00345 = \log (3.45 \times 10^{-3})$
 $= \log 3.45 + \log 10^{-3}$
 $= 0.5378 - 3 = -2.4622$

답 (1) 2.5378 (2) 5.5378
 (3) -0.4622 (4) -2.4622

076

- (1) $\log 8 = \log 2^3 = 3 \log 2 = 0.9030$
- (2) $\log 9 = \log 3^2 = 2 \log 3 = 0.9542$
- (3) $\log 12 = \log (2^2 \times 3) = \log 2^2 + \log 3$
 $= 2 \log 2 + \log 3 = 0.6020 + 0.4771$
 $= 1.0791$

답 (1) 0.9030 (2) 0.9542 (3) 1.0791

078

- (1) $\log \frac{5}{2} = \log \frac{10}{4} = \log 10 - 2 \log 2$
 $= 1 - 2 \times 0.3010$
 $= 0.3980$
- (2) $\log 1.2 = \log \frac{12}{10} = \log (3 \times 4) - \log 10$
 $= \log 3 + 2 \log 2 - 1$
 $= 0.4771 + 2 \times 0.3010 - 1$
 $= 0.0791$
- (3) $\log \sqrt{6} = \log 6^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log 6$
 $= \frac{1}{2} \log (2 \times 3)$
 $= \frac{1}{2} \times (\log 2 + \log 3)$
 $= \frac{1}{2} \times (0.3010 + 0.4771)$
 $= 0.38905$

답 (1) 0.3980 (2) 0.0791 (3) 0.38905

080

$\log N = n + \log a$ (n 은 정수, $0 \leq \log a < 1$)의 꼴로 나타내면

- (1) $\log N = 6 + 0.8733$
 $= \log 10^6 + \log 7.47$
 $= \log (10^6 \times 7.47)$
 $= \log 7470000$
 $\therefore N = 7470000$
- (2) $\log N = -0.1267$
 $= -1 + (1 - 0.1267)$
 $= -1 + 0.8733$
 $= \log 10^{-1} + \log 7.47$
 $= \log (10^{-1} \times 7.47)$
 $= \log 0.747$
 $\therefore N = 0.747$

답 (1) 7470000 (2) 0.747

082

- (1) $\log 5^{100} = 100 \log 5 = 100 \log \frac{10}{2}$
 $= 100(\log 10 - \log 2)$
 $= 100 \times (1 - 0.3010)$
 $= 100 \times 0.6990 = 69.90$
 정수 부분이 69이므로 70자리 정수이다.
- (2) $\log \frac{3}{5} = \log \frac{6}{10} = \log 6 - \log 10$
 $= (\log 2 + \log 3) - 1$
 $= (0.3010 + 0.4771) - 1$
 $= -0.2219$
 $\therefore \log \left(\frac{3}{5}\right)^{10} = 10 \log \frac{3}{5} = -2.219$
 $= -3 + 0.781$
 정수 부분이 -3이므로 소수점 아래 셋째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.
- (3) $\log (2^{20} \times 5^{10}) = \log 2^{20} + \log 5^{10}$
 $= 20 \log 2 + 10 \log 5$
 $= 20 \log 2 + 10 \log \frac{10}{2}$
 $= 20 \log 2 + 10(\log 10 - \log 2)$
 $= 20 \times 0.3010 + 10 \times 0.6990$
 $= 6.020 + 6.990 = 13.010$
 정수 부분이 13이므로 14자리 정수이다.

답 (1) 70자리 (2) 소수점 아래 셋째 자리
 (3) 14자리

참고

(2) 계산기로 계산해 보면 $\left(\frac{3}{5}\right)^{10} = 0.0060466176$

084

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{4}{3}\right)^{10} &= 10 \log \frac{4}{3} \\ &= 10(\log 4 - \log 3) \\ &= 10(2 \log 2 - \log 3) \\ &= 10 \times (2 \times 0.3010 - 0.4771) \\ &= 10 \times 0.1249 = 1.249\end{aligned}$$

이때 소수 부분은 0.249이고, 0.249는 $\log 1 = 0$ 과

$\log 2 = 0.3010$ 사이의 수이므로

$\log 1 < (\text{소수 부분}) < \log 2$

따라서 최고 자리의 숫자는 1이다.

답 1

086

$\log x$ 와 $\log \frac{1}{x}$ 의 소수 부분이 같다.

$$\Rightarrow \log x - \log \frac{1}{x} = (\text{정수})$$

$$\therefore 2 \log x = (\text{정수})$$

$1 \leq x < 10$ 의 각 변에 상용로그를 취하면

$$0 \leq \log x < 1$$

$$\therefore 0 \leq 2 \log x < 2$$

$2 \log x$ 는 정수이므로

$$2 \log x = 0 \text{ 또는 } 2 \log x = 1$$

$$2 \log x = 0 \text{ 일 때, } \log x = 0 \text{ 에서 } x = 1$$

$$2 \log x = 1 \text{ 일 때, } \log x = \frac{1}{2} \text{ 에서 } x = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = \sqrt{10}$$

$$\text{답 } x = 1 \text{ 또는 } x = \sqrt{10}$$

088

현재의 국민 소득을 a 라 하면 n 년 후의 국민 소득은

$$a(1+0.07)^n$$

국민 소득이 현재의 2배이므로

$$a(1+0.07)^n \geq 2a$$

$$1.07^n \geq 2 \text{ 의 양변에 상용로그를 취하면}$$

$$\log 1.07^n \geq \log 2$$

$$n \log 1.07 \geq \log 2, \quad n \times 0.0294 \geq 0.3010$$

$$\therefore n \geq 10. \dots$$

따라서 국민 소득이 현재의 2배 이상이 되는 것은 11년 후부터이다.

답 11년 후

090

10분이 n 번 지나면 10×2^n 마리가 되므로

$$10 \times 2^n = 10^{10} \text{ 에서 } 2^n = 10^9$$

양변에 상용로그를 취하면

$$n \log 2 = 9$$

$$0.3n = 9 \quad \therefore n = \frac{9}{0.3} = 30$$

따라서 10분을 30번 지나야 하므로

$$\frac{10 \times 30}{60} = 5$$

에서 5시간이 걸린다.

답 5시간

092

$$t = \frac{1}{k} \log_2 \frac{T - T_s}{T_0 - T_s} \text{ 에 } T_s = 20, T_0 = 50, t = 5, T = 35 \text{ 를}$$

대입하면

$$5 = \frac{1}{k} \log_2 \frac{35 - 20}{50 - 20}, \quad 5 = \frac{1}{k} \log_2 \frac{1}{2}$$

$$5k = \log_2 2^{-1} = -1 \quad \therefore k = -\frac{1}{5}$$

$$\text{답 } -\frac{1}{5}$$

필수 확인 문제

45쪽

093

$$\log \frac{12}{5} = \log 12 - \log 5$$

$$= \log (2^2 \times 3) - \log \frac{10}{2}$$

$$= 2 \log 2 + \log 3 - \log 10 + \log 2$$

$$= 3 \log 2 + \log 3 - 1$$

$$= 3 \times 0.3010 + 0.4771 - 1$$

$$= 0.3801$$

답 0.3801

094

$$\log x = 2.8820 = 0.8820 + 2$$

$$= \log 7.62 + \log 10^2$$

$$= \log (7.62 \times 10^2)$$

$$= \log 762$$

$$\therefore x = 762$$

답 762

095

$$\log x^2 - \log \frac{1}{x} = (\text{정수})$$

$$\therefore 3 \log x = (\text{정수})$$

$100 \leq x < 1000$ 의 각 변에 상용로그를 취하면

$$2 \leq \log x < 3 \quad \therefore 6 \leq 3 \log x < 9$$

$3 \log x$ 는 정수이므로

$$3 \log x = 6 \text{ 또는 } 3 \log x = 7 \text{ 또는 } 3 \log x = 8$$

$$3 \log x = 6 \text{ 일 때, } \log x = 2 \text{ 에서 } x = 10^2 = 100$$

$$3 \log x = 7 \text{ 일 때, } \log x = \frac{7}{3} \text{ 에서 } x = 10^{\frac{7}{3}}$$

$$3 \log x = 8 \text{ 일 때, } \log x = \frac{8}{3} \text{ 에서 } x = 10^{\frac{8}{3}}$$

따라서 모든 실수 x 의 값의 곱은

$$100 \times 10^{\frac{7}{3}} \times 10^{\frac{8}{3}} = 10^{2 + \frac{7}{3} + \frac{8}{3}} = 10^7$$

$$\therefore k = 7$$

답 7

096

$$v = 100 \log d + 75 \text{ 에서 } v = 275 \text{ 이므로}$$

$$275 = 100 \log d + 75, \quad 100 \log d = 200$$

$$\log d = 2 \quad \therefore d = 10^2 = 100 \text{ (km)}$$

답 100 km

097

감소율을 r 라 하면 농도가 10인 물을 n 번 통과시킨 후의 농도는 $10(1-r)^n$ 이므로

$$10(1-0.09)^n$$

1 이하의 농도가 되어야 하므로

$$10(1-0.09)^n \leq 1$$

$10 \times 0.91^n \leq 1$ 의 양변에 상용로그를 취하면

$$\log 10 + n \log 0.91 \leq \log 1$$

이때

$$\log 0.91 = \log \frac{9.1}{10} = \log 9.1 - \log 10$$

$$= 0.9590 - 1 = -0.041$$

이므로 ㉔을 ㉓에 대입하면 $1 - 0.041n \leq 0$

$$\therefore n \geq 24. \dots$$

따라서 적어도 25번 이상 통과시켜야 한다.

답 25번

098

$$\log 10 < \log 20 < \log 100 \text{ 에서 } 1 < \log 20 < 2$$

이때 $\log 20$ 의 정수 부분은 1이므로 $x = 1$

$$y = \log 20 - 1 = \log \frac{20}{10} = \log 2$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{10^x - 10^{-x}}{10^y + 10^{-y}} &= \frac{10^1 - 10^{-1}}{10^{\log 2} + 10^{-\log 2}} \\ &= \frac{10 - \frac{1}{10}}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{99}{10}}{\frac{5}{2}} = \frac{99}{25} \end{aligned}$$

답 $\frac{99}{25}$

● 실전 연습문제

47~49쪽

099

-27 의 세제곱근은 방정식 $x^3 = -27$ 의 근이므로

$$x^3 + 27 = 0, \quad (x+3)(x^2 - 3x + 9) = 0$$

$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = \frac{3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$$

이 중에서 실수인 것은 -3 이므로 $a = -3$

10000 의 네제곱근은 방정식 $x^4 = 10000$ 의 근이므로

$$x^4 - 10000 = 0, \quad (x^2 - 100)(x^2 + 100) = 0$$

$$\therefore x = \pm 10 \text{ 또는 } x = \pm 10i$$

이 중에서 실수인 것은 ± 10 이므로 $b = \pm 10$

$$\therefore a + b^2 = -3 + 100 = 97$$

답 97

100

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[4]{32}}{\sqrt[6]{4}} &= \frac{2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{5}{4}}}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{2^{\frac{1}{3} + \frac{5}{4}}}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{2^{\frac{19}{12}}}{2^{\frac{1}{2}}} \\ &= 2^{\frac{19}{12} - \frac{6}{12}} = 2^{\frac{13}{12}} = \sqrt[12]{2^{13}} = \sqrt[12]{2^2 \times 2^{11}} = \sqrt[12]{2^2 \times 2^{11}} \end{aligned}$$

답 ②

다른 풀이

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[4]{32}}{\sqrt[6]{4}} &= \frac{2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{5}{4}}}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{2^{\frac{1}{6}} \times 2^{\frac{5}{12}}}{2^{\frac{1}{3}}} \\ &= 2^{\frac{1}{6} + \frac{5}{12} - \frac{1}{3}} = 2^{\frac{2+5-4}{12}} \\ &= 2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2} \end{aligned}$$

101

밑이 음수이고 지수가 분수일 때는 지수법칙을 쓸 수 없다. 따라서 ㉔의 $\{(-2)^2\}^{\frac{3}{2}} = (-2)^3$ 이 처음으로 잘못되었다.

답 ④

102

$$243^{\frac{3}{n}} = (3^5)^{\frac{3}{n}} = 3^{\frac{15}{n}}$$

따라서 $243^{\frac{3}{n}}$ 이 자연수가 되도록 하는 정수 n 은 15의 양의 약수이다.

즉, n 은 1, 3, 5, 15이므로 그 합은

$$1+3+5+15=24$$

답 24

+ 풍산자 비법

자연수 a 가 소수일 때, $a^{\frac{n}{m}}$ 이 자연수가 되려면 n 이 m 의 배수(또는 m 은 n 의 양의 약수)이어야 한다.

(단, m, n 은 자연수이다.)

103

$a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}} = 2$ 의 양변을 제곱하면

$$a - 2 + a^{-1} = 4 \quad \therefore a + a^{-1} = 6$$

$a + a^{-1} = 6$ 의 양변을 제곱하면

$$a^2 + 2 + a^{-2} = 36 \quad \therefore a^2 + a^{-2} = 34$$

$$\therefore \frac{a^2 + a^{-2} - 7}{a + a^{-1} - 3} = \frac{34 - 7}{6 - 3} = \frac{27}{3} = 9$$

답 9

104

$x = \log_3(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ 에서

$$3^x = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore 3^x + 3^{-x} &= (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \\ &= (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{3} + \sqrt{2}) \\ &= 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

답 ⑤

105

$$3a + 2b = \log_3 32 = \log_3 2^5 = 5 \log_3 2,$$

$$ab = \log_9 2 = \log_{3^2} 2 = \frac{1}{2} \log_3 2$$

이므로

$$\begin{aligned} \frac{1}{3a} + \frac{1}{2b} &= \frac{3a + 2b}{6ab} = \frac{5 \log_3 2}{6 \times \frac{1}{2} \log_3 2} \\ &= \frac{5 \log_3 2}{3 \log_3 2} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

답 ④

106

(1) (주어진 식)

$$\begin{aligned} &= \log_2 \frac{1}{2} + \log_2 \frac{2}{3} + \log_2 \frac{3}{4} + \cdots + \log_2 \frac{63}{64} \\ &= \log_2 \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{63}{64} \right) \\ &= \log_2 \frac{1}{64} \\ &= \log_2 2^{-6} = -6 \end{aligned}$$

(2) (주어진 식)

$$\begin{aligned} &= \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} \times \frac{\log_{10} 4}{\log_{10} 3} \times \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 4} \times \frac{\log_{10} 6}{\log_{10} 5} \\ &\quad \times \frac{\log_{10} 7}{\log_{10} 6} \times \frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 7} \\ &= \frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 2} = \log_2 8 \\ &= \log_2 2^3 = 3 \end{aligned}$$

답 (1) -6 (2) 3

107

$$\begin{aligned} &(81^{\log_5 2})^{\log_4 5} + 8^{\log_{\sqrt{3}} 6 - \log_3 4} \\ &= 81^{\log_5 2 \times \log_4 5} + 8^{2 \log_3 6 - \log_3 4} \\ &= 81^{\frac{\log_2 2}{\log_2 5} \times \frac{\log_2 5}{2 \log_2 2}} + 8^{\log_3 \frac{36}{4}} \\ &= 81^{\frac{1}{2}} + 8^2 = 9 + 64 = 73 \end{aligned}$$

답 73

108

$4 < 7 < 8$ 에서 $\log_2 4 < \log_2 7 < \log_2 8$

$$2 < \log_2 7 < 3$$

$$\therefore \log_2 7 = 2. \cdots$$

즉, $\log_2 7$ 의 정수 부분은 2이므로 $a = 2$

$\log_2 7$ 의 소수 부분은 $\log_2 7$ 에서 정수 부분을 뺀 수이므로

$$\log_2 7 - 2 = \log_2 7 - \log_2 4 = \log_2 \frac{7}{4}$$

$$\therefore b = \log_2 \frac{7}{4}$$

$$\begin{aligned} \therefore 3^a + 2^b &= 3^2 + 2^{\log_2 \frac{7}{4}} \\ &= 9 + \frac{7}{4} = \frac{43}{4} \end{aligned}$$

답 $\frac{43}{4}$

109

$$\begin{aligned} &\log(619 \times 0.00619) \\ &= \log 619 + \log 0.00619 \\ &= \log(6.19 \times 10^2) + \log(6.19 \times 10^{-3}) \\ &= \log 6.19 + \log 10^2 + \log 6.19 + \log 10^{-3} \\ &= k + 2 + k - 3 \\ &= 2k - 1 \end{aligned}$$

답 ③

110

100개의 자료를 처리할 때의 시간복잡도 T_1 은

$$\begin{aligned} \frac{T_1}{100} &= \log 100 = \log 10^2 = 2 \\ \therefore T_1 &= 200 \end{aligned}$$

1000개의 자료를 처리할 때의 시간복잡도 T_2 는

$$\frac{T_2}{1000} = \log 1000 = \log 10^3 = 3$$

$$\therefore T_2 = 3000$$

$$\therefore \frac{T_2}{T_1} = \frac{3000}{200} = 15$$

답 ①

111

$7n - n^2 - 10$ 의 n 제곱근 중 실수인 것이 2개 존재하려면 $7n - n^2 - 10 > 0$ 이고 n 이 짝수이어야 한다.

$$n^2 - 7n + 10 < 0, (n-2)(n-5) < 0$$

$$\therefore 2 < n < 5$$

이때 n 은 짝수이므로

$$n = 4$$

답 4

112

$$(i) \sqrt{\frac{2^a \times 5^b}{2}} = \sqrt{2^{a-1} \times 5^b} = 2^{\frac{a-1}{2}} \times 5^{\frac{b}{2}}$$

위의 수가 자연수이므로 $\frac{a-1}{2}, \frac{b}{2}$ 가 음이 아닌 정수이어야 한다.

$$\frac{a-1}{2} = m \text{이라 하면 } a = 2m + 1 \text{ (} m \text{은 음이 아닌}$$

정수)이므로 a 의 값이 될 수 있는 것은 1, 3, 5, ...

$$\text{또, } \frac{b}{2} = n \text{이라 하면 } b = 2n \text{ (} n \text{은 자연수)이므로}$$

b 의 값이 될 수 있는 것은 2, 4, 6, ...

$$(ii) \sqrt[3]{\frac{3^b}{2^{a+1}}} = \frac{\sqrt[3]{3^b}}{\sqrt[3]{2^{a+1}}} = \frac{3^{\frac{b}{3}}}{2^{\frac{a+1}{3}}}$$

위의 수가 유리수이므로 $\frac{a+1}{3}, \frac{b}{3}$ 가 음이 아닌 정수이어야 한다.

$$\frac{a+1}{3} = k \text{라 하면 } a = 3k - 1 \text{ (} k \text{는 자연수)이므로}$$

a 의 값이 될 수 있는 것은 2, 5, 8, ...

$$\frac{b}{3} = l \text{이라 하면 } b = 3l \text{ (} l \text{은 자연수)이므로}$$

b 의 값이 될 수 있는 것은 3, 6, 9, ...

(i), (ii)에서 a 의 최솟값은 5, b 의 최솟값은 6이므로

$a+b$ 의 최솟값은

$$5 + 6 = 11$$

답 ①

113

$\neg$ 은 옳다.

$$(a, b) = (a, \log_2 a) \text{에서 } b = \log_2 a \text{이므로}$$

$$\log_2 2a = \log_2 a + \log_2 2 = \log_2 a + 1 = b + 1$$

$$\therefore (2a, b+1) \in A$$

$\neg$ 도 옳다.

$$\left(\frac{a}{2}, b\right) = \left(\frac{a}{2}, \log_2 \frac{a}{2}\right) \text{에서 } b = \log_2 \frac{a}{2} \text{이므로}$$

$$\log_2 a = \log_2 \left(\frac{a}{2} \times 2\right) = \log_2 \frac{a}{2} + \log_2 2 = b + 1$$

$$\therefore (a, b+1) \in A$$

$\sqsubset$ 도 옳다.

$$(a, b) = (a, \log_2 a) \text{에서 } b = \log_2 a$$

$$(c, d) = (c, \log_2 c) \text{에서 } d = \log_2 c$$

$$\log_2 a^2 c = 2 \log_2 a + \log_2 c = 2b + d$$

$$\therefore (a^2 c, 2b + d) \in A$$

따라서 옳은 것은 $\neg, \neg, \sqsubset$ 이다.

답 ⑤

114

$$\begin{pmatrix} \log_3 18 & -\log_9 16 \\ \log 5 & \log a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \log_3 18 - \log_9 16 \\ 2 \log 5 + \log a \end{pmatrix}$$

$$\text{즉, } \begin{pmatrix} 2 \log_3 18 - \log_9 16 \\ 2 \log 5 + \log a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{에서 두 행렬이 서로}$$

같을 조건에 의하여

$$2 \log_3 18 - \log_9 16 = a \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$2 \log 5 + \log a = b \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$ 에서

$$2 \log_3 18 - \log_9 16 = \log_3 18^2 - \log_3 4$$

$$= \log_3 \frac{18^2}{4}$$

$$= \log_3 81 = 4$$

$$\therefore a = 4$$

$a = 4$ 를 $\textcircled{8}$ 에 대입하면

$$2 \log 5 + \log 4 = \log (5^2 \times 4) = \log 100 = 2$$

$$\therefore b = 2$$

$$\therefore a + b = 4 + 2 = 6$$

답 6

115

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_2 a + \log_2 b = 8, \log_2 a \times \log_2 b = 4$$

$$\log_a 4 + \log_b 4 = 2 \log_a 2 + 2 \log_b 2$$

$$= \frac{2}{\log_2 a} + \frac{2}{\log_2 b}$$

$$= \frac{2(\log_2 a + \log_2 b)}{\log_2 a \times \log_2 b}$$

$$= \frac{2 \times 8}{4} = 4$$

$$\begin{aligned}\log_a 4 \times \log_b 4 &= 2 \log_a 2 \times 2 \log_b 2 \\ &= 4 \times \frac{1}{\log_2 a} \times \frac{1}{\log_2 b} \\ &= 4 \times \frac{1}{4} = 1\end{aligned}$$

따라서 구하는 이차방정식은 $x^2 - 4x + 1 = 0$ 이므로

$$p=4, q=1$$

$$\therefore pq=4$$

답 4

참고 이차방정식의 작성

α, β 를 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

116

선분 PQ를 $t : 1$ 로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{t \log 8 - \log 3}{t+1} \right)$$

이 점이 원점이므로

$$\frac{t \log 8 - \log 3}{t+1} = 0$$

$$t \log 8 - \log 3 = 0$$

$$\therefore t = \frac{\log 3}{\log 8} = \log_8 3 = \log_{2^3} 3 = \frac{1}{3} \log_2 3$$

답 ①

참고 수직선 위의 선분의 내분점

수직선 위의 두 점 $A(x_1), B(x_2)$ 에 대하여 선분 AB를 $m : n$ ($m > 0, n > 0$)으로 내분하는 점의 좌표는

$$\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$$

2 지수함수와 로그함수

1 지수함수

51~59쪽

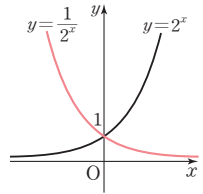
118

(1) $y = \frac{1}{2^x} = 2^{-x}$ 이므로 함수

$y = \frac{1}{2^x}$ 의 그래프는 함수

$y = 2^x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 것이다.

따라서 함수 $y = \frac{1}{2^x}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

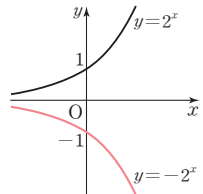


(2) $y = -2^x$ 에서 $-y = 2^x$ 이므로

함수 $y = -2^x$ 의 그래프는

함수 $y = 2^x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 것이다.

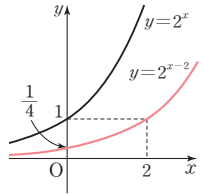
따라서 함수 $y = -2^x$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(3) 함수 $y = 2^{x-2}$ 의 그래프는 함수

$y = 2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

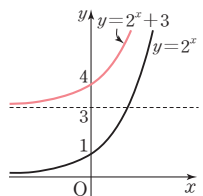
따라서 함수 $y = 2^{x-2}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(4) 함수 $y = 2^x + 3$ 의 그래프는

함수 $y = 2^x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수 $y = 2^x + 3$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



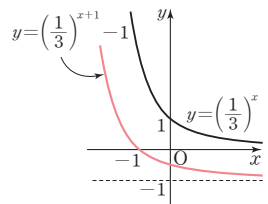
답 풀이 참조

120

함수 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} - 1$ 의

그래프는 함수 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 지역은 $\{y | y > -1\}$ 이고 점근선의 방정식은 $y = -1$ 이다. ▶ 풀이 참조

122

함수 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-m} + n \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편, $y = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x - \frac{1}{2}$ 에서

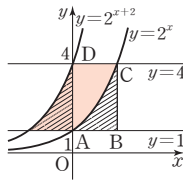
$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^x - \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} - \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 이 일치해야 하므로

$$m=2, n=-\frac{1}{2} \quad \therefore mn=-1 \quad \text{답 } -1$$

124

함수 $y=2^{x+2}$ 의 그래프는 함수 $y=2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이는 같다.



따라서 구하는 넓이는 직사각형 ABCD의 넓이와 같으므로 구하는 넓이는

$$2 \times (4-1) = 6 \quad \text{답 } 6$$

+ 풍산자 비법

두 지수함수의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는 평행이동을 이용하여 넓이가 똑같은 부분을 찾는다. 이때 잘라 붙여 넓이를 구할 수 있는 도형으로 만드는 것이 핵심이다.

126

(1) $\sqrt[5]{3}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{0.5}$, $\sqrt[4]{9}$ 를 밑이 3인 거듭제곱의 꼴로 나타내면

$$\sqrt[5]{3} = 3^{\frac{1}{5}}, \left(\frac{1}{3}\right)^{0.5} = 3^{-\frac{1}{2}}, \sqrt[4]{9} = \sqrt[4]{3^2} = 3^{\frac{1}{2}}$$

$-\frac{1}{2} < \frac{1}{5} < \frac{1}{2}$ 이고 함수 $y=3^x$ 은 x 의 값이 증가할

때 y 의 값도 증가하므로

$$3^{-\frac{1}{2}} < 3^{\frac{1}{5}} < 3^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \left(\frac{1}{3}\right)^{0.5} < \sqrt[5]{3} < \sqrt[4]{9}$$

(2) 0.5^2 , $\sqrt[9]{0.5^{10}}$, $\sqrt[6]{\frac{1}{16}}$ 을 밑이 0.5인 거듭제곱의 꼴로

나타내면

$$0.5^2, \sqrt[9]{0.5^{10}} = 0.5^{\frac{10}{9}},$$

$$\sqrt[6]{\frac{1}{16}} = \sqrt[6]{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = \sqrt[6]{0.5^4} = 0.5^{\frac{2}{3}}$$

$\frac{2}{3} < \frac{10}{9} < 2$ 이고 함수 $y=0.5^x$ 은 x 의 값이 증가할 때 y 의 값은 감소하므로

$$0.5^{\frac{2}{3}} > 0.5^{\frac{10}{9}} > 0.5^2$$

$$\therefore 0.5^2 < \sqrt[9]{0.5^{10}} < \sqrt[6]{\frac{1}{16}}$$

$$\text{답 } (1) \left(\frac{1}{3}\right)^{0.5} < \sqrt[5]{3} < \sqrt[4]{9}$$

$$(2) 0.5^2 < \sqrt[9]{0.5^{10}} < \sqrt[6]{\frac{1}{16}}$$

128

(1) $y=2^{x+2}-1$ 의 밑이 2이고 $2 > 1$ 이므로

$-2 \leq x \leq 1$ 에서 함수 $y=2^{x+2}-1$ 은

$x=1$ 일 때 최대이고, 최댓값은

$$2^{1+2}-1=7$$

$x=-2$ 일 때 최소이고, 최솟값은

$$2^{-2+2}-1=0$$

(2) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}+2$ 의 밑이 $\frac{1}{3}$ 이고 $0 < \frac{1}{3} < 1$ 이므로

$-1 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}+2$ 는

$x=-1$ 일 때 최대이고, 최댓값은

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1-1}+2=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}+2=9+2=11$$

$x=2$ 일 때 최소이고, 최솟값은

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2-1}+2=\frac{1}{3}+2=\frac{7}{3}$$

$$\text{답 } (1) \text{ 최댓값: } 7, \text{ 최솟값: } 0$$

$$(2) \text{ 최댓값: } 11, \text{ 최솟값: } \frac{7}{3}$$

130

(1) $y=9^x-2 \times 3^x-3=(3^x)^2-2 \times 3^x-3$ 이므로

$3^x=t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$y=t^2-2t-3=(t-1)^2-4$$

이때 $0 \leq x \leq 1$ 이고, $3 > 1$ 이므로

$$3^0 \leq 3^x \leq 3^1$$

$$\therefore 1 \leq t \leq 3$$

따라서 $1 \leq t \leq 3$ 에서 함수

$$y = (t-1)^2 - 4$$

$t=3$ 일 때 최대이고, 최댓값은

$$(3-1)^2 - 4 = 0$$

$t=1$ 일 때 최소이고, 최솟값은

$$(1-1)^2 - 4 = -4$$

$$(2) y = \left(\frac{1}{4}\right)^x - \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} + 5 = \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2 - 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x + 5$$

이므로

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = t \quad (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$y = t^2 - 4t + 5 = (t-2)^2 + 1$$

이때 $-2 \leq x \leq 0$ 이고, $0 < \frac{1}{2} < 1$ 이므로

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^x \geq \left(\frac{1}{2}\right)^0$$

$$\therefore 1 \leq t \leq 4$$

따라서 $1 \leq t \leq 4$ 에서 함수

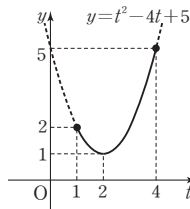
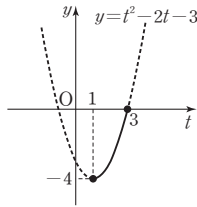
$$y = (t-2)^2 + 1$$

$t=4$ 일 때 최대이고, 최댓값은

$$(4-2)^2 + 1 = 5$$

$t=2$ 일 때 최소이고, 최솟값은

$$(2-2)^2 + 1 = 1$$



답 (1) 최댓값: 0, 최솟값: -4

(2) 최댓값: 5, 최솟값: 1

132

함수 $y = 2^{-x^2+4x-7}$ 에서 밑이 2이고 $2 > 1$ 이므로

$-x^2+4x-7$ 이 최대일 때 y 도 최대,

$-x^2+4x-7$ 이 최소일 때 y 도 최소가 된다.

$$-x^2+4x-7 = -(x-2)^2 - 3 \text{이므로}$$

$-x^2+4x-7$ 의 최댓값은 -3이고, 최솟값은 없다.

따라서 함수 $y = 2^{-x^2+4x-7}$ 의 최댓값은 $2^{-3} = \frac{1}{8}$ 이고,

최솟값은 없다.

답 최댓값: $\frac{1}{8}$, 최솟값: 없다.

134

$$(1) 4^x + 2^y = 2^{2x} + 2^y$$

$2^{2x} > 0$, $2^y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2^{2x} + 2^y \geq 2\sqrt{2^{2x} \times 2^y}$$

$$= 2\sqrt{2^{2x+y}} = 2\sqrt{2^6} = 2 \times 2^3 = 16$$

(단, 등호는 $2^{2x} = 2^y$, 즉 $2x = y$ 일 때 성립한다.)

따라서 $4^x + 2^y$ 의 최솟값은 16이다.

(2) $5^{a+x} > 0$, $5^{a-x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$5^{a+x} + 5^{a-x} \geq 2\sqrt{5^{a+x} \times 5^{a-x}} \\ = 2\sqrt{5^{2a}} = 2 \times 5^a$$

(단, 등호는 $5^{a+x} = 5^{a-x}$, 즉 $x=0$ 일 때 성립한다.)

따라서 함수 $y = 5^{a+x} + 5^{a-x}$ 의 최솟값은 2×5^a 이므로

$$2 \times 5^a = 10, 5^a = 5 \quad \therefore a = 1$$

답 (1) 16 (2) 1

참고 산술평균과 기하평균의 관계

$a + b \geq 2\sqrt{ab}$ 를 이용할 때는 $a > 0$, $b > 0$ 임을 반드시 확인해야 한다.

필수 확인 문제

60쪽

135

$a < b$ 일 때 $f(a) > f(b)$ 를 만족시키는 함수는 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소하는 함수이다.

즉, $0 < (\text{밑}) < 1$ 이어야 한다.

이때 $0 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$ 이므로 주어진 조건을 만족시키는 것은

⑤이다.

답 ⑤

참고

$$\textcircled{1} f(x) = (0.5)^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} = 2^x$$

136

$A = 0.5^{-\frac{1}{2}}$, $B = 4^{\frac{5}{6}}$, $C = 2^{1.5}$ 을 밑이 2인 거듭제곱의 꼴로 나타내면

$$A = 0.5^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}}$$

$$B = 4^{\frac{5}{6}} = (2^2)^{\frac{5}{6}} = 2^{\frac{5}{3}}$$

$$C = 2^{1.5} = 2^{\frac{3}{2}}$$

$\frac{1}{2} < \frac{3}{2} < \frac{5}{3}$ 이고 함수 $y = 2^x$ 은 x 의 값이 증가할 때 y 의 값도 증가하므로

$$2^{\frac{1}{2}} < 2^{\frac{3}{2}} < 2^{\frac{5}{3}}, \text{ 즉 } 0.5^{-\frac{1}{2}} < 2^{1.5} < 4^{\frac{5}{6}}$$

$$\therefore A < C < B$$

답 ②

137

$0 < b < a < 1$ 에서 함수 $y = a^x$ 은 x 의 값이 증가할 때 y 의 값은 감소하므로 $a^a < a^b$

또, $b < a$ 에서 $b^a < a^a$

$\therefore b^a < a^a < a^b$

답 ④

138

$y = 9^{-x} - 4 \times 3^{-x} + a = \left\{ \left(\frac{1}{3} \right)^x \right\}^2 - 4 \times \left(\frac{1}{3} \right)^x + a$ 이므로

$\left(\frac{1}{3} \right)^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$y = t^2 - 4t + a = (t-2)^2 + a - 4$$

이때 $-1 \leq x \leq 0$ 이고 $0 < \frac{1}{3} < 1$ 이므로

$$\left(\frac{1}{3} \right)^0 \leq \left(\frac{1}{3} \right)^x \leq \left(\frac{1}{3} \right)^{-1}$$

$$\therefore 1 \leq t \leq 3$$

따라서 $1 \leq t \leq 3$ 에서 함수

$y = (t-2)^2 + a - 4$ 의 그래프

는 오른쪽 그림과 같다.

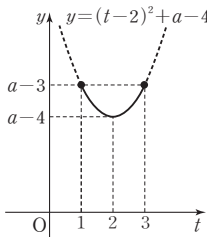
즉, $t=2$ 일 때 y 의 최솟값이 3

이므로

$$a - 4 = 3 \quad \therefore a = 7$$

또, y 의 값은 $t=1$ 또는 $t=3$ 일 때 최대이므로 최댓값은

$$a - 3 = 7 - 3 = 4$$



답 $a=7$, 최댓값: 4

139

$$(\text{지수}) = -x^2 + 2x + 3 = -(x-1)^2 + 4$$

이므로 최솟값은 없고, 최댓값은 4이다.

이때 주어진 조건에서 함수 $y = a^{-x^2+2x+3}$ 의 최댓값이 16이므로

$$a^4 = 16, a^4 - 16 = 0$$

$$(a-2)(a+2)(a^2+4) = 0$$

$$\therefore a = 2 \quad (\because a > 0)$$

답 2

140

함수 $y = 2^{x+1} - 2$ 의 그래프는

함수 $y = 2^x$ 의 그래프를 x 축의

방향으로 -1 만큼, y 축의 방

향으로 -2 만큼 평행이동한

것이고, 함수 $y = |2^{x+1} - 2|$

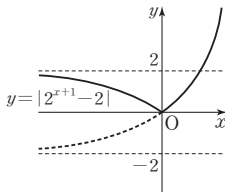
의 그래프는 오른쪽 그림과

같다.

따라서 함수 $y = |2^{x+1} - 2|$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 가 한 점에서 만나려면 $k \geq 2$ 이어야 한다.

즉, 자연수 k 의 최솟값은 2이다.

답 2



참고

함수 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$)의 그래프에 대하여

① $y = a^{|x|}$ 의 그래프는 $x \geq 0$ 인 부분은 그대로, $x < 0$ 인

부분은 $x \geq 0$ 인 부분을 y 축에 대하여 대칭으로 그린다.

② $|y| = a^x$ 의 그래프는 $y \geq 0$ 인 부분은 그대로, $y < 0$ 인

부분은 $y \geq 0$ 인 부분을 x 축에 대하여 대칭으로 그린다.

2 지수방정식과 지수부등식

61~67쪽

142

(1) $8^x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 에서 $2^{3x} = 2^{-\frac{1}{2}}$ 이므로

$$3x = -\frac{1}{2} \quad \therefore x = -\frac{1}{6}$$

(2) $\left(\frac{3}{5} \right)^{2x} = \left(\frac{5}{3} \right)^{-4x+6}$ 에서 $\left(\frac{3}{5} \right)^{2x} = \left(\frac{3}{5} \right)^{-(-4x+6)}$ 이므로

$$2x = -(-4x+6), 2x = 6 \quad \therefore x = 3$$

답 (1) $x = -\frac{1}{6}$ (2) $x = 3$

144

(1) $x^{2x-1} = x^{x+3}$ 에서

$$2x-1 = x+3 \quad \therefore x = 4$$

또, $x=1$ 이면 주어진 방정식은 $1^1 = 1^4 = 1$ 이므로 등식이 성립한다.

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 4$$

(2) $(x-2)^{x^2} = (x-2)^{5x}$ 에서

$$x^2 = 5x, x^2 - 5x = 0$$

$$x(x-5) = 0 \quad \therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 5$$

그런데 $x > 2$ 이므로 $x = 5$

또, $x-2=1$, 즉 $x=3$ 이면 주어진 방정식은

$$1^9 = 1^{15} = 1 \text{이므로 등식이 성립한다.}$$

$$\therefore x = 3 \text{ 또는 } x = 5$$

(3) $(x+1)^x = 7^x$ 에서

$$x+1 = 7 \quad \therefore x = 6$$

또, $x=0$ 이면 주어진 방정식은 $1^0 = 7^0 = 1$ 이므로 등식이 성립한다.

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 6$$

(4) $(2x-1)^{x-2} = (3x-4)^{x-2}$ 에서

$$2x-1 = 3x-4 \quad \therefore x = 3$$

또, $x-2=0$, 즉 $x=2$ 이면 주어진 방정식은

$$3^0 = 2^0 = 1 \text{이므로 등식이 성립한다.}$$

$$\therefore x=2 \text{ 또는 } x=3$$

$$\text{답 (1) } x=1 \text{ 또는 } x=4 \text{ (2) } x=3 \text{ 또는 } x=5$$

$$(3) x=0 \text{ 또는 } x=6 \text{ (4) } x=2 \text{ 또는 } x=3$$

146

$$(1) 9^x - 2 \times 3^{x+1} - 27 = 0 \text{에서}$$

$$(3^x)^2 - 6 \times 3^x - 27 = 0$$

$$3^x = t \ (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 6t - 27 = 0, (t+3)(t-9) = 0$$

$$\therefore t = -3 \text{ 또는 } t = 9$$

$$\text{이때 } t > 0 \text{이므로 } t = 9$$

$$\text{따라서 } 3^x = 9 \text{에서 } 3^x = 3^2 \text{이므로}$$

$$x = 2$$

$$(2) 2 - \sqrt{3} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \text{이므로}$$

$$(2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x = 4 \text{에서}$$

$$(2 + \sqrt{3})^x + \frac{1}{(2 + \sqrt{3})^x} = 4$$

$$(2 + \sqrt{3})^x = t \ (t > 0) \text{로 놓으면 } t + \frac{1}{t} = 4$$

$$\text{양변에 } t \text{를 곱하여 정리하면}$$

$$t^2 - 4t + 1 = 0 \quad \therefore t = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$(i) t = 2 + \sqrt{3} \text{ 일 때}$$

$$(2 + \sqrt{3})^x = 2 + \sqrt{3} \quad \therefore x = 1$$

$$(ii) t = 2 - \sqrt{3} \text{ 일 때}$$

$$(2 + \sqrt{3})^x = 2 - \sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^{-1}$$

$$\therefore x = -1$$

$$(i), (ii) \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

$$\text{답 (1) } x = 2 \text{ (2) } x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

148

$$4^x - 3 \times 2^{x+2} + 16 = 0 \text{에서}$$

$$(2^x)^2 - 12 \times 2^x + 16 = 0$$

$$2^x = t \ (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 12t + 16 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{방정식 } 4^x - 3 \times 2^{x+2} + 16 = 0 \text{의 두 근이 } \alpha, \beta \text{이므로 } \textcircled{1}$$

$$\text{의 두 근은 } 2^\alpha, 2^\beta \text{이다.}$$

$$\text{따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여}$$

$$2^\alpha \times 2^\beta = 16, 2^{\alpha+\beta} = 2^4 \quad \therefore \alpha + \beta = 4$$

$$\text{답 4}$$

참고

두 근 α, β 는 방정식 $4^x - 3 \times 2^{x+2} + 16 = 0$ 의 근이므로 $\alpha + \beta = 12$ 로 생각하지 않도록 주의한다.

