

풍산짜 라이트유형

공통수학 1

| 정답과 풀이 |

01

다항식의 연산

기초를 다지는 유형

본문 009쪽

001

(1) $A+B-C$

$$\begin{aligned}
 &= (x^2-4x+2) + (3x^2-x-6) - (2x^2-1) \\
 &= x^2-4x+2+3x^2-x-6-2x^2+1 \\
 &= 2x^2-5x-3
 \end{aligned}$$

(2) $A-2(B-C)$

$$\begin{aligned}
 &= A-2B+2C \\
 &= (x^2-4x+2) - 2(3x^2-x-6) + 2(2x^2-1) \\
 &= x^2-4x+2-6x^2+2x+12+4x^2-2 \\
 &= -x^2-2x+12
 \end{aligned}$$

답 (1) $2x^2-5x-3$ (2) $-x^2-2x+12$

002

$$\begin{aligned}
 A+B &= (x^2+2xy-1) + (-2x^2+xy+1) \\
 &= x^2+2xy-1-2x^2+xy+1 \\
 &= -x^2+3xy
 \end{aligned}$$

답 ②

003

$$\begin{aligned}
 (A+2B)-(3B-C) &= A+2B-3B+C \\
 &= A-B+C \\
 &= (2x^3-3x+2) - (x^2+5x) + (-x^3+4x-1) \\
 &= 2x^3-3x+2-x^2-5x-x^3+4x-1 \\
 &= x^3-x^2-4x+1
 \end{aligned}$$

따라서 $a=1, b=-1, c=-4, d=1$ 이므로
 $a+b+c+d=1+(-1)+(-4)+1=-3$

답 -3

004

$2X-A=A-2B$ 에서

$2X=2A-2B$

$\therefore X=A-B$

$$\begin{aligned}
 &= (3x^2+2x-4) - (5x^2-2x+1) \\
 &= 3x^2+2x-4-5x^2+2x-1 \\
 &= -2x^2+4x-5
 \end{aligned}$$

답 ②

005

$A+B=2x^2-3x+4$

..... ㉠

$2A-B=x^2+9x+5$

..... ㉡

㉠+㉡을 하면

$$\begin{aligned}
 3A &= (2x^2-3x+4) + (x^2+9x+5) \\
 &= 3x^2+6x+9
 \end{aligned}$$

002 정답과 풀이

$\therefore A=x^2+2x+3$ ①

 $A=x^2+2x+3$ 을 ㉠에 대입하면

$(x^2+2x+3)+B=2x^2-3x+4$

$\therefore B=2x^2-3x+4-(x^2+2x+3)$

$=2x^2-3x+4-x^2-2x-3$

$=x^2-5x+1$ ②

$\therefore A-B=(x^2+2x+3)-(x^2-5x+1)$

$=x^2+2x+3-x^2+5x-1$

$=7x+2$ ③

답 $7x+2$

채점 기준	비율
① 다항식 A 를 구할 수 있다.	40 %
② 다항식 B 를 구할 수 있다.	40 %
③ $A-B$ 를 계산할 수 있다.	20 %

006

(1) $xy(x^2-5xy+4y^2)$

$=xy \times x^2 + xy \times (-5xy) + xy \times 4y^2$

$=x^3y-5x^2y^2+4xy^3$

(2) $(2a-b)(a-2b+3)$

$=2a(a-2b+3)-b(a-2b+3)$

$=2a^2-4ab+6a-ab+2b^2-3b$

$=2a^2-5ab+2b^2+6a-3b$

(3) $(3x+1)(x^2+4x-2)$

$=3x(x^2+4x-2)+1 \times (x^2+4x-2)$

$=3x^3+12x^2-6x+x^2+4x-2$

$=3x^3+13x^2-2x-2$

(4) $(a^2+ab-b^2)(a-3b)$

$=(a^2+ab-b^2) \times a + (a^2+ab-b^2) \times (-3b)$

$=a^3+a^2b-ab^2-3a^2b-3ab^2+3b^3$

$=a^3-2a^2b-4ab^2+3b^3$

답 (1) $x^3y-5x^2y^2+4xy^3$ (2) $2a^2-5ab+2b^2+6a-3b$

(3) $3x^3+13x^2-2x-2$ (4) $a^3-2a^2b-4ab^2+3b^3$

007

$(a+b)(a-3b+2)-(a^2-5ab-3b^2)$

$=a(a-3b+2)+b(a-3b+2)-a^2+5ab+3b^2$

$=a^2-3ab+2a+ab-3b^2+2b-a^2+5ab+3b^2$

$=3ab+2a+2b$

답 ③

008

$AB+C$

$=(x+2y)(x^2+3xy-y^2)+(2x^3-y^3)$

$=x(x^2+3xy-y^2)+2y(x^2+3xy-y^2)+2x^3-y^3$

$=x^3+3x^2y-xy^2+2x^2y+6xy^2-2y^3+2x^3-y^3$

$=3x^3+5x^2y+5xy^2-3y^3$

답 ⑤

009

$(x+4)(2x^2-3x+1)$ 의 전개식에서 x^2 항은
 $x \times (-3x) + 4 \times 2x^2 = -3x^2 + 8x^2 = 5x^2$
 따라서 x^2 의 계수는 5이다.

답 5

참고

다항식의 전개식에서 특정 항의 계수 구하기

주어진 식을 모두 전개하지 않고 분배법칙을 이용하여 구하고자 하는 항이 나오도록 각 다항식에서 항을 하나씩 선택하여 곱한다.

010

$(x+6y)(2x^2+kxy-5y)$ 의 전개식에서 x^2y 항은
 $x \times kxy + 6y \times 2x^2 = kx^2y + 12x^2y = (k+12)x^2y$
 이때 x^2y 의 계수가 -14 이므로
 $k+12 = -14 \quad \therefore k = -26$

답 ②

011

- (1) $(2x-1)^2 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 1 + 1^2$
 $= 4x^2 - 4x + 1$
 (2) $(3a+4b)(3a-4b) = (3a)^2 - (4b)^2$
 $= 9a^2 - 16b^2$
 (3) $(a-6)(a-3) = a^2 + \{-6 + (-3)\}a + (-6) \times (-3)$
 $= a^2 - 9a + 18$
 (4) $(x-3y)(2x+5y)$
 $= (1 \times 2)x^2 + \{1 \times 5 + (-3) \times 2\}xy + (-3 \times 5)y^2$
 $= 2x^2 - xy - 15y^2$

- 답 (1) $4x^2 - 4x + 1$ (2) $9a^2 - 16b^2$
 (3) $a^2 - 9a + 18$ (4) $2x^2 - xy - 15y^2$

012

$2(x+1)(x-4) - (x-2)(x+3)$
 $= 2(x^2-3x-4) - (x^2+x-6)$
 $= 2x^2-6x-8-x^2-x+6$
 $= x^2-7x-2$
 이때 x^2 의 계수는 1, x 의 계수는 -7 이므로
 $a=1, b=-7$
 $\therefore a-b = 1 - (-7) = 8$

답 ②

013

$(a+2b)^2 - (a-2b)^2$
 $= a^2 + 4ab + 4b^2 - (a^2 - 4ab + 4b^2)$
 $= a^2 + 4ab + 4b^2 - a^2 + 4ab - 4b^2$
 $= 8ab = 8 \times \sqrt{2} \times (-\sqrt{3}) = -8\sqrt{6}$

답 ①

014

$(5x-a)(6x+7) = 30x^2 + (35-6a)x - 7a$

x 의 계수가 -1 이므로
 $35-6a = -1, 6a = 36 \quad \therefore a = 6$
 따라서 구하는 상수항은
 $-7a = -7 \times 6 = -42$

답 ①

015

$(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1) = (x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)$
 $= (x^4-1)(x^4+1)$
 $= x^8-1$

$\therefore a = 8$

답 ④

016

- (1) $(a+2b-c)^2$
 $= a^2 + (2b)^2 + (-c)^2 + 2 \times a \times 2b + 2 \times 2b \times (-c)$
 $+ 2 \times (-c) \times a$
 $= a^2 + 4b^2 + c^2 + 4ab - 4bc - 2ac$
 (2) $(x-2)^3 = x^3 - 3 \times x^2 \times 2 + 3 \times x \times 2^2 - 2^3$
 $= x^3 - 6x^2 + 12x - 8$
 (3) $(x-3y)(x^2+3xy+9y^2) = (x-3y)\{x^2+x \times 3y+(3y)^2\}$
 $= x^3 - (3y)^3$
 $= x^3 - 27y^3$
 (4) $(x+1)(x+2)(x+3)$
 $= x^3 + (1+2+3)x^2 + (1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 1)x + 1 \times 2 \times 3$
 $= x^3 + 6x^2 + 11x + 6$
 (5) $(x-y+4)(x^2+y^2+xy-4x+4y+16)$
 $= (x-y+4)(x^2+y^2+16+xy+4y-4x)$
 $= (x-y+4)\{x^2+(-y)^2+4^2-x \times (-y)$
 $- (-y) \times 4 - 4 \times x\}$
 $= x^3 + (-y)^3 + 4^3 - 3 \times x \times (-y) \times 4$
 $= x^3 - y^3 + 64 + 12xy = x^3 - y^3 + 12xy + 64$
 (6) $(4a^2+2ab+b^2)(4a^2-2ab+b^2)$
 $= \{(2a)^2+2a \times b+b^2\}\{(2a)^2-2a \times b+b^2\}$
 $= (2a)^4 + (2a)^2 \times b^2 + b^4 = 16a^4 + 4a^2b^2 + b^4$
 답 (1) $a^2+4b^2+c^2+4ab-4bc-2ac$ (2) $x^3-6x^2+12x-8$
 (3) x^3-27y^3 (4) $x^3+6x^2+11x+6$
 (5) $x^3-y^3+12xy+64$ (6) $16a^4+4a^2b^2+b^4$

017

$(3x+y-4z)^2 = 9x^2+y^2+16z^2+6xy-8yz-24zx$
 따라서 $a=1, b=16, c=6, d=-24$ 이므로
 $a+b+c+d = 1+16+6+(-24) = -1$

답 ②

018

$(x-y)(x+y)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$
 $= \{(x-y)(x^2+xy+y^2)\}\{(x+y)(x^2-xy+y^2)\}$
 $= (x^3-y^3)(x^3+y^3)$
 $= x^6-y^6$

답 ①

019

$$(3x-1)^3(x+1)^2 \\ = (27x^3 - 27x^2 + 9x - 1)(x^2 + 2x + 1) \quad \text{①}$$

위의 전개식에서 x^4 항은

$$27x^3 \times 2x - 27x^2 \times x^2 = 27x^4$$

따라서 x^4 의 계수는 27이다. ②

답 27

채점 기준	비율
① $(3x-1)^3, (x+1)^2$ 을 각각 전개할 수 있다.	50%
② x^4 의 계수를 구할 수 있다.	50%

020

$$(x-y-2z)^2 = x^2 + y^2 + 4z^2 - 2xy + 4yz - 4zx \\ = x^2 + y^2 + 4z^2 - 2(xy - 2yz + 2zx) \\ = 62 - 2 \times 13 = 36$$

답 36

021

$$(1) x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy \\ = 6^2 - 2 \times (-4) = 44 \\ (2) (x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy \\ = 6^2 - 4 \times (-4) = 52 \\ (3) x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) \\ = 6^3 - 3 \times (-4) \times 6 = 288$$

답 (1) 44 (2) 52 (3) 288

022

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy \text{이므로} \\ 8 = (-2)^2 - 2xy, 2xy = -4 \\ \therefore xy = -2 \\ \therefore x^2y + xy^2 = xy(x+y) \\ = -2 \times (-2) = 4$$

답 ④

023

$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) \\ = 1^3 - 3 \times (-7) \times 1 = 22 \\ a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab \\ = 1^2 - 2 \times (-7) = 15 \\ \therefore a^2(a+1) + b^2(b+1) = a^3 + a^2 + b^3 + b^2 \\ = (a^3 + b^3) + (a^2 + b^2) \\ = 22 + 15 = 37$$

답 37

024

$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) \text{이므로} \\ 10 = 2^3 - 3ab \times 2, 6ab = -2 \\ \therefore ab = -\frac{1}{3}$$

답 ②

025

$$\frac{x^2}{y} - \frac{y^2}{x} = \frac{x^3 - y^3}{xy} = \frac{(x-y)^3 + 3xy(x-y)}{xy} \quad \text{①}$$

$$x-y = (2+\sqrt{3}) - (2-\sqrt{3}) = 2\sqrt{3},$$

$$xy = (2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 1 \quad \text{②}$$

이므로

$$\frac{x^2}{y} - \frac{y^2}{x} = \frac{(x-y)^3 + 3xy(x-y)}{xy} \\ = \frac{(2\sqrt{3})^3 + 3 \times 1 \times 2\sqrt{3}}{1} \\ = 30\sqrt{3} \quad \text{③}$$

답 $30\sqrt{3}$

채점 기준	비율
① 곱셈 공식의 변형을 이용하여 $\frac{x^2}{y} - \frac{y^2}{x}$ 을 변형할 수 있다.	50%
② $x-y, xy$ 의 값을 구할 수 있다.	30%
③ $\frac{x^2}{y} - \frac{y^2}{x}$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

026

$$x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) \text{이므로} \\ 20 = 2^3 - 3xy \times 2, 6xy = -12 \\ \therefore xy = -2 \\ \therefore x^6 + y^6 = (x^3 + y^3)^2 - 2x^3y^3 \quad \begin{matrix} \text{→ } x^6 + y^6 = (x^3)^2 + (y^3)^2 \text{에서} \\ x^3 = A, y^3 = B \text{로 놓으면} \\ A^2 + B^2 = (A+B)^2 - 2AB \\ = (x^3 + y^3)^2 - 2x^3y^3 \end{matrix} \\ = (x^3 + y^3)^2 - 2(xy)^3 \\ = 20^2 - 2 \times (-2)^3 = 416$$

답 ①

027

$$(1) x^2 + y^2 + z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) \\ = (-3)^2 - 2 \times 2 = 5 \\ (2) x^3 + y^3 + z^3 = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + 3xyz \\ = (x+y+z)\{x^2 + y^2 + z^2 - (xy+yz+zx)\} + 3xyz \\ = -3(5-2) + 3 \times 1 = -6 (\because (1))$$

답 (1) 5 (2) -6

028

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) \text{이므로} \\ 5 = 1^2 - 2(xy+yz+zx), 2(xy+yz+zx) = -4 \\ \therefore xy+yz+zx = -2$$

답 ④

029

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) \text{이므로} \\ 24 = 6^2 - 2(ab+bc+ca) \\ 2(ab+bc+ca) = 12 \\ \therefore ab+bc+ca = 6 \\ \therefore (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \\ = a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2 \\ = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab+bc+ca) \\ = 2 \times 24 - 2 \times 6 = 36$$

답 ④

030

$$\begin{aligned}
 a^2 + b^2 + c^2 &= (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) \text{이므로} \\
 12 &= 4^2 - 2(ab+bc+ca), \quad 2(ab+bc+ca) = 4 \\
 \therefore ab+bc+ca &= 2 \quad \text{①} \\
 a^3 + b^3 + c^3 &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) + 3abc \\
 &= (a+b+c)\{a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)\} + 3abc \\
 \text{이므로} \\
 20 &= 4(12-2) + 3abc, \quad 3abc = -20 \\
 \therefore abc &= -\frac{20}{3} \quad \text{②}
 \end{aligned}$$

답 $-\frac{20}{3}$

채점 기준	비율
① $ab+bc+ca$ 의 값을 구할 수 있다.	50%
② abc 의 값을 구할 수 있다.	50%

031

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 + z^2 &= (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) \text{이므로} \\
 10 &= 2^2 - 2(xy+yz+zx), \quad 2(xy+yz+zx) = -6 \\
 \therefore xy+yz+zx &= -3 \\
 \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= 3 \text{에서} \\
 \frac{xy+yz+zx}{xyz} &= 3, \quad \frac{-3}{xyz} = 3 \\
 \therefore xyz &= -1 \\
 \therefore x^3 + y^3 + z^3 &= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) + 3xyz \\
 &= (x+y+z)\{x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)\} + 3xyz \\
 &= 2\{10 - (-3)\} + 3 \times (-1) = 23
 \end{aligned}$$

답 ④

032

$$\begin{aligned}
 (1) \quad x^2 + \frac{1}{x^2} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \\
 &= 5^2 - 2 = 23 \\
 (2) \quad x^3 + \frac{1}{x^3} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) \\
 &= 5^3 - 3 \times 5 = 110
 \end{aligned}$$

답 (1) 23 (2) 110

033

$$\begin{aligned}
 (1) \quad x^2 + \frac{1}{x^2} &= \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 \\
 &= 3^2 + 2 = 11 \\
 (2) \quad x^3 - \frac{1}{x^3} &= \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3\left(x - \frac{1}{x}\right) \\
 &= 3^3 + 3 \times 3 = 36
 \end{aligned}$$

답 (1) 11 (2) 36

034

$$\begin{aligned}
 \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 &= \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 4 \\
 &= 4^2 - 4 = 12
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore a - \frac{1}{a} &= 2\sqrt{3} \quad (\because a > 1 \text{이므로 } a - \frac{1}{a} > 0) \\
 \therefore a^3 - \frac{1}{a^3} &= \left(a - \frac{1}{a}\right)^3 + 3\left(a - \frac{1}{a}\right) \\
 &= (2\sqrt{3})^3 + 3 \times 2\sqrt{3} \\
 &= 30\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

답 $30\sqrt{3}$

035

$$\begin{aligned}
 x^2 + \frac{1}{x^2} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \text{이므로} \\
 3 &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2, \quad \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 5 \\
 \therefore x + \frac{1}{x} &= \sqrt{5} \quad (\because x > 0 \text{이므로 } x + \frac{1}{x} > 0) \\
 \therefore x^3 + \frac{1}{x^3} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) \\
 &= (\sqrt{5})^3 - 3 \times \sqrt{5} \\
 &= 2\sqrt{5}
 \end{aligned}$$

답 ②

036

$$\begin{aligned}
 x \neq 0 \text{이므로 } x^2 - 2x - 1 &= 0 \text{의 양변을 } x \text{로 나누면} \\
 x - 2 - \frac{1}{x} &= 0 \quad \therefore x - \frac{1}{x} = 2 \\
 \therefore x^2 + 2x - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} &= 2\left(x - \frac{1}{x}\right) + x^2 + \frac{1}{x^2} \\
 &= 2\left(x - \frac{1}{x}\right) + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 \\
 &= 2 \times 2 + 2^2 + 2 \\
 &= 10
 \end{aligned}$$

답 ④

037

$$\begin{aligned}
 (1) \quad &\begin{array}{r} x^2 - x + 4 \\ 2x + 2 \overline{) 2x^3 + 6x - 5} \\ \underline{2x^3 + 2x^2} \\ -2x^2 + 6x \\ \underline{-2x^2 - 2x} \\ 8x - 5 \\ \underline{8x + 8} \\ -13 \end{array} \\
 \therefore \text{몫: } x^2 - x + 4, \text{ 나머지: } -13 \\
 (2) \quad &\begin{array}{r} x - 2 \\ x^2 - x + 3 \overline{) x^3 - 3x^2 + 9x + 4} \\ \underline{x^3 - x^2 + 3x} \\ -2x^2 + 6x + 4 \\ \underline{-2x^2 + 2x - 6} \\ 4x + 10 \end{array} \\
 \therefore \text{몫: } x - 2, \text{ 나머지: } 4x + 10
 \end{aligned}$$

답 (1) 몫: $x^2 - x + 4$, 나머지: -13

(2) 몫: $x - 2$, 나머지: $4x + 10$

038

$$\begin{array}{r} 3x-2 \\ 2x^2+x-3 \overline{) 6x^3-x^2-x+2} \\ \underline{6x^3+3x^2-9x} \\ -4x^2+8x+2 \\ \underline{-4x^2-2x+6} \\ 10x-4 \end{array}$$

따라서 몫은 $3x-2$ 이므로 $a=3$, $b=-2$ 이고, 나머지는 $10x-4$ 이므로 $c=10$, $d=-4$ 이다.

$$\therefore ab-cd=3 \times (-2) - 10 \times (-4) = 34$$

답 34

039

$$\begin{array}{r} 4x+2 \\ x^2-x+1 \overline{) 4x^3-2x^2+3x+1} \\ \underline{4x^3-4x^2+4x} \\ 2x^2-x+1 \\ \underline{2x^2-2x+2} \\ x-1 \end{array}$$

따라서 $Q(x)=4x+2$ 이므로 $Q(1)=4+2=6$

답 5

040

$2x^3-5x^2+x-1=A(2x-3)+8x-16$ 이므로 ①

$$\begin{aligned} A(2x-3) &= 2x^3-5x^2+x-1-(8x-16) \\ &= 2x^3-5x^2+x-1-8x+16 \\ &= 2x^3-5x^2-7x+15 \end{aligned}$$

$$\therefore A=(2x^3-5x^2-7x+15) \div (2x-3)$$

$$\begin{array}{r} x^2-x-5 \\ 2x-3 \overline{) 2x^3-5x^2-7x+15} \\ \underline{2x^3-3x^2} \\ -2x^2-7x \\ \underline{-2x^2+3x} \\ -10x+15 \\ \underline{-10x+15} \\ 0 \end{array}$$

$$\therefore A=x^2-x-5 \text{ ②}$$

답 x^2-x-5

채점 기준	비율
① 나눗셈에 대한 등식을 세울 수 있다.	40%
② 다항식 A를 구할 수 있다.	60%



실력을 높이는 연습 문제

본문 017쪽

01

$X+B=A$ 에서

006 정답과 풀이

$$X=A-B$$

$$\begin{aligned} &= (2x^2-3xy+y^2) - (x^2-4xy-5y^2) \\ &= 2x^2-3xy+y^2-x^2+4xy+5y^2 \\ &= x^2+xy+6y^2 \end{aligned}$$

답 ④

02

$$\begin{aligned} &(4x^3+x^2-3x) \odot (2x^3-8x+7) \\ &= (4x^3+x^2-3x) - 2(2x^3-8x+7) \\ &= 4x^3+x^2-3x-4x^3+16x-14 \\ &= x^2+13x-14 \end{aligned}$$

답 ③

03

$$A+B=x^2-4xy+y^2 \text{ ㉠}$$

$$B+C=x^2-xy+3y^2 \text{ ㉡}$$

$$C+A=2x^2+3xy+6y^2 \text{ ㉢}$$

㉠+㉡+㉢을 하면

$$\begin{aligned} 2(A+B+C) &= (x^2-4xy+y^2) + (x^2-xy+3y^2) \\ &\quad + (2x^2+3xy+6y^2) \\ &= 4x^2-2xy+10y^2 \end{aligned}$$

$$\therefore A+B+C=2x^2-xy+5y^2$$

답 $2x^2-xy+5y^2$

04

$$\begin{aligned} &(2x^3+3x^2-x) - (x-5)(x^2-2x+7) \\ &= 2x^3+3x^2-x - \{x(x^2-2x+7) - 5(x^2-2x+7)\} \\ &= 2x^3+3x^2-x - (x^3-2x^2+7x-5x^2+10x-35) \\ &= 2x^3+3x^2-x - (x^3-7x^2+17x-35) \\ &= 2x^3+3x^2-x-x^3+7x^2-17x+35 \\ &= x^3+10x^2-18x+35 \end{aligned}$$

답 ③

05

$(3x^3+2x^2+kx+4)(2x^2+3x-5)$ 의 전개식에서 x^3 항은

$$3x^3 \times (-5) + 2x^2 \times 3x + kx \times 2x^2 = (-9+2k)x^3$$

이때 x^3 의 계수가 1이므로

$$-9+2k=1 \quad \therefore k=5$$

답 ⑤

06

$$\begin{aligned} &(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{1000})^2 \\ &= (1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{1000})(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{1000}) \end{aligned}$$

의 전개식에서 x^5 항은

$$1 \times x^5 + x \times x^4 + x^2 \times x^3 + x^3 \times x^2 + x^4 \times x + x^5 \times 1 = 6x^5$$

따라서 x^5 의 계수는 6이다.

답 ③

07

- ① $(2x-1)(x+4)=2x^2+7x-4$
 ② $(2x-3)^3=8x^3-36x^2+54x-27$
 ③ $(3x-1)(9x^2+3x+1)=27x^3-1$
 ④ $(x-2)(x+4)(x-5)=x^3-3x^2-18x+40$
 ⑤ $(x^2+x+1)(x^2-x+1)=x^4+x^2+1$

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

08

문제 접근하기

주어진 식에 $(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)\cdots$ 의 꼴이 있는 경우 곱셈 공식 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 을 이용할 수 있도록 $a-b$ 를 곱한다.

$$\begin{aligned} & (2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1) \\ &= (2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1) \quad \left. \begin{array}{l} 2-1=1\text{이므로} \\ (2-1)\text{을 곱한다.} \end{array} \right\} \\ &= (2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1) \\ &= (2^4-1)(2^4+1)(2^8+1) \\ &= (2^8-1)(2^8+1) \\ &= 2^{16}-1 \end{aligned}$$

답 ①

09

$$\begin{aligned} & (6x+y-2z)^2=36x^2+y^2+4z^2+12xy-4yz-24xz \\ & \text{따라서 } a=36, b=-4\text{이므로} \\ & a+b=36+(-4)=32 \end{aligned}$$

답 ④

10

$$\begin{aligned} & (x+a)^3+x(x-4) \\ &= (x^3+3ax^2+3a^2x+a^3)+(x^2-4x) \\ &= x^3+(3a+1)x^2+(3a^2-4)x+a^3 \\ & \text{이때 } x^2\text{의 계수가 } 10\text{이므로} \\ & 3a+1=10 \quad \therefore a=3 \end{aligned}$$

답 3

11

$$\begin{aligned} & (x+2y)(x^2-2xy+4y^2)-(2x-y)(4x^2+2xy+y^2) \\ &= x^3+8y^3-(8x^3-y^3) \\ &= x^3+8y^3-8x^3+y^3 \\ &= -7x^3+9y^3 \\ & \text{따라서 } a=-7, b=9\text{이므로} \\ & ab=-7 \times 9=-63 \end{aligned}$$

답 ②

12

$$\begin{aligned} A &= (x-3)^3=x^3-9x^2+27x-27 \\ B &= (x+3)^3=x^3+9x^2+27x+27 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore A+B &= (x^3-9x^2+27x-27)+(x^3+9x^2+27x+27) \\ &= 2x^3+54x \end{aligned}$$

답 $2x^3+54x$

13

$$\begin{aligned} & x^2-x=t\text{로 놓으면} \\ & (x^2-x+1)(x^2-x+3)+5 \\ &= (t+1)(t+3)+5 \\ &= t^2+4t+8 \\ &= (x^2-x)^2+4(x^2-x)+8 \\ &= x^4-2x^3+x^2+4x^2-4x+8 \\ &= x^4-2x^3+5x^2-4x+8 \\ & \text{따라서 } a=-2, b=5, c=-4\text{이므로} \\ & a+b-c=-2+5-(-4)=7 \end{aligned}$$

답 ③

참고

공통부분이 있는 식의 전개

공통부분이 있는 식을 전개할 때에는 공통부분을 t 로 놓고 곱셈 공식을 이용하여 전개한 후 치환한 식을 대입하여 원래의 문자에 대한 식으로 나타낸다.

14

문제 접근하기

- () () () ()의 꼴은 다음과 같은 순서로 전개한다.
 ① 일차식의 상수항의 합이 같아지도록 두 개씩 짝을 지어 전개한다.
 ② 공통부분을 치환하여 식을 전개한다.
 ③ 치환한 식을 대입하여 원래의 문자에 대한 식으로 나타낸다.

$$\begin{aligned} & (x-1)(x-2)(x+5)(x+6) \\ &= \{(x-1)(x+5)\}\{(x-2)(x+6)\} \quad \left. \begin{array}{l} \text{상수항의 합이 같아지도록} \\ \text{두 개씩 짝을 짓는다.} \end{array} \right\} \\ &= (x^2+4x-5)(x^2+4x-12) \\ & x^2+4x=t\text{로 놓으면} \\ & (x^2+4x-5)(x^2+4x-12) \\ &= (t-5)(t-12) \\ &= t^2-17t+60 \\ &= (x^2+4x)^2-17(x^2+4x)+60 \\ &= x^4+8x^3+16x^2-17x^2-68x+60 \\ &= x^4+8x^3-x^2-68x+60 \end{aligned}$$

답 $x^4+8x^3-x^2-68x+60$

15

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=4\text{에서 } \frac{x+y}{xy}=4 \\ & \frac{x+y}{2}=4 \\ & \therefore x+y=8 \\ & \therefore (x-y)^2+5xy=(x+y)^2-4xy+5xy \\ &= (x+y)^2+xy \\ &= 8^2+2=66 \end{aligned}$$

답 ⑤

16

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)\text{이므로}$$

$$9=3^3-3ab\times 3$$

$$9ab=18 \quad \therefore ab=2$$

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$$

$$=3^2-2\times 2=5$$

이므로

$$\begin{aligned} a^4+b^4 &= (a^2+b^2)^2-2a^2b^2 \\ &= (a^2+b^2)^2-2(ab)^2 \\ &= 5^2-2\times 2^2=17 \end{aligned}$$

→ $a^4+b^4=(a^2)^2+(b^2)^2$ 에서
 $a^2=A, b^2=B$ 로 놓으면
 $A^2+B^2=(A+B)^2-2AB$
 $= (a^2+b^2)^2-2a^2b^2$

답 ③

17

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2 &= (a+b-c)^2-2(ab-bc-ca) \\ &= 25-2\times (-2)=29 \end{aligned}$$

→ $(a+b-c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca$ 이므로
 $a^2+b^2+c^2=(a+b-c)^2-2(ab-bc-ca)$

답 29

18

모서리 AB, BC, BF의 길이를 각각 a, b, c 라고 하면 직육면체의 겉넓이가 148이므로

$$2(ab+bc+ca)=148$$

$$\therefore ab+bc+ca=74$$

모든 모서리의 길이의 합이 60이므로

$$4(a+b+c)=60$$

$$\therefore a+b+c=15$$

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2 &= (a+b+c)^2-2(ab+bc+ca) \\ &= 15^2-2\times 74=77 \end{aligned}$$

이므로

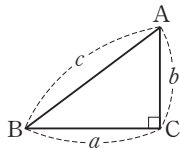
$$\begin{aligned} \overline{BG}^2+\overline{GD}^2+\overline{DB}^2 &= (b^2+c^2)+(a^2+c^2)+(a^2+b^2) \\ &= 2(a^2+b^2+c^2) \\ &= 2\times 77=154 \end{aligned}$$

답 ④

문제 개념 CHECK

피타고라스 정리 中 수학 2

직각삼각형 ABC에서 직각을 낀 두 변의 길이를 각각 a, b 라 하고 빗변의 길이를 c 라고 하면
 $a^2+b^2=c^2$



19

$$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)\text{이므로}$$

$$13=5^2-2(xy+yz+zx)$$

$$2(xy+yz+zx)=12$$

$$\therefore xy+yz+zx=6$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=-6\text{에서 } \frac{xy+yz+zx}{xyz}=-6$$

$$\frac{6}{xyz}=-6 \quad \therefore xyz=-1$$

008 정답과 풀이

$$\therefore x^3+y^3+z^3$$

$$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$$

$$=(x+y+z)\{x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)\}+3xyz$$

$$=5(13-6)+3\times (-1)=32$$

답 ②

20

문제 접근하기

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$$

$$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$$

$$=\frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\}$$

$$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$$

임을 이용한다.

$a-b=3, b-c=4$ 를 각 변끼리 더하면

$$a-c=7, \text{ 즉 } c-a=-7$$

$$\therefore a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$$

$$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$$

$$=\frac{1}{2}\{3^2+4^2+(-7)^2\}=37$$

답 ④

21

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2\text{이므로}$$

$$4=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$$

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=2$$

$$\therefore x-\frac{1}{x}=\sqrt{2} \quad (\because x>1\text{이므로 } x-\frac{1}{x}>0)$$

$$\therefore x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)$$

$$=(\sqrt{2})^3+3\times \sqrt{2}=5\sqrt{2}$$

답 ⑤

22

$x\neq 0$ 이므로 $x^2-3x+1=0$ 의 양변을 x 로 나누면

$$x-3+\frac{1}{x}=0 \quad \therefore x+\frac{1}{x}=3$$

$$\therefore x^3+2x^2+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}=2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+x^3+\frac{1}{x^3}$$

이때

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=3^2-2=7,$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=3^3-3\times 3=18$$

이므로

$$\begin{aligned} x^3+2x^2+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3} &= 2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+x^3+\frac{1}{x^3} \\ &= 2\times 7+18=32 \end{aligned}$$

답 ②

23

$$\begin{array}{r}
 x-1 \\
 x^2-x-1 \overline{) x^3-2x^2-x+2} \\
 \underline{x^3-x^2-x} \\
 -x^2+2 \\
 \underline{-x^2+x+1} \\
 -x+1
 \end{array}$$

따라서 $Q(x)=x-1$, $R(x)=-x+1$ 이므로
 $Q(2)+R(3)=1+(-2)=-1$

답 ②

24

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (x+1)(3x-10)+19 \\
 &= 3x^2-7x-10+19 \\
 &= 3x^2-7x+9 \\
 &\quad \quad \quad \begin{array}{r} 3x-4 \\ x-1 \overline{) 3x^2-7x+9} \\ \underline{3x^2-3x} \\ -4x+9 \\ \underline{-4x+4} \\ 5 \end{array}
 \end{aligned}$$

따라서 $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 몫은 $3x-4$, 나머지는 5이다.