150

25마리의 대장균이 20분 후에 150마리가 되므로

$$25a^{20} = 150, a^{20} = 6 \quad \therefore a = 6^{\frac{1}{20}}$$

따라서 한 마리의 대장균이 x 분 후 $6^{\frac{x}{20}}$ 마리가 되므로

25마리였던 대장균이 5400마리가 되려면

$$25 \times 6^{\frac{x}{20}} = 5400, 6^{\frac{x}{20}} = 216 = 6^3 \quad \therefore x = 60$$

즉, 60분 후에 5400마리가 된다.

$$\text{답 60분 후}$$

152

$$(1) 27^x < 3^{2x+5} \text{에서 } 3^{3x} < 3^{2x+5}$$

밑이 3이고 $3 > 1$ 이므로 $\leftarrow$ 부등호 방향 그대로

$$3x < 2x + 5 \quad \therefore x < 5$$

$$(2) \left(\frac{5}{7}\right)^{-2x^2+x} \leq \left(\frac{7}{5}\right)^{x^2-2x} \text{에서 } \left(\frac{7}{5}\right)^{2x^2-x} \leq \left(\frac{7}{5}\right)^{x^2-2x}$$

밑이 $\frac{7}{5}$ 이고 $\frac{7}{5} > 1$ 이므로 $\leftarrow$ 부등호 방향 그대로

$$2x^2 - x \leq x^2 - 2x, x^2 + x \leq 0$$

$$x(x+1) \leq 0 \quad \therefore -1 \leq x \leq 0$$

$$(3) \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} < 8 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^x \text{에서 } \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$$

밑이 $\frac{1}{2}$ 이고 $0 < \frac{1}{2} < 1$ 이므로 $\leftarrow$ 부등호 방향 반대로

$$x+1 > -3 \geq 2x$$

$$(i) x+1 > -3 \text{ 일 때, } x > -4$$

$$(ii) -3 \geq 2x \text{ 일 때, } x \leq -\frac{3}{2}$$

$$(i), (ii) \text{에서 } -4 < x \leq -\frac{3}{2}$$

$$\text{답 (1) } x < 5 \text{ (2) } -1 \leq x \leq 0$$

$$(3) -4 < x \leq -\frac{3}{2}$$

154

$$(1) (i) x > 1 \text{ 일 때, 부등호의 방향이 그대로이므로}$$

$$2x-1 > -x+5, 3x > 6$$

$$\therefore x > 2$$

$$\text{그런데 } x > 1 \text{이므로 } x > 2$$

$$(ii) 0 < x < 1 \text{ 일 때, 부등호의 방향이 바뀌므로}$$

$$2x-1 < -x+5, 3x < 6$$

$$\therefore x < 2$$

$$\text{그런데 } 0 < x < 1 \text{이므로 } 0 < x < 1$$

$$(iii) x = 1 \text{ 일 때, (좌변)} = 1^1 = 1, \text{ (우변)} = 1^4 = 1 \text{이므로 주어진 부등식이 성립하지 않는다.}$$

$$(i) \sim (iii) \text{에서 } 0 < x < 1 \text{ 또는 } x > 2$$

(2) (i) $x > 1$ 일 때, 부등호의 방향이 그대로이므로

$$x^2 - 4 \leq 3x$$

$$x^2 - 3x - 4 \leq 0, (x+1)(x-4) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq x \leq 4$$

그런데 $x > 1$ 이므로 $1 < x \leq 4$

(ii) $0 < x < 1$ 일 때, 부등호의 방향이 바뀌므로

$$x^2 - 4 \geq 3x$$

$$x^2 - 3x - 4 \geq 0, (x+1)(x-4) \geq 0$$

$$\therefore x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 4$$

그런데 $0 < x < 1$ 이므로 조건을 만족시키는 x 의 값은 없다.

(iii) $x = 1$ 일 때, (좌변) $= 1^{-3} = 1$, (우변) $= 1^3 = 1$ 이므로 주어진 부등식이 성립한다.

$$\therefore x = 1$$

(i) ~ (iii)에서 $1 \leq x \leq 4$

답 (1) $0 < x < 1$ 또는 $x > 2$ (2) $1 \leq x \leq 4$

156

$$(1) \left(\frac{1}{25}\right)^x - 21 \times \left(\frac{1}{5}\right)^x - 100 \geq 0 \text{에서}$$

$$\left\{\left(\frac{1}{5}\right)^x\right\}^2 - 21 \times \left(\frac{1}{5}\right)^x - 100 \geq 0$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^x = t \ (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 21t - 100 \geq 0, (t+4)(t-25) \geq 0$$

$$\therefore t \leq -4 \text{ 또는 } t \geq 25$$

이때 $t > 0$ 이므로 $t \geq 25$

$$\text{따라서 } \left(\frac{1}{5}\right)^x \geq 25 \text{ 이므로 } \left(\frac{1}{5}\right)^x \geq \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$$

$$\text{밀이 } \frac{1}{5} \text{ 이고 } 0 < \frac{1}{5} < 1 \text{ 이므로}$$

$$x \leq -2 \leftarrow \text{부등호 방향 반대로}$$

$$(2) 2 \times 4^x - 9 \times 2^x + 4 < 0 \text{에서}$$

$$2 \times (2^x)^2 - 9 \times 2^x + 4 < 0$$

$$2^x = t \ (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$2t^2 - 9t + 4 < 0, (2t-1)(t-4) < 0$$

$$\therefore \frac{1}{2} < t < 4$$

$$\text{따라서 } \frac{1}{2} < 2^x < 4 \text{ 이므로 } 2^{-1} < 2^x < 2^2$$

밀이 2이고 $2 > 1$ 이므로

$$-1 < x < 2 \leftarrow \text{부등호 방향 그대로}$$

$$(3) \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} + 8 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} - 81 > 0 \text{에서}$$

$$\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2 + 24 \times \left(\frac{1}{3}\right)^x - 81 > 0$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = t \ (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 + 24t - 81 > 0, (t+27)(t-3) > 0$$

$$\therefore t < -27 \text{ 또는 } t > 3$$

이때 $t > 0$ 이므로 $t > 3$

$$\text{따라서 } \left(\frac{1}{3}\right)^x > 3 \text{ 이므로 } \left(\frac{1}{3}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$$

$$\text{밀이 } \frac{1}{3} \text{ 이고 } 0 < \frac{1}{3} < 1 \text{ 이므로}$$

$$x < -1 \leftarrow \text{부등호 방향 반대로}$$

$$(4) 3^x - 2 \times 3^{-x+1} - 1 \leq 0 \text{에서}$$

$$3^x - 6 \times \frac{1}{3^x} - 1 \leq 0$$

$$3^x = t \ (t > 0) \text{로 놓으면 } t - \frac{6}{t} - 1 \leq 0$$

$$\text{양변에 } t \text{를 곱하면 } t^2 - t - 6 \leq 0$$

$$(t+2)(t-3) \leq 0 \quad \therefore -2 \leq t \leq 3$$

이때 $t > 0$ 이므로 $0 < t \leq 3$

$$\text{따라서 } 0 < 3^x \leq 3 \text{ 이므로 } 0 < 3^x \leq 3^1$$

밀이 3이고 $3 > 1$ 이므로

$$x \leq 1 \leftarrow \text{부등호 방향 그대로}$$

답 (1) $x \leq -2$ (2) $-1 < x < 2$

(3) $x < -1$ (4) $x \leq 1$

필수 확인 문제

68쪽

157

$$\frac{4^{x^2}}{8^{x+1}} = \frac{1}{16} \text{에서 } \frac{2^{2x^2}}{2^{3(x+1)}} = \frac{1}{2^4}, 2^{2x^2-3x-3} = 2^{-4} \text{ 이므로}$$

$$2x^2 - 3x - 3 = -4, 2x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$(2x-1)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = \frac{1}{2} \text{ 또는 } x = 1$$

답 $x = \frac{1}{2}$ 또는 $x = 1$

158

$$(x^x)^5 = x^{2x} \times x^9 \text{에서 } x^{5x} = x^{2x+9}$$

$$5x = 2x + 9, 3x = 9 \quad \therefore x = 3$$

또, $x = 1$ 이면 주어진 방정식은 $1^5 = 1^2 \times 1^9 = 1$ 이므로 등식이 성립한다.

따라서 모든 근의 합은

$$3 + 1 = 4$$

답 4

159

$$25^x - 7 \times 5^{x+1} + k = 0 \text{에서}$$

$$(5^x)^2 - 35 \times 5^x + k = 0$$

$$5^x = t \ (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 35t + k = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

방정식 $25^x - 7 \times 5^{x+1} + k = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면

$\alpha + \beta = 2$ 이고, $\textcircled{1}$ 의 두 근은 $5^\alpha, 5^\beta$ 이다.

따라서 이차방정식 $\textcircled{1}$ 의 근과 계수의 관계에 의하여

$$k = 5^\alpha \times 5^\beta = 5^{\alpha+\beta} = 5^2 = 25 \quad \text{답 25}$$

160

$$\left(\frac{1}{27}\right)^{x^2-5} \geq \left(\frac{1}{9}\right)^{2x} \text{에서} \left\{\left(\frac{1}{3}\right)^3\right\}^{x^2-5} \geq \left\{\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}^{2x}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{3x^2-15} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{4x}$$

밑이 $\frac{1}{3}$ 이고 $0 < \frac{1}{3} < 1$ 이므로

$$3x^2 - 15 \leq 4x \leftarrow \text{부등호 방향 반대로}$$

$$3x^2 - 4x - 15 \leq 0, (3x+5)(x-3) \leq 0$$

$$\therefore -\frac{5}{3} \leq x \leq 3$$

따라서 $M=3, m=-\frac{5}{3}$ 이므로

$$Mm = -5 \quad \text{답 -5}$$

161

$$25^x - 2 \times 5^{x+1} + k \geq 0 \text{에서}$$

$$(5^x)^2 - 10 \times 5^x + k \geq 0$$

$$5^x = t \ (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 10t + k \geq 0$$

$$\therefore (t-5)^2 + k - 25 \geq 0$$

$t > 0$ 에서 위의 부등식이 항상 성립하려면

$$k - 25 \geq 0 \quad \therefore k \geq 25$$

따라서 k 의 최솟값은 25이다. 답 25

162

처음 오염 물질의 양을 A 라 하면 한 장의 필터를 통과한 후 남은 오염 물질의 양은 $\frac{1}{8}A$ 이다.

즉, n 장의 필터를 통과한 후 남은 오염 물질의 양은

$$A\left(\frac{1}{8}\right)^n$$

남은 오염 물질의 양이 처음 오염 물질의 양의 $\frac{1}{256}$ 이 하가 되려면

$$A\left(\frac{1}{8}\right)^n \leq \frac{1}{256}A, \left(\frac{1}{2}\right)^{3n} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^8$$

밑이 $\frac{1}{2}$ 이고 $0 < \frac{1}{2} < 1$ 이므로 $3n \geq 8$

$$\therefore n \geq \frac{8}{3} = 2.\dots$$

따라서 최소 3장의 필터를 통과해야 한다.

답 3장

3 로그함수

69~80쪽

164

(1) $y=2^{3-x}$ 에 x 대신 y, y 대신 x 를 대입하면

$$x=2^{3-y}, 3-y=\log_2 x$$

$$\therefore y=3-\log_2 x$$

(2) $y=1-\log_{\frac{1}{3}}(1-x)$ 에 x 대신 y, y 대신 x 를 대입하면

$$x=1-\log_{\frac{1}{3}}(1-y)$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(1-y)=1-x$$

$$1-y=\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x} \quad \therefore y=1-\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x}$$

답 (1) $y=3-\log_2 x$ (2) $y=1-\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x}$

166

(1) 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+2)$ 의 그

래프는 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 의 그

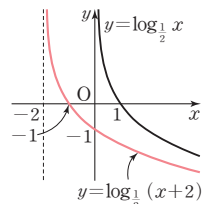
래프를 x 축의 방향으로 -2

만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수

$y=\log_{\frac{1}{2}}(x+2)$ 의 그래프는

오른쪽 그림과 같다.



(2) $y=\log_{\frac{1}{2}} 8x = \log_{\frac{1}{2}} 8 + \log_{\frac{1}{2}} x$

$$= \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} + \log_{\frac{1}{2}} x$$

$$= -3 + \log_{\frac{1}{2}} x$$

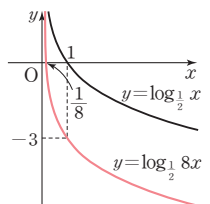
이므로 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} 8x$ 의

그래프는 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 의

그래프를 y 축의 방향으로

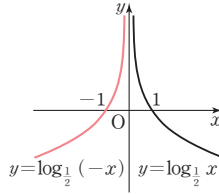
-3 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} 8x$ 의 그래프는 위의 그림과 같다. 답 풀이 참조



168

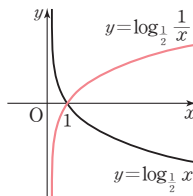
- (1) 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}}(-x)$ 의 그래프는 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}}x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 것이다.
따라서 $y = \log_{\frac{1}{2}}(-x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



- (2) $y = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{x} = \log_{\frac{1}{2}} x^{-1} = -\log_{\frac{1}{2}} x$

이므로 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{x}$ 의 그래프는 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 것이다.

따라서 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{x}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

170

- (1) 함수

$$y = \log_{\frac{1}{3}}(x+1) - 1$$

그래프는 함수

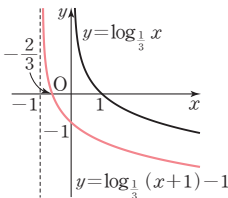
$$y = \log_{\frac{1}{3}} x$$

의 그래프를

x 축의 방향으로 -1 만큼

크, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이므로

위의 그림과 같다.
따라서 정의역은 $\{x | x > -1\}$ 이고 점근선의 방정식은 $x = -1$ 이다.



- (2) 함수 $y = \log_3(-x) - 1$ 의

그래프는 함수 $y = \log_3 x$ 의

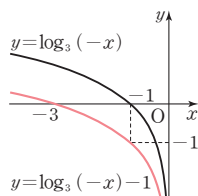
그래프를 y 축에 대하여 대칭

이동한 다음 y 축의 방향으로

-1 만큼 평행이동한 것이므로

오른쪽 그림과 같다.

따라서 정의역은 $\{x | x < 0\}$ 이고 점근선의 방정식은 $x = 0$ 이다.



답 풀이 참조

172

$$y = \log_{\frac{1}{2}} 2x = \log_{\frac{1}{2}} 2 + \log_{\frac{1}{2}} x = -1 + \log_{\frac{1}{2}} x$$

이므로 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}} 2x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \log_{\frac{1}{2}}(x-m) - 1 + n \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

한편, $y = \log_{\frac{1}{2}}(4x-8)$ 에서

$$y = \log_{\frac{1}{2}}(4x-8)$$

$$= \log_{\frac{1}{2}} 4(x-2)$$

$$= \log_{\frac{1}{2}} 4 + \log_{\frac{1}{2}}(x-2)$$

$$= \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \log_{\frac{1}{2}}(x-2)$$

$$= -2 + \log_{\frac{1}{2}}(x-2) \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 이 일치해야 하므로 $m=2$, $-1+n=-2$ 에서

$$n = -1$$

$$\therefore m+n=2+(-1)=1$$

답 1

174

오른쪽 그림에서 점 A는 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프 위의 점이므로 A(x_1 , 1)이라 하면 $\log_2 x_1 = 1$

$$\therefore x_1 = 2$$

즉, 점 A(2, 1)이므로 점 B의 좌표는 (2, p)

점 B는 함수 $y = 2^x$ 의 그래프 위의 점이므로

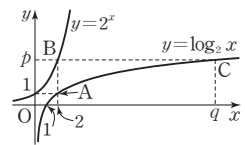
$$p = 2^2 = 4$$

따라서 점 C(q , 4)이고 점 C는 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프 위의 점이므로

$$4 = \log_2 q \quad \therefore q = 2^4 = 16$$

$$\therefore p+q=4+16=20$$

답 20



176

두 점 A, B의 x 좌표가 k 이므로

$$A(k, \log_2 k), B(k, \log_{\frac{1}{2}} k)$$

$$\overline{AB} = 4 \text{이므로 } \log_2 k - \log_{\frac{1}{2}} k = 4$$

$$\log_2 k + \log_2 k = 4, \log_2 k = 2$$

$$\therefore k = 2^2 = 4$$

답 4

다른 풀이

두 함수 $y = \log_2 x$, $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 의 그래프는 x 축에 대하여 대칭이므로 $\overline{AB} = 4$ 에서 x 축에서 점 A까지의 거리는 2이다.

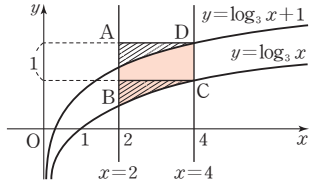
따라서 점 A의 y 좌표가 2이므로

$$\log_2 k = 2 \quad \therefore k = 2^2 = 4$$

178

함수 $y = \log_3 x + 1$ 의 그래프는 함수 $y = \log_3 x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 같으므로 구하는 넓이는 직사각형 ABCD의 넓이와 같다.



$\overline{BC}=2$, $\overline{CD}=1$ 이므로 구하는 넓이는

$$\square ABCD = (4-2) \times 1 = 2$$

답 2

+ 풍산자 방법

지수함수와 마찬가지로 두 로그함수의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는 평행이동을 이용하여 잘라 붙여 넓이를 구할 수 있는 도형으로 만드는 것이 핵심이다.

180

(1) 밑을 3으로 통일시키면

$$\log_3 2$$

$$\log_{\frac{1}{3}} 0.2 = \log_{3^{-1}} \frac{1}{5} = \log_{3^{-1}} 5^{-1} = \log_3 5$$

$$1 = \log_3 3$$

$2 < 3 < 5$ 이고 함수 $y = \log_3 x$ 는 x 의 값이 증가할 때 y 의 값도 증가하므로

$$\log_3 2 < \log_3 3 < \log_3 5$$

$$\therefore \log_3 2 < 1 < \log_{\frac{1}{3}} 0.2$$

(2) 밑을 $\frac{1}{2}$ 로 통일시키면

$$2 \log_{\frac{1}{2}} 3 = \log_{\frac{1}{2}} 3^2 = \log_{\frac{1}{2}} 9$$

$$\frac{1}{3} \log_{\frac{1}{2}} 27 = \log_{\frac{1}{2}} 27^{\frac{1}{3}} = \log_{\frac{1}{2}} (3^3)^{\frac{1}{3}} = \log_{\frac{1}{2}} 3$$

$$3 \log_{\frac{1}{2}} 2 = \log_{\frac{1}{2}} 2^3 = \log_{\frac{1}{2}} 8$$

$3 < 8 < 9$ 이고 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 는 x 의 값이 증가할 때 y 의 값은 감소하므로

$$\log_{\frac{1}{2}} 3 > \log_{\frac{1}{2}} 8 > \log_{\frac{1}{2}} 9$$

$$\therefore 2 \log_{\frac{1}{2}} 3 < 3 \log_{\frac{1}{2}} 2 < \frac{1}{3} \log_{\frac{1}{2}} 27$$

$$\text{답 (1) } \log_3 2 < 1 < \log_{\frac{1}{3}} 0.2$$

$$(2) 2 \log_{\frac{1}{2}} 3 < 3 \log_{\frac{1}{2}} 2 < \frac{1}{3} \log_{\frac{1}{2}} 27$$

182

(1) $y = \log_3(x+5)$ 의 밑이 3이고 $3 > 1$ 이므로

$-2 \leq x \leq 4$ 에서 함수 $y = \log_3(x+5)$ 는

$x=4$ 일 때 최대이고, 최댓값은

$$y = \log_3(4+5) = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$$

$x=-2$ 일 때 최소이고, 최솟값은

$$y = \log_3(-2+5) = \log_3 3 = 1$$

(2) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x-2) + 1$ 의 밑이 $\frac{1}{2}$ 이고 $0 < \frac{1}{2} < 1$ 이므로

$3 \leq x \leq 6$ 에서 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x-2) + 1$ 은

$x=3$ 일 때 최대이고, 최댓값은

$$y = \log_{\frac{1}{2}}(3-2) + 1 = \log_{\frac{1}{2}} 1 + 1 = 0 + 1 = 1$$

$x=6$ 일 때 최소이고, 최솟값은

$$\log_{\frac{1}{2}}(6-2) + 1 = \log_{\frac{1}{2}} 4 + 1 = \log_{2^{-1}} 2^2 + 1$$

$$= -2 + 1 = -1$$

답 (1) 최댓값: 2, 최솟값: 1

(2) 최댓값: 1, 최솟값: -1

184

함수 $y = \log_5(-x^2 + 6x + 16)$ 에서 밑이 5이고 $5 > 1$ 이므로 $-x^2 + 6x + 16$ 이 최대일 때 y 는 최대가 된다.

$$-x^2 + 6x + 16 = -(x-3)^2 + 25 \text{이므로}$$

$-x^2 + 6x + 16$ 은 $x=3$ 일 때 최댓값 25를 갖는다.

따라서 함수 $y = \log_5(-x^2 + 6x + 16)$ 의 최댓값은

$$y = \log_5 25 = \log_5 5^2 = 2 \log_5 5 = 2$$

답 2

186

$$(1) y = (\log_{\frac{1}{3}} x)^2 + 4 \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{x} + 2$$

$$= (\log_{\frac{1}{3}} x)^2 + 4 \log_{\frac{1}{3}} x^{\frac{1}{2}} + 2$$

$$= (\log_{\frac{1}{3}} x)^2 + 2 \log_{\frac{1}{3}} x + 2$$

이므로 $\log_{\frac{1}{3}} x = t$ 로 놓으면

$$y = t^2 + 2t + 2 = (t+1)^2 + 1$$

이때 $3 \leq x \leq 27$ 이고 $0 < \frac{1}{3} < 1$ 이므로

$$\log_{\frac{1}{3}} 27 \leq \log_{\frac{1}{3}} x \leq \log_{\frac{1}{3}} 3$$

$$\log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3} \right)^{-3} \leq \log_{\frac{1}{3}} x \leq \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3} \right)^{-1}$$

$$\therefore -3 \leq t \leq -1$$

따라서 $-3 \leq t \leq -1$ 에서 함수

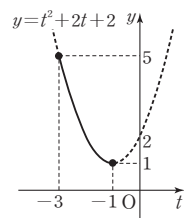
$$y = (t+1)^2 + 1 \text{은}$$

$t=-3$ 일 때 최대이고,

$$\text{최댓값은 } (-3+1)^2 + 1 = 5$$

$t=-1$ 일 때 최소이고,

$$\text{최솟값은 } (-1+1)^2 + 1 = 1$$



$$\begin{aligned}
 (2) y &= \log_5 x \times \log_{\frac{1}{5}} x - 2 \log_5 x + 5 \\
 &= \log_5 x \times \log_{5^{-1}} x - 2 \log_5 x + 5 \\
 &= \log_5 x \times (-\log_5 x) - 2 \log_5 x + 5 \\
 &= -(\log_5 x)^2 - 2 \log_5 x + 5
 \end{aligned}$$

이므로 $\log_5 x = t$ 로 놓으면

$$y = -t^2 - 2t + 5 = -(t+1)^2 + 6$$

이때 $\frac{1}{25} \leq x \leq 5$ 이고 $5 > 1$ 이므로

$$\log_5 \frac{1}{25} \leq \log_5 x \leq \log_5 5$$

$$\log_5 5^{-2} \leq \log_5 x \leq \log_5 5 \quad \therefore -2 \leq t \leq 1$$

따라서 $-2 \leq t \leq 1$ 에서 함수

$$y = -(t+1)^2 + 6 \text{은}$$

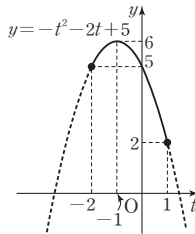
$t = -1$ 일 때 최대이고, 최댓

값은

$$-(-1+1)^2 + 6 = 6$$

$t = 1$ 일 때 최소이고, 최솟

$$\text{값은 } -(1+1)^2 + 6 = 2$$



답 (1) 최댓값: 5, 최솟값: 1

(2) 최댓값: 6, 최솟값: 2

참고

지수함수와 달리 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)의 값은 모든 실수이므로 $\log_a x = t$ 로 치환했을 때 $t > 0$ 으로 생각하지 않도록 주의한다.

188

$y = \frac{x^{\log_2 x}}{4x^2}$ 의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$$\begin{aligned}
 \log_2 y &= \log_2 \frac{x^{\log_2 x}}{4x^2} \\
 &= \log_2 x^{\log_2 x} - \log_2 4x^2 \\
 &= \log_2 x \times \log_2 x - (\log_2 4 + \log_2 x^2) \\
 &= (\log_2 x)^2 - 2 \log_2 x - 2
 \end{aligned}$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$\log_2 y = t^2 - 2t - 2 = (t-1)^2 - 3$$

따라서 $t = 1$ 일 때, $\log_2 y$ 의 최솟값은 -3 이므로

$x = 2$ 일 때, y 의 최솟값은 $2^{-3} = \frac{1}{8}$ 이다.

따라서 $a = 2, b = \frac{1}{8}$ 이므로 $ab = \frac{1}{4}$

답 $\frac{1}{4}$

190

$$\begin{aligned}
 &\log_{\frac{1}{5}} (2a+b) + \log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{8}{a} + \frac{1}{b} \right) \\
 &= \log_{\frac{1}{5}} (2a+b) \left(\frac{8}{a} + \frac{1}{b} \right)
 \end{aligned}$$

$a > 0, b > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}
 (2a+b) \left(\frac{8}{a} + \frac{1}{b} \right) &= \frac{2a}{b} + \frac{8b}{a} + 17 \\
 &\geq 2\sqrt{\frac{2a}{b} \times \frac{8b}{a}} + 17 \\
 &= 2 \times 4 + 17 = 25
 \end{aligned}$$

(단, 등호는 $\frac{2a}{b} = \frac{8b}{a}$, 즉 $a = 2b$ 일 때 성립한다.)

이때 $0 < \frac{1}{5} < 1$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \log_{\frac{1}{5}} (2a+b) \left(\frac{8}{a} + \frac{1}{b} \right) &\leq \log_{\frac{1}{5}} 25 \\
 &= \log_{5^{-1}} 5^2 = -2
 \end{aligned}$$

따라서 구하는 최댓값은 -2 이다.

답 -2

필수 확인 문제

81쪽

191

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{1}{3}\right) + f(48) &= \log_2 \frac{1}{3} + \log_2 48 \\
 &= \log_2 \left(\frac{1}{3} \times 48 \right) = \log_2 16 \\
 &= \log_2 2^4 = 4
 \end{aligned}$$

답 4

192

함수 $y = \log_3 (x-2) + 5$ 의

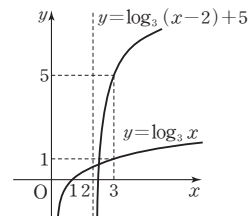
그래프는 함수 $y = \log_3 x$ 의

그래프를 x 축의 방향으로 2

만큼, y 축의 방향으로 5만

큼 평행이동한 것이므로 오

른쪽 그림과 같다.



④ 점근선의 방정식은 $x = 2$ 이다.

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

답 ④

193

$b < a < 1$ 의 각 변에 밑이 b 인 로그를 취하면

$$\log_b 1 < \log_b a < \log_b b \leftarrow \text{부등호 방향 반대로}$$

$$\therefore 0 < \log_b a < 1$$

또, $b < a < 1$ 의 각 변에 밑이 a 인 로그를 취하면

$$\log_a 1 < \log_a a < \log_a b \leftarrow \text{부등호 방향 반대로}$$

$$\therefore \log_a b > 1$$

한편, $\log_a \frac{a}{b} = 1 - \log_a b$ 이고 $\log_a b > 1$ 이므로

$$\log_a \frac{a}{b} < 0$$

$$\therefore \log_a \frac{a}{b} < \log_b a < \log_a b$$

$$\text{답 } \log_a \frac{a}{b} < \log_b a < \log_a b$$

194

$\overline{AD} = 3$ 이므로 점 A의

y좌표는 3

$\log_2 x = 3$ 에서

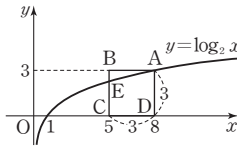
$x = 2^3 = 8$ 이므로 점 A의

x좌표는 8

한편, $\overline{CD} = 3$ 이므로 점 C의 x좌표는 $8 - 3 = 5$

점 E의 x좌표가 5이므로 점 E의 y좌표는 $\log_2 5$

$\therefore \overline{CE} = (\text{점 E의 y좌표}) = \log_2 5$ 답 $\log_2 5$



195

$y = \log_{\frac{1}{3}}(x+a)$ 에서 밑이 $\frac{1}{3}$ 이고 $0 < \frac{1}{3} < 1$ 이므로

$x = 2$ 일 때 y는 최댓값을 갖는다.

이때 최댓값이 -2 이므로

$$\log_{\frac{1}{3}}(2+a) = -2, 2+a = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$$

$$2+a=9 \quad \therefore a=7$$

따라서 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}}(x+7)$ 이고 $x = 20$ 일 때 최솟값을 가지므로 최솟값은

$$\log_{\frac{1}{3}} 27 = \log_{3^{-1}} 3^3 = -3 \quad \text{답 } -3$$

196

$$y = \log x^2 + \log_x 100 = 2 \log x + \frac{2}{\log x}$$

$x > 1$ 에서 $\log x > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$y = 2 \log x + \frac{2}{\log x}$$

$$\geq 2 \sqrt{2 \log x \times \frac{2}{\log x}} = 4$$

(단, 등호는 $2 \log x = \frac{2}{\log x}$, 즉 $x = 10$ 일 때 성립한다.)

따라서 구하는 최솟값은 4이다. 답 4

4 로그방정식과 로그부등식

82~91쪽

198

(1) 로그의 진수 조건에서 $3-x > 0, x-1 > 0$

$$\therefore 1 < x < 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\log_5(3-x) = \log_{25}(x-1) \text{에서}$$

$$\log_{25}(3-x)^2 = \log_{25}(x-1)$$

$$\text{따라서 } (3-x)^2 = x-1 \text{이므로}$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0, (x-2)(x-5) = 0$$

$$\therefore x=2 \text{ 또는 } x=5$$

그런데 $\textcircled{1}$ 에서 $1 < x < 3$ 이므로 $x=2$

(2) 로그의 밑 조건에서 $x-1 > 0, x-1 \neq 1$

$$\therefore x > 1, x \neq 2$$

$$\text{즉, } 1 < x < 2 \text{ 또는 } x > 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\log_{x-1} 9 = 2 \text{에서 } 9 = (x-1)^2$$

$$\text{따라서 } x-1 = \pm 3 \text{이므로 } x = -2 \text{ 또는 } x = 4$$

그런데 $\textcircled{1}$ 에서 $1 < x < 2$ 또는 $x > 2$ 이므로

$$x=4$$

(3) 로그의 진수 조건에서 $x > 0, 2x+3 > 0, x-2 > 0$

$$\therefore x > 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\log_{\sqrt{3}} x - \log_3(2x+3) = \log_3(x-2) \text{에서}$$

$$2 \log_3 x = \log_3(x-2) + \log_3(2x+3)$$

$$\log_3 x^2 = \log_3(x-2)(2x+3)$$

$$\text{따라서 } x^2 = (x-2)(2x+3) \text{이므로}$$

$$x^2 - x - 6 = 0, (x+2)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 3$$

그런데 $\textcircled{1}$ 에서 $x > 2$ 이므로 $x=3$

(4) 로그의 진수 조건에서 $x+3 > 0, x+6 > 0$

$$\therefore x > -3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\log_2(x+3) = \frac{1}{2} \log_2(x+6) + 1 \text{에서}$$

$$2 \log_2(x+3) = \log_2(x+6) + 2$$

$$\log_2(x+3)^2 = \log_2 4(x+6)$$

$$\text{따라서 } (x+3)^2 = 4(x+6) \text{이므로}$$

$$x^2 + 2x - 15 = 0, (x+5)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -5 \text{ 또는 } x = 3$$

그런데 $\textcircled{1}$ 에서 $x > -3$ 이므로 $x=3$

$$\text{답 } (1) x=2 \quad (2) x=4 \quad (3) x=3 \quad (4) x=3$$

200

(1) 로그의 진수 조건에서 $x > 0, x^2 > 0$

$$\therefore x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

주어진 방정식은 $(\log_3 x)^2 + 2 \log_3 x - 8 = 0$ 이므로
 $\log_3 x = t$ 로 놓으면 $t^2 + 2t - 8 = 0$
 $(t+4)(t-2) = 0 \quad \therefore t = -4 \text{ 또는 } t = 2$
 따라서 $\log_3 x = -4$ 또는 $\log_3 x = 2$ 이므로
 $x = \frac{1}{81}$ 또는 $x = 9$
 이것은 ㉠을 만족시킨다.

- (2) 로그의 진수와 밑 조건에서 $x > 0, x \neq 1$ ㉠
 $\therefore 0 < x < 1$ 또는 $x > 1$
 주어진 방정식은 $\log_2 x - 3 \log_x 2 = 2$ 이므로
 $\log_2 x = t$ 로 놓으면 $t - \frac{3}{t} = 2$
 양변에 t 를 곱하여 정리하면
 $t^2 - 2t - 3 = 0, (t+1)(t-3) = 0$
 $\therefore t = -1$ 또는 $t = 3$
 따라서 $\log_2 x = -1$ 또는 $\log_2 x = 3$ 이므로
 $x = \frac{1}{2}$ 또는 $x = 8$
 이것은 ㉠을 만족시킨다.

- (3) 로그의 진수 조건에서 $5x > 0, \frac{x}{5} > 0$ ㉠
 $\therefore x > 0$
 주어진 방정식은
 $(\log_5 5 + \log_5 x)(\log_5 x - \log_5 5) = 3$
 $(1 + \log_5 x)(\log_5 x - 1) = 3$
 이므로 $\log_5 x = t$ 로 놓으면 $(1+t)(t-1) = 3$
 $t^2 - 1 = 3, t^2 = 4$
 $\therefore t = -2$ 또는 $t = 2$
 따라서 $\log_5 x = -2$ 또는 $\log_5 x = 2$ 이므로
 $x = \frac{1}{25}$ 또는 $x = 25$
 이것은 ㉠을 만족시킨다.

- 답 (1) $x = \frac{1}{81}$ 또는 $x = 9$
 (2) $x = \frac{1}{2}$ 또는 $x = 8$
 (3) $x = \frac{1}{25}$ 또는 $x = 25$

202

- (1) 로그의 진수 조건에서 $x > 0$ ㉠
 주어진 등식의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면
 $\log_3 x^{\log_3 x} = \log_3 \frac{81}{x^3}$
 $(\log_3 x)^2 = \log_3 81 - \log_3 x^3$
 $(\log_3 x)^2 = \log_3 3^4 - 3 \log_3 x$
 $(\log_3 x)^2 = 4 - 3 \log_3 x$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면 $t^2 = 4 - 3t$
 $t^2 + 3t - 4 = 0, (t+4)(t-1) = 0$
 $\therefore t = -4$ 또는 $t = 1$
 따라서 $\log_3 x = -4$ 또는 $\log_3 x = 1$ 이므로
 $x = \frac{1}{81}$ 또는 $x = 3$
 이것은 ㉠을 만족시킨다.

- (2) 로그의 진수 조건에서 $x > 0$ ㉠
 $x^{\log_2 x} = 2^{\log_2 x}$ 이므로 주어진 방정식은
 $2^{\log_2 x} \times 2^{\log_2 x} = 3(2^{\log_2 x} + 2^{\log_2 x}) - 8$
 $(2^{\log_2 x})^2 = 6 \times 2^{\log_2 x} - 8$
 $2^{\log_2 x} = t \ (t > 0)$ 로 놓으면 $t^2 = 6t - 8$
 $t^2 - 6t + 8 = 0, (t-2)(t-4) = 0$
 $\therefore t = 2$ 또는 $t = 4 \ (\because t > 0)$
 따라서 $2^{\log_2 x} = 2$ 또는 $2^{\log_2 x} = 4 = 2^2$ 이므로
 $\log_2 x = 1$ 또는 $\log_2 x = 2$
 $\therefore x = 2$ 또는 $x = 4$
 이것은 ㉠을 만족시킨다.

- 답 (1) $x = \frac{1}{81}$ 또는 $x = 3$
 (2) $x = 2$ 또는 $x = 4$

204

- (1) 이차방정식 $x^2 - 2x \log_2 a + 3 \log_2 a + 4 = 0$ 이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4} = (-\log_2 a)^2 - (3 \log_2 a + 4) = 0$
 $(\log_2 a)^2 - 3 \log_2 a - 4 = 0$
 $\log_2 a = t$ 로 놓으면
 $t^2 - 3t - 4 = 0, (t+1)(t-4) = 0$
 $\therefore t = -1$ 또는 $t = 4$
 따라서 $\log_2 a = -1$ 또는 $\log_2 a = 4$ 이므로
 $a = \frac{1}{2}$ 또는 $a = 16$
 (2) $\log_3 x = t$ 로 놓으면 $t^2 + 2t - 1 = 0$ ㉠
 이때 방정식 $(\log_3 x)^2 + 2 \log_3 x - 1 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 ㉠의 두 근은 $\log_3 \alpha, \log_3 \beta$ 이다.
 따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $\log_3 \alpha + \log_3 \beta = -2, \log_3 \alpha \beta = -2$
 $\therefore \alpha \beta = 3^{-2} = \frac{1}{9}$

- 답 (1) $a = \frac{1}{2}$ 또는 $a = 16$ (2) $\frac{1}{9}$

참고

- (1)에서 로그의 진수 조건은 $a > 0$

이때 주어진 조건에서 a 는 양수이므로 진수 조건을 확인하지 않아도 된다.