답 몫: $3x-4$, 나머지: 5

I. 다항식



항등식과 나머지 정리

기본을 다지는 유형

본문 022쪽

001

(1) 주어진 등식의 양변에

$$x=3 \text{을 대입하면}$$

$$2b=4 \quad \therefore b=2$$

$$x=1 \text{을 대입하면}$$

$$-2a=-2 \quad \therefore a=1$$

(2) 주어진 등식의 양변에

$$x=2 \text{를 대입하면}$$

$$-6=b$$

$$x=0 \text{을 대입하면}$$

$$2=4-2a+b, 2=4-2a-6 \quad \therefore a=-2$$

답 (1) $a=1, b=2$ (2) $a=-2, b=-6$

참고

수치 대입법으로 미지의 계수를 정할 때

(1) 괄호로 묶인 다항식이 있으면 괄호 안의 다항식의 값이 0이 되도록 하는 x 의 값을 대입한다.

(2) 괄호로 묶인 다항식이 없으면 계산하기 편리한 $-1, 0, 1$ 등의 값을 x 에 대입한다.

002

주어진 등식의 양변에

$$x=0 \text{을 대입하면}$$

$$8=2c \quad \therefore c=4$$

$$x=2 \text{를 대입하면}$$

$$8-2a+8=2b \quad \therefore a+b=8 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$x=1 \text{을 대입하면}$$

$$2-a+8=-1 \quad \therefore a=11$$

$$a=11 \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면}$$

$$11+b=8 \quad \therefore b=-3$$

$$\therefore a-b+c=11-(-3)+4=18$$

답 ⑤

003

주어진 등식의 양변에

$$x=1 \text{을 대입하면}$$

$$0=a+b+6 \quad \therefore a+b=-6 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$x=-2 \text{를 대입하면}$$

$$0=-8a-2b+6 \quad \therefore 4a+b=3 \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a=3, b=-9$$

$$\therefore ab=3 \times (-9)=-27$$

답 ①

004

주어진 등식의 양변에

$$x=1 \text{을 대입하면 } 7=c \quad \text{..... ①}$$

$x=0$ 을 대입하면

$$7=a-b+7 \quad \therefore a-b=0 \quad \text{..... ⑦}$$

$x=2$ 를 대입하면

$$17=a+b+7 \quad \therefore a+b=10 \quad \text{..... ④}$$

⑦, ④을 연립하여 풀면

$$a=5, b=5 \quad \text{..... ②}$$

$$\therefore ab+c=5 \times 5+7=32 \quad \text{..... ③}$$

답 32

채점 기준	비율
① c 의 값을 구할 수 있다.	20 %
② a, b 의 값을 구할 수 있다.	60 %
③ $ab+c$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

005

주어진 등식의 양변에

$x=1$ 을 대입하면

$$1-5+a+1=-1 \quad \therefore a=2$$

$$\therefore x^3-5x^2+2x+1=(x-1)Q(x)-1$$

이 등식의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$8-20+4+1=Q(2)-1 \quad \therefore Q(2)=-6$$

답 ①

006

(1) 양변의 계수를 비교하면

$$2=a+b, -1=b \quad \therefore a=3, b=-1$$

(2) 주어진 식의 좌변을 전개하여 x 에 대하여 정리하면

$$(a+b)x-3b=4x+15$$

양변의 계수를 비교하면

$$a+b=4, -3b=15 \quad \therefore a=9, b=-5$$

답 (1) $a=3, b=-1$ (2) $a=9, b=-5$

007

(1) 양변의 계수를 비교하면

$$a+b=0, -(b-2)=0, c-3b=0$$

$$\therefore a=-2, b=2, c=6$$

(2) 양변의 계수를 비교하면

$$a-1=3, -(a+b)=0, c-4=1$$

$$\therefore a=4, b=-4, c=5$$

(3) 주어진 등식의 좌변을 전개하여 x 에 대하여 정리하면

$$5x^2+(a-10)x-2a=bx^2+cx+6$$

양변의 계수를 비교하면

$$5=b, a-10=c, -2a=6$$

$$\therefore a=-3, b=5, c=-13$$

답 (1) $a=-2, b=2, c=6$

(2) $a=4, b=-4, c=5$

(3) $a=-3, b=5, c=-13$

008

주어진 등식의 좌변을 전개하여 x 에 대하여 정리하면

$$ax^2+(a+b)x-2a-3b+c=x^2-5x$$

양변의 계수를 비교하면

$$a=1, a+b=-5, -2a-3b+c=0$$

$$\therefore a=1, b=-6, c=-16$$

$$\therefore a-b-c=1-(-6)-(-16)=23$$

답 ④

009

주어진 등식의 좌변을 전개하여 k 에 대하여 정리하면

$$(x-4y+6)k+x-3y=-5k-9 \quad \text{..... ①}$$

양변의 계수를 비교하면

$$x-4y+6=-5, x-3y=-9$$

$$\therefore x-4y=-11, x-3y=-9$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$x=-3, y=2 \quad \text{..... ②}$$

$$\therefore xy=-3 \times 2=-6 \quad \text{..... ③}$$

답 -6

채점 기준	비율
① 주어진 등식의 좌변을 전개하여 k 에 대하여 정리할 수 있다.	30 %
② x, y 의 값을 구할 수 있다.	50 %
③ xy 의 값을 구할 수 있다.	20 %

참고

k 의 값에 관계없이 등식이 항상 성립한다.

→ () k +()=0의 꼴로 정리하여 항등식의 성질을 이용한다.

010

주어진 등식의 좌변을 전개하여 x, y 에 대하여 정리하면

$$(a-3b+2)x+(-2a-5b-3)y=7x-2y$$

양변의 계수를 비교하면

$$a-3b+2=7, -2a-5b-3=-2$$

$$\therefore a-3b=5, 2a+5b=-1$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a=2, b=-1$$

$$\therefore a+b=2+(-1)=1$$

답 ①

011

x^3+ax-1, x^2+x+b 의 최고차항의 계수가 모두 1이므로 몫은 $x+k$ 의 꼴이다.

x^3+ax-1 을 x^2+x+b 로 나누었을 때의 몫을 $x+k$ (k 는 상수)라고 하면

$$x^3+ax-1=(x^2+x+b)(x+k)$$

$$=x^3+(1+k)x^2+(b+k)x+bk$$

양변의 계수를 비교하면

$$0=1+k, a=b+k, -1=bk$$

$$\therefore k=-1, a=0, b=1$$

$$\therefore a+b=1$$

답 1

참고

다항식 A 를 다항식 B ($B \neq 0$)로 나누었을 때의 몫을 Q , 나머지를 R 라고 하면 다음 등식이 성립하고, 이 식은 항등식이다.
 $A=BQ+R$ (단, R 는 상수이거나 R 의 차수는 B 의 차수보다 낮다.)
 이때 $R=0$ 이면 다항식 A 는 다항식 B 로 나누어떨어진다고 한다.

012

$$\begin{aligned} x^3-3x^2-5 &= (x^2+ax+b)(x-4)+2x+3 \\ &= x^3+(a-4)x^2+(-4a+b+2)x-4b+3 \end{aligned}$$

양변의 계수를 비교하면

$$-3=a-4, 0=-4a+b+2, -5=-4b+3$$

$$\therefore a=1, b=2$$

$$\therefore a-b=1-2=-1$$

답 -1

|다른 풀이|

$$x^3-3x^2-5=(x^2+ax+b)(x-4)+2x+3 \text{ 이므로}$$

$$(x^2+ax+b)(x-4)=x^3-3x^2-5-(2x+3)$$

$$=x^3-3x^2-5-2x-3$$

$$=x^3-3x^2-2x-8$$

$$\therefore x^2+ax+b=(x^3-3x^2-2x-8) \div (x-4)$$

$$\begin{array}{r} x^2+x+2 \\ x-4 \overline{) x^3-3x^2-2x-8} \\ \underline{x^3-4x^2} \\ x^2-2x \\ \underline{x^2-4x} \\ 2x-8 \\ \underline{2x-8} \\ 0 \end{array}$$

따라서 $a=1, b=2$ 이므로

$$a-b=1-2=-1$$

013

$$(1) f(1)=2 \times 1^3+1^2-7 \times 1+6=2$$

$$(2) f(-3)=2 \times (-3)^3+(-3)^2-7 \times (-3)+6=-18$$

$$(3) f\left(\frac{1}{2}\right)=2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^2-7 \times \frac{1}{2}+6=3$$

답 (1) 2 (2) -18 (3) 3

014

$f(x)=x^3-ax^2+x-3$ 으로 놓으면 나머지 정리에 의하여

$$f(-2)=-21$$

즉, $-8-4a-2-3=-21$ 이므로

$$-4a=-8 \quad \therefore a=2$$

답 2

015

나머지 정리에 의하여

$$f(-3)=-1, g(-3)=3$$

따라서 $2f(x)+g(x)$ 를 $x+3$ 으로 나누었을 때의 나머지는

$$2f(-3)+g(-3)=2 \times (-1)+3=1$$

답 ③

016

나머지 정리에 의하여 $f(-2)=5$

따라서 $f(2x+6)$ 을 $x+4$ 로 나누었을 때의 나머지는

$$f(2 \times (-4)+6)=f(-2)=5$$

답 5

017

나머지 정리에 의하여 $f(3)=1$

따라서 $(x^2-2)f(x)$ 를 $x-3$ 으로 나누었을 때의 나머지는

$$(3^2-2)f(3)=7 \times 1=7$$

답 7

018

$P(x)=x^2+ax+b$ (a, b 는 상수)로 놓으면

조건 ㉞에서 나머지 정리에 의하여

$$P(1)=1$$

$$1+a+b=1 \quad \therefore a+b=0 \quad \text{..... ㉞}$$

조건 ㉝에서 나머지 정리에 의하여

$$2P(2)=2, \text{ 즉 } P(2)=1$$

$$4+2a+b=1 \quad \therefore 2a+b=-3 \quad \text{..... ㉞}$$

㉞, ㉞을 연립하여 풀면

$$a=-3, b=3$$

따라서 $P(x)=x^2-3x+3$ 이므로

$$P(4)=4^2-3 \times 4+3=7$$

답 ②

019

나머지 정리에 의하여

$$f(-1)=4, f(1)=18 \quad \text{..... ㉞}$$

$(x^2+x+1)f(x)$ 를 x^2-1 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를

$R(x)=ax+b$ (a, b 는 상수)라고 하면

$$(x^2+x+1)f(x)=(x^2-1)Q(x)+ax+b$$

$$\therefore (x^2+x+1)f(x)=(x+1)(x-1)Q(x)+ax+b$$

위의 등식의 양변에 $x=-1, x=1$ 을 각각 대입하면

$$f(-1)=-a+b=4 \quad \text{..... ㉞}$$

$$3f(1)=a+b=54 \quad \text{..... ㉞}$$

㉞, ㉞을 연립하여 풀면

$$a=25, b=29$$

$$\text{따라서 } R(x)=25x+29 \text{ 이므로} \quad \text{..... ㉞}$$

$$R(2)=25 \times 2+29=79 \quad \text{..... ㉞}$$

답 79

채점 기준	비율
① $f(-1), f(1)$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %
② $R(x)$ 를 구할 수 있다.	60 %
③ $R(2)$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

참고

다항식 $f(x)$ 를 이차식 $g(x)$ 로 나눌 때, 나머지는 일차 이하의 다항식이므로 몫은 $Q(x)$, 나머지는 $ax+b$ (a, b 는 상수)로 놓는다.

$$f(x)=g(x)Q(x)+ax+b \quad \leftarrow x \text{에 대한 항등식}$$

나머지

020

$f(x)$ 를 x^2-x-2 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라고 하면

$$f(x) = (x^2-x-2)Q(x) + 2x-6$$

$$\therefore f(x) = (x-2)(x+1)Q(x) + 2x-6$$

위의 등식의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$f(-1) = -8$$

따라서 $f(2x+1)$ 을 $x+1$ 로 나누었을 때의 나머지는

$$f(2 \times (-1) + 1) = f(-1) = -8$$

답 -8

021

(1) $f(2)=0$ 이어야 하므로

$$2^3 - 2 \times 2 - a = 0$$

$$\therefore a = 4$$

(2) $f(-3)=0$ 이어야 하므로

$$(-3)^3 - 2 \times (-3) - a = 0$$

$$\therefore a = -21$$

답 (1) 4 (2) -21

022

$f(x)=2x^3+ax^2+4x+1$ 로 놓으면 $f(x)$ 가 $2x-1$ 로 나누어떨어지므로

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\text{즉, } \frac{1}{4} + \frac{1}{4}a + 2 + 1 = 0 \text{이므로}$$

$$a = -13$$

답 ④

023

$f(x)=3x^3+5x^2-ax+3$ 이 $x+3$ 으로 나누어떨어지므로

$$f(-3) = 0$$

$$\text{즉, } -81 + 45 + 3a + 3 = 0 \text{이므로}$$

$$a = 11$$

따라서 $f(x)=3x^3+5x^2-11x+3$ 을 $3x+1$ 로 나누었을 때의 나머지는

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{9} + \frac{5}{9} + \frac{11}{3} + 3 = \frac{64}{9}$$

답 ③

024

$f(x)=4x^3-3x^2+ax+b$ 로 놓으면 $f(x)$ 가 $x+1$, $x-3$ 을 인수로 가지므로

$$f(-1)=0, f(3)=0 \quad \text{..... ①}$$

$$f(-1) = -4 - 3 - a + b = 0 \quad \therefore -a + b = 7 \quad \text{..... ①}$$

$$f(3) = 108 - 27 + 3a + b = 0 \quad \therefore 3a + b = -81 \quad \text{..... ②}$$

①, ②을 연립하여 풀면

$$a = -22, b = -15 \quad \text{..... ②}$$

$g(x)=x^2+ax+b$ 로 놓으면 $g(x)=x^2-22x-15$ 이므로 $g(x)$ 를 $x+2$ 로 나누었을 때의 나머지는

$$g(-2) = 4 + 44 - 15 = 33 \quad \text{..... ③}$$

답 33

채점 기준	비율
① $f(-1), f(3)$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %
② a, b 의 값을 구할 수 있다.	50 %
③ x^2+ax+b 를 $x+2$ 로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	30 %

025

$f(x)=2x^3+ax^2+bx+6$ 으로 놓으면 $f(x)$ 가 x^2-1 , 즉 $(x+1)(x-1)$ 로 나누어떨어지므로 $f(x)$ 는 $x+1$ 과 $x-1$ 로 각각 나누어떨어진다.

$f(x)$ 가 $x+1$ 로 나누어떨어지므로 $f(-1)=0$

즉, $-2 + a - b + 6 = 0$ 이므로

$$a - b = -4 \quad \text{..... ⑦}$$

$f(x)$ 가 $x-1$ 로 나누어떨어지므로 $f(1)=0$

즉, $2 + a + b + 6 = 0$ 이므로

$$a + b = -8 \quad \text{..... ⑧}$$

⑦, ⑧을 연립하여 풀면 $a = -6, b = -2$

$$\therefore ab = -6 \times (-2) = 12$$

답 ④

[다른 풀이]

$2x^3+ax^2+bx+6$ 이 x^2-1 , 즉 $(x+1)(x-1)$ 로 나누어떨어지므로 반복하여 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & a & b & 6 \\ & & -2 & -a+2 & a-b-2 \\ \hline 1 & 2 & a-2 & -a+b+2 & a-b+4 \\ & & 2 & a & \\ \hline & 2 & a & b+2 & \end{array}$$

$2x^3+ax^2+bx+6$ 이 x^2-1 로 나누어떨어지므로 $x+1$ 로 나누었을 때와 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지는 모두 0이어야 한다.

즉, $a-b+4=0, b+2=0$ 이므로 $a=-6, b=-2$

$$\therefore ab = -6 \times (-2) = 12$$

026

$$(1) \begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -4 & -9 & -1 \\ & & -1 & 5 & 4 \\ \hline & 1 & -5 & -4 & 3 \end{array}$$

$\therefore$ 몫: x^2-5x-4 , 나머지: 3

$$(2) \begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & 0 & -10 & 5 \\ & & 3 & 9 & -3 \\ \hline & 1 & 3 & -1 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{→ } x^3-10x+5 \text{에서 } x^2 \text{항이 없으므로} \\ \text{ } x^3 \text{항의 자리에 0을 적는다.} \end{array}$$

$\therefore$ 몫: x^2+3x-1 , 나머지: 2

$$(3) \begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{2} & 2 & 1 & -3 & -6 \\ & & 1 & 1 & -1 \\ \hline & 2 & 2 & -2 & -7 \end{array}$$

$\therefore$ 몫: $2x^2+2x-2$, 나머지: -7

답 (1) 몫: x^2-5x-4 , 나머지: 3

(2) 몫: x^2+3x-1 , 나머지: 2

(3) 몫: $2x^2+2x-2$, 나머지: -7

027

$$\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & a & b & -1 \\ & & -1 & -a+1 & a-b-1 \\ \hline & 1 & a-1 & -a+b+1 & a-b-2 \end{array}$$

$$\therefore k=-1, c=-1$$

$$\text{이때 } a-1=-3, -a+b+1=-4, d=a-b-1 \text{ 이므로}$$

$$a=-2, b=-7, d=4$$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

답 ③

|다른 풀이|

주어진 조립제법에서

$$k=-1, c=k, a+c=-3, b+3=-4, -1+d=3$$

$$\text{이므로 } k=-1, a=-2, b=-7, c=-1, d=4$$

028

조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{cccc|c} -2 & 3 & 2 & -6 & 3 \\ & & -6 & 8 & -4 \\ \hline & 3 & -4 & 2 & -1 \end{array}$$

$$\text{따라서 } Q(x)=3x^2-4x+2, R=-1 \text{ 이므로}$$

$$Q(1)+R=1+(-1)=0$$

답 0

029

조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{cccc|c} \frac{1}{3} & 3 & -7 & 5 & 1 \\ & & 1 & -2 & 1 \\ \hline & 3 & -6 & 3 & 2 \end{array}$$

이므로

$$3x^3-7x^2+5x+1=\left(x-\frac{1}{3}\right)(3x^2-6x+3)+2$$

$$=\left(x-\frac{1}{3}\right) \times 3(x^2-2x+1)+2$$

$$=(3x-1)(x^2-2x+1)+2$$

이다. 따라서 몫은 x^2-2x+1 이고, 나머지는 2이다.

$$\text{즉, } f(x)=3x^2-6x+3, g(x)=x^2-2x+1 \text{ 이므로}$$

$$f(2)+g(2)=3+1=4$$

답 ④

참고

다항식 $f(x)$ 를 $x+\frac{b}{a}$ ($a \neq 0$)로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라고 하면

$$f(x)=\left(x+\frac{b}{a}\right)Q(x)+R$$

$$=(ax+b)\frac{1}{a} \times Q(x)+R$$

$$=(ax+b)\left\{\frac{1}{a}Q(x)\right\}+R$$

즉, 다항식 $f(x)$ 를 $ax+b$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하려면 $x+\frac{b}{a}$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구한 후 몫을 a 로 나눈다.

실력을 높이는 연습 문제

본문 028쪽

01

주어진 등식의 양변에

$$x=-1 \text{ 을 대입하면}$$

$$0=a-b+1 \quad \therefore a-b=-1 \quad \text{..... ㉠}$$

$$x^3=1 \text{ 을 대입하면}$$

$$0=a+b+1 \quad \therefore a+b=-1 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=-1, b=0$$

$$\therefore 2a^2-b^2=2-0=2$$

답 ⑤

02

주어진 등식의 좌변을 전개하여 x 에 대하여 정리하면

$$ax^2+(-2a+b)x+a+2b+c=2x^2+5x+11$$

양변의 계수를 비교하면

$$a=2, -2a+b=5, a+2b+c=11$$

$$\therefore a=2, b=9, c=-9$$

$$\therefore a+b+c=2+9+(-9)=2$$

답 ②

03

$$x+y=2 \text{ 에서 } y=2-x$$

$$y=2-x \text{ 를 } ax^2+bxy+cy^2-2=0 \text{ 에 대입하면}$$

$$ax^2+bx(2-x)+c(2-x)^2-2=0$$

$$(a-b+c)x^2+(2b-4c)x+4c-2=0$$

양변의 계수를 비교하면

$$a-b+c=0, 2b-4c=0, 4c-2=0$$

$$\text{따라서 } a=\frac{1}{2}, b=1, c=\frac{1}{2} \text{ 이므로}$$

$$4abc=4 \times \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2}=1$$

답 ④

참고

x, y 에 대한 조건식이 주어진 경우에는 조건식을 한 문자에 대하여 정리한 후 주어진 등식에 대입하여 미정계수법을 이용한다.

|다른 풀이|

$x+y=2$ 의 양변을 제곱하면

$$x^2+2xy+y^2=4 \quad \therefore x^2+2xy+y^2-4=0$$

위 식의 양변에 $\frac{1}{2}$ 을 곱하면

$$\frac{1}{2}x^2+xy+\frac{1}{2}y^2-2=0$$

$$\text{따라서 } a=\frac{1}{2}, b=1, c=\frac{1}{2} \text{ 이므로}$$

$$4abc=4 \times \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2}=1$$

04

$$x^3+ax-10 \text{ 을 } x^2+2x+b \text{ 로 나누었을 때의 몫을 } x+k \text{ (} k \text{는 상수)}$$

라고 하면

$$x^3+ax-10=(x^2+2x+b)(x+k)+3x+2$$

$$=x^3+(k+2)x^2+(b+2k+3)x+bk+2$$

양변의 계수를 비교하면

$$0=k+2, a=b+2k+3, -10=bk+2$$

$$\therefore k=-2, a=5, b=6$$

$$\therefore a+b=5+6=11$$

답 ①

05

$f(x)$ 를 두 다항식 x^2+4x+3 , x^2+3x-4 로 나누었을 때의 몫을 각각 $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ 라고 하면

$$f(x)=(x^2+4x+3)Q_1(x)+2x+3$$

$$=(x+1)(x+3)Q_1(x)+2x+3$$

$$\text{에서 } f(-1)=1 \quad \dots\dots\dots ㉠$$

$$f(x)=(x^2+3x-4)Q_2(x)+x+2$$

$$=(x+4)(x-1)Q_2(x)+x+2$$

$$\text{에서 } f(-4)=-2 \quad \dots\dots\dots ㉡$$

$f(x)$ 를 x^2+5x+4 로 나누었을 때의 몫을 $Q_3(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b 는 상수)라고 하면

$$f(x)=(x^2+5x+4)Q_3(x)+ax+b$$

$$=(x+1)(x+4)Q_3(x)+ax+b$$

㉠, ㉡에 의하여

$$f(-1)=-a+b=1, f(-4)=-4a+b=-2$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a=1, b=2$$

따라서 구하는 나머지는 $x+2$ 이다.

답 $x+2$

06

문제 접근하기

다항식 $f(x)$ 를 $Q(x)$ 를 포함한 식으로 나타낸 후, $Q(x)$ 를 $x+2$ 로 나누었을 때의 나머지가 2, 즉 $Q(-2)=2$ 임을 이용한다.

$f(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 3이므로

$$f(x)=(x-1)Q(x)+3$$

이때 나머지 정리에 의하여

$$Q(-2)=2$$

따라서 $f(x)$ 를 $x+2$ 로 나누었을 때의 나머지는

$$f(-2)=(-2-1)Q(-2)+3$$

$$=-3 \times 2 + 3 = -3$$

답 ①

07

$f(x)$ 를 $(x-2)^2(x+1)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c 는 상수)라고 하면

$$f(x)=(x-2)^2(x+1)Q(x)+ax^2+bx+c$$

이때 $f(x)$ 를 $(x-2)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지가 $x-5$ 이므로

$$f(x)=(x-2)^2(x+1)Q(x)+a(x-2)^2+x-5$$

나머지 정리에 의하여

$$f(-1)=3$$

$$\text{즉, } 9a-6=3 \text{이므로 } a=1$$

따라서 구하는 나머지는

$$(x-2)^2+x-5=x^2-3x-1$$

답 x^2-3x-1

참고

(1) 다항식 $f(x)$ 를 삼차식 $g(x)$ 로 나눌 때, 나머지는 이차 이하의 다항식이므로 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c 는 상수)로 놓는다.

$$f(x)=g(x)Q(x)+\underbrace{ax^2+bx+c}_{\text{나머지}} \leftarrow x \text{에 대한 항등식}$$

(2) 다항식 $f(x)$ 를 $(x-2)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지가 $x-5$ 이라면

ax^2+bx+c 를 $(x-2)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지가 $x-5$ 이어야 한다.

08

$f(x)+g(x)$ 가 $x+2$ 로 나누어떨어지므로

$$f(-2)+g(-2)=0 \quad \dots\dots\dots ㉠$$

$f(x)-g(x)$ 를 $x+2$ 로 나누었을 때의 나머지가 6이므로

$$f(-2)-g(-2)=6 \quad \dots\dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$f(-2)=3, g(-2)=-3$$

따라서 $f(x)g(x)$ 를 $x+2$ 로 나누었을 때의 나머지는

$$f(-2)g(-2)=3 \times (-3) = -9$$

답 -9

09

$f(x)=x^3-x^2+ax+b$ 로 놓으면 $f(x)$ 가 x^2+x-6 , 즉

$(x+3)(x-2)$ 로 나누어떨어지므로 $f(x)$ 는 $x+3$ 과 $x-2$ 로 각각 나누어떨어진다.

$f(x)$ 가 $x+3$ 으로 나누어떨어지므로

$$f(-3)=0$$

$$\text{즉, } -27-9-3a+b=0 \text{이므로}$$

$$-3a+b=36 \quad \dots\dots\dots ㉠$$

$f(x)$ 가 $x-2$ 로 나누어떨어지므로

$$f(2)=0$$

$$\text{즉, } 8-4+2a+b=0 \text{이므로}$$

$$2a+b=-4 \quad \dots\dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=-8, b=12$$

따라서 $f(x)=x^3-x^2-8x+12$ 를 $x+1$ 로 나누었을 때의 나머지는

$$f(-1)=-1-1+8+12=18$$

답 ④

10

$f(x)+2$ 를 $x+2$ 로 나누었을 때의 몫을 $x+k$ (k 는 상수)라고 하면

$$f(x)+2=(x+2)(x+k) \quad \dots\dots\dots ㉠$$

$f(x)-2$ 는 $x-2$ 로 나누어떨어지므로

$$f(2)-2=0 \quad \therefore f(2)=2$$

㉠에 $x=2$ 를 대입하면

$$f(2)+2=4(2+k), 4=4(2+k)$$

$$2+k=1 \quad \therefore k=-1$$

따라서 $f(x)=(x+2)(x-1)-2$ 이므로

$$f(10)=12 \times 9 - 2 = 106$$

답 106

| 다른 풀이 |

인수 정리에 의하여

$$f(-2)+2=0, f(2)-2=0 \quad \therefore f(-2)=-2, f(2)=2$$

$f(x)=x^2+ax+b$ (a, b 는 상수)로 놓으면

$$f(-2)=-2 \text{에서 } 4-2a+b=-2$$

$$\therefore -2a+b=-6 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉑}$$

$$f(2)=2 \text{에서 } 4+2a+b=2$$

$$\therefore 2a+b=-2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉒}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a=1, b=-4$

따라서 $f(x)=x^2+x-4$ 이므로

$$f(10)=100+10-4=106$$

11

2	a	b	c	d
		2	4	6
1	2	3	4	

즉, $a=1, b+2=2, c+4=3, d+6=4$ 이므로

$$a=1, b=0, c=-1, d=-2$$

따라서 $f(x)=x^3-x-2$ 이므로

$$f(-1)=-1+1-2=-2$$

답 -2

| 다른 풀이 |

$f(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 몫이 x^2+2x+3 , 나머지가 4이므로

$$f(x)=(x-2)(x^2+2x+3)+4$$

$$=x^3-x-2$$

$$\therefore f(-1)=-1+1-2=-2$$

12

문제 접근하기

조립제법을 연속으로 이용하면 내림차순으로 정리한 식에서 미지의 계수를 쉽게 구할 수 있다.

x^3-3x+1 을 $x-1$ 로 나누었을 때의 몫을 다시 $x-1$ 로 나누는 것을 계속하는 것으로 생각하여 조립제법을 연속으로 세 번 사용하면

1	1	0	-3	1
		1	1	-2
1	1	1	-2	-1
		1	2	
1	1	2	0	
		1		
1	1	3		
		3		
		3		

즉, 마지막에 구한 몫이 a , 나머지가 차례대로 d, c, b 이다.

따라서 $a=1, b=3, c=0, d=-1$ 이므로

$$ab-cd=1 \times 3 - 0 \times (-1)=3$$

답 ③

참고

$$\begin{aligned} x^3-3x+1 &= (x-1)(x^2+x-2)-1 \\ &= (x-1)\{(x-1)(x+2)+0\}-1 \\ &= (x-1)[(x-1)\{(x-1)+3\}+0]-1 \\ &= (x-1)^3+3(x-1)^2+0 \times (x-1)-1 \end{aligned}$$



인수분해

기본을 다지는 유형

본문 031쪽

001

$$(1) -3a^3b+6a^2b^2=-3a^2b(a-2b)$$

$$(2) x(x+4)-3(x+4)=(x+4)(x-3)$$

$$(3) x^2y(2x-5y)-x^2y(x-7y)=x^2y\{(2x-5y)-(x-7y)\} \\ =x^2y(x+2y)$$

$$\text{답 (1) } -3a^2b(a-2b) \quad (2) (x+4)(x-3) \quad (3) x^2y(x+2y)$$

002

$$xy+x-y-1=x(y+1)-(y+1)$$

$$=(y+1)(x-1)$$

$$=(x-1)(y+1)$$

따라서 $a=-1, b=1$ 이므로

$$a-b=-1-1=-2$$

답 ②

참고

(2개의 항)+(2개의 항)으로 묶기

→ 적당한 항끼리 2개씩 묶어서 공통인수를 찾아 인수분해한다.

003

$$(1) a^2+4a+4=a^2+2 \times a \times 2+2^2$$

$$=(a+2)^2$$

$$(2) x^2-25=x^2-5^2$$

$$=(x+5)(x-5)$$

$$(3) \begin{array}{rcl} x & \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} & \begin{array}{c} 3 \longrightarrow 3x \\ -4 \longrightarrow -4x \end{array} \\ x & & \end{array}$$

$$\therefore x^2-x-12=(x+3)(x-4)$$

$$(4) \begin{array}{rcl} x & \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} & \begin{array}{c} -2y \longrightarrow -4xy \\ -y \longrightarrow -xy \end{array} \\ 2x & & \end{array}$$

$$\therefore 2x^2-5xy+2y^2=(x-2y)(2x-y)$$

$$\text{답 (1) } (a+2)^2$$

$$(2) (x+5)(x-5)$$

$$(3) (x+3)(x-4)$$

$$(4) (x-2y)(2x-y)$$

004

$$81x^4-y^4=(9x^2+y^2)(9x^2-y^2)$$

$$=(9x^2+y^2)(3x+y)(3x-y)$$

따라서 주어진 식의 인수가 아닌 것은 ③이다.

답 ③

005

$$x^2+3x-10=(x+5)(x-2) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$3x^2-2x-8=(3x+4)(x-2) \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

따라서 두 다항식에 공통으로 들어 있는 1이 아닌 인수는 $x-2$ 이다.

③

답 $x-2$

채점 기준	비율
① $x^2+3x-10$ 을 인수분해할 수 있다.	40%
② $3x^2-2x-8$ 을 인수분해할 수 있다.	40%
③ 두 다항식에 공통으로 들어 있는 1이 아닌 인수를 구할 수 있다.	20%

006

$$x^2-2xy+y^2-4=(x-y)^2-2^2$$

$$=(x-y+2)(x-y-2)$$

따라서 $a=-1$, $b=2$, $c=-2$ ($\because b>c$)이므로

$$a+b+c=-1+2+(-2)=-1$$

답 ②

참고

(3개의 항) + (1개의 항)으로 묶기

➡ 완전제곱식을 찾아 A^2-B^2 의 꼴로 만든 후 인수분해한다.