206

사업을 시작할 때의 자본을 K 원이라 하면 A회사의 자본은 매년 10%, B회사의 자본은 매년 15% 증가하므로 n 년 후의 두 회사 A, B의 자본은 각각

$$K(1+0.1)^n = K \times 1.1^n \text{ (원)},$$

$$K(1+0.15)^n = K \times 1.15^n \text{ (원)}$$

n 년 후의 B회사의 자본이 A회사의 자본의 10배가 된다고 하면

$$K \times 1.15^n = 10 \times K \times 1.1^n$$

$$1.15^n = 10 \times 1.1^n$$

양변에 상용로그를 취하면

$$n \log 1.15 = \log 10 + n \log 1.1$$

$$0.06n = 1 + 0.04n, 0.02n = 1 \quad \therefore n = 50$$

따라서 사업을 시작한 지 50년 후에 B회사의 자본이 A회사의 자본의 10배가 된다. **답** 50년 후

208

(1) 로그의 진수 조건에서 $x-2 > 0, 8-x > 0$

$$\therefore 2 < x < 8 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$\log_5 (x-2) - \log_5 (8-x) \leq 0 \text{에서}$$

$$\log_5 (x-2) \leq \log_5 (8-x)$$

이때 밑이 5이고 $5 > 1$ 이므로

$$x-2 \leq 8-x \leftarrow \text{부등호 방향 그대로}$$

$$2x \leq 10 \quad \therefore x \leq 5 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 의 공통 범위를 구하면 $2 < x \leq 5$

(2) 로그의 진수 조건에서 $x+1 > 0, 2x+5 > 0$

$$\therefore x > -1 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

$$2 \log_{0.5} (x+1) > \log_{0.5} (2x+5) \text{에서}$$

$$\log_{0.5} (x+1)^2 > \log_{0.5} (2x+5)$$

이때 밑이 0.5이고 $0 < 0.5 < 1$ 이므로

$$(x+1)^2 < 2x+5 \leftarrow \text{부등호 방향 반대로}$$

$$x^2 - 4 < 0, (x+2)(x-2) < 0$$

$$\therefore -2 < x < 2 \quad \dots\dots \textcircled{D}$$

$\textcircled{C}, \textcircled{D}$ 의 공통 범위를 구하면 $-1 < x < 2$

(3) 로그의 진수 조건에서 $x > 0, 7-x > 0$

$$\therefore 0 < x < 7 \quad \dots\dots \textcircled{E}$$

$$\log x + \log (7-x) < 1 \text{에서 } \log x(7-x) < \log 10$$

이때 밑이 10이고 $10 > 1$ 이므로

$$x(7-x) < 10 \leftarrow \text{부등호 방향 그대로}$$

$$x^2 - 7x + 10 > 0, (x-2)(x-5) > 0$$

$$\therefore x < 2 \text{ 또는 } x > 5 \quad \dots\dots \textcircled{F}$$

$\textcircled{E}, \textcircled{F}$ 의 공통 범위를 구하면

$$0 < x < 2 \text{ 또는 } 5 < x < 7$$

(4) 로그의 진수 조건에서 $x-1 > 0, x+5 > 0$

$$\therefore x > 1 \quad \dots\dots \textcircled{G}$$

$$\log_{\frac{1}{3}} (x-1) \geq \log_{\frac{1}{9}} (x+5) \text{에서}$$

$$\log_{(\frac{1}{3})^2} (x-1)^2 \geq \log_{\frac{1}{9}} (x+5)$$

$$\log_{\frac{1}{9}} (x-1)^2 \geq \log_{\frac{1}{9}} (x+5)$$

이때 밑이 $\frac{1}{9}$ 이고 $0 < \frac{1}{9} < 1$ 이므로

$$(x-1)^2 \leq x+5 \leftarrow \text{부등호 방향 반대로}$$

$$x^2 - 3x - 4 \leq 0, (x+1)(x-4) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq x \leq 4 \quad \dots\dots \textcircled{H}$$

$\textcircled{G}, \textcircled{H}$ 의 공통 범위를 구하면 $1 < x \leq 4$

$$\text{답 } (1) 2 < x \leq 5 \quad (2) -1 < x < 2$$

$$(3) 0 < x < 2 \text{ 또는 } 5 < x < 7$$

$$(4) 1 < x \leq 4$$

210

(1) 로그의 진수 조건에서 $x > 0, 100x^3 > 0$

$$\therefore x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{I}$$

$$(\log x)^2 + \log 100x^3 < 0 \text{에서}$$

$$(\log x)^2 + \log 100 + \log x^3 < 0$$

$$(\log x)^2 + 3 \log x + 2 < 0$$

$\log x = t$ 로 놓으면

$$t^2 + 3t + 2 < 0, (t+2)(t+1) < 0$$

$$\therefore -2 < t < -1$$

따라서 $-2 < \log x < -1$ 이므로

$$\log 10^{-2} < \log x < \log 10^{-1}$$

이때 밑이 10이고 $10 > 1$ 이므로

$$10^{-2} < x < 10^{-1} \leftarrow \text{부등호 방향 그대로}$$

$$\frac{1}{100} < x < \frac{1}{10} \quad \dots\dots \textcircled{J}$$

$\textcircled{I}, \textcircled{J}$ 의 공통 범위를 구하면

$$\frac{1}{100} < x < \frac{1}{10}$$

(2) 로그의 진수 조건에서 $x > 0, x^2 > 0$

$$\therefore x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{K}$$

$$(\log_3 x)^2 > \log_3 x^2 \text{에서 } (\log_3 x)^2 > 2 \log_3 x \quad (\because \textcircled{K})$$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 > 2t, t^2 - 2t > 0, t(t-2) > 0$$

$$\therefore t < 0 \text{ 또는 } t > 2$$

따라서 $\log_3 x < 0$ 또는 $\log_3 x > 2$ 이므로

$$\log_3 x < \log_3 1 \text{ 또는 } \log_3 x > \log_3 3^2$$

이때 밑이 3이고 $3 > 1$ 이므로

$$x < 1 \text{ 또는 } x > 9 \leftarrow \text{부등호 방향 그대로} \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$\textcircled{L}$, $\textcircled{L}$ 의 공통 범위를 구하면

$$0 < x < 1 \text{ 또는 } x > 9$$

(3) 로그의 진수 조건에서 $x > 0$ $\dots\dots \textcircled{L}$

$$(\log_{0.5} x)^2 + \log_{0.5} x - 2 \leq 0 \text{에서}$$

$$\log_{0.5} x = t \text{로 놓으면}$$

$$t^2 + t - 2 \leq 0, (t+2)(t-1) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq t \leq 1$$

따라서 $-2 \leq \log_{0.5} x \leq 1$ 이므로

$$\log_{0.5} 0.5^{-2} \leq \log_{0.5} x \leq \log_{0.5} 0.5$$

이때 밑이 0.5이고 $0 < 0.5 < 1$ 이므로

$$0.5 \leq x \leq 0.5^{-2} \leftarrow \text{부등호 방향 반대로}$$

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 4 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$\textcircled{L}$, $\textcircled{L}$ 의 공통 범위를 구하면

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 4$$

(4) 로그의 진수 조건에서 $2x > 0, \frac{8}{x} > 0$

$$x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$$\log_2 2x \times \log_2 \frac{8}{x} \geq -5 \text{에서}$$

$$(\log_2 2 + \log_2 x)(\log_2 8 - \log_2 x) \geq -5$$

$$(1 + \log_2 x)(3 - \log_2 x) \geq -5$$

$$\log_2 x = t \text{로 놓으면}$$

$$(1+t)(3-t) \geq -5$$

$$t^2 - 2t - 8 \leq 0, (t+2)(t-4) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq t \leq 4$$

따라서 $-2 \leq \log_2 x \leq 4$ 이므로

$$\log_2 2^{-2} \leq \log_2 x \leq \log_2 2^4$$

이때 밑이 2이고 $2 > 1$ 이므로

$$2^{-2} \leq x \leq 2^4 \leftarrow \text{부등호 방향 그대로}$$

$$\therefore \frac{1}{4} \leq x \leq 16 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$\textcircled{L}$, $\textcircled{L}$ 의 공통 범위를 구하면

$$\frac{1}{4} \leq x \leq 16$$

답 (1) $\frac{1}{100} < x < \frac{1}{10}$

(2) $0 < x < 1$ 또는 $x > 9$

(3) $\frac{1}{2} \leq x \leq 4$ (4) $\frac{1}{4} \leq x \leq 16$

212

(1) 로그의 진수 조건에서 $x > 0$ $\dots\dots \textcircled{L}$

$$x^{\log x} < 100x \text{의 양변에 상용로그를 취하면 밑이 } 10$$

이고 $10 > 1$ 이므로

$$\log x^{\log x} < \log 100x \leftarrow \text{부등호 방향 그대로}$$

$$(\log x)^2 < 2 + \log x$$

$$\log x = t \text{로 놓으면 } t^2 < 2 + t$$

$$t^2 - t - 2 < 0, (t+1)(t-2) < 0$$

$$\therefore -1 < t < 2$$

따라서 $-1 < \log x < 2$ 이므로

$$\log 10^{-1} < \log x < \log 10^2$$

이때 밑이 10이고 $10 > 1$ 이므로

$$10^{-1} < x < 10^2 \leftarrow \text{부등호 방향 그대로}$$

$$\therefore \frac{1}{10} < x < 100 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$\textcircled{L}$, $\textcircled{L}$ 의 공통 범위를 구하면

$$\frac{1}{10} < x < 100$$

(2) 로그의 진수 조건에서 $x > 0$ $\dots\dots \textcircled{L}$

$$x^{\log \frac{1}{2} x} > \frac{x^2}{8} \text{의 양변에 밑이 } \frac{1}{2} \text{인 로그를 취하면}$$

$$0 < \frac{1}{2} < 1 \text{이므로}$$

$$\log \frac{1}{2} x^{\log \frac{1}{2} x} < \log \frac{1}{2} \frac{x^2}{8} \leftarrow \text{부등호 방향 반대로}$$

$$(\log \frac{1}{2} x)^2 < \log \frac{1}{2} x^2 - \log \frac{1}{2} 8$$

$$(\log \frac{1}{2} x)^2 < 2 \log \frac{1}{2} x + 3 \quad (\because \textcircled{L})$$

$$\log \frac{1}{2} x = t \text{로 놓으면 } t^2 < 2t + 3$$

$$t^2 - 2t - 3 < 0, (t+1)(t-3) < 0$$

$$\therefore -1 < t < 3$$

따라서 $-1 < \log \frac{1}{2} x < 3$ 이므로

$$\log \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{-1} < \log \frac{1}{2} x < \log \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^3$$

이때 밑이 $\frac{1}{2}$ 이고 $0 < \frac{1}{2} < 1$ 이므로

$$\left(\frac{1}{2} \right)^3 < x < \left(\frac{1}{2} \right)^{-1} \leftarrow \text{부등호 방향 반대로}$$

$$\therefore \frac{1}{8} < x < 2 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$\textcircled{L}$, $\textcircled{L}$ 의 공통 범위를 구하면

$$\frac{1}{8} < x < 2$$

답 (1) $\frac{1}{10} < x < 100$ (2) $\frac{1}{8} < x < 2$

214

이차방정식 $f(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하자.

(1) 이차방정식 $f(x)=0$ 이 실근을 가지려면

$$\frac{D}{4} = (1 + \log a)^2 - 3(1 + \log a) \geq 0$$

$$(\log a)^2 - \log a - 2 \geq 0$$

$\log a = t$ 로 놓으면

$$t^2 - t - 2 \geq 0, (t+1)(t-2) \geq 0$$

$$\therefore t \leq -1 \text{ 또는 } t \geq 2$$

따라서 $\log a \leq -1$ 또는 $\log a \geq 2$ 이므로

$$\log a \leq \log 10^{-1} \text{ 또는 } \log a \geq \log 10^2$$

이때 밑이 10이고 $10 > 1$ 이므로

$$a \leq \frac{1}{10} \text{ 또는 } a \geq 100 \leftarrow \text{부등호 방향 그대로}$$

이때 a 는 양수이므로

$$0 < a \leq \frac{1}{10} \text{ 또는 } a \geq 100$$

(2) 이차부등식 $f(x) \geq 0$ 이 모든 실수 x 에 대하여 항상 성립하려면

$$\frac{D}{4} = (1 + \log a)^2 - 3(1 + \log a) \leq 0$$

$$(\log a)^2 - \log a - 2 \leq 0$$

$\log a = t$ 로 놓으면

$$t^2 - t - 2 \leq 0, (t+1)(t-2) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq t \leq 2$$

따라서 $-1 \leq \log a \leq 2$ 이므로

$$\log 10^{-1} \leq \log a \leq \log 10^2$$

이때 밑이 10이고 $10 > 1$ 이므로

$$\frac{1}{10} \leq a \leq 100 \leftarrow \text{부등호 방향 그대로}$$

답 (1) $0 < a \leq \frac{1}{10}$ 또는 $a \geq 100$

(2) $\frac{1}{10} \leq a \leq 100$

216

$$0 \leq \log_3 (\log_2 x) < 1 \text{에서 } 3^0 \leq \log_2 x < 3^1$$

$$\therefore 1 \leq \log_2 x < 3$$

이때 밑이 2이고 $2 > 1$ 이므로

$$2^1 \leq x < 2^3 \leftarrow \text{부등호 방향 그대로}$$

$$\therefore 2 \leq x < 8$$

답 $2 \leq x < 8$

218

현재 8인 BOD가 매년 20 %씩 감소한다고 할 때, n 년 후의 BOD는 $8(1-0.2)^n$ 이므로

$$8(1-0.2)^n \leq 1$$

$$\left(\frac{8}{10}\right)^n \leq \frac{1}{8}$$

양변에 상용로그를 취하면 밑이 10이고 $10 > 1$ 이므로

$$\log \left(\frac{8}{10}\right)^n \leq \log \frac{1}{8} \leftarrow \text{부등호 방향 그대로}$$

$$n \log \left(\frac{8}{10}\right) \leq \log \frac{1}{8}$$

$$n(\log 8 - \log 10) \leq -\log 8$$

$$n(3 \log 2 - 1) \leq -3 \log 2$$

이때 $3 \log 2 - 1 = 3 \times 0.3 - 1 = -0.1 < 0$ 이므로

$$n \geq \frac{-3 \log 2}{3 \log 2 - 1} = \frac{-3 \times 0.3}{3 \times 0.3 - 1} = \frac{-0.9}{-0.1} = 9$$

따라서 BOD가 처음으로 1 이하가 되는 것은 9년 후이다. **답** 9년 후

필수 확인 문제

92쪽

219

로그의 진수 조건에서 $x-2 > 0, x+6 > 0$

$$\therefore x > 2$$

..... ㉠

$$\log_2 (x-2) = \log_4 (x+6) + 1 \text{에서}$$

$$\log_4 (x-2)^2 = \log_4 4(x+6)$$

따라서 $(x-2)^2 = 4(x+6)$ 이므로

$$x^2 - 8x - 20 = 0, (x+2)(x-10) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 10$$

그런데 ㉠에서 $x > 2$ 이므로

$$x = 10$$

답 $x = 10$

220

로그의 진수 조건에서 $x > 0$

..... ㉠

$8x^{\log_2 x} = x^4$ 의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$$\log_2 8x^{\log_2 x} = \log_2 x^4$$

$$\log_2 8 + \log_2 x^{\log_2 x} = 4 \log_2 x$$

$$(\log_2 x)^2 - 4 \log_2 x + 3 = 0$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 4t + 3 = 0, (t-1)(t-3) = 0$$

$$\therefore t = 1 \text{ 또는 } t = 3$$

즉, $\log_2 x = 1$ 또는 $\log_2 x = 3$ 이므로

$$x = 2 \text{ 또는 } x = 8$$

이것은 ㉠을 만족시키므로 모든 근의 합은

$$2 + 8 = 10$$

답 10

221

주어진 방정식의 두 근을 α, β 라 하면

$$\alpha\beta=16$$

$(\log_2 x)^2 - 2k \log_2 x + 8 = 0$ 에서 $\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 2kt + 8 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 의 해가 $\log_2 \alpha, \log_2 \beta$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_2 \alpha + \log_2 \beta = 2k, \log_2 \alpha\beta = 2k$$

이때 $\alpha\beta=16$ 이므로 $\log_2 16 = 2k, 4=2k$

$$\therefore k=2$$

답 2

222

로그의 진수 조건에서 $x > 0$

$\dots\dots \textcircled{1}$

$\log_{\frac{1}{3}} 9x \times \log_9 81x \leq 0$ 에서

$$(\log_{\frac{1}{3}} 9 + \log_{\frac{1}{3}} x)(\log_9 81 + \log_9 x) \leq 0$$

$$(-2 - \log_3 x)\left(2 + \frac{1}{2} \log_3 x\right) \leq 0$$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면

$$(-2-t)\left(2 + \frac{1}{2}t\right) \leq 0, (t+2) \times \frac{1}{2}(t+4) \geq 0$$

$$(t+2)(t+4) \geq 0$$

$$\therefore t \leq -4 \text{ 또는 } t \geq -2$$

따라서 $\log_3 x \leq -4$ 또는 $\log_3 x \geq -2$ 이므로

$$\log_3 x \leq \log_3 3^{-4} \text{ 또는 } \log_3 x \geq \log_3 3^{-2}$$

이때 밑이 3이고 $3 > 1$ 이므로

$$x \leq 3^{-4} \text{ 또는 } x \geq 3^{-2} \leftarrow \text{부등호 방향 그대로}$$

$$\therefore x \leq \frac{1}{81} \text{ 또는 } x \geq \frac{1}{9}$$

$\dots\dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 의 공통 범위를 구하면

$$0 < x \leq \frac{1}{81} \text{ 또는 } x \geq \frac{1}{9}$$

따라서 $\alpha = \frac{1}{81}, \beta = \frac{1}{9}$ 이므로

$$\frac{\beta}{\alpha} = \beta \times \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{9} \times 81 = 9$$

답 9

223

로그의 진수 조건에서 $\log_3 (\log_4 x) > 0$

$\log_3 (\log_4 x) > \log_3 1$ 에서 밑이 3이고 $3 > 1$ 이므로

$$\log_4 x > 1 \leftarrow \text{부등호 방향 그대로}$$

또, $\log_4 x > \log_4 4$ 에서 밑이 4이고 $4 > 1$ 이므로

$$x > 4 \leftarrow \text{부등호 방향 그대로}$$

$\dots\dots \textcircled{1}$

$\log_2 \{\log_3 (\log_4 x)\} < 0$ 에서

$$\log_2 \{\log_3 (\log_4 x)\} < \log_2 1$$

밑이 2이고 $2 > 1$ 이므로

$$\log_3 (\log_4 x) < 1 \leftarrow \text{부등호 방향 그대로}$$

$\log_3 (\log_4 x) < \log_3 3$ 에서 밑이 3이고 $3 > 1$ 이므로

$$\log_4 x < 3 \leftarrow \text{부등호 방향 그대로}$$

$\log_4 x < \log_4 4^3$ 에서 밑이 4이고 $4 > 1$ 이므로

$$x < 4^3$$

$$\therefore x < 64 \leftarrow \text{부등호 방향 그대로}$$

$\dots\dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 의 공통 범위를 구하면

$$4 < x < 64$$

따라서 정수 x 는 5, 6, 7, ..., 63의 59개이다.

답 59

224

$x^{\log x} > \left(\frac{x}{100}\right)^k$ 의 양변에 상용로그를 취하면

밑이 10이고 $10 > 1$ 이므로

$$\log x^{\log x} > \log \left(\frac{x}{100}\right)^k \leftarrow \text{부등호 방향 그대로}$$

$$(\log x)^2 > k(\log x - 2), (\log x)^2 - k \log x + 2k > 0$$

$$\log x = t \text{로 놓으면 } t^2 - kt + 2k > 0$$

위의 부등식이 성립하려면 이차방정식 $t^2 - kt + 2k = 0$

의 판별식을 D 라 할 때

$$D = (-k)^2 - 4 \times 1 \times 2k < 0, k^2 - 8k < 0$$

$$k(k-8) < 0 \quad \therefore 0 < k < 8$$

따라서 정수 k 의 최댓값은 7이다.

답 7

● 실전 연습문제

94~96쪽

225

$\textcircled{5} a > 1$ 일 때 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하고,

$0 < a < 1$ 일 때 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

답 $\textcircled{5}$

226

$$f(x) = 3^{1-x} \times 5^{x+1} + 1 = \left(3 \times \frac{1}{3^x}\right) \times (5 \times 5^x) + 1$$

$$= 15 \times \left(\frac{5}{3}\right)^x + 1$$

밑이 $\frac{5}{3}$ 이고 $\frac{5}{3} > 1$ 이므로 $-1 \leq x \leq 1$ 에서 $f(x)$ 는

$x=1$ 일 때 최대이고, 최댓값은

$$M = 15 \times \frac{5}{3} + 1 = 26$$

$x=-1$ 일 때 최소이고, 최솟값은

$$m = 15 \times \frac{3}{5} + 1 = 10$$

$$\therefore M - m = 26 - 10 = 16$$

답 16

227

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3^{x^2 - 2x + k}$$

에서 밑이 3이고 $3 > 1$ 이므로 함수 $g(x)$ 가 최대일 때 함수 $(f \circ g)(x)$ 도 최대, 함수 $g(x)$ 가 최소일 때 함수 $(f \circ g)(x)$ 도 최소가 된다.

$g(x) = (x-1)^2 + k - 1$ 이므로 함수 $g(x)$ 의 최댓값은 없고, $x=1$ 일 때 최솟값은 $k-1$ 이다.

따라서 함수 $(f \circ g)(x)$ 의 최솟값이 27 이므로

$$3^{k-1} = 27, 3^{k-1} = 3^3$$

$$\therefore k = 4$$

답 4

228

$$4^x - k \times 2^{x+2} - 3k + 10 = 0 \text{ 에서}$$

$$(2^x)^2 - 4k \times 2^x - 3k + 10 = 0$$

$$2^x = t \ (t > 0) \text{ 로 놓으면}$$

$$t^2 - 4kt - 3k + 10 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 이차방정식 $\textcircled{1}$ 이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $\textcircled{1}$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-2k)^2 - (-3k + 10) > 0$$

$$4k^2 + 3k - 10 > 0, (k+2)(4k-5) > 0$$

$$\therefore k < -2 \text{ 또는 } k > \frac{5}{4}$$

(ii) (두 근의 합) $= 4k > 0$ 에서 $k > 0$

(iii) (두 근의 곱) $= -3k + 10 > 0$ 에서 $k < \frac{10}{3}$

$$(i) \sim (iii) \text{ 에서 } \frac{5}{4} < k < \frac{10}{3} \quad \text{답 } \frac{5}{4} < k < \frac{10}{3}$$

229

(i) $x-1 > 1$, 즉 $x > 2$ 일 때, 밑이 1보다 크므로

$$x^2 \leq x + 6 \quad \leftarrow \text{부등호 방향 그대로}$$

$$x^2 - x - 6 \leq 0, (x+2)(x-3) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq x \leq 3$$

그런데 $x > 2$ 이므로 $2 < x \leq 3$

(ii) $0 < x-1 < 1$, 즉 $1 < x < 2$ 일 때, 밑이 1보다 작으므로

$$x^2 \geq x + 6 \quad \leftarrow \text{부등호 방향 반대로}$$

$$x^2 - x - 6 \geq 0, (x+2)(x-3) \geq 0$$

$$\therefore x \leq -2 \text{ 또는 } x \geq 3$$

그런데 $1 < x < 2$ 이므로 조건을 만족시키는 x 의 값은 없다.

(iii) $x-1=1$, 즉 $x=2$ 일 때

(좌변) $= 1^4 = 1$, (우변) $= 1^8 = 1$ 이므로 주어진 부등식이 성립한다.

$$\therefore x = 2$$

(i) ~ (iii) 에서 $2 \leq x \leq 3$

따라서 정수 x 는 2, 3 이므로 그 합은

$$2 + 3 = 5$$

답 ③

230

구입한 지 n 년 후의 기계 설비의 가치는

$$6400 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n \text{ 만 원 이므로}$$

$$6400 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n \leq 2700, \left(\frac{3}{4}\right)^n \leq \frac{2700}{6400} = \left(\frac{3}{4}\right)^3$$

$$\text{밑이 } \frac{3}{4} \text{ 이고 } 0 < \frac{3}{4} < 1 \text{ 이므로}$$

$$n \geq 3 \quad \leftarrow \text{부등호 방향 반대로}$$

따라서 구입한 지 3년 후에 이 기계 설비의 가치가 처음으로 2700만 원 이하가 된다.

답 3년 후

231

함수 $y = \log_2(x-a)$ 의 그래프의 점근선은 직선 $x=a$

이므로 점 A의 좌표는 $\left(a, \log_2 \frac{a}{4}\right)$, 점 B의 좌표는

$\left(a, \log_2 \frac{1}{2} a\right)$ 이다.

따라서

$$|AB| = \left| \log_2 \frac{a}{4} - \log_2 \frac{1}{2} a \right|$$

$$= |(\log_2 a - \log_2 4) + \log_2 a|$$

$$= |2 \log_2 a - 2| = 4$$

이고 $a > 2$ 이므로

$$2 \log_2 a - 2 = 4, \log_2 a = 3$$

$$\therefore a = 2^3 = 8$$

답 ③

232

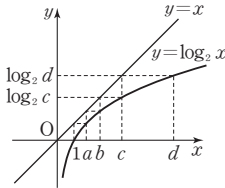
$\log_2 c = b, \log_2 d = c$ 이므로

$$c - b = \log_2 d - \log_2 c$$

$$= \log_2 \frac{d}{c}$$

$$\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^{c-b} = 2^{b-c} = 2^{-\log_2 \frac{d}{c}}$$

$$= 2^{\log_2 \frac{c}{d}} = \frac{c}{d}$$



답 ⑤

233

$\log_2 x + \log_2 y = \log_2 xy$ 이고 $x^2 > 0, y^2 > 0$ 이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{x^2 y^2} = 2xy$$

(단, 등호는 $x^2 = y^2$ 일 때 성립한다.)

이때 $x^2 + y^2 = 10$ 이므로

$$2xy \leq 10 \quad \therefore xy \leq 5$$

이때 $2 > 1$ 이므로

$$\log_2 xy \leq \log_2 5$$

따라서 구하는 최댓값은 $\log_2 5$ 이다.

답 $\log_2 5$

234

로그의 밑 조건에서 $x-2 > 0, x-2 \neq 1$ 이므로

$$x > 2, x \neq 3$$

로그의 진수 조건에서 $x^2 - 6x + 9 > 0$,

즉 $(x-3)^2 > 0$ 이므로 $x \neq 3$ 인 모든 실수

$$\therefore 2 < x < 3 \text{ 또는 } x > 3$$

..... ㉠

(i) $x-2=3$ 일 때, $x=5$

(ii) $x^2 - 6x + 9 = 1$ 일 때,

$$x^2 - 6x + 8 = 0, (x-2)(x-4) = 0$$

$$\therefore x=2 \text{ 또는 } x=4$$

그런데 $x=2$ 는 ㉠을 만족시키지 않으므로 $x=4$

(i), (ii)에서 $x=4$ 또는 $x=5$

따라서 모든 x 의 값의 곱은

$$4 \times 5 = 20$$

답 ②

235

$$\log_5 x \times \log_5 \frac{25}{x} = -1 \text{에서}$$

$$\log_5 x (\log_5 25 - \log_5 x) = -1$$

$$\log_5 x (2 - \log_5 x) = -1$$

$$\log_5 x = t \text{로 놓으면 } t(2-t) = -1$$

$$\therefore t^2 - 2t - 1 = 0$$

위의 이차방정식의 두 근이 $\log_5 \alpha, \log_5 \beta$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_5 \alpha + \log_5 \beta = 2, \log_5 \alpha \times \log_5 \beta = -1$$

$$\therefore \log_5 5 + \log_5 5 = \frac{1}{\log_5 \alpha} + \frac{1}{\log_5 \beta}$$

$$= \frac{\log_5 \alpha + \log_5 \beta}{\log_5 \alpha \times \log_5 \beta}$$

$$= \frac{2}{-1} = -2$$

답 -2

236

$\log_3 x = t$ 로 놓으면 주어진 부등식은

$$t^2 + at + b < 0$$

..... ㉠

한편, $\frac{1}{9} < x < 27$ 의 각 변에 밑이 3인 로그를 취하면

$$\log_3 \frac{1}{9} < \log_3 x < \log_3 27$$

$$-2 < \log_3 x < 3 \leftarrow \text{부등호 방향 그대로}$$

$$\therefore -2 < t < 3$$

해가 $-2 < t < 3$ 이고 t^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$(t+2)(t-3) < 0 \quad \therefore t^2 - t - 6 < 0$$

..... ㉡

㉠과 ㉡이 일치해야 하므로 $a = -1, b = -6$

$$\therefore ab = (-1) \times (-6) = 6$$

답 6

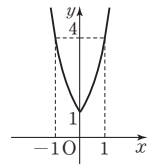
237

(i) $x < 0$ 일 때, $f(x) = -2x$ 이므로

$$y = 2^{f(x)} = 2^{-2x} = \left(\frac{1}{4}\right)^x$$

(ii) $x \geq 0$ 일 때, $f(x) = 2x$ 이므로

$$y = 2^{f(x)} = 2^{2x} = 4^x$$



따라서 함수 $y = 2^{f(x)}$ 의 그래프는 위의 그림과 같다.

답 ③

238

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 함수 $y = \log_2 (x-2)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 함수 $y = f(x)$ 는 함수 $y = \log_2 (x-2)$ 의 역함수이다.

즉, 점 $P(1, a)$ 가 곡선 $y = f(x)$ 위의 점이므로

점 $(a, 1)$ 은 곡선 $y = \log_2 (x-2)$ 위의 점이다.

$$\log_2 (a-2) = 1, a-2 = 2 \quad \therefore a = 4$$

또, 점 $Q(b, a)$ 는 곡선 $y = \log_2 (x-2)$ 위의 점이므로

$$a = \log_2 (b-2), b-2 = 2^a$$

$$b-2=2^4 \quad \therefore b=18$$

따라서 $P(1, 4), Q(18, 4)$ 이므로

$$\overline{PQ} = |1-18| = 17$$

답 17

239

$$4^{f(x)} - 3 \times 2^{1+f(x)} < 16 \text{에서 } 2^{2f(x)} - 6 \times 2^{f(x)} - 16 < 0$$

$$2^{f(x)} = t \ (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 6t - 16 < 0, \ (t+2)(t-8) < 0$$

$$\therefore -2 < t < 8$$

$$t > 0 \text{이므로 } 0 < t < 8$$

즉, $0 < 2^{f(x)} < 2^3$ 이고 밑이 $2 > 1$ 이므로

$$f(x) < 3 \leftarrow \text{부등호 방향 그대로}$$

$$f(x) = x^2 - 3x - 1 \text{에서}$$

$$x^2 - 3x - 1 < 3, \ x^2 - 3x - 4 < 0$$

$$(x+1)(x-4) < 0 \quad \therefore -1 < x < 4$$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x 는 0, 1, 2, 3이므로 그 개수는 4이다.

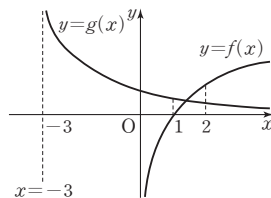
답 4

240

$f(x) = \log_n x, g(x) = -\log_n (x+3) + 1$ 이라 하자.

함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후, x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

이때 $n \geq 2$ 이므로 두 함수 $y = f(x), y = g(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 두 곡선이 만나는 점의 x 좌표가 1보다 크고 2보다 작으려면 $f(1) < g(1), f(2) > g(2)$ 이어야 한다.

(i) $f(1) < g(1)$ 일 때

$$\log_n 1 < -\log_n 4 + 1, \log_n 4 < 1$$

이때 밑 n 에 대하여 $n \geq 2$ 이므로 $n > 4$

(ii) $f(2) > g(2)$ 일 때

$$\log_n 2 > -\log_n 5 + 1, \log_n 2 + \log_n 5 > 1$$

$$\log_n 10 > 1$$

이때 밑 n 에 대하여 $n \geq 2$ 이므로 $n < 10$

(i), (ii)에서 $4 < n < 10$

따라서 자연수 n 은 5, 6, 7, 8, 9이므로 그 합은

$$5+6+7+8+9=35$$

답 ②

241

처음 소모 전력량을 A , 매달 소모 전력량이 줄어드는 비율을 r 라 하면 5개월 후 소모 전력량이 처음의 $\frac{8}{9}$ 이 되었으므로

$$Ar^5 = \frac{8}{9}A, r^5 = \frac{8}{9}$$

양변에 상용로그를 취하면

$$\log r^5 = \log \frac{8}{9}, 5 \log r = \log 8 - \log 9$$

$$\begin{aligned} \therefore \log r &= \frac{\log 8 - \log 9}{5} = \frac{3 \log 2 - 2 \log 3}{5} \\ &= \frac{3 \times 0.3 - 2 \times 0.48}{5} = \frac{-0.06}{5} = -0.012 \end{aligned}$$

n 개월 후 소모 전력량이 처음의 $\frac{3}{4}$ 이 된다고 하면

$$Ar^n = \frac{3}{4}A, r^n = \frac{3}{4}$$

양변에 상용로그를 취하면

$$\log r^n = \log \frac{3}{4}, n \log r = \log 3 - \log 4$$

$$\begin{aligned} \therefore n &= \frac{\log 3 - \log 4}{\log r} = \frac{\log 3 - 2 \log 2}{\log r} \\ &= \frac{0.48 - 2 \times 0.3}{-0.012} = \frac{-0.12}{-0.012} = 10 \end{aligned}$$

따라서 소모 전력량이 처음의 $\frac{3}{4}$ 이 되는 것은 10개월 후이다.

답 10개월 후



삼각함수

1 삼각함수의 뜻

1 일반각과 호도법

100~108쪽

002

$420^\circ = 360^\circ + 60^\circ$ 이므로 $360^\circ \times n + 60^\circ$ (n 은 정수)의 꼴로 나타낼 수 있는 각과 동경이 일치한다.

ㄱ. $60^\circ = 360^\circ \times 0 + 60^\circ$ 이므로 일치한다.

ㄴ. $-60^\circ = 360^\circ \times (-1) + 300^\circ$ 이므로 일치하지 않는다.

ㄷ. $300^\circ = 360^\circ \times 0 + 300^\circ$ 이므로 일치하지 않는다.

ㄹ. $-300^\circ = 360^\circ \times (-1) + 60^\circ$ 이므로 일치한다.

ㅁ. $390^\circ = 360^\circ + 30^\circ$ 이므로 일치하지 않는다.

따라서 동경이 일치하는 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄹ

+ 풍산자 비법

$\theta = 360^\circ \times n + \alpha^\circ$ (n 은 정수, $0^\circ \leq \alpha^\circ < 360^\circ$)이면 각 α° 를 나타내는 동경과 각 θ 를 나타내는 동경은 일치한다.

004

(1) $960^\circ = 360^\circ \times 2 + 240^\circ \Rightarrow$ 제3사분면의 각

(2) $1400^\circ = 360^\circ \times 3 + 320^\circ \Rightarrow$ 제4사분면의 각

(3) $-600^\circ = 360^\circ \times (-2) + 120^\circ \Rightarrow$ 제2사분면의 각

답 (1) 제3사분면 (2) 제4사분면 (3) 제2사분면

006

θ 가 제3사분면의 각이므로

$360^\circ \times n + 180^\circ < \theta < 360^\circ \times n + 270^\circ$ (n 은 정수)

$\therefore 360^\circ \times \frac{n}{2} + 90^\circ < \frac{\theta}{2} < 360^\circ \times \frac{n}{2} + 135^\circ$

(i) $n=2k$ (k 는 정수)일 때,

$360^\circ \times k + 90^\circ < \frac{\theta}{2} < 360^\circ \times k + 135^\circ$

$\Rightarrow$ 제2사분면의 각

(ii) $n=2k+1$ (k 는 정수)일 때,

$360^\circ \times k + 270^\circ < \frac{\theta}{2} < 360^\circ \times k + 315^\circ$

$\Rightarrow$ 제4사분면의 각

(i), (ii)에서 $\frac{\theta}{2}$ 를 나타내는 동경이 존재하는 사분면은 제2사분면, 제4사분면이다.

답 제2사분면, 제4사분면

참고

θ 가 제3사분면의 각일 때 $180^\circ < \theta < 270^\circ$ 로 단정지을 수 없다. 각 θ 를 나타내는 동경의 위치가 주어지면 θ 의 범위를 일반각으로 나타내어 계산한다.

008

(1) 각 θ 를 나타내는 동경과 각 6θ 를 나타내는 동경이 일직선 위에 있고 방향이 반대이므로

$6\theta - \theta = 360^\circ \times n + 180^\circ$ (n 은 정수)

$5\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ$, 즉 $\theta = 72^\circ \times n + 36^\circ$

$\therefore \theta = 36^\circ, 108^\circ, 180^\circ, \dots$

이때 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ 이므로 $\theta = 36^\circ$

(2) 각 2θ 를 나타내는 동경과 각 4θ 를 나타내는 동경이 x 축에 대하여 대칭이므로

$2\theta + 4\theta = 360^\circ \times n$ (n 은 정수)

$6\theta = 360^\circ \times n$, 즉 $\theta = 60^\circ \times n$

$\therefore \theta = 60^\circ, 120^\circ, 180^\circ, \dots$

이때 $90^\circ < \theta < 180^\circ$ 이므로 $\theta = 120^\circ$

답 (1) 36° (2) 120°

010

(1) $\frac{3}{5}\pi = \frac{3}{5} \times 180^\circ = 108^\circ$

(2) $180 = 180 \times \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{32400^\circ}{\pi}$

(3) $300 = 300 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5}{3}\pi$

(4) $15^\circ = 15 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{12}$

답 (1) 108° (2) $\frac{32400^\circ}{\pi}$ (3) $\frac{5}{3}\pi$ (4) $\frac{\pi}{12}$

012

(1) $\frac{9}{2}\pi = 2\pi \times 2 + \frac{\pi}{2}$

$\therefore \theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ (n 은 정수)

(2) $-\frac{10}{3}\pi = 2\pi \times (-2) + \frac{2}{3}\pi$

$\therefore \theta = 2n\pi + \frac{2}{3}\pi$ (n 은 정수)

답 (1) $\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ (n 은 정수)

(2) $\theta = 2n\pi + \frac{2}{3}\pi$ (n 은 정수)

일반각을 $2n\pi + \alpha$ (n 은 정수)로 나타낼 때는 α 는 $0 \leq \alpha < 2\pi$ 인 각을 선택한다.

014

부채꼴의 반지름의 길이를 r , 중심각의 크기를 θ , 호의 길이를 l , 넓이를 S 라 하면

$$(1) r=4, S=10\pi \text{이므로 } S=\frac{1}{2}rl \text{에서}$$

$$10\pi = \frac{1}{2} \times 4 \times l$$

$$\therefore l=5\pi$$

$$l=r\theta \text{에서 } 5\pi=4\theta$$

$$\therefore \theta = \frac{5}{4}\pi$$

$$(2) l=2\pi, S=3\pi \text{이므로 } S=\frac{1}{2}rl \text{에서}$$

$$3\pi = \frac{1}{2} \times r \times 2\pi$$

$$\therefore r=3$$

$$l=r\theta \text{에서 } 2\pi=3\theta$$

$$\therefore \theta = \frac{2}{3}\pi$$

답 (1) 중심각의 크기: $\frac{5}{4}\pi$, 호의 길이: 5π

(2) 반지름의 길이: 3, 중심각의 크기: $\frac{2}{3}\pi$

016

부채꼴의 반지름의 길이를 r , 호의 길이를 l 이라 하면 둘레의 길이가 20이므로

$$2r+l=20$$

$$\therefore l=20-2r$$

이때 $20-2r>0$, $r>0$ 이므로

$$0<r<10$$

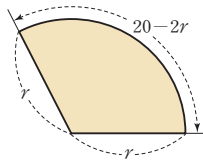
부채꼴의 넓이를 S 라 하면

$$S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r(20-2r)=-r^2+10r$$

$$=-(r-5)^2+25$$

따라서 $r=5$, 즉 반지름의 길이가 5일 때, 부채꼴의 넓이는 최대이고 그때의 넓이는 25이다.

답 25



필수 확인 문제

017

$$\neg. -840^\circ = 360^\circ \times (-3) + 240^\circ \Rightarrow \text{제3사분면}$$

$$\neg. -616^\circ = 360^\circ \times (-2) + 104^\circ \Rightarrow \text{제2사분면}$$

$$\neg. -75^\circ = 360^\circ \times (-1) + 285^\circ \Rightarrow \text{제4사분면}$$

$$\neg. 430^\circ = 360^\circ \times 1 + 70^\circ \Rightarrow \text{제1사분면}$$

$$\neg. 1560^\circ = 360^\circ \times 4 + 120^\circ \Rightarrow \text{제2사분면}$$

따라서 각을 나타내는 동경이 같은 사분면에 있는 각끼리 짝지은 것은 ③ $\neg, \neg$ 이다. 답 ③

018

각 3θ 를 나타내는 동경과 각 6θ 를 나타내는 동경이 y 축에 대하여 대칭이므로

$$3\theta + 6\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ \quad (n \text{은 정수})$$

$$9\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ$$

$$\text{즉, } \theta = 40^\circ \times n + 20^\circ$$

$$\therefore \theta = 20^\circ, 60^\circ, 100^\circ, \dots$$

이때 $0^\circ < \theta < 360^\circ$ 이므로 $n=8$ 일 때 최댓값 340° ,

$n=0$ 일 때 최솟값 20° 를 갖는다.

따라서 각 θ 의 크기의 최댓값과 최솟값의 합은

$$340^\circ + 20^\circ = 360^\circ$$

답 360°

019

$$\textcircled{1} 36^\circ = 36 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{5}$$

$$\textcircled{2} 140^\circ = 140 \times \frac{\pi}{180} = \frac{7}{9}\pi$$

$$\textcircled{3} 200^\circ = 200 \times \frac{\pi}{180} = \frac{10}{9}\pi$$

$$\textcircled{4} \frac{3}{4}\pi = \frac{3}{4} \times 180^\circ = 135^\circ$$

$$\textcircled{5} \frac{5}{3}\pi = \frac{5}{3} \times 180^\circ = 300^\circ$$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

020

반지름의 길이가 8, 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$ 인 부채꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 8^2 \times \frac{\pi}{4} = 8\pi$$

반지름의 길이가 r , 호의 길이가 2π 인 부채꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times r \times 2\pi = \pi r$$

두 부채꼴의 넓이가 같으므로

$$8\pi = \pi r \quad \therefore r = 8$$

답 8

021

부채꼴의 반지름의 길이를 r , 호의 길이를 l 이라 하면 부채꼴의 넓이가 25이므로

$$\frac{1}{2}rl = 25 \quad \therefore l = \frac{50}{r}$$

즉, 부채꼴의 둘레의 길이는

$$l + 2r = \frac{50}{r} + 2r$$

이때 $\frac{50}{r} > 0$, $2r > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{50}{r} + 2r \geq 2\sqrt{\frac{50}{r} \times 2r} = 2 \times 10 = 20$$

(단, 등호는 $\frac{50}{r} = 2r$, 즉 $r = 5$ 일 때 성립한다.)

따라서 부채꼴의 둘레의 길이의 최솟값은 20이다.

답 20

참고 산술평균과 기하평균의 관계

$a > 0$, $b > 0$ 일 때,

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (\text{단, 등호는 } a=b \text{일 때 성립한다.})$$

2 삼각함수의 정의

110~118쪽

023

$855^\circ = 360^\circ \times 2 + 135^\circ$ 이므로 두 바퀴 돌린 후 135° 만큼 더 돌리면 된다.

오른쪽 그림과 같이 동경에서 x 축에 수선을 그어 직각삼각형 하나를 만든다.

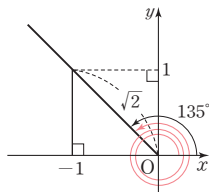
이 직각삼각형으로부터

$$\sin 855^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos 855^\circ = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\tan 855^\circ = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\text{답 } \sin 855^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos 855^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \tan 855^\circ = -1$$



025

오른쪽 그림에서

$$OP = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = 13$$

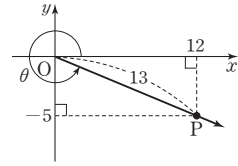
이므로

$$\sin \theta = -\frac{5}{13},$$

$$\cos \theta = \frac{12}{13},$$

$$\tan \theta = -\frac{5}{12}$$

$$\text{답 } \sin \theta = -\frac{5}{13}, \cos \theta = \frac{12}{13}, \tan \theta = -\frac{5}{12}$$



027

오른쪽 그림과 같이 반지름의

길이가 1인 원에서 $\theta = \frac{7}{6}\pi$ 의

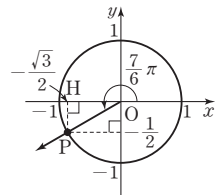
동경과 이 원의 교점을 P, 점 P에서 x 축에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 POH

에서 $\angle POH = \frac{\pi}{6}$ 이므로 점 P의 좌표는 $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$

이다.

$$\therefore \sin \theta = -\frac{1}{2}, \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{답 } \sin \theta = -\frac{1}{2}, \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



029

(i) $\frac{\cos \theta}{\sin \theta} > 0$ 에서

$$\cos \theta > 0, \sin \theta > 0 \text{ 또는}$$

$$\cos \theta < 0, \sin \theta < 0$$

이므로 θ 는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.

(ii) $\frac{\cos \theta}{\tan \theta} < 0$ 에서

$$\cos \theta > 0, \tan \theta < 0 \text{ 또는}$$

$$\cos \theta < 0, \tan \theta > 0$$

이므로 θ 는 제4사분면 또는 제2사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 θ 는 제3사분면의 각이다.