007

$$x^3+x^2-x-1=x^2(x+1)-(x+1)$$

$$=(x+1)(x^2-1)$$

$$=(x+1)(x+1)(x-1)$$

$$=(x+1)^2(x-1)$$

답 ⑤

008

$$(1) a^2+4b^2+1-4ab-4b+2a$$

$$=a^2+(-2b)^2+1^2+2 \times a \times (-2b)+2 \times (-2b) \times 1$$

$$+2 \times 1 \times a$$

$$=(a-2b+1)^2$$

$$(2) 8a^3-12a^2b+6ab^2-b^3$$

$$=(2a)^3-3 \times (2a)^2 \times b+3 \times 2a \times b^2-b^3$$

$$=(2a-b)^3$$

$$(3) 64a^3+b^3=(4a)^3+b^3$$

$$=(4a+b)\{(4a)^2-4a \times b+b^2\}$$

$$=(4a+b)(16a^2-4ab+b^2)$$

$$(4) x^3+y^3-3xy+1$$

$$=x^3+y^3+1^3-3 \times x \times y \times 1$$

$$=(x+y+1)(x^2+y^2+1^2-x \times y-y \times 1-1 \times x)$$

$$=(x+y+1)(x^2+y^2-xy-x-y+1)$$

$$\text{답 (1) } (a-2b+1)^2 \quad (2) (2a-b)^3$$

$$(3) (4a+b)(16a^2-4ab+b^2)$$

$$(4) (x+y+1)(x^2+y^2-xy-x-y+1)$$

009

$$9x^2+y^2+16+6xy-24x-8y$$

$$=9x^2+y^2+16+6xy-8y-24x$$

$$=(3x)^2+y^2+(-4)^2+2 \times 3x \times y+2 \times y \times (-4)$$

$$+2 \times (-4) \times 3x$$

$$=(3x+y-4)^2$$

016 정답과 풀이

따라서 $a=1$, $b=-4$ 이므로

$$ab=1 \times (-4)=-4$$

답 ②

010

$$64x^3-48x^2y+12xy^2-y^3$$

$$=(4x)^3-3 \times (4x)^2 \times y+3 \times 4x \times y^2-y^3$$

$$=(4x-y)^3$$

따라서 주어진 식의 인수인 것은 ②이다.

답 ②

011

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$

따라서 $a=1$, $b=1$ 이므로

$$a+b=1+1=2$$

답 ⑤

012

$$a^3b-b^3c-a^3c+b^4$$

$$=(a^3b-a^3c)+(-b^3c+b^4)$$

$$=a^3(b-c)+b^3(b-c)$$

$$=(b-c)(a^3+b^3)$$

$$=(b-c)(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$=(a+b)(b-c)(a^2-ab+b^2)$$

답 ③

013

$$x^4+9x^2+81=x^4+x^2 \times 3^2+3^4$$

$$=(x^2+3x+3^2)(x^2-3x+3^2)$$

$$=(x^2+3x+9)(x^2-3x+9)$$

따라서 두 이차식의 합은

$$(x^2+3x+9)+(x^2-3x+9)=2x^2+18$$

답 $2x^2+18$

014

$$16x^4+4x^2y^2+y^4$$

$$=(2x)^4+(2x)^2 \times y^2+y^4$$

$$=\{(2x)^2+2x \times y+y^2\} \{(2x)^2-2x \times y+y^2\}$$

$$=(4x^2+2xy+y^2)(4x^2-2xy+y^2)$$

따라서 주어진 식의 인수인 것은 ②, ④이다.

답 ②, ④

015

$$8x^3-y^3+64z^3+24xyz$$

$$=(2x)^3+(-y)^3+(4z)^3-3 \times 2x \times (-y) \times 4z$$

$$=(2x-y+4z)\{(2x)^2+(-y)^2+(4z)^2-2x \times (-y)$$

$$-(-y) \times 4z-4z \times 2x\}$$

$$=(2x-y+4z)(4x^2+y^2+16z^2+2xy+4yz-8zx)$$

따라서 $a=-1$, $b=4$, $c=1$, $d=-8$ 이므로

$$a+b+c+d=-1+4+1+(-8)=-4$$

답 -4

016

(1) $x+y=X$ 로 놓으면

$$\begin{aligned}(x+y)^2-5(x+y)+6 \\&=X^2-5X+6 \\&=(X-2)(X-3) \\&=(x+y-2)(x+y-3)\end{aligned}$$

(2) $a-2b=X$ 로 놓으면

$$\begin{aligned}(a-2b-4)(a-2b+2)+5 \\&=(X-4)(X+2)+5 \\&=X^2-2X-8+5 \\&=X^2-2X-3 \\&=(X-3)(X+1) \\&=(a-2b-3)(a-2b+1)\end{aligned}$$

(3) $x^2-x=X$ 로 놓으면

$$\begin{aligned}(x^2-x)^2-(x^2-x)-2 \\&=X^2-X-2 \\&=(X-2)(X+1) \\&=(x^2-x-2)(x^2-x+1) \\&=(x+1)(x-2)(x^2-x+1)\end{aligned}$$

$$\text{답 (1) } (x+y-2)(x+y-3)$$

$$(2) (a-2b-3)(a-2b+1)$$

$$(3) (x+1)(x-2)(x^2-x+1)$$

017

$x^2-4x=X$ 로 놓으면

$$\begin{aligned}(x^2-4x)(x^2-4x-1)-20 &=X(X-1)-20 \\&=X^2-X-20 \\&=(X-5)(X+4) \\&=(x^2-4x-5)(x^2-4x+4) \\&=(x+1)(x-5)(x-2)^2\end{aligned}$$

따라서 주어진 식의 인수인 것은 ①, ⑤이다.

답 ①, ⑤

018

$x^2+x=X$ 로 놓으면

$$\begin{aligned}(x^2+x)^2+2(x^2+x)-3 &=X^2+2X-3 \\&=(X-1)(X+3) \\&=(x^2+x-1)(x^2+x+3)\end{aligned}$$

따라서 $a=1$, $b=3$ 이므로

$$a+b=1+3=4$$

답 ④

019

$$\begin{aligned}(x^2-2x)^2+6x^2-12x+9 \\&=(x^2-2x)^2+6(x^2-2x)+9 \\&=X^2+6X+9 \\&=(X+3)^2 \rightarrow x^2-2x=X \text{로 놓는다.} \\&=(x^2-2x+3)^2\end{aligned}$$

따라서 $a=-2$, $b=3$ 이므로

$$ab=-2 \times 3=-6$$

답 ①

020

$$\begin{aligned}(x-1)(x+1)(x+2)(x+4)-7 \\&=\{(x-1)(x+4)\}\{(x+1)(x+2)\}-7 \\&=(x^2+3x-4)(x^2+3x+2)-7 \dots\dots\dots ①\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=(X-4)(X+2)-7 \\&=X^2-2X-8-7 \rightarrow x^2+3x=X \text{로 놓는다.} \\&=X^2-2X-15\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=(X-5)(X+3) \\&=(x^2+3x-5)(x^2+3x+3) \dots\dots\dots ②\end{aligned}$$

따라서 두 이차식의 합은

$$(x^2+3x-5)+(x^2+3x+3)=2x^2+6x-2 \dots\dots\dots ③$$

$$\text{답 } 2x^2+6x-2$$

채점 기준	비율
① 상수항의 합이 같은 것끼리 돌씩 짝을 지어 전개할 수 있다.	30 %
② $(x-1)(x+1)(x+2)(x+4)-7$ 을 인수분해할 수 있다.	50 %
③ 두 이차식의 합을 구할 수 있다.	20 %

021

(1) $x^2=X$ 로 놓으면

$$\begin{aligned}x^4+4x^2-5 &=X^2+4X-5 \\&=(X-1)(X+5) \\&=(x^2-1)(x^2+5) \\&=(x+1)(x-1)(x^2+5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) x^4+5x^2+9 &=(x^4+6x^2+9)-x^2 \\&=(x^2+3)^2-x^2 \\&=\{(x^2+3)+x\}\{(x^2+3)-x\} \\&=(x^2+x+3)(x^2-x+3)\end{aligned}$$

$$\text{답 (1) } (x+1)(x-1)(x^2+5) \quad (2) (x^2+x+3)(x^2-x+3)$$

022

$x^2=X$ 로 놓으면

$$\begin{aligned}x^4-x^2-12 &=X^2-X-12 \\&=(X-4)(X+3) \\&=(x^2-4)(x^2+3) \\&=(x-2)(x+2)(x^2+3)\end{aligned}$$

$a>0$, $b>0$ 이므로 $a=2$, $b=3$

$$\therefore a+b=2+3=5$$

답 ②

023

$x^2=X$ 로 놓으면

$$\begin{aligned}x^4-8x^2+16 &=X^2-8X+16 \\&=(X-4)^2 \\&=(x^2-4)^2 \\&=\{(x+2)(x-2)\}^2 \\&=(x+2)^2(x-2)^2 \rightarrow x^2+4x+4\end{aligned}$$

따라서 주어진 식의 인수가 아닌 것은 ④이다.

답 ④

024

$$\begin{aligned}
 & x^4 - 7x^2y^2 + 9y^4 \\
 &= (x^4 - 6x^2y^2 + 9y^4) - x^2y^2 \\
 &= (x^2 - 3y^2)^2 - (xy)^2 \dots\dots\dots ① \\
 &= \{(x^2 - 3y^2) + xy\} \{(x^2 - 3y^2) - xy\} \\
 &= (x^2 + xy - 3y^2)(x^2 - xy - 3y^2) \dots\dots\dots ② \\
 &\text{따라서 } a=1, b=3 \text{이므로} \\
 &a-b=1-3=-2 \dots\dots\dots ③
 \end{aligned}$$

답 -2

채점 기준	비율
① $x^4 - 7x^2y^2 + 9y^4$ 을 $A^2 - B^2$ 의 꼴로 변형할 수 있다.	30%
② $x^4 - 7x^2y^2 + 9y^4$ 을 인수분해할 수 있다.	40%
③ $a-b$ 의 값을 구할 수 있다.	30%

025

$$\begin{aligned}
 x^4 + x^2 + 25 &= (x^4 + 10x^2 + 25) - 9x^2 \\
 &= (x^2 + 5)^2 - (3x)^2 \\
 &= \{(x^2 + 5) + 3x\} \{(x^2 + 5) - 3x\} \\
 &= (x^2 + 3x + 5)(x^2 - 3x + 5)
 \end{aligned}$$

따라서 $Q(x) = x^2 - 3x + 5$ 이므로
 $Q(1) = 1 - 3 + 5 = 3$

답 ③

026

(1) 주어진 식을 y 에 대하여 내림차순으로 정리하고 인수분해하면

$$\begin{aligned}
 x^2 + xy - 3x - y + 2 &= xy - y + x^2 - 3x + 2 \\
 &= (x-1)y + (x-1)(x-2) \\
 &= (x-1)\{y + (x-2)\} \\
 &= (x-1)(x+y-2)
 \end{aligned}$$

(2) 주어진 식을 b 에 대하여 내림차순으로 정리하고 인수분해하면

$$\begin{aligned}
 a^2 + ab - a + 2b - 6 &= ab + 2b + a^2 - a - 6 \\
 &= (a+2)b + (a+2)(a-3) \\
 &= (a+2)\{b + (a-3)\} \\
 &= (a+2)(a+b-3)
 \end{aligned}$$

답 (1) $(x-1)(x+y-2)$ (2) $(a+2)(a+b-3)$

027

(1) 주어진 식을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하고 인수분해하면

$$\begin{aligned}
 x^2 - y^2 + 3x - 7y - 10 &= x^2 + 3x - (y^2 + 7y + 10) \\
 &= x^2 + 3x - (y+2)(y+5) \\
 &= \{x + (y+5)\} \{x - (y+2)\} \\
 &= (x+y+5)(x-y-2)
 \end{aligned}$$

(2) 주어진 식을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하고 인수분해하면

$$\begin{aligned}
 x^2 - 3xy + 2y^2 + 4x - 5y + 3 &= x^2 - 3xy + 4x + 2y^2 - 5y + 3 \\
 &= x^2 - (3y-4)x + (y-1)(2y-3) \\
 &= \{x - (y-1)\} \{x - (2y-3)\} \\
 &= (x-y+1)(x-2y+3)
 \end{aligned}$$

답 (1) $(x+y+5)(x-y-2)$ (2) $(x-y+1)(x-2y+3)$

028

주어진 식을 y 에 대하여 내림차순으로 정리하고 인수분해하면

$$\begin{aligned}
 x^2 - xy + 2x + 3y - 15 &= -y(x-3) + x^2 + 2x - 15 \\
 &= -y(x-3) + (x-3)(x+5) \\
 &= (x-3)\{-y + (x+5)\} \\
 &= (x-3)(x-y+5)
 \end{aligned}$$

따라서 $a=-3, b=-1, c=5$ 이므로
 $a-b+c = -3 - (-1) + 5 = 3$

답 ③

029

주어진 식을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하고 인수분해하면

$$\begin{aligned}
 x^2 - 2xy + y^2 + 3x - 3y + 2 &= x^2 - (2y-3)x + y^2 - 3y + 2 \\
 &= x^2 - (2y-3)x + (y-1)(y-2) \\
 &= \{x - (y-1)\} \{x - (y-2)\} \\
 &= (x-y+1)(x-y+2)
 \end{aligned}$$

따라서 두 일차식의 합은
 $(x-y+1) + (x-y+2) = 2x - 2y + 3$

답 $2x - 2y + 3$

[다른 풀이]

$$\begin{aligned}
 x^2 - 2xy + y^2 + 3x - 3y + 2 &= (x-y)^2 + 3(x-y) + 2 \\
 &= \underline{X^2 + 3X + 2} \xrightarrow{x-y=X \text{로 놓는다.}} \\
 &= (X+1)(X+2) \\
 &= (x-y+1)(x-y+2)
 \end{aligned}$$

따라서 두 일차식의 합은
 $(x-y+1) + (x-y+2) = 2x - 2y + 3$

030

주어진 식을 y 에 대하여 내림차순으로 정리하고 인수분해하면

$$\begin{aligned}
 x^3 - (y-1)x^2 - (y+2)x + 2y &= x^3 - x^2y + x^2 - xy - 2x + 2y \\
 &= -y(x^2 + x - 2) + x^3 + x^2 - 2x \\
 &= -y(x^2 + x - 2) + x(x^2 + x - 2) \\
 &= (x^2 + x - 2)(-y + x) \\
 &= (x+2)(x-1)(x-y)
 \end{aligned}$$

답 ①

031

(1) $f(x) = x^3 - 3x + 2$ 로 놓으면
 $f(1) = 0$
 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr}
 1 & 1 & 0 & -3 & 2 \\
 & & 1 & 1 & -2 \\
 \hline
 & 1 & 1 & -2 & 0
 \end{array}$$

$\therefore f(x) = (x-1)(x^2 + x - 2) \xrightarrow{\quad} (x+2)(x-1)$
 $= (x-1)^2(x+2)$

(2) $f(x) = 2x^3 + x^2 - 12x + 4$ 로 놓으면
 $f(2) = 0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 2 & 1 & -12 & 4 \\ & & 4 & 10 & -4 \\ \hline & 2 & 5 & -2 & 0 \end{array}$$

$$\therefore f(x) = (x-2)(2x^2+5x-2)$$

$$\text{답 (1) } (x-1)^2(x+2) \quad (2) (x-2)(2x^2+5x-2)$$

032

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x + a$ 가 $x+1$ 을 인수로 가지므로

$$f(-1) = -1 + 3 + 4 + a = 0 \quad \therefore a = -6$$

조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 3 & -4 & -6 \\ & & -1 & -2 & 6 \\ \hline & 1 & 2 & -6 & 0 \end{array}$$

$$\therefore f(x) = (x+1)(x^2+2x-6)$$

$$\text{답 } (x+1)(x^2+2x-6)$$

033

$f(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$ 로 놓으면

$$f(1) = 0$$

조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 2 & -7 & -8 & 12 \\ & & 1 & 3 & -4 & -12 \\ \hline & 1 & 3 & -4 & -12 & 0 \end{array}$$

$$\therefore f(x) = (x-1)(x^3+3x^2-4x-12) \quad \dots\dots\dots \text{㉠}$$

$g(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ 로 놓으면

$$g(2) = 0$$

조립제법을 이용하여 $g(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 3 & -4 & -12 \\ & & 2 & 10 & 12 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & 0 \end{array}$$

$$\therefore g(x) = (x-2)(x^2+5x+6) \quad \dots\dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에 의하여

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x^2+5x+6)$$

$$= (x-1)(x-2)(x+2)(x+3)$$

따라서 주어진 식의 인수가 아닌 것은 ㉢이다.

$$\text{답 } \text{㉢}$$

034

$f(x) = x^3 + x^2 + ax + 3$ 으로 놓으면 $f(x)$ 가 $x-1$ 을 인수로 가지므로

$$f(1) = 1 + 1 + a + 3 = 0 \quad \therefore a = -5 \quad \dots\dots\dots \text{㉠}$$