답 제3사분면

031

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 에서 θ 는 제2사분면의 각

→ 제2사분면은 사인 동네 → 사인만 양수

즉, $\sin \theta > 0$, $\cos \theta < 0$ 이므로

$$\sin \theta - \cos \theta > 0$$

$$\begin{aligned} \therefore |\sin \theta| + \sqrt{\cos^2 \theta} - \sqrt{(\sin \theta - \cos \theta)^2} \\ = \sin \theta - \cos \theta - (\sin \theta - \cos \theta) \\ = 0 \end{aligned}$$

답 0

033

$$\begin{aligned} \frac{\cos^2 \theta}{1 - \sin \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{1 + \sin \theta} \\ = \frac{\cos^2 \theta (1 + \sin \theta) + \cos^2 \theta (1 - \sin \theta)}{(1 - \sin \theta)(1 + \sin \theta)} \\ = \frac{2 \cos^2 \theta}{1 - \sin^2 \theta} = \frac{2 \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = 2 \end{aligned}$$

답 2

+ 풍산자 비법

삼각함수를 포함한 식을 간단히 할 때는 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 주어진 식을 변형한다. 이때 $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ 등을 하나의 문자로 생각하여 통분, 약분, 인수분해, 곱셈 공식 등을 이용한다.

035

$$\cos \theta = \frac{12}{13} \text{ 에서}$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2 = \frac{25}{169}$$

$$\therefore \sin \theta = \pm \frac{5}{13}$$

이때 θ 는 제4사분면의 각이므로 $\sin \theta < 0$

$$\therefore \sin \theta = -\frac{5}{13}$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = -\frac{5}{12}$$

$$\text{답 } \sin \theta = -\frac{5}{13}, \tan \theta = -\frac{5}{12}$$

다른 풀이

θ 를 예각 x 로 가정하면

$$\cos \theta = \frac{12}{13} \text{ 를 만족시키}$$

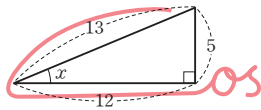
는 직각삼각형은 오른쪽 그림과 같다.

이 직각삼각형에서

$$\sin x = \frac{5}{13}, \tan x = \frac{5}{12}$$

이때 θ 는 제4사분면의 각이므로 $\cos$ 만 양수이다.

$$\therefore \sin \theta = -\frac{5}{13}, \tan \theta = -\frac{5}{12}$$



037

(1) $\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{4}$$

$$1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}, 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{3}{8}$$

(2) $(\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta$

$$= 1 + 2 \times \frac{3}{8} = \frac{7}{4} \leftarrow (1)$$

이때 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\sin \theta > 0$, $\cos \theta > 0$ 이므로

$$\sin \theta + \cos \theta > 0$$

$$\therefore \sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

(3) $\sin^3 \theta - \cos^3 \theta$

$$= (\sin \theta - \cos \theta)(\sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta)$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(1 + \frac{3}{8}\right) = \frac{11}{16} \leftarrow (1)$$

$$\text{답 } (1) \frac{3}{8} \quad (2) \frac{\sqrt{7}}{2} \quad (3) \frac{11}{16}$$

다른 풀이

(3) $\sin^3 \theta - \cos^3 \theta$

$$= (\sin \theta - \cos \theta)^3 + 3 \sin \theta \cos \theta (\sin \theta - \cos \theta)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3 \times \frac{3}{8} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{9}{16} = \frac{11}{16} \leftarrow (1)$$

039

이차방정식 $2x^2 - (\sqrt{3} + 1)x + a = 0$ 의 두 근이 $\sin \theta$, $\cos \theta$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{a}{2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{4}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}$$

②을 이 식에 대입하면

$$1 + 2 \times \frac{a}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore a = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{답 } \frac{\sqrt{3}}{2}$$

참고 이차방정식의 근과 계수의 관계

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 두 근을 α, β 라 하면

$$(1) \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \quad (2) \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

필수 확인 문제

119쪽

040

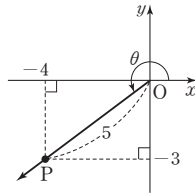
오른쪽 그림에서

$$OP = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = 5$$

이므로

$$\sin \theta = -\frac{3}{5}, \cos \theta = -\frac{4}{5},$$

$$\tan \theta = \frac{3}{4}$$



$$\therefore \frac{4 \tan \theta}{\sin \theta - \cos \theta} = \frac{4 \times \frac{3}{4}}{-\frac{3}{5} - \left(-\frac{4}{5}\right)} = 15$$

답 15

041

$$\frac{1-\sin \theta}{1+\sin \theta} = 3 \text{에서 } 1-\sin \theta = 3(1+\sin \theta)$$

$$1-\sin \theta = 3+3\sin \theta, 4\sin \theta = -2$$

$$\therefore \sin \theta = -\frac{1}{2}$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \text{이므로}$$

$$\cos \theta = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이때 θ 가 제4사분면의 각이므로 $\cos \theta > 0$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{따라서 } \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} 8 \cos \theta + 3 \tan \theta &= 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \\ &= 4\sqrt{3} - \sqrt{3} = 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

답 $3\sqrt{3}$

042

$$\begin{aligned} (1) (\sin \theta + \cos \theta)^2 &= 1 + 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= 1 + 2 \times \frac{1}{8} = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

이때 $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 에서 $\sin \theta < 0, \cos \theta < 0$ 이므로

$$\sin \theta + \cos \theta < 0$$

$$\therefore \sin \theta + \cos \theta = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{aligned} (2) \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} &= \frac{\cos^4 \theta + \sin^4 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} \\ &= \frac{(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)^2 - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(\sin \theta \cos \theta)^2} - 2$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{8}\right)^2} - 2 = 62$$

답 (1) $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ (2) 62

043

이차방정식 $3x^2 - x + k = 0$ 의 두 근이 $\sin \theta, \cos \theta$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{3} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{k}{3} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{9}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{9}, 2 \sin \theta \cos \theta = -\frac{8}{9}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{4}{9}$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } -\frac{4}{9} = \frac{k}{3}$$

$$\therefore k = -\frac{4}{3}$$

이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 $\frac{1}{\sin \theta}, \frac{1}{\cos \theta}$ 이

므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\cos \theta} = -a$$

$$a = -\left(\frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\cos \theta}\right) = -\frac{\cos \theta + \sin \theta}{\sin \theta \cos \theta}$$

$$= -\frac{\frac{1}{3}}{-\frac{4}{9}} = \frac{3}{4}$$

$$b = \frac{1}{\sin \theta} \times \frac{1}{\cos \theta} = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = -\frac{9}{4}$$

$$\therefore 3k + a - b = 3 \times \left(-\frac{4}{3}\right) + \frac{3}{4} - \left(-\frac{9}{4}\right)$$

$$= -4 + 3 = -1$$

답 -1

044

$\sin \theta \cos \theta \neq 0$ 이고 $\sqrt{\sin \theta} \sqrt{\cos \theta} = -\sqrt{\sin \theta \cos \theta}$
이므로

$\sin \theta < 0, \cos \theta < 0$

따라서 θ 는 제3사분면의 각이므로

$\tan \theta > 0, \cos \theta - \tan \theta < 0, \tan \theta - \sin \theta > 0$

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt{\cos^2 \theta} - |\cos \theta - \tan \theta| + \sqrt{(\tan \theta - \sin \theta)^2} \\ = -\cos \theta + \cos \theta - \tan \theta + \tan \theta - \sin \theta \\ = -\sin \theta \end{aligned}$$

답 ①

참고 음수의 제곱근의 성질

(1) $\sqrt{a} \sqrt{b} = -\sqrt{ab}$ 가 성립할 조건

→ $a < 0, b < 0$ 또는 $a = 0$ 또는 $b = 0$

(2) $\sqrt{\frac{a}{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$ 가 성립할 조건

→ $a > 0, b < 0$ 또는 $a = 0, b \neq 0$

● 실전 연습문제

121~122쪽

045

각 θ 를 나타내는 동경과 각 5θ 를 나타내는 동경이 x 축
에 대하여 대칭이므로

$$\theta + 5\theta = 360^\circ \times n \quad (n \text{은 정수})$$

$$6\theta = 360^\circ \times n, \text{ 즉 } \theta = 60^\circ \times n$$

$$\therefore \theta = 60^\circ, 120^\circ, 180^\circ, \dots$$

이때 $0^\circ < \theta < 180^\circ$ 이므로

$$\theta = 60^\circ$$

$$\therefore \sin \theta = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

046

ㄱ은 옳지 않다.

$$85^\circ = 85 \times \frac{\pi}{180} = \frac{17}{36} \pi$$

ㄴ은 옳다.

$$4 = 4 \times \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{720^\circ}{\pi}$$

ㄷ은 옳지 않다.

$$-\frac{7}{3} \pi = 2\pi \times (-2) + \frac{5}{3} \pi \text{이므로 } -\frac{7}{3} \pi \text{는 제4사분}$$

면의 각이다.

ㄹ은 옳다.

$$132^\circ = 132 \times \frac{\pi}{180} = \frac{11}{15} \pi$$

$$\frac{71}{15} \pi = 2\pi \times 2 + \frac{11}{15} \pi$$

$$-\frac{19}{15} \pi = 2\pi \times (-1) + \frac{11}{15} \pi$$

이므로 주어진 각을 나타내는 동경은 모두 일치한다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

답 ④

047

주어진 부채꼴의 호의 길이와 넓이를 각각 l, r 이라 하면

$$l = r\theta, S = \frac{1}{2} r^2 \theta$$

θ 를 $\frac{1}{2}$ 배 하면 $\frac{1}{2}\theta$, r 를 4배 하면 $4r$ 이다.

또, 변형한 부채꼴의 호의 길이와 넓이를 각각 l', S' 이라 하면

$$l' = 4r \times \frac{1}{2} \theta = 2r\theta = 2l$$

$$S' = \frac{1}{2} \times (4r)^2 \times \frac{1}{2} \theta = 8 \times \frac{1}{2} r^2 \theta = 8S$$

따라서 호의 길이는 2배가 되고, 넓이는 8배가 된다.

답 ⑤

048

반지름의 길이를 r , 호의 길이를 l 이라 하면

$$2r + l = 120 \quad \therefore l = 120 - 2r \quad (0 < r < 60)$$

$$(\text{부채꼴의 넓이}) = \frac{1}{2} \times r \times (120 - 2r)$$

$$= -r^2 + 60r$$

$$= -(r - 30)^2 + 900$$

$r = 30$ 일 때, 부채꼴의 넓이의 최댓값이 900이므로

이때의 부채꼴의 중심각의 크기를 θ 라 하면

$$\frac{1}{2} \times 30^2 \times \theta = 900 \quad \therefore \theta = 2$$

답 2

049

ㄱ은 옳다.

$$\frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} + \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta}$$

$$= \frac{\cos^2 \theta + (1 - \sin \theta)^2}{(1 - \sin \theta) \cos \theta}$$

$$= \frac{\cos^2 \theta + 1 - 2 \sin \theta + \sin^2 \theta}{(1 - \sin \theta) \cos \theta}$$

$$= \frac{2 - 2 \sin \theta}{(1 - \sin \theta) \cos \theta} = \frac{2(1 - \sin \theta)}{(1 - \sin \theta) \cos \theta}$$

$$= \frac{2}{\cos \theta}$$

ㄴ은 옳지 않다.

$$\begin{aligned} \sin^4 \theta - \cos^4 \theta &= (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \\ &= \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \\ &= \sin^2 \theta - (1 - \sin^2 \theta) \\ &= 2 \sin^2 \theta - 1 \end{aligned}$$

ㄷ은 옳다.

$$\begin{aligned} &\frac{1+2 \sin \theta \cos \theta}{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta} + \frac{1+\tan \theta}{1-\tan \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta}{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta} + \frac{1+\frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{1-\frac{\sin \theta}{\cos \theta}} \\ &= \frac{(\sin \theta + \cos \theta)^2}{(\sin \theta + \cos \theta)(\sin \theta - \cos \theta)} + \frac{\frac{\cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta}}{\frac{\cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta}} \\ &= \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta - \cos \theta} + \frac{\cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta - \sin \theta} \\ &= 0 \end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

050

$\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{4}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}, \quad 2 \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{4}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8}$$

$$\therefore \frac{1+\tan \theta}{\sin \theta} = \frac{1+\frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{\sin \theta} = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{3}{8}} = -\frac{4}{3}$$

답 ②

051

$2x^2 - kx + 1 = 0$ 의 두 근이 $\sin \theta, \cos \theta$ 이므로

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{k}{2} \quad \dots\dots ㉠$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \quad \dots\dots ㉡$$

㉠의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{k^2}{4}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{k^2}{4}$$

㉡을 위의 식에 대입하면

$$2 = \frac{k^2}{4} \quad \therefore k^2 = 8$$

답 8

052

직선 $y=x$ 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\tan \theta = 1 \quad \therefore \theta = 45^\circ$$

$a > b > 0$ 일 때, 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭인 두 직선 $y=ax, y=bx$ 가 이루는 각의 크기가 30° 인 경우는 다음 그림과 같다.

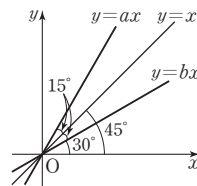
따라서 두 직선 $y=ax, y=bx$ 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 각각 $60^\circ, 30^\circ$ 이므로

$$a = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$b = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore 3(a^2 + b^2) = 3\left(3 + \frac{1}{3}\right) = 10$$

답 10



053

$$\sqrt{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}} = -\sqrt{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}} \text{에서}$$

$$\sin \theta > 0, \cos \theta < 0 \quad (\because \sin \theta \cos \theta \neq 0)$$

즉, θ 는 제2사분면의 각이므로

$$a < 0, b > 0$$

$$|a| - |b| = -2 \text{에서 } -a - b = -2, a + b = 2$$

$$\therefore b = 2 - a \quad \dots\dots ㉠$$

$$\overline{OP} = 2\sqrt{5} \text{에서}$$

$$a^2 + b^2 = 20 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$a^2 + (2-a)^2 = 20, a^2 - 2a - 8 = 0$$

$$(a+2)(a-4) = 0$$

이때 $a < 0$ 이므로 $a = -2$

$$a = -2 \text{를 ㉠에 대입하면 } b = 4$$

따라서

$$\sin \theta = \frac{b}{\overline{OP}} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\cos \theta = \frac{a}{\overline{OP}} = \frac{-2}{2\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\tan \theta = \frac{b}{a} = \frac{4}{-2} = -2$$

이므로

$$\begin{aligned}\sin \theta \cos \theta - \tan \theta &= \frac{2\sqrt{5}}{5} \times \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) - (-2) \\ &= -\frac{2}{5} + 2 = \frac{8}{5}\end{aligned}$$

답 $\frac{8}{5}$

054

$\overline{OA} = \overline{OB} = 1$ 이므로 삼각함수의 정의를 이용하여 세 선분 OQ, AP, BQ의 길이를 각각 θ 로 나타내면

$$\overline{OQ} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OB}} = \cos \theta$$

$$\overline{AP} = \frac{\overline{AP}}{\overline{OA}} = \tan \theta$$

$$\overline{BQ} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{OB}} = \sin \theta$$

$$\overline{OQ} = 2\overline{AP} \times \overline{BQ} \text{이므로}$$

$$\cos \theta = 2 \tan \theta \sin \theta$$

$$\cos \theta = 2 \times \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \times \sin \theta$$

$$\therefore \cos^2 \theta = 2 \sin^2 \theta$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{이므로}$$

$$1 - \sin^2 \theta = 2 \sin^2 \theta, \quad 3 \sin^2 \theta = 1$$

$$\therefore \sin^2 \theta = \frac{1}{3}$$

답 $\frac{1}{3}$

2 삼각함수의 그래프

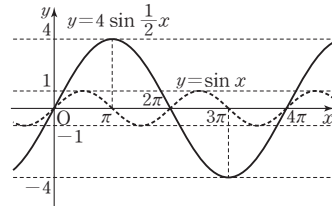
1 삼각함수의 그래프

124~139쪽

056

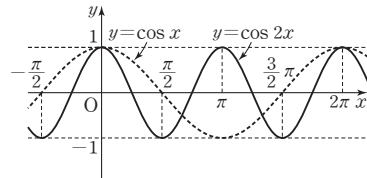
- (1) 최댓값: 4, 최솟값: -4, 주기: $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$

함수 $y = 4 \sin \frac{1}{2}x$ 의 그래프는 함수 $y = \sin x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 4배, x 축의 방향으로 2배 한 것이므로 다음 그림과 같다.



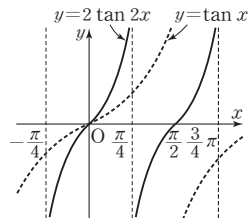
- (2) 최댓값: 1, 최솟값: -1, 주기: $\frac{2\pi}{2} = \pi$

함수 $y = \cos 2x$ 의 그래프는 함수 $y = \cos x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 배 한 것이므로 다음 그림과 같다.



- (3) 최댓값, 최솟값: 없다., 주기: $\frac{\pi}{2}$

함수 $y = 2 \tan 2x$ 의 그래프는 함수 $y = \tan x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 2배, x 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 배 한 것이므로 다음 그림과 같다.

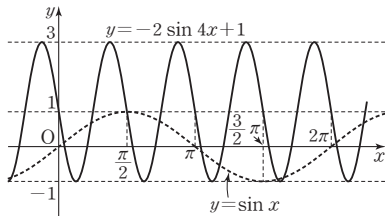


답 풀이 참조

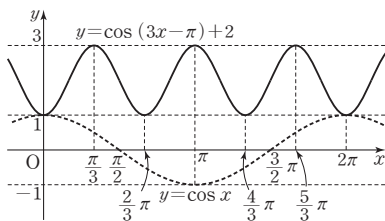
058

- (1) 함수 $y = -2 \sin 4x + 1$ 의 그래프는 함수 $y = \sin x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 y 축의 방

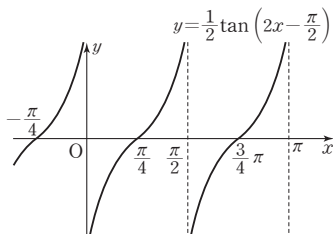
향으로 2배, x 축의 방향으로 $\frac{1}{4}$ 배 한 후 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.
따라서 그래프는 다음 그림과 같고, 최댓값은 $2+1=3$, 최솟값은 $-2+1=-1$, 주기는 $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ 이다.



- (2) 함수 $y = \cos(3x - \pi) + 2 = \cos 3(x - \frac{\pi}{3}) + 2$ 의 그래프는 함수 $y = \cos x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{3}$ 배 한 후 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{3}$ 만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.
따라서 그래프는 다음 그림과 같고, 최댓값은 $1+2=3$, 최솟값은 $-1+2=1$, 주기는 $\frac{2}{3}\pi$ 이다.



- (3) 함수 $y = \frac{1}{2} \tan(2x - \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2} \tan 2(x - \frac{\pi}{4})$ 의 그래프는 함수 $y = \tan x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 배, x 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 배 한 후 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$ 만큼 평행이동한 것이다.
따라서 그래프는 다음 그림과 같고, 최댓값, 최솟값은 없고, 주기는 $\frac{\pi}{2}$ 이다.



답 풀이 참조

060

최댓값이 $\frac{9}{2}$ 이고 $a > 0$ 이므로

$$a - c = \frac{9}{2} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

주기가 π 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = \pi \quad \therefore b = 2$$

$$\therefore f(x) = a \cos(2x + \pi) - c$$

$$f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 2 \text{이므로 } a \cos\left(-\frac{2}{3}\pi + \pi\right) - c = 2$$

$$a \cos \frac{\pi}{3} - c = 2, \quad \frac{1}{2}a - c = 2$$

$$\therefore a - 2c = 4 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 을 연립하여 풀면

$$a = 5, c = \frac{1}{2} \quad \text{답 } a = 5, b = 2, c = \frac{1}{2}$$

062

최댓값이 3, 최솟값이 -3 이고 $a > 0$ 이므로 $a = 3$

주기가 $\frac{13}{6}\pi - \frac{\pi}{6} = 2\pi$ 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = 2\pi \quad \therefore b = 1$$

따라서 $y = 3 \cos(x - c)$ 이고, 주어진 그래프는

$y = 3 \cos x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{6}$ 만큼 평행이동한 것이므로

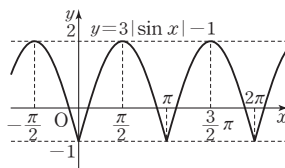
$$c = \frac{\pi}{6} \quad \text{답 } a = 3, b = 1, c = \frac{\pi}{6}$$

+ 풍산자 비법

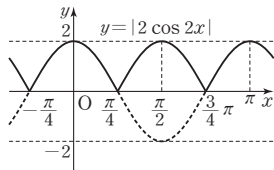
$$\begin{array}{ll} y = a \sin(bx + c) + d & a, d: \text{최댓값, 최솟값 결정} \\ y = a \cos(bx + c) + d & \rightarrow b: \text{주기 결정} \\ & b, c, d: \text{평행이동 결정} \end{array}$$

064

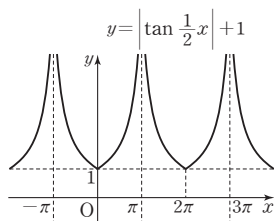
- (1) $y = 3|\sin x| - 1$ 의 그래프는 $y = 3 \sin x$ 의 그래프를 그린 후 x 축의 아랫부분을 x 축에 대하여 대칭이동한 다음 y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.
따라서 그래프는 다음 그림과 같고, 최댓값은 2, 최솟값은 -1 , 주기는 π 이다.



- (2) $y = |2 \cos 2x|$ 의 그래프는 $y = 2 \cos 2x$ 의 그래프를 그린 후 x 축의 아랫부분을 x 축에 대하여 대칭이동한 것이다.
따라서 그래프는 다음 그림과 같고, 최댓값은 2, 최솟값은 0, 주기는 $\frac{\pi}{2}$ 이다.



- (3) $y = \left| \tan \frac{1}{2}x \right| + 1$ 의 그래프는 $y = \tan \frac{1}{2}x$ 의 그래프를 그린 후 x 축의 아랫부분을 x 축에 대하여 대칭이동한 다음 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.
따라서 그래프는 다음 그림과 같고, 최댓값은 없고, 최솟값은 1, 주기는 2π 이다.



답 풀이 참조

066

$$(1) \sin \frac{7}{3}\pi = \sin \left(2\pi + \frac{\pi}{3} \right) \\ = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(2) \cos (-405^\circ) = \cos 405^\circ \\ = \cos (360^\circ + 45^\circ) \\ = \cos 45^\circ \\ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(3) \tan \left(-\frac{25}{6}\pi \right) = -\tan \frac{25}{6}\pi \\ = -\tan \left(4\pi + \frac{\pi}{6} \right) \\ = -\tan \frac{\pi}{6} \\ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

답 (1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

068

$$(1) \sin \left(-\frac{2}{3}\pi \right) = -\sin \frac{2}{3}\pi = -\sin \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) \\ = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(2) \cos \frac{3}{4}\pi = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) \\ = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(3) \tan 210^\circ = \tan (180^\circ + 30^\circ) \\ = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

답 (1) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

070

$$(1) \sin \frac{5}{6}\pi = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) \\ = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\tan \frac{7}{4}\pi = \tan \left(2\pi - \frac{\pi}{4} \right) = \tan \left(-\frac{\pi}{4} \right) \\ = -\tan \frac{\pi}{4} = -1$$

$$\cos \left(-\frac{13}{3}\pi \right) = \cos \frac{13}{3}\pi = \cos \left(2\pi \times 2 + \frac{\pi}{3} \right) \\ = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \sin \frac{5}{6}\pi - \tan \frac{7}{4}\pi + \cos \left(-\frac{13}{3}\pi \right) \\ = \frac{1}{2} - (-1) + \frac{1}{2} = 2$$

$$(2) \tan 390^\circ = \tan (360^\circ + 30^\circ) \\ = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin 840^\circ = \sin (360^\circ \times 2 + 120^\circ) \\ = \sin 120^\circ = \sin (180^\circ - 60^\circ) \\ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos (-210^\circ) = \cos 210^\circ = \cos (180^\circ + 30^\circ) \\ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan (-600^\circ) = -\tan 600^\circ = -\tan (360^\circ + 240^\circ) \\ = -\tan 240^\circ = -\tan (180^\circ + 60^\circ) \\ = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\therefore \tan 390^\circ \sin 840^\circ - \cos (-210^\circ) \tan (-600^\circ) \\ = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \times (-\sqrt{3}) \\ = -1$$

답 (1) 2 (2) -1

072

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta, \sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta, \sin(\pi-\theta)=\sin\theta$$

$$\begin{aligned} \therefore & \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{1+\sin(\pi+\theta)} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{1+\sin(\pi-\theta)} \\ &= \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} \\ &= \frac{\cos\theta(1+\sin\theta)+\cos\theta(1-\sin\theta)}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)} \\ &= \frac{2\cos\theta}{1-\sin^2\theta} = \frac{2\cos\theta}{\cos^2\theta} = \frac{2}{\cos\theta} \end{aligned}$$

$$\text{답 } \frac{2}{\cos\theta}$$

074

(1) $70^\circ=90^\circ-20^\circ$ 이므로 각을 20° 로 통일하면

$$\cos 70^\circ=\cos(90^\circ-20^\circ)=\sin 20^\circ$$

$$\therefore \cos^2 20^\circ+\cos^2 70^\circ=\cos^2 20^\circ+\sin^2 20^\circ=1$$

(2) 각의 합이 90° 인 항끼리 둘씩 짝을 지어 계산한다.

$$\begin{aligned} \therefore & \sin^2 1^\circ+\sin^2 2^\circ+\sin^2 3^\circ+\cdots+\sin^2 89^\circ \\ &= (\sin^2 1^\circ+\sin^2 89^\circ)+(\sin^2 2^\circ+\sin^2 88^\circ) \\ & \quad +\cdots+(\sin^2 44^\circ+\sin^2 46^\circ)+\sin^2 45^\circ \\ &= (\sin^2 1^\circ+\cos^2 1^\circ)+(\sin^2 2^\circ+\cos^2 2^\circ) \\ & \quad +\cdots+(\sin^2 44^\circ+\cos^2 44^\circ)+\sin^2 45^\circ \\ &= \underbrace{1+1+\cdots+1}_{44\text{개}} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\ &= 44 + \frac{1}{2} = \frac{89}{2} \end{aligned}$$

$$\text{답 } (1) 1 \quad (2) \frac{89}{2}$$

+ 풍산자 비법

각을 변형하여 삼각함수의 값을 구할 수 없을 때는 적당히 짝을 지어 각을 통일한다.

076

$$\begin{aligned} (1) \sin 23^\circ+\cos 21^\circ &= 0.3907+0.9336 \\ &= 1.3243 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \cos 24^\circ-\tan 25^\circ &= 0.9135-0.4663 \\ &= 0.4472 \end{aligned}$$

$$\text{답 } (1) 1.3243 \quad (2) 0.4472$$

필수 확인 문제

140쪽

077

각 함수의 주기는 다음과 같다.

$$\textcircled{1} 2\pi \quad \textcircled{2} \frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2} \quad \textcircled{3} \frac{\pi}{2}$$

$$\textcircled{4} \frac{2\pi}{\frac{1}{3}}=6\pi \quad \textcircled{5} \frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$$

따라서 주기가 가장 큰 것은 ④이다.

답 ④

078

ㄱ은 옳다.

최댓값은 $4-1=3$ 이다.

최솟값은 $-4-1=-5$ 이다.

ㄴ도 옳다.

주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$ 이다.

ㄷ은 옳지 않다.

$$y=4\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-1=4\sin 2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)-1$$

이므로 함수 $y=4\sin 2x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로

$-\frac{\pi}{12}$ 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

079

주기가 $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$ 이고 $a>0$ 이므로

$$\frac{\pi}{a}=\frac{\pi}{4} \quad \therefore a=4$$

따라서 $y=\tan(4x-b)$ 이고, 주어진 그래프는

$y=\tan 4x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{8}$ 만큼 평행이

동한 것이므로

$$y=\tan 4\left(x-\frac{\pi}{8}\right)=\tan\left(4x-\frac{\pi}{2}\right) \quad \therefore b=\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore ab=4\times\frac{\pi}{2}=2\pi$$

답 2π

080

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta, \cos(\pi+\theta)=-\cos\theta,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta, \cos(\pi-\theta)=-\cos\theta,$$

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=-\cos\theta$$

$$\begin{aligned}
&\therefore \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{1-\cos(\pi+\theta)} - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{1+\cos(\pi-\theta)} + \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)} \\
&= \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} - \frac{-\sin\theta}{1-\cos\theta} + \frac{\sin^2\theta}{(-\cos\theta)^2} \\
&= \frac{\sin\theta(1-\cos\theta)+\sin\theta(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)} + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} \\
&= \frac{2\sin\theta}{1-\cos^2\theta} + \tan^2\theta \\
&= \frac{2\sin\theta}{\sin^2\theta} + \tan^2\theta \\
&= \frac{2}{\sin\theta} + \tan^2\theta \\
&\text{이때 } \theta = \frac{5}{6}\pi \text{이므로} \\
&\sin\theta = \sin\frac{5}{6}\pi \\
&= \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \\
&= \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \\
&\tan\theta = \tan\frac{5}{6}\pi \\
&= \tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \\
&= -\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\
&\therefore \frac{2}{\sin\theta} + \tan^2\theta = \frac{2}{\frac{1}{2}} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \\
&= 4 + \frac{1}{3} = \frac{13}{3}
\end{aligned}$$

답 $\frac{13}{3}$

081

원의 둘레를 10등분 하였으므로

$$10\theta = 2\pi \quad \therefore 5\theta = \pi$$

$$\begin{aligned}
&\therefore \cos 2\theta + \cos 4\theta + \cos 5\theta + \cos 7\theta + \cos 9\theta \\
&= \cos 2\theta + \cos 4\theta + \cos 5\theta + \cos(5\theta + 2\theta) \\
&\quad + \cos(5\theta + 4\theta) \\
&= \cos 2\theta + \cos 4\theta + \cos \pi + \cos(\pi + 2\theta) \\
&\quad + \cos(\pi + 4\theta) \\
&= \cos 2\theta + \cos 4\theta - 1 - \cos 2\theta - \cos 4\theta \\
&= -1
\end{aligned}$$

답 -1

2 삼각함수의 그래프의 활용

141~149쪽

083

$$y = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 3\cos(x + \pi) + 2$$

$$= \cos x - 3 \times (-\cos x) + 2$$

$$= 4\cos x + 2$$

이때 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로 $-4 \leq 4\cos x \leq 4$

$$\therefore -2 \leq 4\cos x + 2 \leq 6$$

따라서 구하는 최댓값은 6, 최솟값은 -2 이다.

답 최댓값: 6, 최솟값: -2

+ 풍산자 방법

삼각함수를 포함한 식의 최대·최소를 구할 때, 삼각함수가 두 종류 이상이거나 각이 통일되지 않은 경우에는 먼저 삼각함수와 각을 하나로 통일한다.

085

(1) $y = |\sin x + 2| - 5$ 에서 $\sin x = t$ 로 놓으면

$$y = |t + 2| - 5$$

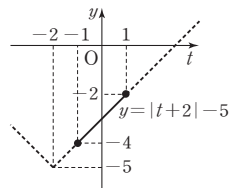
(단, $-1 \leq t \leq 1$)

따라서 함수의 그래프는

오른쪽 그림과 같으므로

$t = 1$ 일 때 최댓값은 -2 ,

$t = -1$ 일 때 최솟값은 -4



(2) $y = -|\cos x - 3| + 2$ 에서 $\cos x = t$ 로 놓으면

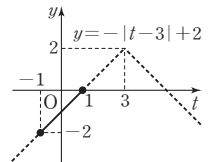
$$y = -|t - 3| + 2 \quad (\text{단, } -1 \leq t \leq 1)$$

따라서 함수의 그래프는 오른쪽

쪽 그림과 같으므로

$t = 1$ 일 때 최댓값은 0,

$t = -1$ 일 때 최솟값은 -2



답 (1) 최댓값: -2 , 최솟값: -4

(2) 최댓값: 0, 최솟값: -2

다른 풀이

(1) $-1 \leq \sin x \leq 1$ 이므로 $1 \leq \sin x + 2 \leq 3$

$$1 \leq |\sin x + 2| \leq 3$$

$$\therefore -4 \leq |\sin x + 2| - 5 \leq -2$$

따라서 구하는 최댓값은 -2 , 최솟값은 -4 이다.

(2) $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로 $-4 \leq \cos x - 3 \leq -2$

$$2 \leq |\cos x - 3| \leq 4, \quad -4 \leq -|\cos x - 3| \leq -2$$

$$\therefore -2 \leq -|\cos x - 3| + 2 \leq 0$$

따라서 구하는 최댓값은 0, 최솟값은 -2 이다.

087

$$(1) y = -\sin^2 x - 4 \cos x + 6$$

$$= -(1 - \cos^2 x) - 4 \cos x + 6$$

$$= \cos^2 x - 4 \cos x + 5$$

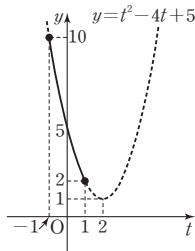
$\cos x = t$ 로 놓으면

$$y = t^2 - 4t + 5 = (t-2)^2 + 1$$

(단, $-1 \leq t \leq 1$)

따라서 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$t = -1$ 일 때 최댓값은 10,
 $t = 1$ 일 때 최솟값은 2



$$(2) \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \text{ 이므로}$$

$$y = 2 \sin^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 4 \sin x - 5$$

$$= 2 \cos^2 x - 4 \sin x - 5$$

$$= 2(1 - \sin^2 x) - 4 \sin x - 5$$

$$= -2 \sin^2 x - 4 \sin x - 3$$

$\sin x = t$ 로 놓으면

$$y = -2t^2 - 4t - 3$$

$$= -2(t+1)^2 - 1$$

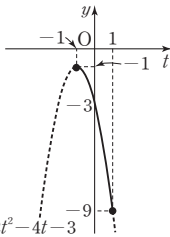
(단, $-1 \leq t \leq 1$)

따라서 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$t = -1$ 일 때 최댓값은 -1 , $t = 1$ 일 때 최솟값은 -9

답 (1) 최댓값: 10, 최솟값: 2

(2) 최댓값: -1 , 최솟값: -9



089

(1) $\sin x = t$ 로 놓으면 주어진 함수는

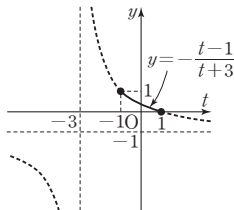
$$y = -\frac{t-1}{t+3} = -\frac{(t+3)-4}{t+3}$$

$$= -1 + \frac{4}{t+3} \quad (\text{단, } -1 \leq t \leq 1)$$

따라서 함수의 그래프는

오른쪽 그림과 같으므로

$t = -1$ 일 때 최댓값은 1,
 $t = 1$ 일 때 최솟값은 0



(2) $\cos x = t$ 로 놓으면 주어진 함수는

$$y = \frac{2t+1}{t+2} = \frac{2(t+2)-3}{t+2}$$

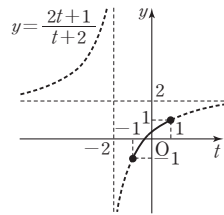
$$= 2 - \frac{3}{t+2} \quad (\text{단, } -1 \leq t \leq 1)$$

따라서 함수의 그래프는

오른쪽 그림과 같으므로

$t = 1$ 일 때 최댓값은 1,

$t = -1$ 일 때 최솟값은 -1



답 (1) 최댓값: 1, 최솟값: 0

(2) 최댓값: 1, 최솟값: -1

다른 풀이

$$(1) y = -\frac{\sin x - 1}{\sin x + 3} = -\frac{(\sin x + 3) - 4}{\sin x + 3}$$

$$= -1 + \frac{4}{\sin x + 3}$$

$-1 \leq \sin x \leq 1$ 이므로 $2 \leq \sin x + 3 \leq 4$

$$\frac{1}{4} \leq \frac{1}{\sin x + 3} \leq \frac{1}{2}, \quad 1 \leq \frac{4}{\sin x + 3} \leq 2$$

$$\therefore 0 \leq -1 + \frac{4}{\sin x + 3} \leq 1$$

따라서 구하는 최댓값은 1, 최솟값은 0이다.

$$(2) y = \frac{2 \cos x + 1}{\cos x + 2} = \frac{2(\cos x + 2) - 3}{\cos x + 2}$$

$$= 2 - \frac{3}{\cos x + 2}$$

$-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로 $1 \leq \cos x + 2 \leq 3$

$$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{\cos x + 2} \leq 1, \quad -3 \leq -\frac{3}{\cos x + 2} \leq -1$$

$$\therefore -1 \leq 2 - \frac{3}{\cos x + 2} \leq 1$$

따라서 구하는 최댓값은 1, 최솟값은 -1 이다.

참고 함수 $y = \frac{k}{x-p} + q$ ($k \neq 0$)의 그래프

(1) 함수 $y = \frac{k}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 p 만큼, y 축

의 방향으로 q 만큼 평행이동한 것이다.

(2) 점 (p, q) 에 대하여 대칭이다.

(3) 점근선은 두 직선 $x = p$, $y = q$ 이다.

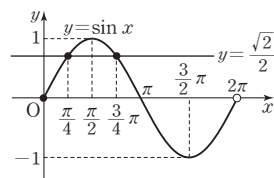
091

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수 $y = \sin x$ 의 그래프와 직선

$y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 의 교점의 x 좌표

는 $\frac{\pi}{4}$ 또는 $\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

이다.



- (1) 주어진 방정식의 해는 교점의 x 좌표와 같으므로

$$x = \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } x = \frac{3}{4}\pi$$

- (2) 주어진 부등식의 해는 함수 $y = \sin x$ 의 그래프가

직선 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 보다 위쪽에 있거나 직선 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 와 만나는 부분의 x 의 값의 범위이므로

$$\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}\pi$$

- (3) 주어진 부등식의 해는 함수 $y = \sin x$ 의 그래프가 직

선 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 보다 아래쪽에 있거나 직선 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 와 만나는 부분의 x 의 값의 범위이므로

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } \frac{3}{4}\pi \leq x < 2\pi$$

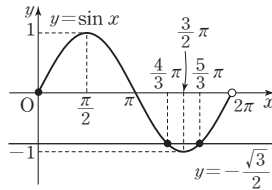
답 (1) $x = \frac{\pi}{4}$ 또는 $x = \frac{3}{4}\pi$ (2) $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}\pi$

(3) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{3}{4}\pi \leq x < 2\pi$

093

- (1) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 해는 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수

$y = \sin x$ 의 그래프와 직선 $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 교점의 x 좌표와 같다.

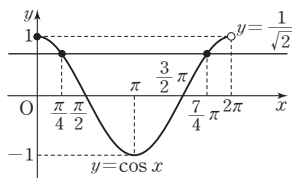


$$\therefore x = \frac{4}{3}\pi \text{ 또는 } x = \frac{5}{3}\pi$$

- (2) $\sqrt{2} \cos x = 1$ 에서 $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

주어진 방정식의 해는 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수

$y = \cos x$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 의 교점의 x 좌표와 같다.

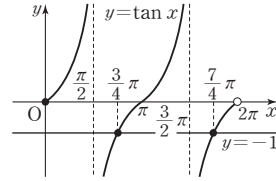


$$\therefore x = \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } x = \frac{7}{4}\pi$$

- (3) $\tan x + 1 = 0$ 에서 $\tan x = -1$

주어진 방정식의 해는 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수

$y = \tan x$ 의 그래프와 직선 $y = -1$ 의 교점의 x 좌표와 같다.



$$\therefore x = \frac{3}{4}\pi \text{ 또는 } x = \frac{7}{4}\pi$$

답 (1) $x = \frac{4}{3}\pi$ 또는 $x = \frac{5}{3}\pi$

(2) $x = \frac{\pi}{4}$ 또는 $x = \frac{7}{4}\pi$

(3) $x = \frac{3}{4}\pi$ 또는 $x = \frac{7}{4}\pi$

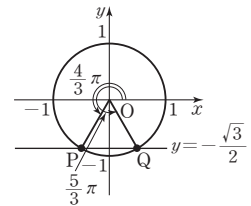
다른 풀이

- (1) 직선 $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 과 원

$$x^2 + y^2 = 1 \text{의 교점 P, Q}$$

에 대하여 동경 OP, OQ가 나타내는 각을 구하면

$$x = \frac{4}{3}\pi \text{ 또는 } x = \frac{5}{3}\pi$$

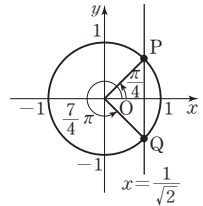


- (2) 직선 $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 과 원 $x^2 + y^2 = 1$

$$\text{의 교점 P, Q에 대하여 동경 OP, OQ가 나타내는 각을 구}$$

하면

$$x = \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } x = \frac{7}{4}\pi$$

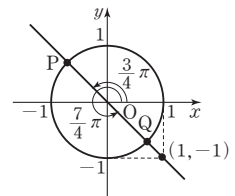


- (3) 원점과 점 $(1, -1)$ 을 지나

$$\text{는 직선과 원 } x^2 + y^2 = 1 \text{의}$$

교점 P, Q에 대하여 동경 OP, OQ가 나타내는 각을 구하면

$$x = \frac{3}{4}\pi \text{ 또는 } x = \frac{7}{4}\pi$$



095

[1단계] (i) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 에서 $2x - \frac{\pi}{3} = \theta$ 로 놓으

$$\text{면 } \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

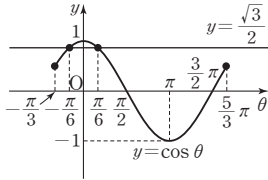
(ii) $0 \leq x \leq \pi$ 의 각 변에 2를 곱하고 $\frac{\pi}{3}$ 를 빼면

$$-\frac{\pi}{3} \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq 2\pi - \frac{\pi}{3}$$

$$\text{즉, } -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5}{3}\pi$$

[2단계] $-\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5}{3}\pi$ 일 때, $\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 해를 구하면

다음 그림에서 $\theta = -\frac{\pi}{6}$ 또는 $\theta = \frac{\pi}{6}$



[3단계] $2x - \frac{\pi}{3} = \theta$ 이므로

$$2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} \text{ 또는 } 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{12} \text{ 또는 } x = \frac{\pi}{4}$$

답 $x = \frac{\pi}{12}$ 또는 $x = \frac{\pi}{4}$

097

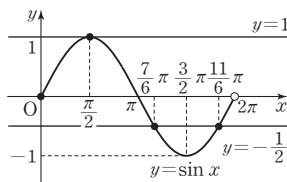
(1) $2 \cos^2 x + \sin x - 1 = 0$ 에서

$$2(1 - \sin^2 x) + \sin x - 1 = 0$$

$$2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

$$(2 \sin x + 1)(\sin x - 1) = 0$$

$$\therefore \sin x = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } \sin x = 1$$



따라서 $0 \leq x < 2\pi$ 에서

(i) $\sin x = -\frac{1}{2}$ 의 해는 $x = \frac{7}{6}\pi$ 또는 $x = \frac{11}{6}\pi$

(ii) $\sin x = 1$ 의 해는 $x = \frac{\pi}{2}$

(i), (ii)에서 $x = \frac{\pi}{2}$ 또는 $x = \frac{7}{6}\pi$ 또는 $x = \frac{11}{6}\pi$

(2) $\tan x + \frac{1}{\tan x} = 2$ 의 양변에 $\tan x$ 를 곱하면

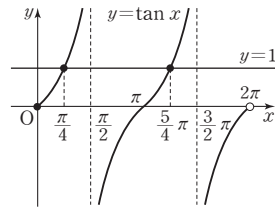
$$\tan^2 x - 2 \tan x + 1 = 0$$

$$(\tan x - 1)^2 = 0$$

$$\therefore \tan x = 1$$

따라서 오른쪽 그림에서

$$x = \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } x = \frac{5}{4}\pi$$



답 (1) $x = \frac{\pi}{2}$ 또는 $x = \frac{7}{6}\pi$ 또는 $x = \frac{11}{6}\pi$

(2) $x = \frac{\pi}{4}$ 또는 $x = \frac{5}{4}\pi$

099

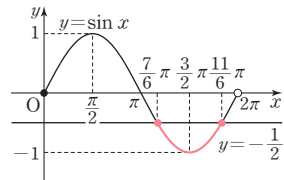
(1) 부등식

$$\sin x \leq -\frac{1}{2} \text{의 해는}$$

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수

$y = \sin x$ 의 그래프

가 직선



$y = -\frac{1}{2}$ 보다 아래쪽에 있거나 직선 $y = -\frac{1}{2}$ 과 만나는 부분의 x 의 값의 범위이므로

$$\frac{7}{6}\pi \leq x \leq \frac{11}{6}\pi$$

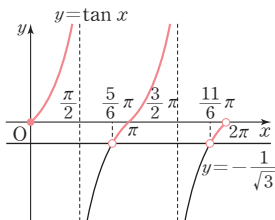
(2) $\sqrt{3} \tan x > -1$ 에서 $\tan x > -\frac{1}{\sqrt{3}}$

따라서 $0 \leq x < 2\pi$ 에

서 부등식의 해는 함수

$y = \tan x$ 의 그래프가 직선

$y = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ 보다 위쪽



에 있는 부분의 x 의 값의 범위이므로

$$0 \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } \frac{5}{6}\pi < x < \frac{3}{2}\pi \text{ 또는 } \frac{11}{6}\pi < x < 2\pi$$

(3) [1단계] (i) $\cos \left(3x - \frac{\pi}{2} \right) \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 에서 $3x - \frac{\pi}{2} = \theta$

$$\text{로 놓으면 } \cos \theta \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(ii) $0 \leq x \leq \pi$ 의 각 변에 3을 곱하고 $\frac{\pi}{2}$ 를 빼면

$$-\frac{\pi}{2} \leq 3x - \frac{\pi}{2} \leq 3\pi - \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{5}{2}\pi$$

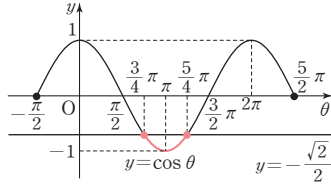
[2단계] $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{5}{2}\pi$ 일 때, $\cos \theta \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 의 해는

함수 $y = \cos \theta$ 의 그래프가 직선 $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 보

다 아래쪽에 있거나 직선 $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 와 만나는

부분의 θ 의 값의 범위가므로 다음 그림에서

$$\frac{3}{4}\pi \leq \theta \leq \frac{5}{4}\pi$$



[3단계] $3x - \frac{\pi}{2} = \theta$ 이므로

$$\frac{3}{4}\pi \leq 3x - \frac{\pi}{2} \leq \frac{5}{4}\pi, \quad \frac{5}{4}\pi \leq 3x \leq \frac{7}{4}\pi$$

$$\therefore \frac{5}{12}\pi \leq x \leq \frac{7}{12}\pi$$

답 (1) $\frac{7}{6}\pi \leq x \leq \frac{11}{6}\pi$

(2) $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi < x < \frac{3}{2}\pi$

또는 $\frac{11}{6}\pi < x < 2\pi$

(3) $\frac{5}{12}\pi \leq x \leq \frac{7}{12}\pi$

101

(1) $\tan^2 x > (\sqrt{3}+1)\tan x - \sqrt{3}$ 에서

$$\tan^2 x - (\sqrt{3}+1)\tan x + \sqrt{3} > 0$$

$$(\tan x - 1)(\tan x - \sqrt{3}) > 0$$

$$\therefore \tan x < 1 \text{ 또는 } \tan x > \sqrt{3}$$

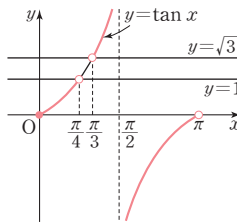
따라서 $0 \leq x < \pi$ 에서

부등식의 해는

$$0 \leq x < \frac{\pi}{4}$$

$$\text{또는 } \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{또는 } \frac{\pi}{2} < x < \pi$$



(2) $\cos^2 x + \sin x - 1 > 0$ 에서

$$(1 - \sin^2 x) + \sin x - 1 > 0, \quad \sin^2 x - \sin x < 0$$

$$\sin x(\sin x - 1) < 0$$

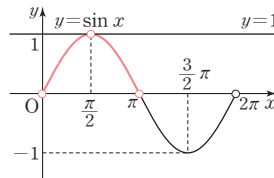
$$\therefore 0 < \sin x < 1$$

따라서 $0 \leq x < 2\pi$ 에

서 부등식의 해는

$$0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{또는 } \frac{\pi}{2} < x < \pi$$



답 (1) $0 \leq x < \frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

(2) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

103

이차방정식 $f(x) = x^2 + (2 \sin \theta + 1)x + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = (2 \sin \theta + 1)^2 - 4$$

$$= 4 \sin^2 \theta + 4 \sin \theta - 3$$

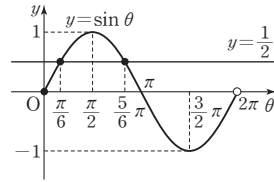
(1) 이차방정식 $f(x) = 0$ 이 중근을 가지므로

$$D = 4 \sin^2 \theta + 4 \sin \theta - 3 = 0$$

$$(2 \sin \theta + 3)(2 \sin \theta - 1) = 0$$

이때 $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ 에서 $2 \sin \theta + 3 > 0$ 이므로

$$2 \sin \theta - 1 = 0 \quad \therefore \sin \theta = \frac{1}{2}$$



따라서 구하는 θ 의 값은

$$\theta = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } \theta = \frac{5}{6}\pi$$

(2) 이차부등식 $f(x) \geq 0$ 이 모든 실수 x 에 대하여 항상 성립하므로

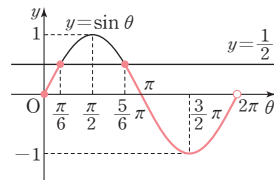
$$D = 4 \sin^2 \theta + 4 \sin \theta - 3 \leq 0$$

$$(2 \sin \theta + 3)(2 \sin \theta - 1) \leq 0$$

이때 $2 \sin \theta + 3 > 0$ 이므로

$$2 \sin \theta - 1 \leq 0$$

$$\therefore \sin \theta \leq \frac{1}{2}$$



따라서 구하는 θ 의 값의 범위는

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } \frac{5}{6}\pi \leq \theta < 2\pi$$

(3) 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나므로

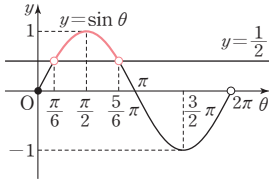
$$D = 4 \sin^2 \theta + 4 \sin \theta - 3 > 0$$

$$(2 \sin \theta + 3)(2 \sin \theta - 1) > 0$$

이때 $2 \sin \theta + 3 > 0$ 이므로

$$2 \sin \theta - 1 > 0$$

$$\therefore \sin \theta > \frac{1}{2}$$



따라서 구하는 θ 의 값의 범위는

$$\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5}{6}\pi$$

답 (1) $\theta = \frac{\pi}{6}$ 또는 $\theta = \frac{5}{6}\pi$

(2) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi \leq \theta < 2\pi$

(3) $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5}{6}\pi$

참고 이차부등식이 항상 성립할 조건

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 판별식을 $D = b^2 - 4ac$ 라 할 때, 이차부등식이 항상 성립할 조건은 다음과 같다.
모든 실수 x 에 대하여

(1) $ax^2 + bx + c > 0 \iff a > 0, D < 0$

(2) $ax^2 + bx + c \geq 0 \iff a > 0, D \leq 0$

(3) $ax^2 + bx + c < 0 \iff a < 0, D < 0$

(4) $ax^2 + bx + c \leq 0 \iff a < 0, D \leq 0$

필수 확인 문제

150쪽

104

$y = a|3 \sin x - 1| + b$ 에서

$\sin x = t$ 로 놓으면

$y = a|3t - 1| + b$

(단, $-1 \leq t \leq 1$)

$a > 0$ 이므로 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

즉, $t = -1$ 일 때 최댓값은

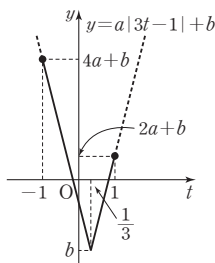
$4a + b$, $t = \frac{1}{3}$ 일 때 최솟값은 b

이때 최댓값이 5, 최솟값이 -3 이므로

$4a + b = 5, b = -3$

따라서 $a = 2, b = -3$ 이므로

$ab = 2 \times (-3) = -6$



답 -6

다른 풀이

$-1 \leq \sin x \leq 1$ 이므로

$-4 \leq 3 \sin x - 1 \leq 2$

$0 \leq |3 \sin x - 1| \leq 4$

이때 $a > 0$ 이므로

$b \leq a|3 \sin x - 1| + b \leq 4a + b$

최댓값이 5, 최솟값이 -3 이므로

$4a + b = 5, b = -3$

따라서 $a = 2, b = -3$ 이므로

$ab = 2 \times (-3) = -6$

105

$\sqrt{3} \sin x = \cos x$ 의 양변을 $\cos x$ 로 나누면

$$\frac{\sqrt{3} \sin x}{\cos x} = 1$$

$$\therefore \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

따라서 $0 \leq x < 2\pi$ 에서

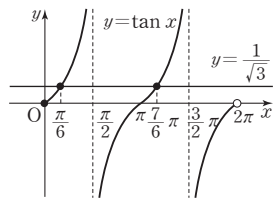
구하는 방정식의 해는 함

수 $y = \tan x$ 의 그래프와

직선 $y = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 의 교점의

x 좌표와 같으므로

$x = \frac{\pi}{6}$ 또는 $x = \frac{7}{6}\pi$



답 $x = \frac{\pi}{6}$ 또는 $x = \frac{7}{6}\pi$

106

$2 \cos^2 x - \sin x - 1 = 0$ 에서

$2(1 - \sin^2 x) - \sin x - 1 = 0, 2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

$(2 \sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$

$\therefore \sin x = \frac{1}{2}$ 또는 $\sin x = -1$

따라서 $0 \leq x < 2\pi$ 에서

(i) $\sin x = \frac{1}{2}$ 의 해는

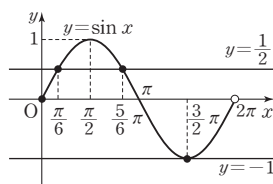
$x = \frac{\pi}{6}$ 또는 $x = \frac{5}{6}\pi$

(ii) $\sin x = -1$ 의 해는

$x = \frac{3}{2}\pi$

(i), (ii)에서 모든 근의 합은

$\frac{\pi}{6} + \frac{5}{6}\pi + \frac{3}{2}\pi = \frac{5}{2}\pi$



답 $\frac{5}{2}\pi$

107

(i) $2 \cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) + \sqrt{3} \geq 0$ 에서

$$\cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2x + \frac{\pi}{3} = \theta \text{로 놓으면}$$

$$\cos \theta \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(ii) $0 \leq x < \pi$ 의 각 변에 2를 곱하고 $\frac{\pi}{3}$ 를 더하면

$$\frac{\pi}{3} \leq 2x + \frac{\pi}{3} < \frac{7}{3}\pi$$

$$\text{즉, } \frac{\pi}{3} \leq \theta < \frac{7}{3}\pi$$

$\frac{\pi}{3} \leq \theta < \frac{7}{3}\pi$ 일 때, $\cos \theta \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 해는

오른쪽 그림에서 함수 $y = \cos \theta$ 의 그래프가 직선

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{보다 위쪽}$$

에 있거나 직선

$y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 과 만나는 부분의 θ 의 값의 범위이므로

$$\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5}{6}\pi \text{ 또는 } \frac{7}{6}\pi \leq \theta < \frac{7}{3}\pi$$

$$2x + \frac{\pi}{3} = \theta \text{이므로}$$

$$\frac{\pi}{3} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{5}{6}\pi \text{ 또는 } \frac{7}{6}\pi \leq 2x + \frac{\pi}{3} < \frac{7}{3}\pi$$

$$\therefore 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } \frac{5}{12}\pi \leq x < \pi$$

따라서 해가 될 수 없는 것은 ③이다.

답 ③

108

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 부등식

$\sin x > \cos x$ 의 해는

$y = \sin x$ 의 그래프가

$y = \cos x$ 의 그래프보다

위쪽에 있는 부분의 x 의

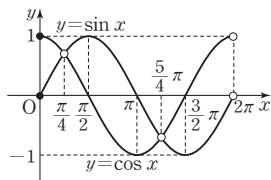
값의 범위이므로

$$\frac{\pi}{4} < x < \frac{5}{4}\pi$$

따라서 $a = \frac{\pi}{4}$, $b = \frac{5}{4}\pi$ 이므로

$$a + b = \frac{\pi}{4} + \frac{5}{4}\pi = \frac{3}{2}\pi$$

답 $\frac{3}{2}\pi$



109

$\cos^2 \left(x - \frac{\pi}{2} \right) + \cos x - k = 0$ 에서

$$\sin^2 x + \cos x - k = 0$$

$$(1 - \cos^2 x) + \cos x - k = 0$$

$$\therefore -\cos^2 x + \cos x + 1 = k$$

주어진 방정식이 실근을 가지려면 함수

$y = -\cos^2 x + \cos x + 1$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 의 교점이 존재해야 한다.

$y = -\cos^2 x + \cos x + 1$ 에서 $\cos x = t$ 로 놓으면

$$y = -t^2 + t + 1$$

$$= -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} \quad (\text{단, } -1 \leq t \leq 1)$$

오른쪽 그림에서 주어진 방정식

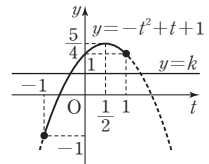
이 실근을 가지려면

$$-1 \leq k \leq \frac{5}{4} \text{ 이어야 하므로}$$

$$M = \frac{5}{4}, m = -1$$

$$\therefore M + m = \frac{5}{4} + (-1) = \frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$



● 실전 연습문제

152~154쪽

110

$f(x) = a \sin \left(bx + \frac{\pi}{6} \right) + c$ 의 최댓값이 4, 최솟값이

-2 이고 $a < 0$ 이므로

$$-a + c = 4, a + c = -2$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a = -3, c = 1$$

또, 주기가 $\frac{\pi}{2}$ 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = \frac{\pi}{2} \quad \therefore b = 4$$

따라서 $f(x) = -3 \sin \left(4x + \frac{\pi}{6} \right) + 1$ 이므로

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -3 \sin \frac{3}{2}\pi + 1 = -3 \times (-1) + 1 = 4$$

답 4

111

함수 $y = a \cos bx + c$ 에서 최댓값이 5, 최솟값이 -3이고 $a > 0$ 이므로

$$a + c = 5, -a + c = -3$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a = 4, c = 1$$

또, 주기가 $\frac{5}{6}\pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \pi$ 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = \pi \quad \therefore b = 2$$

$$\therefore abc = 4 \times 2 \times 1 = 8$$

답 8

112

함수 $y = -\tan ax$ 의 주기는 $\frac{\pi}{|a|}$ 이다.

함수 $y = 2 \cos 3x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{3}$ 이므로

함수 $y = |2 \cos 3x|$ 의 주기는 $\frac{\pi}{3}$ 이다.

이때 두 함수의 주기가 서로 같으므로

$$\frac{\pi}{|a|} = \frac{\pi}{3}, |a| = 3$$

$$a > 0 \text{이므로 } a = 3$$

답 3

113

$$\sin 70^\circ = \sin (90^\circ - 20^\circ) = \cos 20^\circ$$

$$\cos 70^\circ = \cos (90^\circ - 20^\circ) = \sin 20^\circ$$

$$\begin{aligned} \therefore & \left(1 + \frac{1}{\sin 20^\circ}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos 20^\circ}\right) \\ & \times \left(1 - \frac{1}{\sin 70^\circ}\right) \left(1 - \frac{1}{\cos 70^\circ}\right) \\ & = \left(1 + \frac{1}{\sin 20^\circ}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos 20^\circ}\right) \\ & \times \left(1 - \frac{1}{\cos 20^\circ}\right) \left(1 - \frac{1}{\sin 20^\circ}\right) \\ & = \left(1 + \frac{1}{\sin 20^\circ}\right) \left(1 - \frac{1}{\sin 20^\circ}\right) \\ & \times \left(1 + \frac{1}{\cos 20^\circ}\right) \left(1 - \frac{1}{\cos 20^\circ}\right) \\ & = \left(1 - \frac{1}{\sin^2 20^\circ}\right) \left(1 - \frac{1}{\cos^2 20^\circ}\right) \\ & = \frac{\sin^2 20^\circ - 1}{\sin^2 20^\circ} \times \frac{\cos^2 20^\circ - 1}{\cos^2 20^\circ} \\ & \quad \leftarrow \sin^2 20^\circ + \cos^2 20^\circ = 1 \\ & = \frac{-\cos^2 20^\circ}{\sin^2 20^\circ} \times \frac{-\sin^2 20^\circ}{\cos^2 20^\circ} = 1 \end{aligned}$$

답 1

114

삼각형 ABC에서 $A + B + C = \pi$

$\neg$ 은 옳다.

$$\sin A = \sin \{\pi - (B + C)\} = \sin (B + C)$$

$\cup$ 은 옳지 않다.

$$\cos C = \cos \{\pi - (A + B)\} = -\cos (A + B)$$

$\cap$ 도 옳지 않다.

$$\begin{aligned} \tan \frac{A+C}{2} \tan \frac{B}{2} &= \tan \frac{\pi-B}{2} \tan \frac{B}{2} \\ &= \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}\right) \tan \frac{B}{2} \\ &= -\frac{1}{\tan \frac{B}{2}} \tan \frac{B}{2} = -1 \end{aligned}$$

$\cup$ 은 옳다.

$$\cos \frac{B+C}{2} = \cos \frac{\pi-A}{2} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = \sin \frac{A}{2}$$

따라서 옳은 것은 $\neg$, $\cup$ 이다.

답 ③

115

$$\sin \left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x, \sin (x + \pi) = -\sin x \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} y &= 3 \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 4 \cos^2 x - 4 \sin (x + \pi) \\ &= 3 \cos^2 x - 4 \cos^2 x + 4 \sin x \\ &= -\cos^2 x + 4 \sin x \\ &= -(1 - \sin^2 x) + 4 \sin x \\ &= \sin^2 x + 4 \sin x - 1 \end{aligned}$$

$\sin x = t$ 로 놓으면

$$y = t^2 + 4t - 1 = (t+2)^2 - 5 \quad (\text{단, } -1 \leq t \leq 1)$$

오른쪽 그림에서 $t=1$ 일 때 최댓값은 4, $t=-1$ 일 때 최솟값은 -4이므로

$$b = -4$$

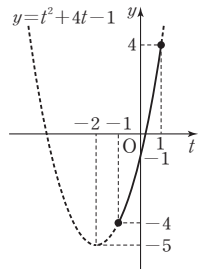
$t = \sin x$ 이므로 $\sin x = -1$ 에서

$$x = -\frac{\pi}{2} \quad (\because -\pi \leq x \leq \pi)$$

$$\therefore a = -\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore ab = \left(-\frac{\pi}{2}\right) \times (-4) = 2\pi$$

답 2π



116

$$(\sin x + \cos x)^2 = \sqrt{2} \cos x + 1 \text{에서}$$

$$\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = \sqrt{2} \cos x + 1$$

$$1 + 2 \sin x \cos x = \sqrt{2} \cos x + 1$$

$$\cos x (2 \sin x - \sqrt{2}) = 0$$

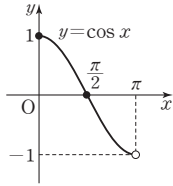
$$\therefore \cos x = 0 \text{ 또는 } \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서 $0 \leq x < \pi$ 에서

(i) $\cos x = 0$ 의 해는

오른쪽 그림에서

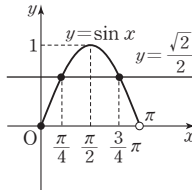
$$x = \frac{\pi}{2}$$



(ii) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 의 해는

오른쪽 그림에서

$$x = \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } x = \frac{3\pi}{4}$$



(i), (ii)에서 모든 근의 합은

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \frac{3}{2}\pi$$

답 $\frac{3}{2}\pi$

117

이차방정식 $x^2 - (2 \sin \theta)x - 3 \cos^2 \theta - 5 \sin \theta + 5 = 0$
이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = \sin^2 \theta - (-3 \cos^2 \theta - 5 \sin \theta + 5) \geq 0$$

$$\sin^2 \theta + 3 \cos^2 \theta + 5 \sin \theta - 5 \geq 0$$

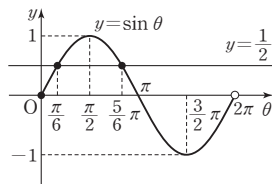
$$\sin^2 \theta + 3(1 - \sin^2 \theta) + 5 \sin \theta - 5 \geq 0$$

$$2 \sin^2 \theta - 5 \sin \theta + 2 \leq 0$$

$$(2 \sin \theta - 1)(\sin \theta - 2) \leq 0$$

이때 $0 \leq \theta < 2\pi$ 에서 $\sin \theta - 2 < 0$ 이므로

$$2 \sin \theta - 1 \geq 0 \quad \therefore \sin \theta \geq \frac{1}{2}$$



$0 \leq \theta < 2\pi$ 에서 구하는 θ 의 값의 범위는 $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}$

이므로 θ 의 최솟값은 $\frac{\pi}{6}$ 이고 최댓값은 $\frac{5\pi}{6}$ 이다.

따라서 $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\beta = \frac{5\pi}{6}$ 이므로

$$4\beta - 2\alpha = 4 \times \frac{5\pi}{6} - 2 \times \frac{\pi}{6} = 3\pi$$

답 ①

118

$\cos^2 \theta - 3 \cos \theta - a + 9 \geq 0$ 에서

$\cos \theta = x$ 로 놓으면

$$x^2 - 3x - a + 9 \geq 0 \quad (\text{단, } -1 \leq x \leq 1)$$

$f(x) = x^2 - 3x - a + 9$ 라 할 때, 모든 실수 x 에 대하여
항상 $f(x) \geq 0$ 이 성립하려면

함수 $y = f(x)$ 의 그래프가

$-1 \leq x \leq 1$ 에서 x 축과 만나거나
 x 축보다 위쪽에 있어야 한다.

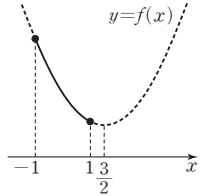
$$\text{이때 } f(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - a + \frac{27}{4}$$

이므로 오른쪽 그림에서

$f(1) \geq 0$ 이어야 한다.

$$f(1) = 1 - 3 - a + 9 \geq 0$$

$$\therefore a \leq 7$$



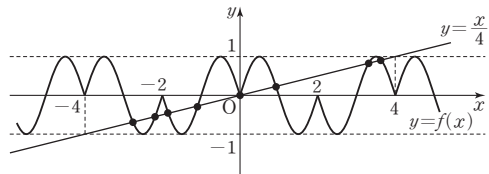
답 $a \leq 7$

119

조건 (나), (다)에서

$$f(x) = \begin{cases} \sin \pi x & (0 \leq x \leq 2) \\ -\sin \pi x & (2 < x \leq 4) \end{cases}$$

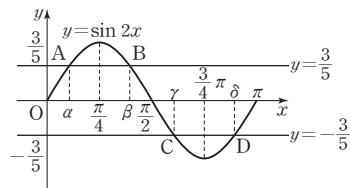
또, 조건 (가)에 의하여 함수 $f(x)$ 의 주기는 4이므로 함수
 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{x}{4}$ 는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{x}{4}$ 가 만나
는 점의 개수는 8이다.

답 8

120



$0 \leq x \leq \pi$ 에서 $\sin 2x = \frac{3}{5}$ 을 만족시키는 예각 x 중에

서 가장 작은 각을 θ 라 하면 $\alpha = \theta$, $\beta = \frac{\pi}{2} - \theta$,

$\gamma = \frac{\pi}{2} + \theta$, $\delta = \pi - \theta$ 이므로

$$\begin{aligned} \alpha + 2\beta + 2\gamma + \delta &= \theta + 2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + 2\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + (\pi - \theta) \\ &= \theta + \pi - 2\theta + \pi + 2\theta + \pi - \theta \\ &= 3\pi \end{aligned}$$

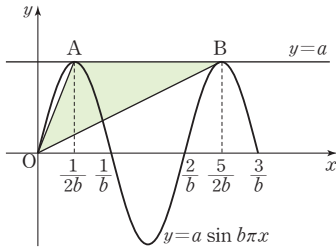
답 ③

참고

함수 $y = \sin 2x$ 의 그래프는 직선 $x = \frac{\pi}{4}$ 에 대칭이므로

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \theta \text{이다.}$$

121



함수 $y = a \sin b\pi x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{|b\pi|}$ 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{2}{b}$$

$$\therefore A\left(\frac{1}{2b}, a\right), B\left(\frac{5}{2b}, a\right)$$

삼각형 OAB의 넓이가 5이고 $a > 0$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times a = 5 \text{에서}$$

$$\frac{1}{2} \times \left(\frac{5}{2b} - \frac{1}{2b}\right) \times a = 5, \frac{a}{b} = 5$$

$$\therefore a = 5b$$

..... ㉠

$$\text{직선 OA의 기울기는 } \frac{a}{\frac{1}{2b}} = 2ab,$$

$$\text{직선 OB의 기울기는 } \frac{a}{\frac{5}{2b}} = \frac{2ab}{5} \text{이고 두 직선 OA,}$$

$$\text{OB의 기울기의 곱이 } \frac{5}{4} \text{이므로}$$

$$2ab \times \frac{2ab}{5} = \frac{5}{4}, \frac{4a^2b^2}{5} = \frac{5}{4}, a^2b^2 = \frac{25}{16}$$

$$\therefore ab = \frac{5}{4} (\because a > 0, b > 0)$$

..... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$$5b^2 = \frac{5}{4}, b^2 = \frac{1}{4} \therefore b = \frac{1}{2} (\because b > 0)$$

$$b = \frac{1}{2} \text{을 ㉠에 대입하면 } a = \frac{5}{2}$$

$$\therefore a + b = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3$$

답 ③

122

$$\begin{aligned} \cos^2\left(\theta + \frac{5}{6}\pi\right) &= \cos^2\left(\theta - \frac{\pi}{6} + \pi\right) = \left\{-\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)\right\}^2 \\ &= \cos^2\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = 1 - \sin^2\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

$$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$$

이므로

$$2 \cos^2\left(\theta + \frac{5}{6}\pi\right) = 3 \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \text{에서}$$

$$2 \left\{1 - \sin^2\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)\right\} = 3 \left\{-\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)\right\}$$

$$2 \sin^2\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) - 3 \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) - 2 = 0$$

$$\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = t \quad (-1 \leq t \leq 1) \text{로 놓으면}$$

$$2t^2 - 3t - 2 = 0, (2t+1)(t-2) = 0$$

$$\text{이때 } -1 \leq t \leq 1 \text{이므로 } t = -\frac{1}{2}$$

$$\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

답 $-\frac{1}{2}$

123

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 2x \cos \theta - \sin^2 \theta \\ &= (x^2 - 2x \cos \theta + \cos^2 \theta) - \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ &= (x - \cos \theta)^2 - (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \\ &= (x - \cos \theta)^2 - 1 \end{aligned}$$

따라서 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(\cos \theta, -1)$ 이고,

이 꼭짓점이 직선 $y = 2x$ 위에 있어야 하므로

$$-1 = 2 \cos \theta \quad \therefore \cos \theta = -\frac{1}{2}$$

$$0 < \theta \leq \pi \text{이므로 } \theta = \frac{2}{3}\pi$$

답 $\frac{2}{3}\pi$

124

(i) $\cos(\pi \sin x) = 0$ 에서 $\pi \sin x = \theta$ 로 놓으면

$$\cos \theta = 0$$

(ii) $-1 \leq \sin x \leq 1$ 이므로

$$-\pi \leq \pi \sin x \leq \pi, \text{ 즉 } -\pi \leq \theta \leq \pi$$

(i), (ii)에서 $-\pi \leq \theta \leq \pi$ 일 때,

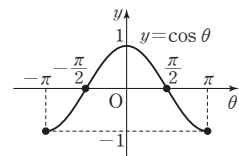
$\cos \theta = 0$ 의 해는 오른쪽 그

림에서

$$\theta = -\frac{\pi}{2} \text{ 또는 } \theta = \frac{\pi}{2}$$

즉, $\pi \sin x = \theta$ 에서

$$\pi \sin x = -\frac{\pi}{2} \text{ 또는 } \pi \sin x = \frac{\pi}{2}$$



$$\therefore \sin x = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } \sin x = \frac{1}{2}$$

따라서 오른쪽 그림에서

$$\sin x = \frac{1}{2} \text{ 일 때,}$$

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{5}{6}\pi$$

$$\sin x = -\frac{1}{2} \text{ 일 때, } x = \frac{7}{6}\pi \text{ 또는 } x = \frac{11}{6}\pi$$

따라서 구하는 모든 근의 합은

$$\frac{\pi}{6} + \frac{5}{6}\pi + \frac{7}{6}\pi + \frac{11}{6}\pi = 4\pi$$

답 4π

125

$-\pi \leq x \leq 0$ 에서 두 함수

$y = |\cos x|$, $y = \sin |x|$ 의

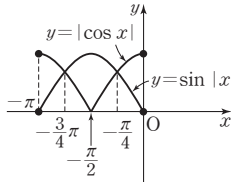
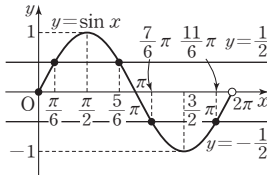
그래프는 오른쪽 그림과 같다.

즉, $-\pi \leq x \leq 0$ 에서

$|\cos x| < \sin |x|$ 인 x 의 값의 범위는

$$-\frac{3}{4}\pi < x < -\frac{\pi}{4}$$

답 $-\frac{3}{4}\pi < x < -\frac{\pi}{4}$



3 삼각함수의 활용

1 사인법칙과 코사인법칙

156~165쪽

127

(1) 사인법칙에 의하여 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

$$\frac{a}{\sin 30^\circ} = \frac{10}{\sin 45^\circ}, a \sin 45^\circ = 10 \sin 30^\circ$$

$$a \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 10 \times \frac{1}{2}$$

$$\therefore a = 10 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$$

(2) 사인법칙에 의하여 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin 30^\circ} = \frac{3}{\sin C}, \sqrt{3} \sin C = 3 \sin 30^\circ$$

$$\sqrt{3} \sin C = 3 \times \frac{1}{2}$$

$$\therefore \sin C = 3 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이때 $0^\circ < C < 180^\circ$ 이므로

$$C = 60^\circ \text{ 또는 } C = 120^\circ$$

답 (1) $5\sqrt{2}$ (2) 60° 또는 120°

129

오른쪽 그림과 같은 삼각형

ABC에서

$$A + B + C = 180^\circ \text{ 이므로}$$

$$C = 180^\circ - (A + B)$$

$$= 180^\circ - (105^\circ + 30^\circ)$$

$$= 45^\circ$$

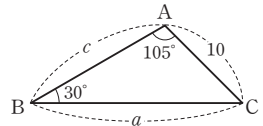
사인법칙에 의하여 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ 이므로

$$\frac{10}{\sin 30^\circ} = \frac{c}{\sin 45^\circ} \text{ 에서 } 10 \sin 45^\circ = c \sin 30^\circ$$

$$10 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = c \times \frac{1}{2}$$

$$\therefore c = 10 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2 = 10\sqrt{2}$$

답 $10\sqrt{2}$



131

(1) $ab : bc : ca$

$$= \left(ab \times \frac{1}{abc} \right) : \left(bc \times \frac{1}{abc} \right) : \left(ca \times \frac{1}{abc} \right)$$

$$= \frac{1}{c} : \frac{1}{a} : \frac{1}{b}$$

이므로 $ab : bc : ca = 4 : 5 : 10$ 에서

$$\frac{1}{c} : \frac{1}{a} : \frac{1}{b} = 4 : 5 : 10$$

$$c : a : b = \frac{1}{4} : \frac{1}{5} : \frac{1}{10}$$

$$\therefore a : b : c = \frac{1}{5} : \frac{1}{10} : \frac{1}{4}$$

$$= 4 : 2 : 5$$

이때 사인법칙에 의하여

$$\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c = 4 : 2 : 5$$

이므로 $\sin A = 4k$, $\sin B = 2k$, $\sin C = 5k$ ($k \neq 0$)

로 놓으면

$$\frac{\sin B \times \sin C}{\sin^2 A} = \frac{2k \times 5k}{(4k)^2} = \frac{5}{8}$$

(2) $A + B + C = 180^\circ$ 이고,

$$A : B : C = 1 : 1 : 2 \text{ 이므로}$$

$$A = 180^\circ \times \frac{1}{4} = 45^\circ$$

$$B = 180^\circ \times \frac{1}{4} = 45^\circ$$

$$C = 180^\circ \times \frac{2}{4} = 90^\circ$$

$$\therefore \sin A : \sin B : \sin C$$

$$= \sin 45^\circ : \sin 45^\circ : \sin 90^\circ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} : \frac{1}{\sqrt{2}} : 1$$

$$= 1 : 1 : \sqrt{2}$$

이때 사인법칙에 의하여

$$\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c = 1 : 1 : \sqrt{2}$$

이므로 $a = k$, $b = k$, $c = \sqrt{2}k$ ($k \neq 0$)로 놓으면

$$\frac{a^2 - b^2 - c^2}{(a - b - c)^2} = \frac{k^2 - k^2 - (\sqrt{2}k)^2}{(k - k - \sqrt{2}k)^2} = -1$$

$$\text{답 (1) } \frac{5}{8} \quad (2) -1$$

참고

삼각형 ABC에서 $A : B : C = l : m : n$ 일 때,

$$A = 180^\circ \times \frac{l}{l + m + n}$$

$$B = 180^\circ \times \frac{m}{l + m + n}$$

$$C = 180^\circ \times \frac{n}{l + m + n}$$

133

두 변의 길이와 그 끼인각의 크기가 주어졌으므로 코사인법칙을 이용하여 b^2 의 값을 구하면

$$\begin{aligned} b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cos B \\ &= (2\sqrt{2})^2 + 3^2 - 2 \times 2\sqrt{2} \times 3 \times \cos 45^\circ \\ &= 8 + 9 - 2 \times 2\sqrt{2} \times 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 5 \end{aligned}$$

$b > 0$ 이므로 $b = \sqrt{5}$

답 $\sqrt{5}$

135

세 변의 길이가 주어졌으므로 코사인법칙의 변형 공식을 이용하여 $\cos C$ 의 값을 구하면

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{3^2 + 5^2 - 7^2}{2 \times 3 \times 5} = -\frac{1}{2}$$

이때 $0^\circ < C < 180^\circ$ 이므로 $C = 120^\circ$

답 120°

137

(1) 세 변의 길이가 주어졌으므로 코사인법칙의 변형 공식을 이용한다.

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ &= \frac{(\sqrt{3}-1)^2 + 2^2 - (\sqrt{6})^2}{2 \times (\sqrt{3}-1) \times 2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos B &= \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \\ &= \frac{2^2 + (\sqrt{6})^2 - (\sqrt{3}-1)^2}{2 \times 2 \times \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \\ &= \frac{(\sqrt{6})^2 + (\sqrt{3}-1)^2 - 2^2}{2 \times \sqrt{6} \times (\sqrt{3}-1)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

이때 B 는 알 수 없지만 $A = 120^\circ$, $C = 45^\circ$ 임을 알 수 있다.

그런데 $A + B + C = 180^\circ$ 이므로 $B = 15^\circ$

$$\therefore A = 120^\circ, B = 15^\circ, C = 45^\circ$$

(2) [1단계] 두 변의 길이와 그 끼인각의 크기가 주어졌으므로 코사인법칙을 이용한다.

$$a = 2, b = \sqrt{3} - 1, C = 30^\circ \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \\ &= 2^2 + (\sqrt{3}-1)^2 - 2 \times 2 \times (\sqrt{3}-1) \times \cos 30^\circ \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\therefore c = \sqrt{2} \quad (\because c > 0)$$

[2단계] 이제 세 변의 길이를 구했으므로 코사인법칙의 변형 공식을 이용한다.

이때 A 를 먼저 구한 후 B 는 $A + B + C = 180^\circ$ 임을 이용하여 구한다.

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ &= \frac{(\sqrt{3}-1)^2 + (\sqrt{2})^2 - 2^2}{2 \times (\sqrt{3}-1) \times \sqrt{2}} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

$$\therefore A = 135^\circ$$

$$A + B + C = 180^\circ \text{이므로 } B = 15^\circ$$

$$\therefore c = \sqrt{2}, A = 135^\circ, B = 15^\circ$$

답 (1) $A = 120^\circ, B = 15^\circ, C = 45^\circ$

(2) $c = \sqrt{2}, A = 135^\circ, B = 15^\circ$

139

6 sin A = 2√3 sin B = 3 sin C의 각 변을 6√3으로 나누면

$$\frac{\sin A}{\sqrt{3}} = \frac{\sin B}{3} = \frac{\sin C}{2\sqrt{3}}$$

이때 사인법칙에 의하여

$$\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c = \sqrt{3} : 3 : 2\sqrt{3}$$

이제 오른쪽 그림과 같은 삼각형 ABC

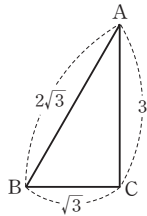
에서 A를 구하는 문제로 변신했다.

코사인법칙의 변형 공식에 의하여

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ &= \frac{3^2 + (2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2}{2 \times 3 \times 2\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

$$\text{이때 } 0^\circ < A < 180^\circ \text{이므로 } A = 30^\circ$$

답 30°



141

오른쪽 그림과 같이 $a = \sqrt{6}$,

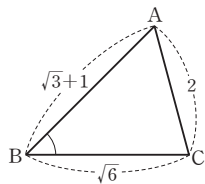
$b = 2, c = \sqrt{3} + 1$ 이라 하면 가장 작은 각은 $b = 2$ 인 변의 대각이다.

코사인법칙의 변형 공식에 의하여

$$\begin{aligned}\cos B &= \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \\ &= \frac{(\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{6})^2 - 2^2}{2 \times (\sqrt{3}+1) \times \sqrt{6}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

$$\therefore B = 45^\circ$$

답 45°



143

(1) $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$ 임을 이용해 사인에 대한 식으로 고치면

$$\sin^2 A + (1 - \sin^2 B) + (1 - \sin^2 C) = 2$$

$$\therefore \sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C$$

$$\text{이 식에 } \sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

를 대입하면

$$\left(\frac{a}{2R}\right)^2 = \left(\frac{b}{2R}\right)^2 + \left(\frac{c}{2R}\right)^2 \quad \therefore a^2 = b^2 + c^2$$

따라서 삼각형 ABC는 $A = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

(2) $\cos A : \cos B = a : b$ 에서 $a \cos B = b \cos A$

$$\text{이 식에 } \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca},$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \text{을 대입하면}$$

$$a \times \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = b \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$c^2 + a^2 - b^2 = b^2 + c^2 - a^2$$

$$a^2 = b^2 \quad \therefore a = b$$

따라서 삼각형 ABC는 $a = b$ 인 이등변삼각형이다.