조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 1 & -5 & 3 \\ & & 1 & 2 & -3 \\ \hline & 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}$$

$$f(x) = (x-1)(x^2+2x-3) = (x-1)^2(x+3) \rightarrow (x+3)(x-1)$$

$$\therefore b = 3 \quad \dots\dots\dots \text{㉡}$$

$$\therefore a + b = -5 + 3 = -2 \quad \dots\dots\dots \text{㉢}$$

$$\text{답 } -2$$

채점 기준	비율
㉠ a 의 값을 구할 수 있다.	40 %
㉡ b 의 값을 구할 수 있다.	40 %
㉢ $a+b$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

| 다른 풀이 |

$$(x-1)^2(x+b) = (x^2-2x+1)(x+b) = x^3 + (b-2)x^2 + (1-2b)x + b$$

따라서 $a = 1 - 2b$, $3 = b$ 이므로 $a = -5$, $b = 3$

$$\therefore a + b = -5 + 3 = -2$$

035

주어진 등식의 양변에 $x = -2$ 를 대입하면

$$-8 - 4 - 6 - 2 = -2a, \quad 2a = 20$$

$$\therefore a = 10$$

$$x^3 - x^2 + 3x - 2 = (x+2)P(x) + 10x \text{에서}$$

$$x^3 - x^2 - 7x - 2 = (x+2)P(x)$$

즉, $x^3 - x^2 - 7x - 2$ 가 $x+2$ 를 인수로 가지므로 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & -1 & -7 & -2 \\ & & -2 & 6 & 2 \\ \hline & 1 & -3 & -1 & 0 \end{array}$$

$$\therefore x^3 - x^2 - 7x - 2 = (x+2)(x^2 - 3x - 1)$$

따라서 $P(x) = x^2 - 3x - 1$ 이므로

$$P(-2) = 4 + 6 - 1 = 9$$

$$\text{답 } \text{㉠}$$

036

주어진 식을 b 에 대하여 내림차순으로 정리하고 인수분해하면

$$a^2 - ab - c^2 + cb$$

$$= -b(a-c) + a^2 - c^2$$

$$= -b(a-c) + (a+c)(a-c)$$

$$= (a-c)\{-b + (a+c)\}$$

$$= (a-c)(a-b+c) = 0$$

이때 a, b, c 는 삼각형의 세 변의 길이이므로 $b < a+c$

즉, $a-b+c \neq 0$ 이므로 삼각형의 두 변의 길이의 합은 나머지 한 변의 길이보다 항상 크다.

$$a-c=0 \quad \therefore a=c$$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 $a=c$ 인 이등변삼각형이다.

$$\text{답 } \text{㉡}$$

037

$$a^3 + a^2b - ab^2 + ac^2 - b^3 + bc^2$$

$$= a^3 + a^2b - ab^2 - b^3 + ac^2 + bc^2$$

$$= a^2(a+b) - b^2(a+b) + c^2(a+b)$$

$$= (a+b)(a^2 - b^2 + c^2) = 0$$

이때 a, b, c 는 삼각형의 세 변의 길이이므로

$$a+b>0$$

$$\text{즉, } a^2-b^2+c^2=0 \text{이므로}$$

$$a^2+c^2=b^2$$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 빗변의 길이가 b 인 직각삼각형이다.

답 빗변의 길이가 b 인 직각삼각형

|다른 풀이|

$$a^3+a^2b-ab^2+ac^2-b^3+bc^2$$

$$=a^2(a+b)-a(b^2-c^2)-b(b^2-c^2)$$

$$=a^2(a+b)-(b^2-c^2)(a+b)$$

$$=(a+b)(a^2-b^2+c^2)=0$$

038

$$ab(a+b)-bc(b+c)-ca(c-a)$$

$$=a^2b+ab^2-b^2c-bc^2-ac^2+a^2c$$

$$=(b+c)a^2+(b^2-c^2)a-b^2c-bc^2 \quad \text{↘ } a \text{에 대한 내림차순으로 정리한다.}$$

$$=(b+c)a^2+(b+c)(b-c)a-bc(b+c)$$

$$=(b+c)\{a^2+(b-c)a-bc\}$$

$$=(b+c)(a+b)(a-c)=0$$

이때 a, b, c 는 삼각형의 세 변의 길이이므로

$$b+c>0, a+b>0$$

$$\text{즉, } a-c=0 \text{이므로 } a=c$$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 $a=c$ 인 이등변삼각형이다.

답 ③

참고

a, b, c 의 차수가 같으면서 순환하는 꼴의 다항식은 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해한다.

039

$$a^3+b^3+c^3=3abc \text{에서}$$

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$

$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

$$=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$$

이때 a, b, c 는 삼각형의 세 변의 길이이므로

$$a+b+c>0$$

$$\text{즉, } (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0 \text{이므로}$$

$$a=b=c$$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 정삼각형이다.

답 정삼각형

040

$$x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx-5)$$

$$=(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx)-10$$

$$=(x+y+z)^2-10$$

$$=4^2-10=6$$

답 ⑤

041

$$x+y=(\sqrt{2}+1)+(\sqrt{2}-1)=2\sqrt{2}$$

$$xy=(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=1$$

$$\therefore x^4+x^2y^2+y^4=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$$

$$=\{(x+y)^2-xy\}\{(x+y)^2-3xy\}$$

$$=\{(2\sqrt{2})^2-1\}\{(2\sqrt{2})^2-3\times 1\}$$

$$=7\times 5=35$$

답 35

|다른 풀이|

$$x^4+x^2y^2+y^4=(x^2+y^2)^2-x^2y^2$$

$$=\{(x+y)^2-2xy\}^2-(xy)^2$$

$$=\{(2\sqrt{2})^2-2\times 1\}^2-1^2$$

$$=36-1=35$$

042

$$x^2+y^2+2xy-x^2y-xy^2=(x+y)^2-xy(x+y)$$

$$=(x+y)(x+y-xy) \quad \text{..... ①}$$

$$=2(2-xy)=3$$

$$\text{즉, } 4-2xy=3 \text{이므로 } xy=\frac{1}{2} \quad \text{..... ②}$$

답 $\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
① $x^2+y^2+2xy-x^2y-xy^2$ 을 인수분해할 수 있다.	60 %
② xy 의 값을 구할 수 있다.	40 %

043

120=x로 놓으면

$$\frac{120^4+120^2+1}{120^2+120+1}=\frac{x^4+x^2+1}{x^2+x+1}=\frac{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}{x^2+x+1}$$

$$=x^2-x+1=120^2-120+1=14281$$

답 14281

044

$f(1)=0$ 이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 10 & 9 & -21 & 2 \\ & & 10 & 19 & -2 \\ \hline & 10 & 19 & -2 & 0 \end{array}$$

$$\therefore f(x)=(x-1)(10x^2+19x-2)$$

$$=(x-1)(10x-1)(x+2)$$

$$\therefore f(1.1)=(1.1-1)(10\times 1.1-1)(1.1+2)$$

$$=0.1\times 10\times 3.1=3.1$$

답 3.1

045

10=k로 놓으면

상수항의 합이 같은 것끼리
둘씩 짝을 지어 전개한다.

$$\begin{aligned}
 10 \times 13 \times 14 \times 17 + 36 &= k(k+3)(k+4)(k+7) + 36 \\
 &= \{k(k+7)\} \{(k+3)(k+4)\} + 36 \\
 &= (k^2+7k)(k^2+7k+12) + 36 \\
 &= \underline{t(t+12)} + 36 \\
 &= t^2+12t+36 \quad \rightarrow k^2+7k=t \text{로 놓는다.} \\
 &= (t+6)^2 \\
 &= (k^2+7k+6)^2 \\
 &= (10^2+7 \times 10+6)^2 \\
 &= 176^2 \\
 \therefore \sqrt{10 \times 13 \times 14 \times 17 + 36} \\
 &= \sqrt{176^2} = 176
 \end{aligned}$$

답 176

실력을 높이는 연습 문제

본문 040쪽

01

$$\begin{aligned}
 x^2 - (2a+1)x + (a-2)(a+3) \\
 &= \{x - (a-2)\} \{x - (a+3)\} \\
 &= (x-a+2)(x-a-3) \\
 \text{이때 두 일차식의 합이 } 2x+1 \text{이므로} \\
 (x-a+2) + (x-a-3) &= 2x-2a-1=2x+1 \\
 -2a-1 &= 1 \quad \therefore a = -1
 \end{aligned}$$

답 ②

02

$$\begin{aligned}
 a^2b + b^2c - b^3 - a^2c &= (a^2b - a^2c) + (b^2c - b^3) \\
 &= a^2(b-c) - b^2(b-c) \\
 &= (b-c)(a^2-b^2) \\
 &= (b-c)(a+b)(a-b) \\
 &= (a+b)(a-b)(b-c)
 \end{aligned}$$

답 ②

03

$$\begin{aligned}
 x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 4xy + 12yz - 6zx \\
 &= x^2 + (-2y)^2 + (-3z)^2 + 2 \times x \times (-2y) \\
 &\quad + 2 \times (-2y) \times (-3z) + 2 \times (-3z) \times x \\
 &= (x-2y-3z)^2
 \end{aligned}$$

따라서 주어진 식의 인수인 것은 ③이다.

답 ③

04

$$\begin{aligned}
 27x^3 - 8 &= (3x)^3 - 2^3 = (3x-2)(9x^2+6x+4) \\
 81x^4 + 36x^2 + 16 &= (3x)^4 + (3x)^2 \times 2^2 + 2^4 \\
 &= (9x^2+6x+4)(9x^2-6x+4)
 \end{aligned}$$

따라서 두 다항식에 공통으로 들어 있는 1이 아닌 인수는 $9x^2+6x+4$ 이다.

답 $9x^2+6x+4$

05

$$\begin{aligned}
 ① \quad x^2 + 11x + 30 &= (x+5)(x+6) \\
 ② \quad x^4 - 16 &= (x^2)^2 - 4^2 \\
 &= (x^2+4)(x^2-4) \\
 &= (x^2+4)(x+2)(x-2) \\
 ③ \quad x^3 + 27y^3 &= (x+3y)(x^2-3xy+9y^2) \\
 ④ \quad x^5 + x^3y^2 + xy^4 &= x(x^4+x^2y^2+y^4) \\
 &= x(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2) \\
 ⑤ \quad x^3 + 12x^2 + 48x + 64 &= (x+4)^3
 \end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ④이다.

답 ④

06

$$\begin{aligned}
 (x^2-x)(x^2-x+3) + k(x^2-x) + 8 &= (x^2-x+a)(x^2-x+b) \\
 \text{에서 } x^2-x &= X \text{로 놓으면} \\
 X(X+3) + kX + 8 &= (X+a)(X+b) \\
 X^2 + (k+3)X + 8 &= (X+a)(X+b) \\
 \text{이때 } a, b \ (a < b) \text{가 자연수이므로} \\
 \underline{a=1, b=8 \text{ 또는 } a=2, b=4} \\
 \text{(i) } a=1, b=8 \text{일 때} \quad \rightarrow ab=8 \text{을 만족시키는 } a, b \text{의 값} \\
 k+3=9 \quad \therefore k=6 \\
 \text{(ii) } a=2, b=4 \text{일 때} \\
 k+3=6 \quad \therefore k=3 \\
 \text{(i), (ii)에서 모든 상수 } k \text{의 값의 합은} \\
 6+3=9
 \end{aligned}$$

답 ②

07

$$\begin{aligned}
 x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y + 1 \\
 &= (x+y)^2 + 2(x+y) + 1 \\
 &= \underline{X^2 + 2X + 1} \\
 &= (X+1)^2 \quad \rightarrow x+y=X \text{로 놓는다.} \\
 &= (x+y+1)^2
 \end{aligned}$$

답 ⑤

|다른 풀이|

주어진 식을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하고 인수분해하면

$$\begin{aligned}
 x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y + 1 &= x^2 + (2y+2)x + y^2 + 2y + 1 \\
 &= x^2 + 2(y+1)x + (y+1)^2 \\
 &= (x+y+1)^2
 \end{aligned}$$

08

문제 접근하기

상수항의 합이 같은 것끼리 둘씩 짝을 지어 전개하고 완전제곱식이 되는 조건을 이용한다.

$$\begin{aligned}
 (x-5)(x-3)(x+1)(x+3) + k \\
 &= \{(x-3)(x+1)\} \{(x-5)(x+3)\} + k \\
 &= (x^2-2x-3)(x^2-2x-15) + k \\
 &= (X-3)(X-15) + k \\
 &= X^2 - 18X + 45 + k \quad \rightarrow x^2-2x=X \text{로 놓는다.}
 \end{aligned}$$

이 식이 완전제곱식이 되려면

$$45+k=\left(\frac{-18}{2}\right)^2=81$$

$$\therefore k=36$$

답 36

품셈 개념 CHECK

완전제곱식 만들기_중 수학 3

이차식 x^2+ax+b 가 완전제곱식이 되려면 $b=\left(\frac{a}{2}\right)^2$ 이어야 한다.

즉, 상수항은 $\left(\frac{\text{일차항의 계수}}{2}\right)^2$ 이어야 한다.

09

$x^2=X, y^2=Y$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} x^4-5x^2y^2+4y^4 &= X^2-5XY+4Y^2 \\ &= (X-Y)(X-4Y) \\ &= (x^2-y^2)(x^2-4y^2) \\ &= (x+y)(x-y)(x+2y)(x-2y) \end{aligned}$$

따라서 주어진 식의 인수가 아닌 것은 ⑤이다.

답 ⑤

10

$$\begin{aligned} x^4+4 &= x^4+4x^2+4-4x^2 \\ &= (x^2+2)^2-(2x)^2 \\ &= \{(x^2+2)+2x\}\{(x^2+2)-2x\} \\ &= (x^2+2x+2)(x^2-2x+2) \end{aligned}$$

이때 $a>c$ 이므로

$$a=2, b=2, c=-2, d=2$$

$$\therefore abcd=2 \times 2 \times (-2) \times 2 = -16$$

답 ①

11

$$\begin{aligned} x^4-9x^2+16 &= x^4-8x^2+16-x^2 \\ &= (x^2-4)^2-x^2 \\ &= \{(x^2-4)+x\}\{(x^2-4)-x\} \\ &= (x^2+x-4)(x^2-x-4) \end{aligned}$$

따라서 두 이차식의 합은

$$(x^2+x-4)+(x^2-x-4)=2x^2-8$$

답 $2x^2-8$

12

주어진 식을 y 에 대하여 내림차순으로 정리하고 인수분해하면

$$\begin{aligned} x^2+xy-x-2y-2 &= (x-2)y+x^2-x-2 \\ &= (x-2)y+(x+1)(x-2) \\ &= (x-2)\{y+(x+1)\} \\ &= (x-2)(x+y+1) \end{aligned}$$

따라서 $a=-2, b=1, c=1$ 이므로

$$ab-c=-2 \times 1 - 1 = -3$$

답 ①

13

문제 접근하기

한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 다음

$x^2+(A+B)x+AB=(x+A)(x+B)$ 를 이용하여 인수분해한다.

주어진 식을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하고 인수분해하면

$$\begin{aligned} 2x^2-3xy+y^2+ax+y-12 &= 2x^2-(3y-a)x+y^2+y-12 \\ &= 2x^2-(3y-a)x+(y+4)(y-3) \end{aligned}$$

위의 식이 x, y 에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해되려면

$$\begin{array}{rcl} \text{(i)} & \begin{array}{r} 2 \quad \times \quad - \\ 1 \quad \times \quad - \end{array} & \begin{array}{l} -(y+4) \longrightarrow -y-4 \\ -(y-3) \longrightarrow -y+3 \end{array} \\ & & \hline & & -(3y-2) \end{array}$$

$$-(3y-2)=-(3y-a) \text{ 이어야 하므로 } a=2$$

$$\begin{array}{rcl} \text{(ii)} & \begin{array}{r} 2 \quad \times \quad - \\ 1 \quad \times \quad - \end{array} & \begin{array}{l} -(y-3) \longrightarrow -y+3 \\ -(y+4) \longrightarrow -y-4 \end{array} \\ & & \hline & & -(3y+5) \end{array}$$

$$-(3y+5)=-(3y-a) \text{ 이어야 하므로 } a=-5$$

(i), (ii)에서 모든 정수 a 의 값의 합은

$$2+(-5)=-3$$

답 -3

14

$f(x)=2x^3-3x^2-12x-7$ 로 놓으면 $f(-1)=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & -3 & -12 & -7 \\ & & -2 & 5 & 7 \\ \hline & 2 & -5 & -7 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore 2x^3-3x^2-12x-7 &= (x+1)(2x^2-5x-7) \\ &= (x+1)^2(2x-7) \rightarrow (x+1)(2x-7) \end{aligned}$$

따라서 $a=1, b=2, c=-7$ 이므로

$$a+b+c=1+2+(-7)=-4$$

답 ③

15

$g(x)=x^4+2x^3-5x^2+ax+b$ 로 놓으면 $g(x)$ 가 $x-1, x+1$ 을 인수로 가지므로

$$g(1)=0, g(-1)=0$$

$$g(1)=1+2-5+a+b=0 \text{ 에서 } a+b=2 \quad \text{..... ㉠}$$

$$g(-1)=1-2-5-a+b=0 \text{ 에서 } -a+b=6 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=-2, b=4$$

조립제법을 이용하여 $g(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 2 & -5 & -2 & 4 \\ & & 1 & 3 & -2 & -4 \\ \hline -1 & 1 & 3 & -2 & -4 & 0 \\ & & -1 & -2 & 4 & \\ \hline & 1 & 2 & -4 & 0 & \end{array}$$

따라서 $g(x)=(x-1)(x+1)(x^2+2x-4)$ 이므로
 $f(x)=x^2+2x-4$

답 x^2+2x-4

16

문제 접근하기

$a^4+a^2c^2+b^2c^2-b^4$ 을 인수분해한 후 주어진 삼각형이 어떤 삼각형인지 먼저 파악한다.

$$a^4+a^2c^2+b^2c^2-b^4 \\ = (a^2+b^2)c^2+a^4-b^4 \quad \text{c에 대한 내림차순으로 정리한다.}$$

$$= (a^2+b^2)c^2+(a^2+b^2)(a^2-b^2) \\ = (a^2+b^2)(a^2-b^2+c^2)$$

이때 a, b, c 는 삼각형의 세 변의 길이이므로

$$a^2+b^2>0$$

$$\text{즉, } a^2-b^2+c^2=0 \text{이므로}$$

$$a^2+c^2=b^2$$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 빗변의 길이가 b 인 직각삼각형이므로 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}ac$ 이다.