답 (1) $A = 90^\circ$ 인 직각삼각형

(2) $a = b$ 인 이등변삼각형

145

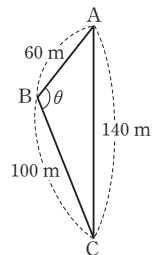
오른쪽 그림과 같은 삼각형 ABC에

코사인법칙의 변형 공식을 이용하면

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{60^2 + 100^2 - 140^2}{2 \times 60 \times 100} \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

이때 $0^\circ < \theta < 180^\circ$ 이므로

$$\theta = 120^\circ$$



답 120°

147

두 변의 길이와 그 끼인각의 크기가 주어졌으므로 삼각형 ABC에서 코사인법칙을 이용하면

$$\overline{AC}^2 = 8^2 + 10^2 - 2 \times 8 \times 10 \times \cos 60^\circ$$

$$= 64 + 100 - 80$$

$$= 84$$

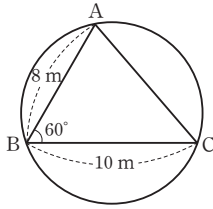
$$\therefore \overline{AC} = 2\sqrt{21} \text{ (m)}$$

마주보는 각의 크기와 변의 길이를 알고 있으므로 삼각형 ABC에서 사인법칙을 이용한다.

외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면

$$\frac{2\sqrt{21}}{\sin 60^\circ} = 2R, R = \frac{\sqrt{21}}{\sin 60^\circ} = 2\sqrt{7}$$

따라서 분수의 넓이는 $\pi(2\sqrt{7})^2 = 28\pi$



답 28π

필수 확인 문제

166쪽

148

(1) $A + B + C = 180^\circ$ 이므로

$$A = 180^\circ - (45^\circ + 105^\circ) = 30^\circ$$

사인법칙에 의하여

$$\frac{a}{\sin 30^\circ} = \frac{8}{\sin 45^\circ}, a \sin 45^\circ = 8 \sin 30^\circ$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}a = 8 \times \frac{1}{2} \quad \therefore a = 4 \times \frac{2}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$

또, 사인법칙에 의하여

$$\frac{8}{\sin 45^\circ} = 2R \quad \therefore R = \frac{8}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \times \frac{1}{2} = 4\sqrt{2}$$

$$a^2 + R^2 = (4\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2 = 64$$

(2) 코사인법칙의 변형 공식에 의하여

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{(2\sqrt{3})^2 + 5^2 - (\sqrt{7})^2}{2 \times 2\sqrt{3} \times 5} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이때 $0^\circ < B < 180^\circ$ 이므로 $B = 30^\circ$

$$A + B + C = 180^\circ \text{이므로}$$

$$A + C = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$$

답 (1) 64 (2) 150°

149

$(b+c) : (c+a) : (a+b) = 5 : 6 : 7$ 이므로

비례상수 k ($k \neq 0$)를 이용하여 나타내면

$$b+c=5k \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$c+a=6k \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$a+b=7k \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3} \text{을 하면 } 2(a+b+c) = 18k$$

$$\therefore a+b+c=9k \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{4} - \textcircled{1}, \textcircled{4} - \textcircled{2}, \textcircled{4} - \textcircled{3} \text{을 하면}$$

$$a=4k, b=3k, c=2k$$

따라서 세 변의 길이가 주어졌으므로 코사인법칙의 변형 공식을 이용하여 $\cos A$ 의 값을 구하면

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ &= \frac{(3k)^2 + (2k)^2 - (4k)^2}{2 \times 3k \times 2k} \\ &= -\frac{1}{4} \end{aligned} \quad \text{답 } -\frac{1}{4}$$

150

$$\frac{7}{\sin A} = \frac{8}{\sin B} = \frac{13}{\sin C} \text{에서}$$

$$\sin A : \sin B : \sin C = 7 : 8 : 13$$

사인법칙에 의하여

$$\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c \text{이므로}$$

$$a : b : c = 7 : 8 : 13$$

이때 $a=7l, b=8l, c=13l$ ($l \neq 0$)로 놓으면 대변의 길이가 최대일 때 각의 크기가 가장 크므로 가장 큰 각은 C 이다.

코사인법칙의 변형 공식에 의하여

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(7l)^2 + (8l)^2 - (13l)^2}{2 \times 7l \times 8l} = -\frac{1}{2}$$

이때 $0^\circ < C < 180^\circ$ 이므로 $C = 120^\circ$ 답 120°

151

(가) $a^2 = b^2 + c^2 - bc$ 를 코사인법칙

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \text{와 비교하면}$$

$$2 \cos A = 1$$

$$\therefore \cos A = \frac{1}{2}$$

$$0^\circ < A < 180^\circ \text{이므로 } A = 60^\circ \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(나) 주어진 식에 $\sin A = \frac{a}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$,

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \text{을 대입하면}$$

$$\frac{a}{2R} = 2 \times \frac{c}{2R} \times \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

$$a^2 = a^2 + c^2 - b^2, b^2 = c^2$$

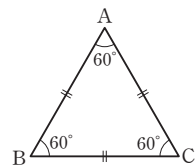
$$\therefore b = c$$

즉, 삼각형 ABC는 $b=c$ 인

이등변삼각형이다. $\textcircled{2}$

따라서 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에 의하여 삼각형

ABC는 정삼각형이다.



답 정삼각형

152

삼각형 ABC에서 $A+B+C=180^\circ$ 이므로

$$C=180^\circ-(75^\circ+45^\circ)=60^\circ$$

사인법칙에 의하여

$$\frac{90}{\sin 60^\circ} = \frac{\overline{AC}}{\sin 45^\circ}, \quad \overline{AC} \sin 60^\circ = 90 \sin 45^\circ$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \times \overline{AC} = 90 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \overline{AC} = 45\sqrt{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = 30\sqrt{6} \text{ (m)} \quad \text{답 } 30\sqrt{6} \text{ m}$$

153

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AC}}{\sin 45^\circ} = \frac{3\sqrt{6}}{\sin 60^\circ}, \quad \overline{AC} \sin 60^\circ = 3\sqrt{6} \sin 45^\circ$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \times \overline{AC} = 3\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \overline{AC} = 6$$

삼각형 ACD는 $\overline{AC} = \overline{CD} = 6$ 인 이등변삼각형이고

$$\angle ACD = 180^\circ - \angle ACB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

이므로 삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 - 2 \times \overline{AC} \times \overline{CD} \times \cos 120^\circ$$

$$= 6^2 + 6^2 - 2 \times 6 \times 6 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 108$$

$$\therefore \overline{AD} = 6\sqrt{3} \quad (\because \overline{AD} > 0) \quad \text{답 } 6\sqrt{3}$$

2 도형의 넓이

167~171쪽

155

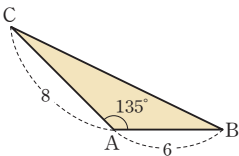
삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A$$

$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 6 \times \sin 135^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= 12\sqrt{2}$$

답 $12\sqrt{2}$ 

157

코사인법칙의 변형 공식에 의하여

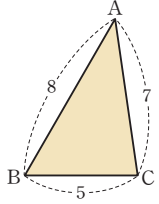
$$\cos C = \frac{5^2 + 7^2 - 8^2}{2 \times 5 \times 7} = \frac{1}{7}$$

 $0^\circ < C < 180^\circ$ 에서 $\sin C > 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \sin C &= \sqrt{1 - \cos^2 C} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{7}\right)^2} = \frac{4\sqrt{3}}{7} \end{aligned}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times 5 \times 7 \times \frac{4\sqrt{3}}{7} = 10\sqrt{3} \quad \text{답 } 10\sqrt{3}$$



다른 풀이

삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면 헤론의 공식에 의하여

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{10 \times (10-5) \times (10-7) \times (10-8)} \\ &= \sqrt{10 \times 5 \times 3 \times 2} = 10\sqrt{3} \end{aligned}$$

+ 풍산자 비법

헤론의 공식

세 변의 길이가 주어진 삼각형 ABC의 넓이는

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \left(\text{단, } s = \frac{a+b+c}{2} \right)$$

159

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= (2\sqrt{2})^2 + 6^2 - 2 \times 2\sqrt{2} \times 6 \times \cos 45^\circ \\ &= 8 + 36 - 2 \times 2\sqrt{2} \times 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 20 \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{AC} = 2\sqrt{5} \quad (\because \overline{AC} > 0)$$

사각형 ABCD의 넓이를 S라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 6 \times \sin 45^\circ + \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times 4 \times \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times 4 \times \frac{1}{2}$$

$$= 6 + 2\sqrt{5} \quad \text{답 } 6 + 2\sqrt{5}$$

161

삼각형 ABC에서 $\overline{AD} = x$ 로 놓고 끼인각 공식을 쓰면

$$\frac{1}{2} \times 8 \times 4 \times \sin 120^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 8 \times x \times \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \times 4 \times x \times \sin 60^\circ$$

$$8\sqrt{3} = 2\sqrt{3}x + \sqrt{3}x$$

$$\therefore x = \frac{8}{3} \quad \text{답 } \frac{8}{3}$$

163

평행사변형의 성질에 의하여 두 밑각의 합은 180° 이므로 $B+C=180^\circ$

$$\therefore B=180^\circ-C=180^\circ-135^\circ=45^\circ$$

따라서 평행사변형 ABCD의 넓이를 S라 하면

$$S=\overline{AB} \times \overline{BC} \times \sin B=4 \times 6 \times \sin 45^\circ=12\sqrt{2}$$

답 $12\sqrt{2}$

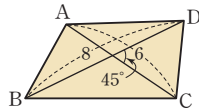
165

주어진 조건을 그림으로 나타내면 오른쪽과 같다.

따라서 사각형 ABCD의 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{BD} \times \sin 45^\circ \\ &= \frac{1}{2} \times 6 \times 8 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 12\sqrt{2} \end{aligned}$$

답 $12\sqrt{2}$



필수 확인 문제

172쪽

166

삼각형 ABC에서 $\cos B = \frac{\sqrt{11}}{6}$ 이고

$0^\circ < B < 180^\circ$ 이므로

$$\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^2} = \frac{5}{6}$$

$\overline{AB}=12$ 이고 삼각형 ABC의 넓이가 45이므로

$$45 = \frac{1}{2} \times 12 \times \overline{BC} \times \sin B$$

$$= \frac{1}{2} \times 12 \times \overline{BC} \times \frac{5}{6} = 5 \overline{BC}$$

$$\therefore \overline{BC}=9$$

답 9

167

원 O의 반지름의 길이를 r라 하면 $\pi r^2 = 5\pi$ 이므로

$$r^2=5$$

$\overline{OA}=\overline{OC}$ 에서 삼각형 OAC는 이등변삼각형이므로

$$\angle OAC=60^\circ$$

$\angle AOB$ 는 삼각형 AOC의 외각이므로

$$\angle AOB=120^\circ$$

따라서 삼각형 ABO의 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{OB} \times \sin 120^\circ \\ &= \frac{1}{2} r^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{5\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

답 $\frac{5\sqrt{3}}{4}$

168

코사인법칙의 변형 공식에 의하여

$$\cos D = \frac{5^2 + 3^2 - 7^2}{2 \times 5 \times 3} = -\frac{1}{2}$$

이때 $90^\circ < D < 180^\circ$ 이므로

$$D=120^\circ$$

$$\therefore \square ABCD = 5 \times 3 \times \sin 120^\circ$$

$$\begin{aligned} &= 5 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{15\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

답 $\frac{15\sqrt{3}}{2}$

169

오른쪽 그림과 같이 대각선 AC를 연결하여 두 개의 삼각형으로 나누면

$\triangle ABC$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 4 \times \sin 60^\circ$$

$$= 2\sqrt{3}$$

또, 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= 2^2 + 4^2 - 2 \times 2 \times 4 \times \cos 60^\circ \\ &= 4 + 16 - 2 \times 2 \times 4 \times \frac{1}{2} \\ &= 12 \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{AC}=2\sqrt{3} \quad (\because \overline{AC}>0)$$

이때 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = \frac{2}{\sin x}$$

$$\therefore \sin x = \frac{1}{2}$$

$0^\circ < x < 75^\circ$ 이므로 $x=30^\circ$

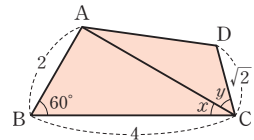
$x+y=75^\circ$ 이므로 $y=45^\circ$

$$\therefore \triangle ACD = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 2\sqrt{3} \times \sin 45^\circ = \sqrt{3}$$

$$\therefore \square ABCD = \triangle ABC + \triangle ACD$$

$$\begin{aligned} &= 2\sqrt{3} + \sqrt{3} \\ &= 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

답 $3\sqrt{3}$



170

삼각형 ABC는 이등변삼각형이고 $A=120^\circ$ 이므로
 $B=C=30^\circ$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 10이므로 사
 인법칙에 의하여

$$\frac{a}{\sin 120^\circ} = \frac{b}{\sin 30^\circ} = \frac{c}{\sin 30^\circ} = 2 \times 10$$

$$\therefore a = 20 \sin 120^\circ = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3},$$

$$b = c = 20 \sin 30^\circ = 20 \times \frac{1}{2} = 10$$

따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이는

$$a + b + c = 10\sqrt{3} + 10 + 10 = 20 + 10\sqrt{3}$$

답 $20 + 10\sqrt{3}$

171

삼각형 ABD에서

$$\angle ABD = 50^\circ, \angle ADB = 40^\circ$$

이므로 $\angle BAD = 90^\circ$

즉, 삼각형 ABD는 직각삼각
 형이고, 지름의 원주각이 직각

이므로 선분 BD는 외접원의 지름이다.

삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면

$$\overline{BD} = 2R = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore R = \sqrt{3}$$

$B=50^\circ+70^\circ=120^\circ$ 이므로 삼각형 ABC에서 사인법칙
 에 의하여

$$\frac{\overline{AC}}{\sin B} = 2R \text{에서}$$

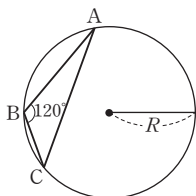
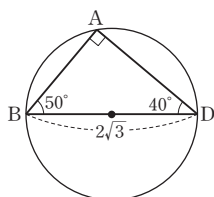
$$\frac{\overline{AC}}{\sin 120^\circ} = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore \overline{AC} = 2\sqrt{3} \sin 120^\circ$$

$$= 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 3$$

답 3



172

삼각형 ABC에서 $A+B+C=180^\circ$ 이므로

$$B+C=180^\circ-A$$

$$\therefore \cos(B+C) = \cos(180^\circ-A)$$

$$= -\cos A$$

이를 $2 \cos(B+C) \cos A = -1$ 에 대입하면

$$-2 \cos^2 A = -1, \cos^2 A = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \cos A = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\because 0^\circ < A < 90^\circ)$$

이때 $0^\circ < A < 90^\circ$ 이므로 $A=45^\circ$

$$\therefore \sin A = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면

사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin A} = 2R$$

$$\therefore \overline{BC} = 2R \sin A$$

$$= 2 \times 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$$

답 $4\sqrt{2}$

173

$\sin A = \tan C \cos A$ 에서

$$\sin A = \frac{\sin C}{\cos C} \times \cos A$$

$$\therefore \sin A \cos C = \sin C \cos A \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면

사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R} \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

코사인법칙의 변형 공식에 의하여

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

㉠, ㉢을 ㉡에 대입하면

$$\frac{a}{2R} \times \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{c}{2R} \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$a^2 + b^2 - c^2 = b^2 + c^2 - a^2$$

$$a^2 = c^2 \quad \therefore a = c$$

따라서 삼각형 ABC는 $a=c$ 인 이등변삼각형이다.

답 $a=c$ 인 이등변삼각형

174

삼각형 ABQ에서 $A+B+Q=180^\circ$ 이므로

$$Q = 180^\circ - (A+B) = 180^\circ - (75^\circ + 45^\circ) = 60^\circ$$

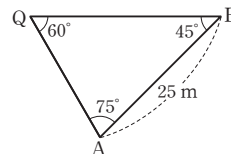
삼각형 ABQ에서 사인법칙
 에 의하여

$$\frac{25}{\sin 60^\circ} = \frac{\overline{AQ}}{\sin 45^\circ}$$

$$25 \sin 45^\circ = \overline{AQ} \sin 60^\circ$$

$$25 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \overline{AQ} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \overline{AQ} = 25 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{25\sqrt{6}}{3}$$



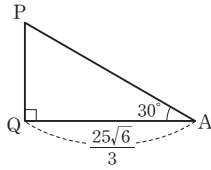
삼각형 PQA에서

$A=30^\circ$ 이므로

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= \frac{25\sqrt{6}}{3} \tan 30^\circ \\ &= \frac{25\sqrt{6}}{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{25\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

따라서 나무의 높이는 $\frac{25\sqrt{2}}{3}$ m이다.

답 $\frac{25\sqrt{2}}{3}$ m



175

(1) 삼각형 ABC에서 코사인법칙의 변형

공식에 의하여

$$\cos A = \frac{14^2 + 6^2 - 10^2}{2 \times 14 \times 6} = \frac{11}{14}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sin A &= \sqrt{1 - \cos^2 A} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{11}{14}\right)^2} \\ &= \frac{5\sqrt{3}}{14}\end{aligned}$$

접시의 반지름의 길이를 R 라 하면

$$\frac{a}{\sin A} = 2R \text{에서}$$

$$\frac{10}{\frac{5\sqrt{3}}{14}} = 2R \quad \therefore R = \frac{14\sqrt{3}}{3}$$

(2) 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점과 내접원의 중심을 연결해 세 개의 삼각형으로 나누면 $S = S_1 + S_2 + S_3$ 에서

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \times 6 \times 14 \times \sin A \\ &= \frac{1}{2} \times 6 \times 14 \times \frac{5\sqrt{3}}{14} \\ &= 15\sqrt{3}\end{aligned}$$

내접원의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$15\sqrt{3} = \frac{1}{2} \times 6 \times r + \frac{1}{2} \times 10 \times r + \frac{1}{2} \times 14 \times r$$

$$15\sqrt{3} = 15r$$

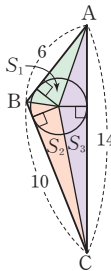
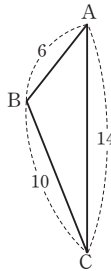
$$\therefore r = \sqrt{3} \quad \text{답 (1) } \frac{14\sqrt{3}}{3} \quad (2) \sqrt{3}$$

다른 풀이

(2) 헤론의 공식에 의하여 삼각형 ABC의 넓이 S 는

$$\begin{aligned}S &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \left(\text{단, } s = \frac{a+b+c}{2} \right) \\ &= \sqrt{15 \times 5 \times 1 \times 9} = 15\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$S = sr \text{에서 } 15\sqrt{3} = 15r \quad \therefore r = \sqrt{3}$$



참고

삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이가 r 일 때,

$\triangle ABC = \frac{1}{2}r(a+b+c)$ 가 성립한다.

176

선분 AP가 $\angle BAC$ 의 이등분선이므로

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BP} : \overline{CP}, 3 : 1 = \overline{BP} : \overline{CP}$$

$$\therefore \overline{BP} = 3\overline{CP}$$

$\overline{CP} = k$ ($k > 0$)라 하면 $\overline{BP} = 3k$ 이므로 삼각형 ABC에서 코사인법칙의 변형 공식에 의하여

$$\cos(\angle BAC) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{3^2 + 1^2 - (4k)^2}{2 \times 3 \times 1}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{10 - 16k^2}{6}, 10 - 16k^2 = 3$$

$$k^2 = \frac{7}{16}$$

$$\therefore \overline{CP} = k = \frac{\sqrt{7}}{4} (\because k > 0)$$

$$\text{또, } \angle BAC = \frac{\pi}{3} \text{이므로 } \angle CAP = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{\pi}{6}$$

삼각형 APC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 삼각형 APC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{CP}}{\sin \frac{\pi}{6}} = 2R, \frac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{\frac{1}{2}} = 2R$$

$$\therefore R = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

따라서 삼각형 APC의 외접원의 넓이는

$$\pi \times \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 = \frac{7}{16} \pi$$

답 ④

177

$\angle ABC = \theta$ 라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙의 변형 공식에 의하여

$$\cos \theta = \frac{9^2 + 12^2 - 6^2}{2 \times 9 \times 12} = \frac{7}{8}$$

$$\therefore \sin(\angle ABE) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta = \frac{7}{8}$$

따라서 삼각형 ABE의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BE} \times \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times 9 \times 12 \times \frac{7}{8}$$

$$= \frac{189}{4}$$

답 $\frac{189}{4}$

178

$\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$ 라 하면 평행사변형 ABCD의 넓이가 $8\sqrt{3}$ 이므로

$$ab \sin 60^\circ = 8\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}ab = 8\sqrt{3}$$

$$\therefore ab = 16$$

..... ㉠

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$(3\sqrt{2})^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 60^\circ$$

$$18 = a^2 + b^2 - 2 \times 16 \times \frac{1}{2} \quad (\because \text{㉠})$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 34$$

..... ㉡

㉠, ㉡에서

$$\begin{aligned} (\overline{AB} + \overline{BC})^2 &= (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ &= 34 + 2 \times 16 = 66 \end{aligned}$$

$a+b > 0$ 이므로

$$a+b = \sqrt{66}$$

답 $\sqrt{66}$

179

사각형 ABCD의 넓이가 15이므로

$$\frac{1}{2} \times 6 \times 3\sqrt{5} \times \sin \theta = 15, 9\sqrt{5} \sin \theta = 15$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{따라서 } \sin^2 \theta = \frac{5}{9} \text{ 이므로}$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$$

$$\therefore \tan^2 \theta = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\frac{5}{9}}{\frac{4}{9}} = \frac{5}{4}$$

답 $\frac{5}{4}$

180

오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정육각형 ABCDEF에서

$$A=B=C=D=E$$

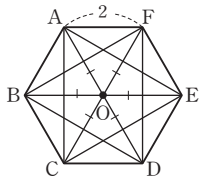
$$=F=120^\circ$$

이므로 평행사변형 ABOF에서

$$\angle FAB + \angle AFO = 180^\circ$$

$$\therefore \angle AFO = 180^\circ - \angle FAB$$

$$= 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$



따라서 삼각형 AOF는 정삼각형이다.

마찬가지 방법으로 하면 삼각형 ABO, BCO, OCD, ODE, OEF는 모두 정삼각형이다.

$$\therefore \overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF} = 4$$

삼각형 ABF에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BF}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AF}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AF} \times \cos (\angle BAF)$$

$$= 2^2 + 2^2 - 2 \times 2 \times 2 \times \cos 120^\circ$$

$$= 4 + 4 - 8 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= 12$$

$$\therefore \overline{BF} = 2\sqrt{3} \quad (\because \overline{BF} > 0)$$

$$\therefore \overline{AC} = \overline{BD} = \overline{CE} = \overline{DF} = \overline{EA} = \overline{FB} = 2\sqrt{3}$$

따라서 한 변의 길이가 2인 정육각형에서 모든 대각선의 길이의 합은

$$3 \times 4 + 6 \times 2\sqrt{3} = 12 + 12\sqrt{3}$$

답 $12 + 12\sqrt{3}$

참고

정n각형의 내각의 크기

$$\rightarrow \frac{180^\circ \times (n-2)}{n}$$

181

오른쪽 그림과 같은 원뿔의 전개도에서 부채꼴의 중심각의 크기를 θ 라 하면 부채꼴의 호의 길이는 밑면인 원의 둘레의 길이와 같으므로

$$12\theta = 2\pi \times 4$$

$$\therefore \theta = \frac{2}{3}\pi$$

이때 선분 OB는 부채꼴의 중심각의 이등분선이므로

$$\angle AOB = \frac{\pi}{3}$$

또, 점 P는 선분 OA를 1:3으로 내분하는 점이므로

$$\overline{OP} = 3$$

따라서 구하는 최단 거리는 선분 BP의 길이이므로 삼각형 OPB에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BP}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OB}^2 - 2 \times \overline{OP} \times \overline{OB} \times \cos (\angle POB)$$

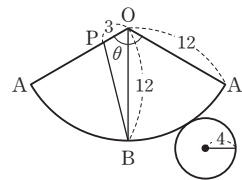
$$= 3^2 + 12^2 - 2 \times 3 \times 12 \times \cos \frac{\pi}{3}$$

$$= 9 + 144 - 2 \times 3 \times 12 \times \frac{1}{2}$$

$$= 117$$

$$\therefore \overline{BP} = 3\sqrt{13} \quad (\because \overline{BP} > 0)$$

답 $3\sqrt{13}$



182

정삼각형 ABC의 내각의 크기는 60° 이고, 한 호에 대한 원주각의 크기는 같으므로

$$\angle BDC = \angle BAC = 60^\circ$$

삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{CD}}{\sin \theta} = \frac{\overline{BC}}{\sin 60^\circ} = 2r$$

이므로

$$\overline{CD} = 2r \sin \theta = \frac{2\sqrt{3}}{3}r$$

$$\overline{BC} = 2r \sin 60^\circ = 2r \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}r$$

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 - 2 \times \overline{BD} \times \overline{CD} \times \cos 60^\circ$$

$$(\sqrt{3}r)^2 = (\sqrt{2})^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}r\right)^2 - 2 \times \sqrt{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3}r \times \cos 60^\circ$$

$$3r^2 = 2 + \frac{4}{3}r^2 - \frac{2\sqrt{6}}{3}r$$

$$5r^2 + 2\sqrt{6}r - 6 = 0$$

$$\therefore r = \frac{-\sqrt{6} \pm \sqrt{(\sqrt{6})^2 - 5 \times (-6)}}{5} = \frac{-\sqrt{6} \pm 6}{5}$$

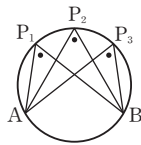
$$\text{이때 } r > 0 \text{ 이므로 } r = \frac{6 - \sqrt{6}}{5}$$

답 ①

참고

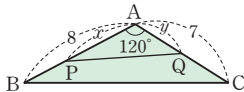
한 원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같다.

$$\therefore \angle AP_1B = \angle AP_2B = \angle AP_3B$$



183

다음 그림에서 $\overline{AP} = x$, $\overline{AQ} = y$ 라 하자.



$$\triangle APQ = \frac{1}{4} \times \triangle ABC \text{에서}$$

$$\frac{1}{2}xy \sin 120^\circ = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2} \times 8 \times 7 \times \sin 120^\circ\right)$$

$$\therefore xy = 14$$

(1) $x > 0$, $y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} = \sqrt{14}$$

$\therefore x+y \geq 2\sqrt{14}$ (단, 등호는 $x=y$ 일 때 성립한다.)

따라서 $\overline{AP} + \overline{AQ}$ 의 최솟값은 $2\sqrt{14}$ 이다.

(2) 삼각형 APQ에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{PQ}^2 &= x^2 + y^2 - 2xy \cos 120^\circ \\ &= x^2 + y^2 - 2 \times 14 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= x^2 + y^2 + 14 \end{aligned}$$

이때 $x^2 > 0$, $y^2 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{x^2 + y^2}{2} \geq \sqrt{x^2 y^2} = xy = 14$$

$\therefore x^2 + y^2 \geq 28$ (단, 등호는 $x=y$ 일 때 성립한다.)

따라서 $\overline{PQ}^2 = x^2 + y^2 + 14 \geq 28 + 14 = 42$ 이므로

$$\overline{PQ} \geq \sqrt{42}$$

따라서 $\overline{PQ}$ 의 최솟값은 $\sqrt{42}$ 이다.

답 (1) $2\sqrt{14}$ (2) $\sqrt{42}$

184

$\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$ 라 하면 $a+b=8$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$(3\sqrt{6})^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 120^\circ$$

$$54 = a^2 + b^2 + ab, 54 = (a+b)^2 - ab$$

$$54 = 8^2 - ab \quad \therefore ab = 10$$

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2}ab \sin 120^\circ = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$\overline{AD} = c$, $\overline{CD} = d$ 라 하면 $c+d = 2\sqrt{39}$

사각형 ABCD가 원에 내접하므로

$$D = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$(3\sqrt{6})^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos 60^\circ$$

$$54 = c^2 + d^2 - cd, 54 = (c+d)^2 - 3cd$$

$$54 = (2\sqrt{39})^2 - 3cd \quad \therefore cd = 34$$

$$\therefore \triangle ACD = \frac{1}{2}cd \sin 60^\circ = \frac{17\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \square ABCD = \triangle ABC + \triangle ACD$$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{17\sqrt{3}}{2}$$

$$= 11\sqrt{3}$$

답 $11\sqrt{3}$

참고

원에 내접하는 사각형에서 한 쌍의 대각의 크기의 합은 180° 이다.

수열

1 등차수열과 등비수열

1 등차수열

180~193쪽

002

(1) 첫째항은 $a=1$, 공차는 $d=a_2-a_1=4-1=3$

$$\begin{aligned}\therefore a_n &= a + (n-1)d \\ &= 1 + (n-1) \times 3 = 3n-2\end{aligned}$$

(2) 첫째항은 $a=-2$,

공차는 $d=a_2-a_1=-7-(-2)=-5$

$$\begin{aligned}\therefore a_n &= a + (n-1)d \\ &= -2 + (n-1) \times (-5) = -5n+3\end{aligned}$$

답 (1) $a_n=3n-2$ (2) $a_n=-5n+3$

다른 풀이

(1) [1단계] 공차는 $a_2-a_1=4-1=3$ 이므로 $a_n=3n+\triangle$

[2단계] $n=1$ 일 때, $a_1=1$ 이므로 $1=3+\triangle$

$$\therefore \triangle = -2 \quad \therefore a_n = 3n-2$$

(2) [1단계] 공차는 $a_2-a_1=-7-(-2)=-5$ 이므로

$$a_n = -5n + \triangle$$

[2단계] $n=1$ 일 때, $a_1=-2$ 이므로 $-2=-5+\triangle$

$$\therefore \triangle = 3 \quad \therefore a_n = -5n+3$$

004

$a_n=2n-5$ 에서 $a_{n+1}=2(n+1)-5=2n-3$

$$\therefore a_{n+1}-a_n=(2n-3)-(2n-5)=2 \leftarrow \text{공차}$$

또, $a_1=2 \times 1 - 5 = -3$ 이다. $\leftarrow$ 첫째항

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 -3 , 공차가 2 인 등차수열이다. **답** 첫째항: -3 , 공차: 2

006

등차수열의 첫째항을 a , 공차를 d , 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$a_3=4 \text{이므로 } a+2d=4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_7=-4 \text{이므로 } a+6d=-4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=8$, $d=-2$

$$\therefore a_{10}=a+9d=8+9 \times (-2)=-10$$

답 -10

008

등차수열의 첫째항을 a , 공차를 d , 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = a + (n-1)d$$

제2항과 제5항은 절댓값이 같고 부호가 반대이므로

$$a_2 = -a_5, a_2+a_5=0, (a+d)+(a+4d)=0$$

$$\therefore 2a+5d=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

제3항이 1 이므로 $a_3=1$

$$\therefore a+2d=1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=5$, $d=-2$

즉, 주어진 수열의 첫째항은 5 , 공차는 -2 이다.

답 첫째항: 5 , 공차: -2

010

[1단계] 첫째항이 -53 , 공차가 5 인 등차수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = -53 + (n-1) \times 5 = 5n-58$$

[2단계] 제 n 항이 양수인 항이라 하면

$$5n-58 > 0 \quad \therefore n > \frac{58}{5} = 11.6$$

이때 n 은 자연수이므로 제12항에서 처음으로 양수가 된다. **답** 제12항

012

등차수열의 첫째항이 10 , 제5항이 -2 이므로 공차를 d , 일반항을 a_n 이라 하면 $a_n=10+(n-1)d$ 에서

$$a_5=10+4d=-2$$

$$\therefore d=-3$$

10 에서 출발해 -2 까지 공차 -3 씩 더해 가면

$$10, 7, 4, 1, -2$$

따라서 구하는 세 수를 큰 것부터 차례대로 나열하면 $7, 4, 1$ 이다. **답** $7, 4, 1$

+ 풍산자 방법

두 수 a, b 사이에 n 개의 수를 넣어서 만든 등차수열에서 a 는 첫째항이고, b 는 제 $(n+2)$ 항이다.

014

세 수 $2x-3, x^2-1, 2x+1$ 이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2(x^2-1)=(2x-3)+(2x+1), 2x^2-4x=0$$

$$x^2-2x=0, x(x-2)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=2$$

답 $x=0$ 또는 $x=2$

016

등차수열을 이루는 세 수를 $a-d, a, a+d$ 로 놓으면
세 수의 합이 6이므로

$$(a-d) + a + (a+d) = 6$$

$$3a = 6 \quad \therefore a = 2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

세 수의 제곱의 합이 14이므로

$$(a-d)^2 + a^2 + (a+d)^2 = 14$$

$$\therefore 3a^2 + 2d^2 = 14 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦을 ⑧에 대입하면

$$12 + 2d^2 = 14, d^2 = 1$$

$$\therefore d = \pm 1$$

(i) $a=2, d=1$ 일 때, 세 수는 1, 2, 3이다.

(ii) $a=2, d=-1$ 일 때, 세 수는 3, 2, 1이다.

따라서 구하는 세 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면
1, 2, 3이다. 답 1, 2, 3

018

(1) 끝항이 주어졌다. $\Rightarrow$ 끝항 공식

첫째항이 3, 끝항이 21, 항수가 10이므로

$$S_{10} = \frac{10 \times (3+21)}{2} = 10 \times 12 = 120$$

(2) 공차가 주어졌다. $\Rightarrow$ 공차 공식

첫째항이 10, 공차가 -2, 항수가 10이므로

$$S_{10} = \frac{10 \times \{2 \times 10 + (10-1) \times (-2)\}}{2}$$

$$= \frac{10 \times 2}{2} = 10 \quad \text{답 (1) 120 (2) 10}$$

020

등차수열의 첫째항이 5, 공차가 $1-5=-4$ 이므로 첫째
항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면 공차 공식에 의
하여

$$S_{10} = \frac{10 \times \{2 \times 5 + (10-1) \times (-4)\}}{2}$$

$$= \frac{10 \times (-26)}{2} = -130 \quad \text{답 } -130$$

022

등차수열의 첫째항이 5, 공차가 $8-5=3$ 이므로 끝항
62를 제 n 항이라 하면

$$5 + (n-1) \times 3 = 62, 3n+2=62$$

$$3n=60 \quad \therefore n=20$$

따라서 항수는 20이므로 첫째항부터 제 20 항까지의 합
 S_{20} 은 끝항 공식에 의하여

$$S_{20} = \frac{20 \times (5+62)}{2} = \frac{20 \times 67}{2} = 670 \quad \text{답 } 670$$

024

첫째항을 a , 공차를 d , 첫째항부터 제 n 항까지의 합을
 S_n 이라 하면

$$S_{10} = \frac{10\{2a + (10-1)d\}}{2} = 100$$

$$\therefore 2a + 9d = 20 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$S_{20} = \frac{20\{2a + (20-1)d\}}{2} = 400$$

$$\therefore 2a + 19d = 40 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧을 연립하여 풀면 $a=1, d=2$

$$\therefore a_n = 1 + (n-1) \times 2 = 2n-1$$

$$\text{답 } a_n = 2n-1$$

026

일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = -15 + (n-1) \times 2 = 2n-17$$

$a_n > 0$ 인 경우는 $2n-17 > 0$ 에서

$$n > \frac{17}{2} = 8.5$$

따라서 제 8 항까지는 음수이고, 제 9 항부터는 양수이므
로 첫째항부터 제 8 항까지의 합이 최소가 된다.

첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면 구하는 최
솟값은

$$S_8 = \frac{8 \times \{2 \times (-15) + (8-1) \times 2\}}{2}$$

$$= \frac{8 \times (-16)}{2} = -64 \quad \text{답 제 8 항, } -64$$

028

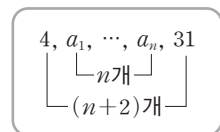
첫째항이 4, 끝항이 31, 항수
가 $n+2$ 인 등차수열의 합이
175이므로

$$\frac{(n+2)(4+31)}{2} = 175$$

$$n+2=10 \quad \therefore n=8$$

따라서 31이 제 10 항이므로

$$4 + 9d = 31 \quad \therefore d = 3 \quad \text{답 } n=8, d=3$$



030

50과 100 사이에 있는 3의 배수는

51, 54, 57, ..., 99

이때 $51=3 \times 17$, $99=3 \times 33$ 이므로 항수는

$$33-17+1=17$$

따라서 구하는 총합은 첫째항이 51, 끝항이 99, 항수가 17인 등차수열의 합이므로

$$\frac{17 \times (51+99)}{2} = 1275 \quad \text{답 } 1275$$

032

100과 200 사이에 있는 자연수 중에서 4로 나누었을 때의 나머지가 3인 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

103, 107, 111, ..., 199

이것은 첫째항이 103, 공차가 4인 등차수열이므로 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = 103 + (n-1) \times 4 = 4n + 99$$

199를 제 n 항이라 하면

$$4n + 99 = 199 \quad \therefore n = 25$$

따라서 구하는 총합은 첫째항이 103, 끝항이 199, 항수가 25인 등차수열의 합이므로

$$\frac{25 \times (103+199)}{2} = 3775 \quad \text{답 } 3775$$

034

(1) (i) $n=1$ 일 때, $a_1=S_1=1$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 - (n-1)^2 \\ &= n^2 - (n^2 - 2n + 1) \\ &= 2n - 1 \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이때 $a_1=1$ 은 $\textcircled{7}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로

$$a_n = 2n - 1$$

(2) (i) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 1 + 1 = 2$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (n^2 + 1) - \{(n-1)^2 + 1\} \\ &= (n^2 + 1) - (n^2 - 2n + 2) \\ &= 2n - 1 \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이때 $a_1=2$ 는 $\textcircled{7}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 다르므로

$$a_1 = 2, a_n = 2n - 1 \quad (n \geq 2)$$

$$\text{답 } (1) a_n = 2n - 1$$

$$(2) a_1 = 2, a_n = 2n - 1 \quad (n \geq 2)$$

필수 확인 문제

194쪽

035

등차수열의 첫째항을 a , 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = a + (n-1) \times (-3)$$

$$a_4 = 12 \text{이므로 } a + 3 \times (-3) = 12$$

$$\therefore a = 21$$

$$\text{따라서 } a_n = 21 + (n-1) \times (-3) = -3n + 24 \text{이므로}$$

$$a_k = -3k + 24 = -6$$

$$\therefore k = 10 \quad \text{답 } 10$$

036

등차수열의 첫째항을 a , 공차를 d , 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$a_2 + a_5 = -8 \text{이므로}$$

$$(a+d) + (a+4d) = 2a+5d = -8 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$a_4 + a_9 = 4 \text{이므로}$$

$$(a+3d) + (a+8d) = 2a+11d = 4 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 을 연립하여 풀면

$$a = -9, d = 2$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항은 -9 , 공차는 2 이다.

$$\text{답 } \text{첫째항: } -9, \text{ 공차: } 2$$

037

$$a = \frac{2+8}{2} = 5, b = \frac{10+2}{2} = 6 \text{이므로}$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0, (x-2)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = 2 \text{ 또는 } x = 3$$

$$\text{답 } x = 2 \text{ 또는 } x = 3$$

038

등차수열의 첫째항을 a , 공차를 d , 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$a_3 = -15 \text{이므로 } a + 2d = -15 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$a_8 = 5 \text{이므로 } a + 7d = 5 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 을 연립하여 풀면

$$a = -23, d = 4$$

$$\therefore a_n = -23 + (n-1) \times 4 = 4n - 27$$

$$a_n > 0 \text{인 경우는 } 4n - 27 > 0 \text{에서}$$

$$n > \frac{27}{4} = 6.75$$

따라서 제6항까지는 음수이고, 제7항부터는 양수이므로
첫째항부터 제6항까지의 합이 최소가 된다.
첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면 구하는 최
솟값은

$$S_6 = \frac{6 \times \{2 \times (-23) + (6-1) \times 4\}}{2} = -78$$

답 -78

039

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d , 첫째항부터 제
 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_5 = \frac{5(2a+4d)}{2} = 20$$

$$\therefore a+2d=4 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$S_{10} = \frac{10(2a+9d)}{2} = 20+120=140$$

$$\therefore 2a+9d=28 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a=-4, d=4$$

즉, $a_n = -4 + (n-1) \times 4 = 4n-8$ 이므로

$$a_{11} = 4 \times 11 - 8 = 36$$

$$a_{14} = 4 \times 14 - 8 = 48$$

$$\therefore a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} = \frac{4 \times (36+48)}{2} = 168$$

답 168

참고

$a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}$ 는 첫째항이 $a_{11}=36$, 제4항이 $a_{14}=48$,
공차가 4인 등차수열이다.

040

$S_n = n^2 + 3n + 1$ 이므로

$$a_1 = S_1 = 1 + 3 + 1 = 5$$

$$a_{10} = S_{10} - S_9 = 131 - 109 = 22$$

$$\therefore a_1 + a_{10} = 5 + 22 = 27$$

답 27

041

n 각형의 내각의 크기의 합은

$$180^\circ \times (n-2) = 180^\circ \times n - 360^\circ$$

첫째항이 75° , 공차가 10° 인 등차수열의 첫째항부터 제
 n 항까지의 합은

$$\frac{n\{2 \times 75^\circ + (n-1) \times 10^\circ\}}{2} = 5^\circ \times n^2 + 70^\circ \times n$$

$$\text{즉, } 5^\circ \times n^2 + 70^\circ \times n = 180^\circ \times n - 360^\circ \text{이므로}$$

$$5^\circ \times n^2 - 110^\circ \times n + 360^\circ = 0$$

$$n^2 - 22n + 72 = 0, (n-4)(n-18) = 0$$

$$\therefore n=4 \text{ 또는 } n=18$$

이때 $n=18$ 이면 가장 큰 내각의 크기가 180° 보다 크므
로 $n=4$ 이다.

답 4

2 등비수열

195~209쪽

043

(1) 첫째항은 $a=3$, 공비는 $r=\frac{6}{3}=2$ 이므로

$$a_n = 3 \times 2^{n-1}$$

(2) 첫째항은 $a=4$, 공비는 $r=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$ 이므로

$$a_n = 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-3}$$

$$\text{답 (1) } a_n = 3 \times 2^{n-1} \quad (2) a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-3}$$

045

(1) 첫째항이 4, 공비가 $\frac{-12}{4}=-3$ 이므로 등비수열의

일반항은

$$a_n = 4 \times (-3)^{n-1}$$

-972 를 제 n 항이라 하면

$$4 \times (-3)^{n-1} = -972, (-3)^{n-1} = -243$$

$$(-3)^{n-1} = (-3)^5, n-1=5$$

$$\therefore n=6$$

따라서 -972 는 제6항이다.

(2) $a_1 = 2 \times 3^{2 \times 1 - 1} = 6, a_2 = 2 \times 3^{2 \times 2 - 1} = 54$ 이므로

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{54}{6} = 9$$

따라서 주어진 등비수열의 첫째항은 6, 공비는 9이다.

답 (1) 제6항 (2) 첫째항: 6, 공비: 9

다른 풀이

$$(2) a_n = 2 \times 3^{2n-1} = 2 \times (3 \times 3^{2n-2})$$

$$= 2 \times 3 \times 3^{2(n-1)} = 6 \times 9^{n-1}$$

따라서 주어진 등비수열의 첫째항은 6, 공비는 9이다.

047

등비수열의 첫째항이 2, 제5항이 162이므로 공비를 r ,
일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = 2 \times r^{n-1}$$

$$a_5 = 2 \times r^4 = 162 \text{에서 } r^4 = 81$$

$$\therefore r = 3 \quad (\because r > 0)$$

2에서 출발해 162까지 공비 3씩 곱해 가면

2, 6, 18, 54, 162

따라서 구하는 세 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

6, 18, 54이다.

답 6, 18, 54

+ 풍산자 비법

두 수 a, b 사이에 n 개의 수를 넣어서 만든 등비수열에서 a 는 첫째항이고, b 는 제 $(n+2)$ 항이다.

049

첫째항이 2, 공비가 2인 등비수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$$

제 n 항에서 처음으로 1000보다 커진다고 하면

$$2^n > 1000$$

$$\text{이때 } 2^9 = 512, 2^{10} = 1024 \text{이므로 } n \geq 10$$

따라서 처음으로 1000보다 커지는 항은 제 10항이다.

답 제 10 항

051

등비수열의 첫째항을 a , 공비를 r , 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = ar^{n-1}$$

$$a_2 = 6 \text{이므로 } ar = 6 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$a_5 = 48 \text{이므로 } ar^4 = 48 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{B} \div \textcircled{A} \text{을 하면 } \frac{ar^4}{ar} = \frac{48}{6} = 8 \quad \therefore r^3 = 8$$

이때 r 는 실수이므로 $r = 2$

$$\text{이 값을 } \textcircled{A} \text{에 대입하면 } 2a = 6 \quad \therefore a = 3$$

$$\therefore a_n = 3 \times 2^{n-1} \quad \textbf{답 } a_n = 3 \times 2^{n-1}$$

053

등비수열의 첫째항을 a , 공비를 r , 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = ar^{n-1}$$

$$a_1 + a_3 = 30 \text{이므로 } a + ar^2 = 30$$

$$\therefore a(1+r^2) = 30 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$a_2 + a_4 = 90 \text{이므로 } ar + ar^3 = 90$$

$$\therefore ar(1+r^2) = 90 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{B} \div \textcircled{A} \text{을 하면 } \frac{ar(1+r^2)}{a(1+r^2)} = \frac{90}{30} \quad \therefore r = 3$$

이 값을 $\textcircled{A}$ 에 대입하면

$$10a = 30 \quad \therefore a = 3$$

따라서 주어진 등비수열의 첫째항은 3, 공비는 3이다.

답 첫째항: 3, 공비: 3

055

한 번 시행할 때마다 선분의 개수는 2배가 되고, 선분 1

개의 길이는 $\frac{1}{3}$ 배가 된다. 따라서 한 번 시행할 때마다

총 길이는 $\frac{2}{3}$ 배가 되므로

$$1 \text{회 시행 후 남은 선분의 길이의 합은 } 7 \times \frac{2}{3}$$

$$2 \text{회 시행 후 남은 선분의 길이의 합은 } 7 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$\vdots$

$$n \text{회 시행 후 남은 선분의 길이의 합은 } 7 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

따라서 20회 시행 후 남은 선분의 길이의 합은

$$7 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{20} \quad \textbf{답 } 7 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{20}$$

057

세 수 $a-1, a+1, a+2$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 $(a+1)^2 = (a-1)(a+2)$ 에서

$$a^2 + 2a + 1 = a^2 + a - 2$$

$$\therefore a = -3$$

답 -3

059

세 수를 a, ar, ar^2 으로 놓으면

$$\text{세 수의 합이 } -3 \text{이므로 } a + ar + ar^2 = -3$$

$$\therefore a(1+r+r^2) = -3 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$\text{세 수의 곱이 } 8 \text{이므로 } a \times ar \times ar^2 = 8, (ar)^3 = 8$$

$$\therefore ar = 2 \quad (\because ar \text{는 실수}) \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A} \div \textcircled{B} \text{을 하면 } \frac{1+r+r^2}{r} = -\frac{3}{2}, 2+2r+2r^2 = -3r$$

$$2r^2+5r+2=0, (r+2)(2r+1)=0$$

$$\therefore r = -2 \text{ 또는 } r = -\frac{1}{2}$$

이 값을 $\textcircled{B}$ 에 대입하면

(i) $r = -2$ 일 때,

$$a = -1 \text{이므로 세 수는 } -1, 2, -4 \text{이다.}$$

(ii) $r = -\frac{1}{2}$ 일 때,

$$a = -4 \text{이므로 세 수는 } -4, 2, -1 \text{이다.}$$

따라서 구하는 세 수를 절댓값이 작은 것부터 차례대로 나열하면 -1, 2, -4이다.

답 -1, 2, -4

061

(1) 첫째항이 1, 공비가 2이므로

$$S_n = \frac{1 \times (2^n - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1$$

(2) 첫째항이 8, 공비가 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$S_n = \frac{8 \times \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 16 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right\}$$

(3) 첫째항이 1, 공비가 -2 이므로

$$S_n = \frac{1 \times \{1 - (-2)^n\}}{1 - (-2)} = \frac{1}{3} \{1 - (-2)^n\}$$

답 (1) $S_n = 2^n - 1$ (2) $S_n = 16 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right\}$

(3) $S_n = \frac{1}{3} \{1 - (-2)^n\}$

063

486을 제 n 항이라 하면 첫째항이 2, 공비가 3이므로

$$2 \times 3^{n-1} = 486 \text{에서 } 3^{n-1} = 243$$

$$3^{n-1} = 3^5, n-1=5 \quad \therefore n=6$$

따라서 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_6 = \frac{2 \times (3^6 - 1)}{3 - 1} = 729 - 1 = 728 \quad \text{답 } 728$$

065

첫째항을 a , 공비를 r , 일반항을 a_n , 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$a_1 + a_3 = 10 \text{이므로 } a + ar^2 = 10$$

$$\therefore a(1 + r^2) = 10 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$a_3 + a_5 = 90 \text{이므로 } ar^2 + ar^4 = 90$$

$$\therefore ar^2(1 + r^2) = 90 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{B} \div \textcircled{A} \text{을 하면 } r^2 = 9 \quad \therefore r = 3 \quad (\because r > 0)$$

$$\text{이 값을 } \textcircled{A} \text{에 대입하면 } 10a = 10 \quad \therefore a = 1$$

$$\therefore S_4 = \frac{1 \times (3^4 - 1)}{3 - 1} = 40 \quad \text{답 } 40$$

067

첫째항을 a , 공비를 r , 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_5 = 11 \text{이므로 } \frac{a(1 - r^5)}{1 - r} = 11 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$S_{10} = -341 \text{이므로 } \frac{a(1 - r^{10})}{1 - r} = -341$$

$$\therefore \frac{a(1 - r^5)(1 + r^5)}{1 - r} = -341 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}$ 을 $\textcircled{B}$ 에 대입하면

$$11(1 + r^5) = -341, r^5 = -32$$

이때 r 는 실수이므로 $r = -2$

이 값을 $\textcircled{A}$ 에 대입하면

$$11a = 11 \quad \therefore a = 1$$

$$\therefore a_n = (-2)^{n-1} \quad \text{답 } a_n = (-2)^{n-1}$$

069

첫째항이 x , 공비가 $(x-1)^2$ 이고 $x > 2$ 이므로

$$(x-1)^2 \neq 1$$

첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \frac{x \{ (x-1)^{2n} - 1 \}}{(x-1)^2 - 1}$$

$$= \frac{x \{ (x-1)^{2n} - 1 \}}{x^2 - 2x}$$

$$= \frac{(x-1)^{2n} - 1}{x-2} \quad \text{답 } \frac{(x-1)^{2n} - 1}{x-2}$$

071

(i) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 2 - 1 = 1$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (2^n - 1) - (2^{n-1} - 1)$$

$$= 2 \times 2^{n-1} - 2^{n-1}$$

$$= 2^{n-1} \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

이때 $a_1 = 1$ 은 $\textcircled{A}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로

$$a_n = 2^{n-1} \quad \text{답 } a_n = 2^{n-1}$$

073

$$S_n = 6 \times 5^n + k \text{에서}$$

(i) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 6 \times 5 + k = 30 + k \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= (6 \times 5^n + k) - (6 \times 5^{n-1} + k)$$

$$= 6 \times 5 \times 5^{n-1} - 6 \times 5^{n-1}$$

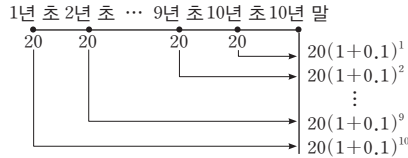
$$= 24 \times 5^{n-1} \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

첫째항부터 등비수열을 이루려면 $\textcircled{A}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값이 $\textcircled{B}$ 과 같아야 하므로

$$24 \times 5^{1-1} = 30 + k, 24 = 30 + k$$

$$\therefore k = -6 \quad \text{답 } -6$$

075

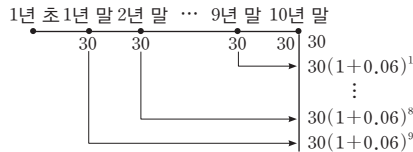


10년 후의 원리합계를 S라 하면

$$\begin{aligned}
 S &= 20 \times 1.1 + 20 \times 1.1^2 + \cdots + 20 \times 1.1^{10} \\
 &= \frac{20 \times 1.1 \times (1.1^{10} - 1)}{1.1 - 1} \\
 &= \frac{20 \times 1.1 \times (2.6 - 1)}{0.1} \\
 &= 352 \text{ (만 원)}
 \end{aligned}$$

답 352만 원

077



10년 후의 원리합계를 S라 하면

$$\begin{aligned}
 S &= 30 + 30 \times 1.06 + 30 \times 1.06^2 + \cdots + 30 \times 1.06^9 \\
 &= \frac{30 \times (1.06^{10} - 1)}{1.06 - 1} \\
 &= \frac{30 \times (1.8 - 1)}{0.06} \\
 &= 400 \text{ (만 원)}
 \end{aligned}$$

답 400만 원

필수 확인 문제

210쪽

078

등비수열 $\{a_n\}$ 을 나열해 보면 4, 8, 16, 32, ...수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 을 나열해 보면 $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots$ 따라서 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 은 첫째항이 $\frac{1}{4}$, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로

$$a = \frac{1}{4}, r = \frac{1}{2}$$

$$\therefore 8ar = 8 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = 1$$

답 1

079

세 수 1, x , y 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$x^2 = 1 \times y \quad \therefore x^2 = y \quad \dots\dots ㉠$$

또, 세 수 1, $2x$, $4y$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2 \times 2x = 1 + 4y \quad \therefore 4x = 1 + 4y \quad \dots\dots ㉡$$

$$㉠을 ㉡에 대입하면 4x = 1 + 4x^2$$

$$4x^2 - 4x + 1 = 0, (2x - 1)^2 = 0 \quad \therefore x = \frac{1}{2}$$

$$\text{이 값을 ㉠에 대입하면 } y = \frac{1}{4}$$

$$\therefore x + y = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

답 $\frac{3}{4}$

080

공비를 r , 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_1 = 2, a_4 = a_1 r^3 = 54 \text{ 이므로}$$

$$\frac{a_1 r^3}{a_1} = r^3 = 27$$

이때 r 는 실수이므로 $r = 3$ 따라서 S_n 은

$$S_n = \frac{2 \times (3^n - 1)}{3 - 1} = 3^n - 1$$

$$S_n > 800 \text{ 에서 } 3^n - 1 > 800$$

$$3^n > 801$$

$$\text{이때 } 3^6 = 729, 3^7 = 2187 \text{ 이므로 } n \geq 7$$

따라서 n 의 최솟값은 7이다.

답 7

081

등비수열의 첫째항을 a , 공비를 r , 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_3 = 21 \text{ 이므로 } \frac{a(1-r^3)}{1-r} = 21 \quad \dots\dots ㉠$$

$$S_6 = 189 \text{ 이므로 } \frac{a(1-r^6)}{1-r} = 189$$

$$\therefore \frac{a(1-r^3)(1+r^3)}{1-r} = 189 \quad \dots\dots ㉡$$

$$㉠을 ㉡에 대입하면 21(1+r^3) = 189$$

$$1+r^3 = 9, r^3 = 8$$

이때 r 는 실수이므로 $r = 2$

이 값을 ㉠에 대입하면

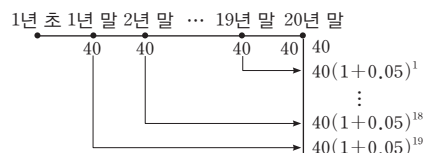
$$7a = 21 \quad \therefore a = 3$$

따라서 첫째항부터 제 8 항까지의 합은

$$S_8 = \frac{3 \times (2^8 - 1)}{2 - 1} = 765$$

답 765

082



20년 후의 원리합계를 S라 하면

$$S = 40 + 40 \times 1.05 + 40 \times 1.05^2 + \cdots + 40 \times 1.05^{19}$$

$$= \frac{40 \times (1.05^{20} - 1)}{1.05 - 1} = \frac{40 \times (2.7 - 1)}{0.05}$$

= 1360(만 원) 답 1360만 원

083

세 수 $3 \sin \theta + 2$, 2 , $\sin \theta + 1$ 이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$2^2 = (3 \sin \theta + 2)(\sin \theta + 1) \text{에서}$$

$$3 \sin^2 \theta + 5 \sin \theta + 2 = 4$$

$$3 \sin^2 \theta + 5 \sin \theta - 2 = 0$$

$$(3 \sin \theta - 1)(\sin \theta + 2) = 0$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{1}{3} \quad (\because -1 \leq \sin \theta \leq 1)$$

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{이므로 } \cos \theta < 0$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{이므로}$$

$$\cos \theta = -\sqrt{1 - \sin^2 \theta} = -\sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore \sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{3} + \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{1 - 2\sqrt{2}}{3}$$

답 $\frac{1 - 2\sqrt{2}}{3}$

참고 삼각함수 사이의 관계

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

● 실전 연습문제

212~214쪽

084

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 등차수열 $\{b_n\}$ 의 첫째항을 b 라 하면

$$a_n = a + (n-1) \times 2, \quad b_n = b + (n-1) \times (-5)$$

$$\therefore 2a_n - b_n = \{2a + (n-1) \times 4\} - \{b + (n-1) \times (-5)\}$$

$$= 2a - b + (n-1) \times 9$$

따라서 $2a_1 - b_1 = 2a - b$, $2a_2 - b_2 = 2a - b + 9$ 이므로 구하는 공차는

$$(2a - b + 9) - (2a - b) = 9 \quad \text{답 ④}$$

참고

등차수열 $\{2a_n - b_n\}$ 의 일반항 $2a_n - b_n$ 이

$$2a_n - b_n = 2a - b + (n-1) \times 9$$

$$= 9n + 2a - b - 9$$

이므로 공차가 9임을 구할 수도 있다.

085

삼차방정식의 세 근을 $a-d$, a , $a+d$ 로 놓으면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(a-d) + a + (a+d) = 3, \quad 3a = 3$$

$$\therefore a = 1 \quad \text{..... ㉠}$$

$$(a-d) \times a \times (a+d) = -3, \quad a^3 - ad^2 = -3$$

$$\text{㉠을 위의 식에 대입하면 } 1 - d^2 = -3$$

$$\therefore d^2 = 4 \quad \text{..... ㉡}$$

$$(a-d)a + a(a+d) + (a-d)(a+d) = k \text{이므로}$$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$$(1-d) + (1+d) + (1-d)(1+d) = k$$

$$\therefore k = 3 - d^2 = 3 - 4 = -1 \quad (\because \text{㉡}) \quad \text{답 } -1$$

참고 삼차방정식의 근과 계수의 관계

삼차방정식 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ 의 세 근을 α , β , γ 라 하면

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}, \quad \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$

086

첫째항을 a , 공차를 d , 일반항을 a_n , 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면 $S_{20} = 230$ 이므로

$$\frac{20(a + a_{20})}{2} = 230$$

$$\frac{20(a - 17)}{2} = 230 \quad \therefore a = 40$$

$$a_{20} = -17 \text{에서}$$

$$a_{20} = 40 + 19d = -17 \quad \therefore d = -3$$

$$\therefore S_{40} = \frac{40 \times \{2 \times 40 + (40-1) \times (-3)\}}{2} = -740$$

답 -740

087

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$S_4 = \frac{4(2a + 3d)}{2}, \quad S_8 = \frac{8(2a + 7d)}{2}$$

이므로 $S_4 = S_8$ 에서

$$2(2a + 3d) = 4(2a + 7d), \quad 2a + 3d = 4a + 14d$$

$$\therefore 2a + 11d = 0 \quad \text{..... ㉠}$$

$$S_6 = \frac{6(2a + 5d)}{2} = 36 \text{에서}$$

$$\therefore 2a + 5d = 12 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=11, d=-2$

일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = 11 + (n-1) \times (-2)$$

$$\therefore a_4 = 11 + 3 \times (-2) = 5$$

답 5

088

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_5 = -7 \text{에서 } a + 4d = -7 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_{10} = 3 \text{에서 } a + 9d = 3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = -15, d = 2$$

$$\therefore a_n = -15 + (n-1) \times 2 = 2n - 17$$

한편, $a_n > 0$ 에서 $2n - 17 > 0, 2n > 17$

$$\therefore n > \frac{17}{2} = 8.5$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항부터 제8항까지가 음수이고, 제9항부터는 양수이다.

이때

$$a_9 = 2 \times 9 - 17 = 1$$

$$a_{20} = 2 \times 20 - 17 = 23$$

$$\begin{aligned} \therefore |a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_{20}| \\ &= -(a_1 + a_2 + \dots + a_8) + (a_9 + a_{10} + \dots + a_{20}) \\ &= -\frac{8 \times \{2 \times (-15) + 7 \times 2\}}{2} + \frac{12 \times (1 + 23)}{2} \\ &= 64 + 144 = 208 \end{aligned}$$

답 208

089

(i) $n=1$ 일 때, $a_1 = S_1 = k + 16$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = (n+3)^2 + k - \{(n-1)+3\}^2 - k \\ &= 2n + 5 \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

이때 $a_1 = k + 16$ 은 ㉠에 $n=1$ 을 대입한 값과 같아야 하므로

$$2 \times 1 + 5 = k + 16 \quad \therefore k = -9$$

답 -9

다른 풀이

S_n 이 상수항이 없는 n 에 대한 이차식이면 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항부터 등차수열을 이룬다.

즉, $S_n = (n+3)^2 + k = n^2 + 6k + 9 + k$ 에서

$$9 + k = 0 \text{이어야 하므로 } k = -9$$

090

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$\frac{a_3 a_8}{a_6} = \frac{ar^2 \times ar^7}{ar^5} = ar^4 = 12 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_5 + a_7 = ar^4 + ar^6 = ar^4(1 + r^2) = 36 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$r^2 + 1 = 3, r^2 = 2 \quad \therefore r = \sqrt{2} \quad (\because r > 0)$$

$r = \sqrt{2}$ 를 ㉠에 대입하면

$$a \times (\sqrt{2})^4 = 4a = 12 \quad \therefore a = 3$$

따라서 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = 3 \times (\sqrt{2})^{n-1}$$

$$\therefore a_{11} = 3 \times (\sqrt{2})^{10} = 3 \times 32 = 96$$

답 96

091

등차수열 $\{\log_2 a_n\}$ 의 첫째항을 $\log_2 a$ 라 하고, 수열의 항을 나열하면

$$\log_2 a, \log_2 a + 2 = \log_2 4a, \log_2 a + 4 = \log_2 16a,$$

$$\log_2 a + 6 = \log_2 64a, \dots$$

즉, 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 a , 공비가 4인 등비수열이므로 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = a \times 4^{n-1}$$

$$\therefore \frac{a_{20}}{a_{17}} = \frac{a \times 4^{19}}{a \times 4^{16}} = 4^3 = 64$$

답 64

092

$f(x) = x^2 + x + a$ 라 하면 $x+1, x-1, x-2$ 로 나누었을 때의 나머지는 각각

$$f(-1) = a, f(1) = a+2, f(2) = a+6$$

이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$(a+2)^2 = a(a+6)$$

$$a^2 + 4a + 4 = a^2 + 6a, 2a = 4$$

$$\therefore a = 2$$

답 2

참고 나머지 정리

다항식 $f(x)$ 를 일차식 $x-a$ 로 나누었을 때의 나머지를 R 라 하면 $R=f(a)$

093

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r , 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_5 = 55 \text{이므로 } \frac{a(1-r^5)}{1-r} = 55 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$S_{10} = 55 + (-1760) = -1705 \text{이므로}$$

$$\frac{a(1-r^{10})}{1-r} = -1705$$

$$\therefore \frac{a(1-r^5)(1+r^5)}{1-r} = -1705 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

①을 ②에 대입하면

$$55(1+r^5) = -1705, r^5 = -32$$

이때 r 는 실수이므로 $r = -2$

이 값을 ③에 대입하면

$$11a = 55 \quad \therefore a = 5$$

$$\therefore a+r = 5+(-2) = 3$$

답 3

094

(i) $n=1$ 일 때, $a_1 = S_1 = 3+5=8$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = (3^n + 5) - (3^{n-1} + 5) \\ &= 3^n - 3^{n-1} = 2 \times 3^{n-1} \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

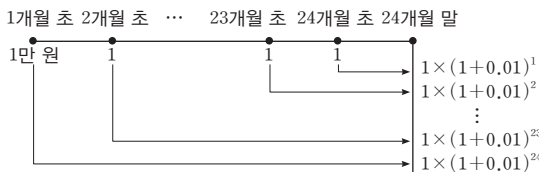
이때 $a_1=1$ 은 ①에 $n=1$ 을 대입한 값과 같지 않으므로

$$a_1 = 8, a_n = 2 \times 3^{n-1} \quad (n \geq 2)$$

$$\begin{aligned} \therefore a_1 + a_3 + a_5 &= 8 + 2 \times 3^2 + 2 \times 3^4 \\ &= 8 + 18 + 162 = 188 \end{aligned}$$

답 188

095



2년, 즉 24개월 후의 원리합계를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= 1 \times 1.01 + 1 \times 1.01^2 + 1 \times 1.01^3 + \dots + 1 \times 1.01^{24} \\ &= \frac{1.01 \times (1.01^{24} - 1)}{1.01 - 1} = \frac{1.01^{25} - 1.01}{0.01} \\ &= \frac{1.282 - 1.01}{0.01} = 27.2 \text{ (만 원)} \end{aligned}$$

따라서 원리합계는 272000원이다.

답 272000원

096

n 개의 수를 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 이라 하자.

등차수열 3, $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, 15는 첫째항이 3,

제 $n+2$ 항이 15이다.

이 수열의 공차를 d 라 하면

$$15 = 3 + \{(n+2) - 1\}d$$

$$\therefore d = \frac{12}{n+1}$$

이때 공차 d 는 자연수이어야 하므로 $n+1$ 은 12의 양의 약수이어야 한다.

$n+1$	1	2	3	4	6	12
n	없다.	1	2	3	5	11

따라서 모든 자연수 n 의 값의 합은

$$1+2+3+5+11=22$$

답 22

097

처음 나무통의 높이를 a , 원판 1개의 높이를 h 라 하면 수열 $\{h_n\}$ 은 첫째항이 $a+h$, 공차가 h 인 등차수열이므로 일반항을 h_n 이라 하면

$$h_n = (a+h) + (n-1)h = a+nh$$

$$h_5 + h_{13} + h_{17} + h_{25}$$

$$= (a+5h) + (a+13h) + (a+17h) + (a+25h)$$

$$= 4a + 60h$$

$$= 4(a+15h) = 4h_{15}$$

이때 $h_{15} = 6$ 이므로

$$h_5 + h_{13} + h_{17} + h_{25} = 4h_{15}$$

$$= 4 \times 6 = 24$$

답 24

098

세 수 $x, 8, y$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$x+y=16$$

또, 세 수 y, a, x 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$xy = a^2$$

$x > 0, y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x+y \geq 2\sqrt{xy}$$

$$\therefore 16 \geq 2\sqrt{a^2}$$

$$\text{이때 } a > 0 \text{이므로 } 2a \leq 16 \quad \therefore a \leq 8$$

따라서 양수 a 의 최댓값은 8이다.

답 8

099

점 P_1 의 x 좌표는 점 Q_1 의 x 좌표와 같고, y 좌표는 점 A 의 y 좌표와 같으므로 $P_1(x_1, 2^{64})$

이때 점 P_1 은 곡선 $y=16^x$ 위의 점이므로

$$16^{x_1} = 2^{64}, 2^{4x_1} = 2^{64}, 4x_1 = 64$$

$$\therefore x_1 = 16$$

또, 점 Q_1 은 곡선 $y=2^x$ 위의 점이므로

$$2^{x_1} = 2^{16}$$

$$\therefore P_1(16, 2^{64}), Q_1(16, 2^{16})$$

한편, 곡선 $y=2^x$ 위의 점 Q_n 의 x 좌표가 x_n 이므로 y 좌표는 2^{x_n} 이다.

따라서 곡선 $y=16^x$ 위의 점 P_{n+1} 의 y 좌표가 2^{x_n} 이고 x 좌표는 x_{n+1} 이므로

$$2^{x_n} = 16^{x_{n+1}}, 2^{x_n} = 2^{4x_{n+1}}, x_n = 4x_{n+1}$$

$$\therefore x_{n+1} = \frac{1}{4}x_n$$

따라서 수열 $\{x_n\}$ 은 첫째항이 $x_1=16$ 이고 공비가 $\frac{1}{4}$ 인 등비수열이므로 일반항을 x_n 이라 하면

$$x_n = 16 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 4^{-n+3}$$

$x_n < \frac{1}{k}$ 을 만족시키는 n 의 최솟값이 6이므로

$x_5 \geq \frac{1}{k}$ 이고 $x_6 < \frac{1}{k}$ 이어야 한다.

(i) $x_5 \geq \frac{1}{k}$ 일 때

$$x_5 = 4^{-5+3} = \frac{1}{16} \text{이므로}$$

$$\frac{1}{16} \geq \frac{1}{k} \quad \therefore k \geq 16$$

(ii) $x_6 < \frac{1}{k}$ 일 때

$$x_6 = 4^{-6+3} = \frac{1}{64} \text{이므로}$$

$$\frac{1}{64} < \frac{1}{k} \quad \therefore k < 64$$

(i), (ii)에서 $16 \leq k < 64$ 이므로 자연수 k 의 개수는

$$64 - 16 = 48 \quad \text{답 ①}$$

2 수열의 합

1 합의 기호 Σ

216~226쪽

101

(1) $5i$ 의 i 에 1부터 10까지 대입하여 더한 것이므로

$$\sum_{i=1}^{10} 5i = 5 + 10 + 15 + \cdots + 50$$

(2) $\frac{i}{i+1}$ 의 i 에 2부터 n 까지 대입하여 더한 것이므로

$$\sum_{i=2}^n \frac{i}{i+1} = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \cdots + \frac{n}{n+1}$$

답 (1) $5+10+15+\cdots+50$

$$(2) \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \cdots + \frac{n}{n+1}$$

103

(1) 2^k 의 k 에 1부터 10까지 대입하여 더한 것이므로

$$2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{10} = \sum_{k=1}^{10} 2^k$$

(2) $2k-1$ 의 k 에 1부터 n 까지 대입하여 더한 것이므로

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = \sum_{k=1}^n (2k-1)$$

답 (1) $\sum_{k=1}^{10} 2^k$ (2) $\sum_{k=1}^n (2k-1)$

105

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_3 + a_9 = -30 \text{에서}$$

$$(5+2d) + (5+8d) = -30, 10d = -40$$

$$\therefore d = -4$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} a_k = \frac{10 \times \{2 \times 5 + 9 \times (-4)\}}{2} = -130$$

답 -130

107

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r , 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_5 a_6 = a_{12} \text{에서 } ar^4 \times ar^5 = ar^{11} \quad \therefore a = r^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$a_2 = 8 \text{에서 } ar = 8 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{을 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } r^3 = 8 \quad \therefore r = 2 \quad (\because r \text{는 실수})$$

$$r = 2 \text{를 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } a = 4$$

따라서 $\sum_{k=1}^n a_k = 508$ 에서

$$\frac{4 \times (2^n - 1)}{2 - 1} = 508, 2^n = 128$$

$$2^n = 2^7 \quad \therefore n = 7$$

답 7

109

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}(2a_k+3b_k-5) &= 2\sum_{k=1}^{10}a_k+3\sum_{k=1}^{10}b_k-\sum_{k=1}^{10}5 \\ &= 2 \times 30 + 3 \times 20 - 5 \times 10 \\ &= 70\end{aligned}$$

답 70

+ 풍산자 비법

$$\begin{aligned}\textcircled{1} \sum_{k=1}^n(pa_k+qb_k) &= p\sum_{k=1}^na_k+q\sum_{k=1}^nb_k \\ &\quad (\text{단, } p, q \text{는 상수이다.}) \\ \textcircled{2} \sum_{k=1}^n(a_k+c)^2 &= \sum_{k=1}^na_k^2+2c\sum_{k=1}^na_k+c^2n \\ &\quad (\text{단, } c \text{는 상수이다.})\end{aligned}$$

111

$$\begin{aligned}\textcircled{1} \sum_{k=1}^{10}(k^2+3)-\sum_{k=1}^{10}(k^2-2) &= \sum_{k=1}^{10}\{(k^2+3)-(k^2-2)\} \\ &= \sum_{k=1}^{10}5=5 \times 10 \\ &= 50 \\ \textcircled{2} \sum_{k=1}^{10}(k^2+5)-\sum_{k=1}^9(k^2+5) &= \sum_{k=10}^{10}(k^2+5) \\ &= 10^2+5=105\end{aligned}$$

답 (1) 50 (2) 105

113

$$\begin{aligned}\textcircled{1} \sum_{k=1}^n(2k+3) &= \sum_{k=1}^n2k+\sum_{k=1}^n3=2\sum_{k=1}^nk+3n \\ &= 2 \times \frac{n(n+1)}{2}+3n \\ &= n^2+4n \\ \textcircled{2} \sum_{k=1}^{10}k(k^2+2) &= \sum_{k=1}^{10}(k^3+2k) \\ &= \sum_{k=1}^{10}k^3+2\sum_{k=1}^{10}k \\ &= \left(\frac{10 \times 11}{2}\right)^2+2 \times \frac{10 \times 11}{2} \\ &= 3025+110=3135 \\ \textcircled{3} \sum_{k=10}^{20}k &= \sum_{k=1}^{20}k-\sum_{k=1}^9k=\frac{20 \times 21}{2}-\frac{9 \times 10}{2} \\ &= 210-45=165\end{aligned}$$

답 (1) n^2+4n (2) 3135 (3) 165

115

$$\begin{aligned}\textcircled{1} \sum_{k=1}^5(2^k-4k) &= \sum_{k=1}^52^k-4\sum_{k=1}^5k \\ &= (2^1+2^2+\cdots+2^5)-4 \times \frac{5 \times 6}{2} \\ &= \frac{2 \times (2^5-1)}{2-1}-60 \\ &= 62-60=2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\textcircled{2} \sum_{k=1}^6(3^{k-1}+2) &= \sum_{k=1}^63^{k-1}+\sum_{k=1}^62 \\ &= (1+3^1+3^2+\cdots+3^5)+2 \times 6 \\ &= \frac{1 \times (3^6-1)}{3-1}+12 \\ &= 364+12=376\end{aligned}$$

답 (1) 2 (2) 376

+ 풍산자 비법

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^nr^k &= r+r^2+r^3+\cdots+r^n \\ &= \frac{r(1-r^n)}{1-r} \quad (\text{단, } r \neq 1)\end{aligned}$$

117

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^4(6k^2+a) &= 6\sum_{k=1}^4k^2+\sum_{k=1}^4a \\ &= 6 \times \frac{4 \times 5 \times 9}{6}+4a=180+4a\end{aligned}$$

따라서 $180+4a=216$ 이므로

$$4a=36 \quad \therefore a=9$$

답 9

119

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^8\frac{1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3}{k^2} &= \sum_{k=1}^8\frac{\left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2}{k^2}=\sum_{k=1}^8\frac{(k+1)^2}{4} \\ &= \frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^8k^2+2\sum_{k=1}^8k+\sum_{k=1}^81\right) \\ &= \frac{1}{4} \times \left(\frac{8 \times 9 \times 17}{6}+2 \times \frac{8 \times 9}{2}+1 \times 8\right) \\ &= \frac{1}{4} \times (204+72+8)=71\end{aligned}$$

답 71

121

$$\begin{aligned}\textcircled{1} \sum_{j=1}^4(ij^3) &= i\sum_{j=1}^4j^3=i \times \left(\frac{4 \times 5}{2}\right)^2=100i \\ \therefore (\text{주어진 식}) &= \sum_{i=1}^{10}100i=100\sum_{i=1}^{10}i \\ &= 100 \times \frac{10 \times 11}{2}=5500 \\ \textcircled{2} \sum_{n=1}^5(m-n) &= \sum_{n=1}^5m-\sum_{n=1}^5n \\ &= 5m-\frac{5 \times 6}{2} \\ &= 5m-15\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore (\text{주어진 식}) &= \sum_{m=1}^5 (5m-15) \\
&= 5 \sum_{m=1}^5 m - 15 \times 5 \\
&= 5 \times \frac{5 \times 6}{2} - 75 \\
&= 75 - 75 = 0
\end{aligned}$$

(3) $\sum_{k=1}^j 6 = 6j$ 이므로

$$\sum_{j=1}^i \left(\sum_{k=1}^j 6 \right) = \sum_{j=1}^i 6j = 6 \sum_{j=1}^i j = 6 \times \frac{i(i+1)}{2} = 3(i^2+i)$$

$$\begin{aligned}
\therefore (\text{주어진 식}) &= \sum_{i=1}^6 3(i^2+i) \\
&= 3 \left(\sum_{i=1}^6 i^2 + \sum_{i=1}^6 i \right) \\
&= 3 \times \left(\frac{6 \times 7 \times 13}{6} + \frac{6 \times 7}{2} \right) \\
&= 3 \times (91 + 21) = 336
\end{aligned}$$

답 (1) 5500 (2) 0 (3) 336

참고

시그마를 여러 개 포함한 식을 계산할 때는 변수와 상수를 잘 구분해야 한다.

123

(1) [1단계] $1 \times 2, 2 \times 3, 3 \times 4, \dots$ 에서 제 k 항은

$$a_k = k(k+1) = k^2 + k$$

$$\begin{aligned}
[2\text{단계}] S_n &= \sum_{k=1}^n (k^2 + k) \\
&= \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}
\end{aligned}$$

(2) [1단계] $3^2, 5^2, 7^2, \dots$ 에서 제 k 항은

$$a_k = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

$$\begin{aligned}
[2\text{단계}] S_n &= \sum_{k=1}^n (4k^2 + 4k + 1) \\
&= 4 \sum_{k=1}^n k^2 + 4 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 \\
&= 4 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&\quad + 4 \times \frac{n(n+1)}{2} + n \\
&= \frac{n(4n^2 + 12n + 11)}{3}
\end{aligned}$$

$$\text{답 (1)} S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$(2) S_n = \frac{n(4n^2 + 12n + 11)}{3}$$

125

[1단계] 제 k 항은

$$\begin{aligned}
a_k &= 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{k-1} \\
&= \frac{1 \times (2^k - 1)}{2 - 1} \\
&= 2^k - 1
\end{aligned}$$

[2단계] $S_n = \sum_{k=1}^n (2^k - 1) = \sum_{k=1}^n 2^k - \sum_{k=1}^n 1$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} - n \\
&= 2^{n+1} - 2 - n
\end{aligned}$$

답 $S_n = 2^{n+1} - n - 2$

127

[1단계] 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이

$$S_n = n^2 + n \text{ 이므로}$$

(i) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 1 + 1 = 2$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= (n^2 + n) - \{(n-1)^2 + (n-1)\}$$

$$= 2n$$

..... ㉠

이때 $a_1=2$ 는 ㉠에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로

$$a_n = 2n$$

[2단계] $a_{2k-1} = 2(2k-1) = 4k-2$ 이므로

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{10} a_{2k-1} &= \sum_{k=1}^{10} (4k-2) \\
&= 4 \sum_{k=1}^{10} k - \sum_{k=1}^{10} 2 \\
&= 4 \times \frac{10 \times 11}{2} - 2 \times 10 \\
&= 220 - 20 = 200
\end{aligned}$$

답 200

필수 확인 문제

227쪽

128

ㄱ은 옳다.

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

$$\sum_{k=0}^n k^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n k^2 = \sum_{k=0}^n k^2$$

ㄴ은 옳지 않다.

$$\sum_{k=1}^n 2^k = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n$$

$$\sum_{k=0}^n 2^k = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n 2^k \neq \sum_{k=0}^n 2^k$$

ㄷ은 옳다.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{j=m+1}^n a_j \\ &= (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_m) \\ &\quad + (a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + \cdots + a_n) \\ &= \sum_{k=1}^n a^k \end{aligned}$$

ㄹ도 옳다.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (a_{2k-1} + a_{2k}) \\ &= (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6) + \cdots \\ &\quad + (a_{2n-1} + a_{2n}) \\ &= \sum_{k=1}^{2n} a_k \end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ④

129

4로 나누었을 때의 나머지가 2인 자연수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

2, 6, 10, 14, ...