→ 작각을 낀 두 변의 길이는 a, c 이다.

답 $\frac{1}{2}ac$

17

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \text{이고}$$

$$a+b+c=0 \text{이므로}$$

$$a^3+b^3+c^3-3abc=0$$

$$\therefore a^3+b^3+c^3=3abc$$

$$\therefore \frac{a^3+b^3+c^3}{9abc}=\frac{3abc}{9abc}=\frac{1}{3}$$

답 ①

18

$14=x$ 로 놓으면

$$(14^2+2 \times 14)^2-18 \times (14^2+2 \times 14)+45$$

$$= (x^2+2x)^2-18(x^2+2x)+45$$

$$= \underline{X^2-18X+45} \quad x^2+2x=X \text{로 놓는다.}$$

$$= (X-3)(X-15)$$

$$= (x^2+2x-3)(x^2+2x-15)$$

$$= (x-1)(x+3)(x-3)(x+5)$$

$$= (14-1)(14+3)(14-3)(14+5)$$

$$= 13 \times 17 \times 11 \times 19$$

$$\therefore a+b+c+d=13+17+11+19=60$$

답 ③



복소수

기본을 다지는 유형

본문 045쪽

001

(1) $-i=0-i$ 이므로 실수부분은 0, 허수부분은 -1 이다.

(2) $8-\sqrt{3}i$ 의 실수부분은 8, 허수부분은 $-\sqrt{3}$ 이다.

(3) $\frac{-1+2i}{3}=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i$ 이므로 실수부분은 $-\frac{1}{3}$, 허수부분은 $\frac{2}{3}$ 이다.

(4) $6=6+0i$ 이므로 실수부분은 6, 허수부분은 0이다.

답 (1) 실수부분: 0, 허수부분: -1 (2) 실수부분: 8, 허수부분: $-\sqrt{3}$

(3) 실수부분: $-\frac{1}{3}$, 허수부분: $\frac{2}{3}$ (4) 실수부분: 6, 허수부분: 0

002

$$i^2+7=-1+7=6$$

(1) 실수는 $-8, 1-\sqrt{3}, 0, i^2+7$ 이다.

(2) 허수는 $4-3i, \sqrt{5}i, 5-\frac{1}{2}i$ 이다.

(3) 순허수는 $\sqrt{5}i$ 이다.

답 (1) $-8, 1-\sqrt{3}, 0, i^2+7$ (2) $4-3i, \sqrt{5}i, 5-\frac{1}{2}i$ (3) $\sqrt{5}i$

참고

복소수 $a+bi$ (a, b 는 실수)에서 실수는 i 가 없는 수이고, 허수는 i 가 있는 수이다.

→ 복소수 $a+bi$ $\begin{cases} \text{실수 } a \ (b=0) \\ \text{순허수 } bi \ (a=0, b \neq 0) \\ \text{허수 } \begin{cases} \text{순허수가 아닌 허수 } a+bi \ (a \neq 0, b \neq 0) \end{cases} \end{cases}$

003

(가)에 해당하는 수는 허수이다.

$$\textcircled{2} \sqrt{2}i^2=-\sqrt{2}$$

$$\textcircled{5} i^2+i=-1+i$$

따라서 (가)에 해당하는 수는 ⑤이다.

답 ⑤

004

$5-\sqrt{2}i$ 에서 실수부분은 5이므로 $a=5$

$$\frac{-\sqrt{3}+6i}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{3}+2i \text{에서 허수부분은 2이므로 } b=2$$

$$\therefore a^2+b^2=5^2+2^2=29$$

답 ②

005

허수는 $-5+4i, -\frac{3}{7}i, \sqrt{6}-2i$ 이고 이 중에서 순허수는 $-\frac{3}{7}i$ 이므로 순허수가 아닌 허수는 $-5+4i, \sqrt{6}-2i$ 의 2개이다.

답 2

참고

$1-2i^2=1-(-2)=3$ 이므로 $1-2i^2$ 은 실수이다.

006

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & (-4+i) + (3-5i) = -4+i+3-5i \\
 & = (-4+3) + (1-5)i \\
 & = -1-4i \\
 (2) \quad & (3-2i) - (-2+6i) = 3-2i+2-6i \\
 & = (3+2) + (-2-6)i \\
 & = 5-8i \\
 (3) \quad & (1+4i)(2-i) = 2-i+8i-4i^2 \\
 & = 2-i+8i+4 \\
 & = (2+4) + (-1+8)i \\
 & = 6+7i \\
 (4) \quad & \frac{1+9i}{1-2i} = \frac{(1+9i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} \quad \text{분모에 허수가 있는 경우에는 분모의 켤레복소수를 분모 분자에 각각 곱하여 분모를 실수로 고친다.} \\
 & = \frac{1+2i+9i+18i^2}{1-4i^2} \\
 & = \frac{1+2i+9i-18}{1+4} \\
 & = \frac{(1-18) + (2+9)i}{5} \\
 & = \frac{-17+11i}{5} \\
 & = -\frac{17}{5} + \frac{11}{5}i
 \end{aligned}$$

답 (1) $-1-4i$ (2) $5-8i$
(3) $6+7i$ (4) $-\frac{17}{5} + \frac{11}{5}i$

참고

복소수의 사칙연산은 i 를 문자처럼 생각하여 다항식의 연산과 같은 방법으로 계산한 다음 $i^2 = -1$ 임을 이용하여 계산한다.

007

$$\begin{aligned}
 z_1 z_2 &= (-5+4i)(-5-4i) \quad \text{곱셈 공식} \\
 &= (-5)^2 - (4i)^2 \quad \text{↓ } (a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \text{ 을 이용한다.} \\
 &= 25 - 16i^2 \\
 &= 25 + 16 = 41
 \end{aligned}$$

답 ④

008

$$\begin{aligned}
 & (1-\sqrt{3}i)^2 + (1+\sqrt{3}i)^2 \\
 &= 1-2\sqrt{3}i+3i^2+1+2\sqrt{3}i+3i^2 \quad \text{↓ } (a-b)^2 = a^2-2ab+b^2, \\
 &= 1-2\sqrt{3}i-3+1+2\sqrt{3}i-3 \quad \text{↓ } (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \text{ 을 이용한다.} \\
 &= -4
 \end{aligned}$$

답 ②

009

$$\begin{aligned}
 & (1-3i)(2+i) + \frac{4(-1+2i)}{1+8i} \\
 &= 2-5i-3i^2 + \frac{4(-1+2i)(1-8i)}{(1+8i)(1-8i)} \\
 &= 5-5i + \frac{4(-1+10i-16i^2)}{1-64i^2} \\
 &= 5-5i + \frac{4(15+10i)}{65} \\
 &= 5-5i + \frac{12+8i}{13} \\
 &= \frac{77}{13} - \frac{57}{13}i
 \end{aligned}$$

따라서 $a = \frac{77}{13}$, $b = -\frac{57}{13}$ 이므로

$$a+b = \frac{77}{13} + \left(-\frac{57}{13}\right) = \frac{20}{13}$$

답 ⑤

010

$$\begin{aligned}
 & (2-3i) \odot (4-i) \\
 &= (2-3i) + (4-i) - 2(2-3i)(4-i) \quad \text{①} \\
 &= 2-3i+4-i-2(5-14i) \\
 &= 2-3i+4-i-10+28i \\
 &= -4+24i \quad \text{②}
 \end{aligned}$$

따라서 구하는 허수부분은 24이다. ③

답 24

채점 기준	비율
① $(2-3i) \odot (4-i)$ 를 연산 기호의 정의에 맞는 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
② $(2-3i) \odot (4-i)$ 를 계산할 수 있다.	50 %
③ $(2-3i) \odot (4-i)$ 의 허수부분을 구할 수 있다.	30 %

011

$$\begin{aligned}
 a+b &= (3+i) + (3-i) = 6 \\
 ab &= (3+i)(3-i) = 10 \\
 (1) \quad a^2+b^2 &= (a+b)^2 - 2ab \\
 &= 6^2 - 2 \times 10 = 16 \\
 (2) \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} &= \frac{a+b}{ab} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \\
 (3) \quad \frac{b}{a} + \frac{a}{b} &= \frac{a^2+b^2}{ab} = \frac{16}{10} = \frac{8}{5} \quad (\because (1))
 \end{aligned}$$

답 (1) 16 (2) $\frac{3}{5}$ (3) $\frac{8}{5}$

012

$$\begin{aligned}
 x+y &= (1-2i) + (1+2i) = 2 \\
 xy &= (1-2i)(1+2i) = 5 \\
 \therefore x^3y+xy^3-x^2-y^2 &= xy(x^2+y^2) - (x^2+y^2) \\
 &= (x^2+y^2)(xy-1) \\
 &= \{(x+y)^2-2xy\}(xy-1) \\
 &= (2^2-2 \times 5) \times (5-1) \\
 &= -6 \times 4 = -24
 \end{aligned}$$

답 ①

013

$$\begin{aligned}
 \alpha^2 &= \left(\frac{6+i}{2i}\right)^2 = \frac{35+12i}{-4} \text{에서 } -4\alpha^2 = 35+12i \\
 \therefore 4\alpha^2+35 &= -12i \\
 \beta^2 &= \left(\frac{6-i}{2i}\right)^2 = \frac{35-12i}{-4} \text{에서 } -4\beta^2 = 35-12i \\
 \therefore 4\beta^2+35 &= 12i \\
 \therefore (4\alpha^2+35)(4\beta^2+35) &= -12i \times 12i = 144
 \end{aligned}$$

답 ②

014

$$z=2-\sqrt{3}i \text{에서 } z-2=-\sqrt{3}i$$

양변을 제곱하면

$$z^2-4z+4=-3$$

$$\therefore z^2-4z=-7$$

$$\begin{aligned}\therefore 2z^2-8z-1 &= 2(z^2-4z)-1 \\ &= 2 \times (-7) - 1 \\ &= -15\end{aligned}$$

답 ②

|다른 풀이|

$$\begin{aligned}2z^2-8z-1 &= 2(2-\sqrt{3}i)^2-8(2-\sqrt{3}i)-1 \\ &= 2(1-4\sqrt{3}i)-8(2-\sqrt{3}i)-1 \\ &= 2-8\sqrt{3}i-16+8\sqrt{3}i-1 \\ &= -15\end{aligned}$$

015

$$x=\frac{2-i}{1-2i}=\frac{(2-i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\frac{4+3i}{5} \text{에서}$$

$$5x-4=3i$$

양변을 제곱하면

$$25x^2-40x+16=-9$$

$$25x^2-40x+25=0$$

$$\therefore 5x^2-8x+5=0$$

$$\begin{aligned}\therefore 5x^3-8x^2+10x+3 &= x(5x^2-8x+5)+5x+3 \\ &= x \times 0 + 5 \times \frac{4+3i}{5} + 3 \\ &= 7+3i\end{aligned}$$

답 ④

016

$x(10-7i)+3(i-2)=(10x-6)+(3-7x)i$ 가 실수가 되려면 허수부분이 0이어야 한다.

$$\text{즉, } 3-7x=0 \text{이므로 } x=\frac{3}{7}$$

답 $\frac{3}{7}$

참고

복소수가 실수, 순허수가 되는 조건

복소수 $z=a+bi$ (a, b 는 실수)에 대하여

(1) z 가 실수 $\Rightarrow b=0$

(2) z 가 순허수 $\Rightarrow a=0, b \neq 0$

(3) z^2 이 실수 $\Rightarrow z$ 는 순허수 또는 실수 $\Rightarrow a=0$ 또는 $b=0$

(4) z^2 이 양의 실수 $\Rightarrow z$ 는 0이 아닌 실수 $\Rightarrow a \neq 0, b=0$

(5) z^2 이 음의 실수 $\Rightarrow z$ 는 순허수 $\Rightarrow a=0, b \neq 0$

017

$$z=a(i-3)+4(5+2i)=(20-3a)+(a+8)i$$

z^2 이 양의 실수가 되려면 z 는 0이 아닌 실수이어야 한다. 즉, z 의 실수부분은 0이 아니고 허수부분은 0이어야 한다.

따라서 $20-3a \neq 0, a+8=0$ 이므로

$$a=-8$$

답 -8

018

$2x^2+(8i-3)x-2(1+8i)=(2x^2-3x-2)+(8x-16)i$ 가 순허수가 되려면 실수부분은 0이고 허수부분은 0이 아니어야 한다.

$$\therefore 2x^2-3x-2=0, 8x-16 \neq 0 \dots\dots\dots ①$$

$$2x^2-3x-2=0 \text{에서 } (2x+1)(x-2)=0$$

$$\therefore x=-\frac{1}{2} \text{ 또는 } x=2 \dots\dots\dots ②$$

$$8x-16 \neq 0 \text{에서 } x \neq 2 \dots\dots\dots ③$$

$$\therefore ②, ③ \text{에 의하여 } x=-\frac{1}{2} \dots\dots\dots ④$$

답 $-\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
① $2x^2+(8i-3)x-2(1+8i)$ 가 순허수가 되는 조건을 알 수 있다.	50 %
② 실수 x 의 값을 구할 수 있다.	50 %

019

(1) 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$4x-8=0, 2y-6=0$$

$$\therefore x=2, y=3$$

(2) 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$3x+5=2, 2-y=-3$$

$$\therefore x=-1, y=5$$

(3) 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$2x-y=8, x+y=1$$

$$\text{위의 두 식을 연립하여 풀면 } x=3, y=-2$$

$$\text{답 (1) } x=2, y=3 \quad (2) x=-1, y=5 \quad (3) x=3, y=-2$$

020

$$(x+2i)(3-i)=-1+yi \text{에서}$$

$$(3x+2)+(6-x)i=-1+yi$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$3x+2=-1, 6-x=y$$

$$\therefore x=-1, y=7$$

$$\therefore x-y=-1-7=-8$$

답 -8

021

$$\begin{aligned}\frac{2a}{4-3i}-3i &= \frac{2a(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)}-3i \\ &= \frac{8a+6ai}{25}-3i \\ &= \frac{8a}{25}+\frac{6a-75}{25}i\end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{8a}{25}+\frac{6a-75}{25}i=16+bi \text{이므로}$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$\frac{8a}{25}=16, \frac{6a-75}{25}=b$$

$$\therefore a=50, b=9$$

$$\therefore a+b=50+9=59$$

답 ②

022

$$\frac{x}{5-2i} + \frac{y}{5+2i} = \frac{x(5+2i) + y(5-2i)}{(5-2i)(5+2i)} \\ = \frac{5(x+y) + 2(x-y)i}{29} \quad \text{①}$$

$$\text{즉, } \frac{5(x+y) + 2(x-y)i}{29} = \frac{40+4i}{29} \text{이므로}$$

$$5(x+y) + 2(x-y)i = 40 + 4i$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$5(x+y) = 40, 2(x-y) = 4$$

$$\therefore x+y=8, x-y=2$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$x=5, y=3 \quad \text{②}$$

$$\therefore xy=5 \times 3=15 \quad \text{③}$$

답 15

채점 기준	비율
① $\frac{x}{5-2i} + \frac{y}{5+2i}$ 를 간단히 나타낼 수 있다.	40%
② x, y 의 값을 구할 수 있다.	40%
③ xy 의 값을 구할 수 있다.	20%