즉, 첫째항이 2, 공차가 4인 등차수열이므로

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = \frac{10 \times (2 \times 2 + 9 \times 4)}{2} = 200$$

답 200

130

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} (a_k + 1)^2 &= \sum_{k=1}^{10} (a_k^2 + 2a_k + 1) \\ &= \sum_{k=1}^{10} a_k^2 + 2 \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} 1 \\ &= \sum_{k=1}^{10} a_k^2 + 2 \times 10 + 1 \times 10 \\ &= \sum_{k=1}^{10} a_k^2 + 30 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \sum_{k=1}^{10} a_k^2 + 30 = 80 \text{ 이므로}$$

$$\sum_{k=1}^{10} a_k^2 = 80 - 30 = 50$$

답 50

131

$$\sum_{m=1}^n mn = n \sum_{m=1}^n m = n \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2} (n^3 + n^2)$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^4 \left(\sum_{m=1}^n mn \right) &= \sum_{n=1}^4 \frac{1}{2} (n^3 + n^2) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^4 n^3 + \sum_{n=1}^4 n^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \times \left\{ \left(\frac{4 \times 5}{2} \right)^2 + \frac{4 \times 5 \times 9}{6} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \times (100 + 30) = 65 \end{aligned}$$

답 65

132

제 k 항은

$$a_k = 1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right\} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{k(k+1)(k+2)}{6} = 56 \text{ 이므로}$$

$$k(k+1)(k+2) = 6 \times 7 \times 8$$

$$\therefore k = 6$$

답 6

133

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} (k-1) + \sum_{k=2}^{10} (k-1) + \sum_{k=3}^{10} (k-1) + \cdots + \sum_{k=10}^{10} (k-1) \\ &= (0+1+2+\cdots+9) + (1+2+3+\cdots+9) \\ &\quad + (2+3+4+\cdots+9) + \cdots + 9 \end{aligned}$$

$$= 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \cdots + 9 \times 10$$

$$= \sum_{k=1}^9 k(k+1)$$

$$= \sum_{k=1}^9 k^2 + \sum_{k=1}^9 k$$

$$= \frac{9 \times 10 \times 19}{6} + \frac{9 \times 10}{2}$$

$$= 285 + 45$$

$$= 330$$

답 330

2 여러 가지 수열의 합

228~233쪽

135

(1) 제 k 항 a_k 를 구하여 부분분수로 변형하면

$$a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots \\ &\quad + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \end{aligned}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

(2) 제 k 항 a_k 를 구하여 부분분수로 변형하면

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{(2k+1)^2 - 1} \\ &= \frac{1}{\{(2k+1)-1\}\{(2k+1)+1\}} \\ &= \frac{1}{2k(2k+2)} = \frac{1}{4k(k+1)} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ \therefore \sum_{k=1}^n a_k &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{n}{4(n+1)} \end{aligned}$$

답 (1) $\frac{n}{n+1}$ (2) $\frac{n}{4(n+1)}$

137

제 k 항 a_k 를 구하여 분모를 유리화하면

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k+2}} \\ &= \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k+2}}{(\sqrt{k+1} + \sqrt{k+2})(\sqrt{k+1} - \sqrt{k+2})} \\ &= -(\sqrt{k+1} - \sqrt{k+2}) \\ \therefore \sum_{k=1}^{47} a_k &= -\sum_{k=1}^{47} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k+2}) \\ &= -\{(\sqrt{2} - \sqrt{3}) + (\sqrt{3} - \sqrt{4}) \\ &\quad + (\sqrt{4} - \sqrt{5}) + \dots + (\sqrt{48} - \sqrt{49})\} \\ &= -(\sqrt{2} - \sqrt{49}) = 7 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

답 $7 - \sqrt{2}$

139

(1) [1단계] 진수를 정리하면

$$1 - \frac{1}{k} = \frac{k-1}{k}$$

[2단계] $\sum_{k=2}^{10} \log \left(1 - \frac{1}{k} \right)$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=2}^{10} \log \frac{k-1}{k} \\ &= \log \frac{1}{2} + \log \frac{2}{3} + \log \frac{3}{4} + \dots + \log \frac{9}{10} \\ &= \log \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{9}{10} \right) \\ &= \log \frac{1}{10} = -1 \end{aligned}$$

(2) [1단계] 진수를 정리하면

$$\frac{k^2}{k^2-1} = \frac{k \times k}{(k-1)(k+1)}$$

[2단계] $\sum_{k=2}^{15} \log \frac{k^2}{k^2-1}$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=2}^{15} \log \frac{k \times k}{(k-1)(k+1)} \\ &= \log \frac{2 \times 2}{1 \times 3} + \log \frac{3 \times 3}{2 \times 4} + \dots + \log \frac{15 \times 15}{14 \times 16} \\ &= \log \left(\frac{2 \times 2}{1 \times 3} \times \frac{3 \times 3}{2 \times 4} \times \dots \times \frac{15 \times 15}{14 \times 16} \right) \\ &= \log \left(2 \times \frac{15}{16} \right) \\ &= \log \frac{15}{8} \end{aligned}$$

답 (1) -1 (2) $\log \frac{15}{8}$

141

[1단계] $S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$ 이므로

(i) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = \frac{1}{3} \times 1 \times 2 \times 3 = 2$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$$

$$- \frac{1}{3} n(n-1)(n+1)$$

$$= \frac{1}{3} n(n+1) \{ (n+2) - (n-1) \}$$

$$= n(n+1)$$

..... ㉠

이때 $a_1=2$ 는 ㉠에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로

$$a_n = n(n+1)$$

[2단계] $a_k = k(k+1)$ 에서

$$\frac{1}{a_k} = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$\begin{aligned} &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots \\ &\quad + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \end{aligned}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{n}{n+1}$$

답 $\frac{n}{n+1}$

143

주어진 식의 양변에 2를 곱하여 변끼리 빼면

$$\begin{aligned} S &= 1 \times 2 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \cdots + 10 \times 2^{10} \\ -) 2S &= 1 \times 2^2 + 2 \times 2^3 + \cdots + 9 \times 2^{10} + 10 \times 2^{11} \\ \hline -S &= (2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{10}) - 10 \times 2^{11} \\ &= \frac{2(2^{10}-1)}{2-1} - 10 \times 2^{11} = 2^{11} - 2 - 10 \times 2^{11} \\ &= -9 \times 2^{11} - 2 \\ \therefore S &= 9 \times 2^{11} + 2 \end{aligned}$$

145

분모, 분자의 합이 같은 것끼리 군으로 묶는다.

$$\left(\frac{1}{1}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{1}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}\right), \dots$$

제1군의 분모, 분자의 합은 2, 제2군의 분모, 분자의 합은 3, ...이므로 제 n 군의 분모, 분자의 합은 $n+1$ 이다.

$\frac{7}{21}$ 의 분모, 분자의 합은 28이므로 제27군 소속.

제26군까지의 항의 개수는

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 26 = \frac{26 \times 27}{2} = 351$$

$$\begin{aligned} (\text{제27군}) &= \left(\frac{1}{27}, \frac{2}{26}, \frac{3}{25}, \dots, \frac{7}{21}, \dots \right) \\ &\quad \begin{array}{ccccccc} & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ & \text{제352항} & \text{제353항} & \text{제354항} & & \text{제358항} & \end{array} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{7}{21}$ 은 제358항이다.

답 제358항

필수 확인 문제

234쪽

146

제 k 항 a_k 를 구하여 부분분수로 변형하면

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{(2k)^2 - 1} = \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \end{aligned}$$

주어진 식은 첫째항부터 제10항까지의 합이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} a_k &= \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \times \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \cdots \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{21} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{21} \right) = \frac{10}{21} \end{aligned}$$

답 $\frac{10}{21}$

147

제 k 항 a_k 를 구하여 분모를 유리화하면

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{4}{\sqrt{k} + \sqrt{k+2}} \\ &= \frac{4(\sqrt{k} - \sqrt{k+2})}{(\sqrt{k} + \sqrt{k+2})(\sqrt{k} - \sqrt{k+2})} \\ &= -2(\sqrt{k} - \sqrt{k+2}) \\ \therefore \sum_{k=1}^{48} \frac{4}{\sqrt{k} + \sqrt{k+2}} \\ &= -2 \sum_{k=1}^{48} (\sqrt{k} - \sqrt{k+2}) \\ &= -2 \times \{ (1 - \sqrt{3}) + (\sqrt{2} - \sqrt{4}) + (\sqrt{3} - \sqrt{5}) + \cdots \\ &\quad + (\sqrt{47} - \sqrt{49}) + (\sqrt{48} - \sqrt{50}) \} \\ &= -2 \times (1 + \sqrt{2} - \sqrt{49} - \sqrt{50}) \\ &= -2 \times (-6 - 4\sqrt{2}) \\ &= 12 + 8\sqrt{2} \end{aligned}$$

답 $12 + 8\sqrt{2}$

148

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d , 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_2 = a + d = 4 \quad \cdots \text{㉠}$$

$$a_4 = a + 3d = 10 \quad \cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $d=3$

$$\therefore a_n = 1 + (n-1) \times 3 = 3n - 2$$

주어진 수열의 제 k 항 $\frac{3}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}}$ 의 분모를 유리화하면

$$\begin{aligned} \frac{3}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} &= \frac{3(\sqrt{a_k} - \sqrt{a_{k+1}})}{(\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}})(\sqrt{a_k} - \sqrt{a_{k+1}})} \\ &= \frac{3(\sqrt{a_k} - \sqrt{a_{k+1}})}{a_k - a_{k+1}} \\ &= -(\sqrt{a_k} - \sqrt{a_{k+1}}) \quad (\because a_k - a_{k+1} = -d = -3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{21} \frac{3}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} \\ &= - \sum_{k=1}^{21} (\sqrt{a_k} - \sqrt{a_{k+1}}) \\ &= - \{ (\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}) + (\sqrt{a_2} - \sqrt{a_3}) + \cdots \\ &\quad + (\sqrt{a_{21}} - \sqrt{a_{22}}) \} \\ &= -\sqrt{a_1} + \sqrt{a_{22}} \\ &= -1 + \sqrt{64} = 7 \end{aligned}$$

답 7

149

진수를 정리하면 $1 - \frac{1}{k^2} = \frac{k^2 - 1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k \times k}$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=2}^n \log \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) \\
&= \sum_{k=2}^n \log \frac{(k-1)(k+1)}{k \times k} \\
&= \log \frac{1 \times 3}{2 \times 2} + \log \frac{2 \times 4}{3 \times 3} + \log \frac{3 \times 5}{4 \times 4} + \dots \\
&\quad + \log \frac{(n-1)(n+1)}{n \times n} \\
&= \log \left\{ \frac{1 \times 3}{2 \times 2} \times \frac{2 \times 4}{3 \times 3} \times \frac{3 \times 5}{4 \times 4} \times \dots \right. \\
&\quad \left. \times \frac{(n-1)(n+1)}{n \times n} \right\} \\
&= \log \left(\frac{1}{2} \times \frac{n+1}{n} \right) \\
&= \log \frac{n+1}{2n} \\
&\text{즉, } \log \frac{n+1}{2n} = \log \frac{5}{9} \text{ 이므로} \\
&\frac{n+1}{2n} = \frac{5}{9}, 9n+9=10n \\
&\therefore n=9
\end{aligned}$$

답 9

150

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이
 $S_n = 2n^2 + n$ 이므로

(i) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 2 + 1 = 3$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned}
a_n &= S_n - S_{n-1} \\
&= 2n^2 + n - \{2(n-1)^2 + (n-1)\} \\
&= 4n - 1
\end{aligned}$$

..... ㉠

이때 $a_1=3$ 은 ㉠에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로

$$a_n = 4n - 1$$

$$a_k = 4k - 1 \text{ 에서}$$

$$a_{k+1} = 4(k+1) - 1 = 4k + 3$$

$$\begin{aligned}
&\therefore \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{a_k a_{k+1}} \\
&= \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{(4k-1)(4k+3)} \\
&= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4k+3} \right) \\
&= \frac{1}{4} \times \left\{ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{11} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{15} \right) + \dots + \left(\frac{1}{39} - \frac{1}{43} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{43} \right) = \frac{10}{129}
\end{aligned}$$

답 10/129

151

주어진 수열을 군으로 묶으면

(1), (1, 2, 3), (1, 2, 3, 4, 5), (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7),
 ...

각 군의 항의 개수는 $2k-1$ (k 는 자연수)이므로 제1군
 부터 제 n 군까지의 항의 개수는

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = 2 \sum_{k=1}^n k - n = n(n+1) - n = n^2$$

즉, 제1군부터 제12군까지의 항의 개수는 $12^2 = 144$ 이
 므로

$$(\text{제13군}) = (1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, 25)$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 제145항 제150항

따라서 제150항은 6이다.

답 6

● 실전 연습문제

236~238쪽

152

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^n k(k-2) - \sum_{k=1}^{n-1} (k-1)^2 \\
&= \sum_{k=1}^n (k^2 - 2k) - \sum_{k=1}^{n-1} (k^2 - 2k + 1) \\
&= \left(\sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \right) - \left(\sum_{k=1}^n 2k - \sum_{k=1}^{n-1} 2k \right) - \sum_{k=1}^{n-1} 1 \\
&= n^2 - 2n - (n-1) \\
&\text{즉, } n^2 - 3n + 1 = 71 \text{ 이므로} \\
&n^2 - 3n - 70 = 0, (n+7)(n-10) = 0 \\
&\text{이때 } n \text{은 자연수이므로 } n=10
\end{aligned}$$

답 ④

153

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^{10} (2b_k - 1) \text{ 에서}$$

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = 2 \sum_{k=1}^{10} b_k - \sum_{k=1}^{10} 1$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} a_k - 2 \sum_{k=1}^{10} b_k = -10$$

..... ㉠

$$\sum_{k=1}^{10} (3a_k + b_k) = 33 \text{ 에서}$$

$$3 \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} b_k = 33$$

..... ㉡

㉡ - $3 \times$ ㉠을 하면

$$7 \sum_{k=1}^{10} b_k = 33 - 3 \times (-10), 7 \sum_{k=1}^{10} b_k = 63$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} b_k = 9$$

답 9

154

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{10} a_k &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_9 + a_{10} \\
&= (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_9 + a_{10}) \\
&= \sum_{k=1}^5 (a_{2k-1} + a_{2k}) \\
&= 5^2 = 25
\end{aligned}$$

답 25

155

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{10} (k^2 + ak) &= \sum_{k=1}^{10} k^2 + a \sum_{k=1}^{10} k \\
&= \frac{10 \times 11 \times 21}{6} + a \times \frac{10 \times 11}{2} \\
&= 385 + 55a
\end{aligned}$$

즉, $385 + 55a = 495$ 이므로

$$55a = 110 \quad \therefore a = 2$$

답 2

156

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{15} (k-c)(k+2c) &= \sum_{k=1}^{15} (k^2 + ck - 2c^2) \\
&= \sum_{k=1}^{15} k^2 + c \sum_{k=1}^{15} k - \sum_{k=1}^{15} 2c^2 \\
&= \frac{15 \times 16 \times 31}{6} + c \times \frac{15 \times 16}{2} - 30c^2 \\
&= -30c^2 + 120c + 1240 \\
&= -30(c-2)^2 + 1360
\end{aligned}$$

따라서 주어진 식의 값이 최대가 되도록 하는 상수 c 의 값은 2이다.

답 ②

157

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$m+n=16, mn=10$$

..... ㉠

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n (i+j) &= \sum_{j=1}^n i + \sum_{j=1}^n j = ni + \frac{n(n+1)}{2} \\
\therefore \sum_{i=1}^m \left\{ \sum_{j=1}^n (i+j) \right\} &= \sum_{i=1}^m \left\{ ni + \frac{n(n+1)}{2} \right\} \\
&= n \sum_{i=1}^m i + \frac{mn(n+1)}{2} \\
&= n \times \frac{m(m+1)}{2} + \frac{mn(n+1)}{2} \\
&= \frac{mn(m+n+2)}{2} \\
&= \frac{10 \times (16+2)}{2} \quad (\because \text{㉠}) \\
&= 90
\end{aligned}$$

답 90

158

제 k 항은

$$a_k = (2k-1) \times 3k = 6k^2 - 3k$$

$$\therefore 1 \times 3 + 3 \times 6 + 5 \times 9 + \cdots + 19 \times 30$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^{10} (6k^2 - 3k) \\
&= 6 \sum_{k=1}^{10} k^2 - 3 \sum_{k=1}^{10} k \\
&= 6 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} - 3 \times \frac{10 \times 11}{2} \\
&= 2310 - 165 = 2145
\end{aligned}$$

답 2145

159

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = 2^{n+1} + 3 \text{ 이므로}$$

(i) $n=1$ 일 때, $a_1 = S_1 = 7$ (ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned}
a_n &= S_n - S_{n-1} \\
&= (2^{n+1} + 3) - (2^n + 3) = 2^n \quad \text{..... ㉠}
\end{aligned}$$

이때 $a_1 = 7$ 은 ㉠에 $n=1$ 을 대입한 값과 같지 않으므로

$$a_1 = 7, a_n = 2^n \quad (n \geq 2)$$

$$a_n = 2^n \text{에서 } a_{2k-1} = 2^{2k-1} = \frac{1}{2} \times 4^k \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^5 a_{2k-1} &= a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 \\
&= 7 + \sum_{k=2}^5 \left(\frac{1}{2} \times 4^k \right) \\
&= 7 + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^5 4^k = 7 + \frac{1}{2} \times \frac{16 \times (4^4 - 1)}{4 - 1} \\
&= 7 + \frac{8 \times 255}{3} = 7 + 680 = 687
\end{aligned}$$

답 687

160

제 k 항은

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}} = \frac{2}{k(k+1)} \\
&= 2 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\
\therefore \sum_{k=1}^{100} 2 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) &= 2 \times \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{100} - \frac{1}{101} \right) \right\} \\
&= 2 \times \left(1 - \frac{1}{101} \right) = \frac{200}{101}
\end{aligned}$$

답 $\frac{200}{101}$

161

제 k 항은

$$a_k = \left(\frac{n-k}{n}\right)^2 = \left(1 - \frac{k}{n}\right)^2 = 1 - \frac{2k}{n} + \frac{k^2}{n^2}$$

이므로

$$\begin{aligned} & \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + \left(\frac{n-2}{n}\right)^2 + \left(\frac{n-3}{n}\right)^2 + \cdots + 0^2 \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{n-k}{n}\right)^2 = \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{2k}{n} + \frac{k^2}{n^2}\right) \\ &= \sum_{k=1}^n 1 - \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n k + \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 \\ &= n - \frac{2}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{n^2} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{(2n-1)(n-1)}{6n} \quad \text{답} \quad \frac{(2n-1)(n-1)}{6n} \end{aligned}$$

162

$P_n(n, \sqrt{2n+1})$, $Q_n(n, \sqrt{2n-1})$ 이므로

$$P_n Q_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{40} P_k Q_k &= \sum_{k=1}^{40} (\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1}) \\ &= (\sqrt{3}-1) + (\sqrt{5}-\sqrt{3}) + \cdots \\ &\quad + (\sqrt{81}-\sqrt{79}) \\ &= \sqrt{81}-1=8 \quad \text{답} \quad 8 \end{aligned}$$

163

진수를 정리하면

$$\begin{aligned} \log_3(k+1) - \log_3 k &= \log_3 \frac{k+1}{k} \\ \therefore \sum_{k=1}^{80} \{\log_3(k+1) - \log_3 k\} \\ &= \sum_{k=1}^{80} \log_3 \frac{k+1}{k} \\ &= \log_3 \frac{2}{1} + \log_3 \frac{3}{2} + \log_3 \frac{4}{3} + \cdots + \log_3 \frac{80}{79} + \log_3 \frac{81}{80} \\ &= \log_3 \left(\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{80}{79} \times \frac{81}{80} \right) \\ &= \log_3 81 = 4 \quad \text{답} \quad 4 \end{aligned}$$

164

$$f(0) = \sin 0 = 0$$

$$f(1) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$f(2) = \sin \pi = 0$$

$$f(3) = \sin \frac{3\pi}{2} = -1$$

$$f(4) = \sin 2\pi = 0$$

$$f(5) = \sin \frac{5\pi}{2} = \sin \left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$\vdots$

$$f(48) = \sin \frac{48\pi}{2} = \sin 24\pi = \sin(12 \times 2\pi) = 0$$

$$f(49) = \sin \frac{49\pi}{2} = \sin \left(12 \times 2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\begin{aligned} f(50) &= \sin \frac{50\pi}{2} = \sin 25\pi = \sin(12 \times 2\pi + \pi) \\ &= \sin \pi = 0 \end{aligned}$$

즉, $f(n)$ 의 값은 0, 1, 0, -1이 반복되므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{50} f(k) &= f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(50) \\ &= 0 + 1 + 0 + (-1) + \cdots + 0 + 1 + 0 \\ &= 1 \quad \text{답} \quad 1 \end{aligned}$$

165

양의 약수의 개수가 홀수인 수는 제곱수뿐이므로 100부터 400까지의 자연수 중 제곱수들의 총합을 구한다.

즉, $100=10^2$, 11^2 , 12^2 , ..., $20^2=400$ 의 총합은

$$\begin{aligned} \sum_{k=10}^{20} k^2 &= \sum_{k=1}^{20} k^2 - \sum_{k=1}^9 k^2 \\ &= \frac{20 \times 21 \times 41}{6} - \frac{9 \times 10 \times 19}{6} \\ &= 2870 - 285 = 2585 \quad \text{답} \quad 2585 \end{aligned}$$

166

n 번째 줄에 나열된 수는

$$1, 2, 3, \cdots, n-1, n, n-1, \cdots, 3, 2, 1$$

이므로 그 합은

$$\begin{aligned} & 1+2+3+\cdots+(n-1)+n+(n-1)+\cdots+3+2+1 \\ &= \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^{n-1} k \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2} \\ &= n^2 \end{aligned}$$

따라서 첫 번째 줄부터 20번째 줄까지 나열된 모든 수의 합은

$$\sum_{k=1}^{20} k^2 = \frac{20 \times 21 \times 41}{6} = 2870 \quad \text{답} \quad 2870$$

167

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2} \text{에서 } n^2+n=2 \sum_{k=1}^n k \text{이므로}$$

조건 (가)에서

$$\sum_{k=1}^n b_k = 2 \sum_{k=1}^n k = \sum_{k=1}^n 2k$$

$$\therefore b_k = 2k$$

또,

$$\begin{aligned} \frac{n^2(n+1)^2}{2} &= 2 \times \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\ &= 2 \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 \\ &= 2 \sum_{k=1}^n k^3 = \sum_{k=1}^n 2k^3 \end{aligned}$$

이므로 조건 (나)에서

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k - 5 \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n (a_k - 5) b_k = \sum_{k=1}^n 2k^3$$

위의 식에 $b_k = 2k$ 를 대입하면

$$(a_k - 5) \times 2k = 2k^3$$

$$a_k - 5 = k^2 \quad \therefore a_k = k^2 + 5$$

$$\therefore a_{10} = 10^2 + 5 = 105$$

답 105

168

주어진 수열을 군으로 묶으면

$$(1), \left(1, \frac{1}{2}\right), \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right), \dots$$

각 군의 항의 개수는 k (k 는 자연수)이므로 제1군부터 제 n 군까지의 항의 개수는

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

제1군부터 제5군까지의 항의 개수는 15이므로 제16항은 제6군의 첫 번째 항, 즉 1이다.

따라서 첫째항부터 제16항까지의 곱은

$$\begin{aligned} 1^6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times \left(\frac{1}{8}\right)^2 \times \left(\frac{1}{16}\right)^1 \\ = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{20} \end{aligned}$$

$$\therefore n = 20$$

답 20

169

수열 $\{b_n\}$ 에 대하여 $b_n = \frac{1}{(2n-1)a_n}$, $S_n = \sum_{k=1}^n b_k$ 라 하면

$$S_n = n^2 + 2n \text{이므로}$$

$$(i) n=1 \text{일 때, } b_1 = S_1 = 1 + 2 = 3$$

$$(ii) n \geq 2 \text{일 때,}$$

$$\begin{aligned} b_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (n^2 + 2n) - \{(n-1)^2 + 2(n-1)\} \\ &= 2n + 1 \end{aligned}$$

..... ㉠

이때 $b_1 = 3$ 은 ㉠에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로

$$b_n = 2n + 1$$

$$\frac{1}{(2n-1)a_n} = 2n + 1 \text{이므로}$$

$$a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{10} a_n &= \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{10} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \times \left\{ \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \dots + \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{21}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{21}\right) = \frac{10}{21} \end{aligned}$$

답 ㉠

3 수학적 귀납법

1 수열의 귀납적 정의

240~245쪽

171

(1) 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열이므로

$$a_n = 1 + (n-1) \times 2 = 2n-1$$

(2) 첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열이므로

$$a_n = 1 \times 2^{n-1} = 2^{n-1}$$

(3) $a_1=2$, $a_2=5$ 인 등차수열이므로 ◀ 공차: $a_2 - a_1 = 3$

$$\therefore a_n = 2 + (n-1) \times 3 = 3n-1$$

(4) $a_1=2$, $a_2=8$ 인 등비수열이므로 ◀ 공비: $a_2 \div a_1 = 4$

$$\therefore a_n = 2 \times 4^{n-1} = 2^{2n-1}$$

답 (1) $a_n = 2n-1$ (2) $a_n = 2^{n-1}$

(3) $a_n = 3n-1$ (4) $a_n = 2^{2n-1}$

173

[1단계] $a_{n+1} = a_n + 4n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입한다.

[2단계] 변끼리 더한다.

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + 4 \times 1 \\ a_3 &= a_2 + 4 \times 2 \\ a_4 &= a_3 + 4 \times 3 \\ &\vdots \\ +) a_n &= a_{n-1} + 4(n-1) \\ \hline a_n &= a_1 + 4\{1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)\} \\ &= 1 + 4 \sum_{k=1}^{n-1} k \\ &= 1 + 4 \times \frac{(n-1)n}{2} \\ &= 2n^2 - 2n + 1 \end{aligned}$$

답 $a_n = 2n^2 - 2n + 1$

175

[1단계] $a_{n+1} = \frac{n}{n+1} a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입한다.

[2단계] 변끼리 곱한다.

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{2} a_1 \\ a_3 &= \frac{2}{3} a_2 \\ a_4 &= \frac{3}{4} a_3 \\ &\vdots \\ \times) a_n &= \frac{n-1}{n} a_{n-1} \\ \hline a_n &= a_1 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} \\ &= a_1 \times \frac{1}{n} = \frac{5}{n} \end{aligned}$$

답 $a_n = \frac{5}{n}$

참고

주어진 식에 $n=1, 2, 3, \dots, n-1$ 을 차례대로 대입한 후 양변의 $a_2, a_3, \dots, a_{n-1}$ 이 소거되도록 변끼리 더하거나 곱한다.

177

(1) 올해의 씨앗 10개 중 20%는 죽고, 나머지는 각각 5배씩 씨앗을 내게 되므로

$$\left(10 - 10 \times \frac{20}{100}\right) \times 5 = 40 \quad \text{..... ㉠}$$

(2) $(n+1)$ 년 후가 되면 n 년 후의 씨앗 중 20%는 죽고, 나머지는 각각 5배씩 씨앗을 내게 되므로

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \left(a_n - a_n \times \frac{20}{100}\right) \times 5 \\ \therefore a_{n+1} &= 4a_n \quad \text{..... ㉡} \end{aligned}$$

(3) ㉠에서 $a_1=40$ 이므로 ㉡에 $n=1, 2, 3, 4$ 를 차례대로 대입하면

$$a_2 = 4a_1 = 4 \times 40 = 160$$

$$a_3 = 4a_2 = 4 \times 160 = 640$$

$$a_4 = 4a_3 = 4 \times 640 = 2560$$

$$a_5 = 4a_4 = 4 \times 2560 = 10240$$

따라서 5년 후에 뿌릴 씨앗의 개수는 10240이다.

답 (1) 40 (2) $a_{n+1} = 4a_n$ (3) 10240

다른 풀이

(3) ㉠, ㉡에서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 40이고 공비가 4인 등비수열이므로

$$a_n = 40 \times 4^{n-1}$$

$$\therefore a_5 = 40 \times 4^4 = 10240$$

따라서 5년 후에 뿌릴 씨앗의 개수는 10240이다.

179

[1단계] $a_n = S_n - S_{n-1}$ 을 $S_n = n^2 a_n$ 에 대입하면

$$S_n = n^2(S_n - S_{n-1})$$

$$\therefore S_n = \frac{n^2}{n^2 - 1} S_{n-1}$$

$$= \frac{n \times n}{(n-1)(n+1)} S_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

[2단계] 위 식의 n 에 2, 3, 4, ..., n 을 차례대로 대입하여 변끼리 곱하면

$$S_2 = \frac{2 \times 2}{1 \times 3} S_1$$

$$S_3 = \frac{3 \times 3}{2 \times 4} S_2$$

$$S_4 = \frac{4 \times 4}{3 \times 5} S_3$$

⋮

$$\times \left) S_n = \frac{n \times n}{(n-1)(n+1)} S_{n-1}$$

$$S_n = S_1 \times \frac{2 \times 2}{1 \times 3} \times \frac{3 \times 3}{2 \times 4} \times \dots$$

$$\times \frac{n \times n}{(n-1)(n+1)}$$

$$= 3 \times \frac{2}{1} \times \frac{n}{n+1} \leftarrow S_1 = a_1 = 3$$

$$= \frac{6n}{n+1} \quad (n \geq 2)$$

이 식은 $n=1$ 일 때도 성립하므로

$$S_n = \frac{6n}{n+1} \quad \text{답 } S_n = \frac{6n}{n+1}$$

필수 확인 문제

246쪽

180

첫째항이 2, 공차가 5인 등차수열이므로

$$a_n = 2 + (n-1) \times 5 = 5n - 3$$

이때 $a_k = 47$ 이므로

$$5k - 3 = 47, 5k = 50$$

$$\therefore k = 10$$

답 10

181

$a_2 = 2, a_3 = -4$ 인 등비수열이므로

$$\leftarrow \text{공비: } a_3 \div a_2 = -2$$

$$a_1 = -1, a_n = -1 \times (-2)^{n-1}$$

$$\therefore a_8 = -1 \times (-2)^{8-1} = 128$$

답 128

182

$a_{n+1} = a_n - n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$a_2 = a_1 - 1$$

$$a_3 = a_2 - 2$$

$$a_4 = a_3 - 3$$

⋮

$$+ \left) a_n = a_{n-1} - (n-1)$$

$$a_n = a_1 - \{1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)\}$$

$$= 1 - \frac{(n-1)n}{2}$$

$$= -\frac{n^2 - n - 2}{2}$$

$$\therefore -\frac{k^2 - k - 2}{2} = -14 \text{ 이므로}$$

$$k^2 - k - 2 = 28, k^2 - k - 30 = 0$$

$$(k+5)(k-6) = 0$$

이때 k 는 자연수이므로 $k=6$

답 6

183

$$1 - \frac{1}{n^2} = \frac{n^2 - 1}{n^2} = \frac{(n-1)(n+1)}{n \times n} \text{ 이므로}$$

$a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) a_{n-1}$ 의 n 에 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입하여 변끼리 곱하면

$$a_2 = \frac{1 \times 3}{2 \times 2} a_1$$

$$a_3 = \frac{2 \times 4}{3 \times 3} a_2$$

$$a_4 = \frac{3 \times 5}{4 \times 4} a_3$$

⋮

$$\times \left) a_n = \frac{(n-1)(n+1)}{n \times n} a_{n-1}$$

$$a_n = a_1 \times \frac{1 \times 3}{2 \times 2} \times \frac{2 \times 4}{3 \times 3} \times \dots \times \frac{(n-1)(n+1)}{n \times n}$$

$$= 1 \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{n+1}{n}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

$$\therefore a_{20} = \frac{21}{40}$$

답 $\frac{21}{40}$

184

$S_n = 2a_n - 2$ 에서 $S_{n+1} = 2a_{n+1} - 2$ 이므로

$$S_{n+1} - S_n = 2a_{n+1} - 2 - (2a_n - 2)$$

$$= 2a_{n+1} - 2a_n$$

이때 $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ ($n=1, 2, 3, \dots$)이므로

$$a_{n+1} = 2a_{n+1} - 2a_n$$

$$\therefore a_{n+1} = 2a_n$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 2, 공비가 2인 등비수열
이므로

$$a_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$$

$$\therefore a_9 = 2^9 = 512$$

답 512

185

주어진 그림에서

$$a_1 = 4$$

$$a_2 = a_1 + 8 = a_1 + 4 \times 2$$

$$a_3 = a_2 + 12 = a_2 + 4 \times 3$$

$$a_4 = a_3 + 16 = a_3 + 4 \times 4$$

$\vdots$

$$\therefore a_{n+1} = a_n + 4n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

답 $a_1 = 4, a_{n+1} = a_n + 4n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$

2 수학적 귀납법

247~249쪽

187

(ii) $n=k$ 일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

양변에 $\boxed{(k+1)^2}$ 을 더하면

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + \boxed{(k+1)^2}$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \boxed{(k+1)^2}$$

$$= \frac{k+1}{6} \{k(2k+1) + 6(k+1)\}$$

$$= \frac{k+1}{6} (2k^2 + 7k + 6)$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)\{(k+1)+1\}\{2(k+1)+1\}}{6}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 등식이 성립한다.

답 $(\forall) (k+1)^2$

$$(\hookrightarrow) \frac{(k+1)\{(k+1)+1\}\{2(k+1)+1\}}{6}$$

189

(1) (i) $n=2$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = (1-h)^2 = 1-2h+h^2$$

$$(\text{우변}) = 1-2h$$

즉, $(\text{좌변}) > (\text{우변})$ 이므로 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k$ ($k \geq 2$)일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$(1-h)^k > 1-kh$$

양변에 $1-h$ 를 곱하면 $0 < 1-h < 1$ 이므로

$$\begin{aligned} (1-h)^{k+1} &> (1-kh)(1-h) \\ &= 1-(k+1)h+kh^2 \\ &> 1-(k+1)h \end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 2 이상의 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

(2) (i) $n=2$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$(\text{우변}) = \frac{2 \times 2}{2+1} = \frac{4}{3}$$

즉, $(\text{좌변}) > (\text{우변})$ 이므로 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k$ ($k \geq 2$)일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} > \frac{2k}{k+1}$$

양변에 $\frac{1}{k+1}$ 을 더하면

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} &> \frac{2k}{k+1} + \frac{1}{k+1} \\ &= \frac{2k+1}{k+1} \end{aligned}$$

이때 $\frac{2k+1}{k+1}$ 과 $\frac{2(k+1)}{(k+1)+1}$ 의 크기를 비교하면

$$\begin{aligned} \frac{2k+1}{k+1} - \frac{2(k+1)}{(k+1)+1} &= \frac{(2k+1)(k+2) - 2(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{2k^2 + 5k + 2 - 2(k^2 + 2k + 1)}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k}{(k+1)(k+2)} > 0 \quad \leftarrow k \geq 2 \end{aligned}$$

이므로 $\frac{2k+1}{k+1} > \frac{2(k+1)}{(k+1)+1}$

$$\therefore 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} \\ > \frac{2k+1}{k+1} > \frac{2(k+1)}{(k+1)+1}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 2 이상의 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 부등식이 성립한다. **답** 풀이 참조

참고

수학적 귀납법으로 증명할 때 주어진 n 의 조건에 주의한다. 반드시 $n=1$ 로 시작하지 않는다.

필수 확인 문제

250쪽

190

$p(n)$ 이 참이면 $p(n+2)$ 도 참이므로

→ 한 다리 건너 넘어간다.

$$1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow \cdots$$

$$2 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow \cdots$$

1이 넘어가면 3, 5, 7, ...이 넘어간다.

2가 넘어가면 4, 6, 8, ...이 넘어간다.

따라서 1과 2가 넘어가면 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...이 넘어간다.

그러므로 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

191

조건 (가)에 의하여 $p(1)$ 이 참이므로

조건 (나)에 의하여

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow \cdots$$

또, 조건 (다)에 의하여

$$2 \rightarrow 3, 4 \rightarrow 5, 8 \rightarrow 9, \cdots$$

따라서 반드시 참이라고 할 수 없는 명제는 $p(6)$ 이다.

답 ④

192

(ii) $n=k$ 일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$$

양변에 $[2k+1]$ 을 더하면

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)+[2k+1] \\ =k^2+[2k+1]=[k+1]^2$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 등식이 성립한다.

답 ⑤

실전 연습문제

252~253쪽

193

첫째항이 2, 제3항이 8인 등차수열이므로 공차를 d 라 하면

$$a_3 - a_1 = 8 - 2 = 2d \quad \therefore d = 3$$

$$\therefore a_n = 2 + (n-1) \times 3 = 3n - 1$$

$a_k > 100$ 에서

$$3k - 1 > 100, \quad 3k > 101$$

$$\therefore k > \frac{101}{3} = 33.6\cdots$$

따라서 자연수 k 의 최솟값은 34이다.

답 ④

194

$a_{n+1} = a_n + f(n)$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$a_2 = a_1 + f(1)$$

$$a_3 = a_2 + f(2)$$

$$a_4 = a_3 + f(3)$$

⋮

$$+) a_n = a_{n-1} + f(n-1) \\ \hline a_n = a_1 + \{f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n-1)\} \\ = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

$$\therefore a_{15} = a_1 + \sum_{k=1}^{14} f(k)$$

$$= 3 + (14^2 - 3 \times 14)$$

$$= 157$$

답 157

195

$a_{n+1} = \frac{2a_n}{2+a_n}$ 의 역수를 취하면

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2+a_n}{2a_n}$$

$$\therefore \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{2}$$

이때 $\frac{1}{a_n} = b_n$ 이라 하면

$$b_{n+1} = b_n + \frac{1}{2}$$

수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 $b_1 = \frac{1}{a_1} = \frac{1}{3}$, 공차가 $\frac{1}{2}$ 인 등차 수열이므로

$$b_n = \frac{1}{3} + (n-1) \times \frac{1}{2} \\ = \frac{1}{2}n - \frac{1}{6} = \frac{3n-1}{6}$$

$$\text{즉, } \frac{1}{a_n} = \frac{3n-1}{6} \text{에서}$$

$$a_n = \frac{6}{3n-1}$$

$$\therefore a_{15} = \frac{6}{3 \times 15 - 1} = \frac{6}{44} = \frac{3}{22} \quad \text{답 } \frac{3}{22}$$

196

$a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이므로 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$S_{10} = \frac{a(r^{10}-1)}{r-1} = 6 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$S_{20} = \frac{a(r^{20}-1)}{r-1} = \frac{a(r^{10}-1)(r^{10}+1)}{r-1} = 30$$

위의 식에 $\textcircled{7}$ 을 대입하면

$$6(r^{10}+1) = 30, \quad r^{10}+1=5$$

$$\therefore r^{10}=4$$

$$\therefore S_{30} = \frac{a(r^{30}-1)}{r-1} \\ = \frac{a(r^{10}-1)(r^{20}+r^{10}+1)}{r-1} \\ = \frac{a(r^{10}-1)}{r-1} \times (r^{20}+r^{10}+1) \\ = 6 \times (4^2+4+1) = 126 \quad (\because \textcircled{7})$$

답 126

197

(i) $n=1$ 일 때,

$$9^1 - 1 = 8$$

이므로 8의 배수이다.

(ii) $n=k$ 일 때 $9^k - 1$ 이 8의 배수라 가정하면

$$9^k - 1 = 8m \quad (m \text{은 자연수}) \text{으로 놓을 수 있다.}$$

이때 $n=k+1$ 이면

$$9^{k+1} - 1 = 9 \times 9^k - 1 \\ = 9 \times (9^k - 1) - 1 + 9 \\ = 9 \times 8m + 8 \\ = 8(9m + 1)$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 $9^n - 1$ 이 8의 배수이다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 $9^n - 1$ 이 8의 배수이다. 답 풀이 참조

+ 풍산자 방법

$n \geq a$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 $f(n)$ 이 l 의 배수임을 증명하려면

(i) $f(a)$ 이 l 의 배수임을 확인한다. (단, a 는 자연수이다.)

(ii) $f(k)$ ($k \geq a$)가 l 의 배수라 가정한 다음,

$f(k+1) = l(\blacksquare + \blacktriangle)$ 의 꼴로 정리하여 $f(k+1)$ 도 l 의 배수임을 보인다.

198

$a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입하면

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 2$$

$$a_3 = a_2 + 2a_1 = 2 + 2 \times 1 = 4$$

$$a_4 = a_3 + 2a_2 = 4 + 2 \times 2 = 8$$

$$a_5 = a_4 + 2a_3 = 8 + 2 \times 4 = 16$$

⋮

이므로 수열 $\{a_n\}$ 은

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \dots$$

이때 각 항을 5로 나누어 나머지는

$$1, 2, 4, 3, 1, 2, 4, 3, \dots$$

이므로 1, 2, 4, 3이 반복된다.

$150 = 4 \times 37 + 2$ 이므로 구하는 수는 1, 2, 4, 3의 두 번째 수인 2이다. 답 2

199

조건 (나)에 의하여 $n \geq 2$ 인 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n a_{2k} - \sum_{k=1}^{n-1} a_{2k} \\ = \left(\sum_{k=1}^n a_{2k-1} + n^2 \right) - \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} a_{2k-1} + (n-1)^2 \right\}$$

$$\therefore a_{2n} = a_{2n-1} + 2n - 1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$\textcircled{7}$ 에 $n=6$ 을 대입하면

$$a_{12} = a_{11} + 11 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$ 에 $n=5$ 를 대입하면

$$a_{10} = a_9 + 9 \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

$\textcircled{8} - \textcircled{9}$ 을 하면

$$a_{12} - a_{10} = a_{11} - a_9 + 2$$

이때 (가)에 의하여 $a_{12} - a_{10} = 5$ 이고, $a_9 = 16$ 이므로

$$5 = a_{11} - 16 + 2 \quad \therefore a_{11} = 19 \quad \text{답 } \textcircled{3}$$

200

[그림 2]에서 3개의 원을 그리면 접점이 6개 늘어나고,
[그림 3]에서 4개의 원을 그리면 접점이 9개 늘어나므로

$$a_n - a_{n-1} = 3 \times n$$

위 식의 n 에 2, 3, ..., n 을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$a_2 - a_1 = 3 \times 2$$

$$a_3 - a_2 = 3 \times 3$$

$$a_4 - a_3 = 3 \times 4$$

⋮

$$+) a_n - a_{n-1} = 3 \times n$$

$$a_n - a_1 = 3(2 + 3 + \dots + n)$$

$$\therefore a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3(k+1)$$

$$= 3 + 3 \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)$$

$$= 3 + 3 \times \frac{(n-1)n}{2} + 3(n-1)$$

$$= \frac{3n(n+1)}{2}$$

$$\therefore a_{10} = \frac{3 \times 10 \times 11}{2} = 165$$

답 165

201

처음 몇 항을 구해 규칙성을 찾으면

1원을 넣는 방법 $\Rightarrow 1$

2원을 넣는 방법 $\Rightarrow 1+1, 2$

3원을 넣는 방법 $\Rightarrow 1+1+1, 1+2, 2+1$

4원을 넣는 방법 $\Rightarrow 1+1+1+1, 1+1+2,$

$1+2+1, 2+1+1, 2+2$

5원을 넣는 방법 $\Rightarrow 1+1+1+1+1, 1+1+1+2,$

$1+1+2+1, 1+2+1+1,$

$2+1+1+1, 1+2+2, 2+1+2,$

$2+2+1,$

⋮

즉, 4 이상의 자연수 k 에 대하여 k 원을 넣는 방법은

$(k-2)$ 원을 넣는 경우에 2원짜리 동전을 더 넣고,

$(k-1)$ 원을 넣는 경우에 1원짜리 동전을 더 넣는 것과

같다.

$$\therefore a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

$$n=3\text{일 때, } a_5 = a_4 + a_3 = 5 + 3 = 8$$

$$n=4\text{일 때, } a_6 = a_5 + a_4 = 8 + 5 = 13$$

$$n=5\text{일 때, } a_7 = a_6 + a_5 = 13 + 8 = 21$$

답 21

참고

$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ 으로 정의되는 수열을 피보나치수열이라고 한다.

202

(ii) $n=k$ ($k \geq 5$)일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$2^k > k^2$$

$$\text{양변에 2를 곱하면 } 2^{k+1} > 2k^2$$

이때 $k \geq 5$ 이면

$$k^2 - 2k - 1 = \boxed{(k-1)^2} - 2 > 0$$

$$\text{이므로 } k^2 > 2k + 1$$

$$\therefore 2^{k+1} > 2k^2 = k^2 + k^2$$

$$> k^2 + 2k + 1 = \boxed{(k+1)^2}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 부등식은 성립한다.

그러므로

$$f(k) = (k-1)^2, g(k) = (k+1)^2$$

이므로

$$f(2) + 3g(3) = (2-1)^2 + 3 \times (3+1)^2 = 49$$

답 49