023

$$(2+i)x^2 - (8-3i)x - (10-2i) = 0 \text{에서}$$

$$(2x^2 - 8x - 10) + (x^2 + 3x + 2)i = 0$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$2x^2 - 8x - 10 = 0, x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$2x^2 - 8x - 10 = 0 \text{에서 } x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$(x+1)(x-5) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 5 \quad \text{..... ㉠}$$

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \text{에서 } (x+2)(x+1) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = -1 \quad \text{..... ㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡에 의하여 } x = -1$$

답 ②

024

$$(1) 2-3i \text{의 켤레복소수는 } 2+3i \text{이다.}$$

$$(2) 4 \text{의 켤레복소수는 } 4 \text{이다.}$$

$$(3) 5i \text{의 켤레복소수는 } -5i \text{이다.}$$

$$(4) 2i - \sqrt{6} \text{의 켤레복소수는 } -2i - \sqrt{6}, \text{ 즉 } -\sqrt{6} - 2i \text{이다.}$$

답 (1) $2+3i$ (2) 4 (3) $-5i$ (4) $-\sqrt{6}-2i$

025

$$(2) z + \bar{z} = (7i-3) + (-7i-3) = -6$$

$$(3) z - \bar{z} = (7i-3) - (-7i-3)$$

$$= 7i - 3 + 7i + 3 = 14i$$

$$(4) z\bar{z} = (7i-3)(-7i-3)$$

$$= -49i^2 + 9$$

$$= 49 + 9 = 58$$

답 (1) $-3-7i$ (2) -6 (3) $14i$ (4) 58

026

$$\bar{z} = 3-2i \text{이므로}$$

$$\frac{z-\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{(3+2i)-(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{3+2i-3+2i}{9+4} = \frac{4}{13}i$$

답 ②

027

$$z = \frac{5}{2-i} = \frac{5(2+i)}{(2-i)(2+i)}$$

$$= \frac{5(2+i)}{4+1} = 2+i \quad \text{①}$$

$$\text{이므로 } \bar{z} = 2-i \quad \text{②}$$

$$\therefore z - \bar{z} - z\bar{z} = (2+i) - (2-i) - (2+i)(2-i)$$

$$= 2+i-2+i-5$$

$$= -5+2i \quad \text{③}$$

답 $-5+2i$

채점 기준	비율
① z 를 간단히 나타낼 수 있다.	40%
② $\bar{z}$ 를 구할 수 있다.	20%
③ $z - \bar{z} - z\bar{z}$ 의 값을 구할 수 있다.	40%

028

$$z = x^2 - (5-i)x + 4 - 2i$$

$$= (x^2 - 5x + 4) + (x-2)i$$

이때 $\bar{z} = -z$ 가 성립하려면 $z=0$ 또는 z 는 순허수이어야 한다. 즉,

z 의 실수부분이 0이어야 하므로

$$x^2 - 5x + 4 = 0, (x-1)(x-4) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 4$$

따라서 조건을 만족시키는 모든 실수 x 의 값의 합은

$$1+4=5$$

답 ⑤

참고

$z=0$ 이면 $x^2 - 5x + 4 = 0$ 이고 $x-2=0$ 이어야 한다. 그런데 두 식을 동시에 만족시키는 x 의 값은 존재하지 않는다. 따라서 z 는 순허수이어야 한다.

029

$$z = a+bi \text{ (} a, b \text{는 실수)로 놓으면 } \bar{z} = a-bi$$

$$z + \bar{z} = 6 \text{에서}$$

$$(a+bi) + (a-bi) = 2a = 6 \quad \therefore a = 3$$

$$z\bar{z} = 11 \text{에서}$$

$$(3+bi)(3-bi) = 9+b^2 = 11$$

$$b^2 = 2 \quad \therefore b = \pm\sqrt{2}$$

$$\therefore z = 3 \pm \sqrt{2}i$$

답 $3 \pm \sqrt{2}i$

030

$$z = a+bi \text{ (} a, b \text{는 실수)로 놓으면 } \bar{z} = a-bi$$

$$\therefore \bar{z} + \bar{z}i = (a-bi) + (a-bi)i$$

$$= a-bi+ai+b$$

$$= (a+b) + (a-b)i$$

$$\overline{z+z\bar{i}}=6-4i \text{에서}$$

$$(a+b)-(a-b)i=6-4i$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a+b=6, a-b=4$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a=5, b=1$$

따라서 $z=5+i$ 이므로

$$z\bar{z}=(5+i)(5-i)=26$$

답 ⑤

031

$$(1) i^{10}=(i^4)^2 \times i^2=1 \times (-1)=-1$$

$$(2) (-i)^{13}=-i^{13}=-(i^4)^3 \times i \\ =-1 \times i=-i$$

$$(3) -i^7+i^9=-i^4 \times i^3+(i^4)^2 \times i \\ =-1 \times (-i)+1 \times i \\ =i+i=2i$$

$$(4) i^{40}+i^{50}=(i^4)^{10}+(i^4)^{12} \times i^2 \\ =1+1 \times (-1)=0$$

답 (1) -1 (2) -i (3) 2i (4) 0

032

$\frac{1}{i^n}$ (n 은 자연수)의 값은 $\frac{1}{i}, -1, -\frac{1}{i}, 1$ 이 반복된다.

$$1+\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\dots+\frac{1}{i^{14}} \\ =\left(1+\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}\right)+\left(\frac{1}{i^4}+\frac{1}{i^5}+\frac{1}{i^6}+\frac{1}{i^7}\right) \\ +\left(\frac{1}{i^8}+\frac{1}{i^9}+\frac{1}{i^{10}}+\frac{1}{i^{11}}\right)+\frac{1}{i^{12}}+\frac{1}{i^{13}}+\frac{1}{i^{14}} \\ =\left(1+\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}\right)+\left(1+\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}\right) \\ +\left(1+\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}\right)+1+\frac{1}{i}-1 \\ =\frac{1}{i}=\frac{i}{i^2}=-i$$

따라서 $a=0, b=-1$ 이므로

$$a-b=0-(-1)=1$$

답 ④

참고

$$i+i^2+i^3+i^4=0, 1+i+i^2+i^3=0$$

$$\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}=0, 1+\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}=0$$

033

$$(1) (1+i)^5=\{(1+i)^2\}^2 \times (1+i)=(2i)^2(1+i) \\ =-4(1+i)=-4-4i$$

$$(2) (1-i)^6=\{(1-i)^2\}^3=(-2i)^3 \\ =-8i^3=8i$$

$$(3) \frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i \\ \therefore \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^4=i^4=1$$

$$(4) \frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i \\ \therefore \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^5=(-i)^5=(-i)^4 \times (-i)=-i$$

답 (1) -4-4i (2) 8i (3) 1 (4) -i

참고

(1) $(1+i)^n, (1-i)^n$ 의 꼴

→ $(1+i)^2=2i, (1-i)^2=-2i$ 임을 이용한다.

(2) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n, \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n$ 의 꼴

→ $\frac{1+i}{1-i}=i, \frac{1-i}{1+i}=-i$ 임을 이용한다.

034

$$(1-i)^{44}-(1+i)^{44}=\{(1-i)^2\}^{22}-\{(1+i)^2\}^{22} \\ =(-2i)^{22}-(2i)^{22} \\ =(-2)^{22} \times (i^4)^5 \times i^2-2^{22} \times (i^4)^5 \times i^2 \\ =-2^{22}+2^{22}=0$$

답 0

035

$$(1) \sqrt{-2}\sqrt{-6}=\sqrt{2}i \times \sqrt{6}i=2\sqrt{3}i^2=-2\sqrt{3}$$

$$(2) \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-5}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}i}=\frac{\sqrt{3} \times \sqrt{5}i}{\sqrt{5}i \times \sqrt{5}i}=-\frac{\sqrt{15}}{5}i$$

$$(3) \frac{\sqrt{-8}}{\sqrt{-4}}=\frac{2\sqrt{2}i}{2i}=\sqrt{2}$$

답 (1) $-2\sqrt{3}$ (2) $-\frac{\sqrt{15}}{5}i$ (3) $\sqrt{2}$

036

$$\textcircled{1} \sqrt{-3}\sqrt{-18}=\sqrt{3}i \times 3\sqrt{2}i=3\sqrt{6}i^2=-3\sqrt{6}$$

$$\textcircled{2} \sqrt{-7}\sqrt{21}=\sqrt{7}i \times \sqrt{21}=7\sqrt{3}i$$

$$\textcircled{3} (-\sqrt{-5})^2=(-\sqrt{5}i)^2=5i^2=-5$$

$$\textcircled{4} \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}}=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}i}=\frac{3}{i}=\frac{3i}{i^2}=-3i$$

$$\textcircled{5} \frac{\sqrt{-24}}{\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{6}i}{\sqrt{6}}=2i$$

따라서 옳은 것은 ③, ④이다.

답 ③, ④

037

$$\sqrt{3}\sqrt{-75}+\sqrt{-9}\sqrt{-27}-\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{-3}} \\ =\sqrt{3} \times 5\sqrt{3}i+3i \times 3\sqrt{3}i-\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}i} \\ =15i+9\sqrt{3}i^2-\frac{4}{i} \\ =15i-9\sqrt{3}-\frac{4i}{i^2} \\ =15i-9\sqrt{3}+4i \\ =-9\sqrt{3}+19i$$

답 $-9\sqrt{3}+19i$

038

$$z = \sqrt{-3}\sqrt{-2} + \frac{6}{\sqrt{-2}} = \sqrt{3i} \times \sqrt{2i} + \frac{6}{\sqrt{2i}}$$

$$= -\sqrt{6} + \frac{6 \times \sqrt{2i}}{\sqrt{2i} \times \sqrt{2i}} = -\sqrt{6} - 3\sqrt{2i} \dots\dots\dots ①$$

이므로

$$\bar{z} = -\sqrt{6} + 3\sqrt{2i} \dots\dots\dots ②$$

$$\therefore z + \bar{z} = (-\sqrt{6} - 3\sqrt{2i}) + (-\sqrt{6} + 3\sqrt{2i})$$

$$= -2\sqrt{6} \dots\dots\dots ③$$

답 $-2\sqrt{6}$

채점 기준	비율
① z 를 간단히 나타낼 수 있다.	50%
② $\bar{z}$ 를 구할 수 있다.	20%
③ $z + \bar{z}$ 의 값을 구할 수 있다.	30%

039

$$\sqrt{x}\sqrt{y} = -\sqrt{xy} \text{에서}$$

$$x < 0, y < 0 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } y = 0 \dots\dots\dots ①$$

$$x^2 + 2x - (y + 3)i = 15 + 4i \text{에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여}$$

$$x^2 + 2x = 15, -(y + 3) = 4$$

$$x^2 + 2x = 15 \text{에서 } x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$(x + 5)(x - 3) = 0 \quad \therefore x = -5 \text{ 또는 } x = 3$$

$$-(y + 3) = 4 \text{에서 } y = -7$$

$$① \text{에 의하여 } x = -5, y = -7$$

$$\therefore xy = -5 \times (-7) = 35$$

답 ④

실력을 높이는 연습 문제

본문 053쪽

01

① $-10, 0$ 은 복소수이다.

② 순허수는 $-\sqrt{3}i$ 이다.

③ 복소수는 $5 - 8i, -10, -\sqrt{3}i, \frac{\pi}{4}, 0, \frac{1}{2} - \sqrt{6}i$ 의 6개이다.

④ 허수는 $5 - 8i, -\sqrt{3}i, \frac{1}{2} - \sqrt{6}i$ 의 3개이다.

⑤ 실수는 $-10, \frac{\pi}{4}, 0$ 의 3개이다.

따라서 옳은 것은 ④이다.

답 ④

02

$$\frac{2 + \sqrt{3}i}{2 - \sqrt{3}i} - \frac{2 - \sqrt{3}i}{2 + \sqrt{3}i} = \frac{(2 + \sqrt{3}i)^2 - (2 - \sqrt{3}i)^2}{(2 - \sqrt{3}i)(2 + \sqrt{3}i)}$$

$$= \frac{1 + 4\sqrt{3}i - (1 - 4\sqrt{3}i)}{4 + 3} = \frac{8\sqrt{3}}{7}i$$

답 $\frac{8\sqrt{3}}{7}i$

03

a^2 이 최소이고 bc 가 최대일 때 $a^2 - bc$ 는 최솟값을 갖는다.

a^2 의 최솟값은 $a = 5i$ 일 때이므로 $(5i)^2 = 25i^2 = -25$

bc 의 최댓값은 $b = -4i, c = 5i$ 또는 $b = 5i, c = -4i$ 일 때이므로 $-4i \times 5i = -20i^2 = 20$

따라서 $a^2 - bc$ 의 최솟값은 $-25 - 20 = -45$

답 ③

04

$$x = \frac{3+i}{1-2i} = \frac{(3+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{1+7i}{5} \text{에서 } 5x - 1 = 7i$$

$$\text{양변을 제곱하면 } 25x^2 - 10x + 1 = -49$$

$$\therefore 25x^2 - 10x + 50 = 0$$

$$\therefore 25x^4 - 10x^3 + 75x^2 - 10x + 46$$

$$= (25x^2 - 10x + 50)x^2 + 25x^2 - 10x + 46$$

$$= 25x^2 - 10x + 46 = -50 + 46 = -4$$

$$\rightarrow 25x^2 - 10x + 50 = 0 \text{에서}$$

$$25x^2 - 10x = -50$$

답 ②

05

문제 접근하기

복소수 z 에 대하여 z^2 이 실수가 되려면 z 가 실수 또는 순허수이어야 한다.

$$z = (3-i)x^2 + (i+1)x + 2(-1+i)$$

$$= (3x^2 + x - 2) + (-x^2 + x + 2)i$$

z^2 이 실수가 되려면 z 는 순허수 또는 실수이어야 한다.

$$\therefore 3x^2 + x - 2 = 0 \text{ 또는 } -x^2 + x + 2 = 0$$

$$(i) 3x^2 + x - 2 = 0 \text{에서}$$

$$(x+1)(3x-2) = 0 \quad \therefore x = -1 \text{ 또는 } x = \frac{2}{3}$$

$$(ii) -x^2 + x + 2 = 0, \text{ 즉 } x^2 - x - 2 = 0 \text{에서}$$

$$(x+1)(x-2) = 0 \quad \therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

(i), (ii)에서 $x = -1$ 또는 $x = \frac{2}{3}$ 또는 $x = 2$ 이므로 모든 실수 x 의 값의 합은

$$-1 + \frac{2}{3} + 2 = \frac{5}{3}$$

답 $\frac{5}{3}$

06

$$(3+2i)x^2 - 5(2y+i)x = 8+12i \text{에서}$$

$$(3x^2 - 10xy) + (2x^2 - 5x)i = 8 + 12i$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$3x^2 - 10xy = 8 \dots\dots\dots ㉠$$

$$2x^2 - 5x = 12 \dots\dots\dots ㉡$$

$$㉡ \text{에서 } 2x^2 - 5x - 12 = 0$$

$$(2x+3)(x-4) = 0 \quad \therefore x = -\frac{3}{2} \text{ 또는 } x = 4$$

이때 x 는 정수이므로 $x = 4$

$x = 4$ 를 ㉠에 대입하면 $48 - 40y = 8$ 이므로

$$-40y = -40 \quad \therefore y = 1$$

$$\therefore x + y = 4 + 1 = 5$$

답 ⑤

07

$x^2 + y^2 i + x + yi - 2 - 6i = 0$ 에서
 $(x^2 + x - 2) + (y^2 + y - 6)i = 0$
 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
 $x^2 + x - 2 = 0, y^2 + y - 6 = 0$
 $x^2 + x - 2 = 0$ 에서 $(x+2)(x-1) = 0$
 $\therefore x = -2$ 또는 $x = 1$
 $y^2 + y - 6 = 0$ 에서 $(y+3)(y-2) = 0$
 $\therefore y = -3$ 또는 $y = 2$
 따라서 $x+y$ 의 값은
 $-2 + (-3) = -5$ 또는 $-2 + 2 = 0$
 또는 $1 + (-3) = -2$ 또는 $1 + 2 = 3$
 이므로 $x+y$ 의 값이 될 수 없는 것은 ⑤이다.

답 ⑤

08

$z = \frac{18}{\sqrt{5} + 2i} = \frac{18(\sqrt{5} - 2i)}{(\sqrt{5} + 2i)(\sqrt{5} - 2i)} = 2(\sqrt{5} - 2i) = 2\sqrt{5} - 4i$
 이므로 $\bar{z} = 2\sqrt{5} + 4i$
 $\therefore (1-z)(1-\bar{z})$
 $= 1 - (z + \bar{z}) + z\bar{z}$
 $= 1 - \{(2\sqrt{5} - 4i) + (2\sqrt{5} + 4i)\} + (2\sqrt{5} - 4i)(2\sqrt{5} + 4i)$
 $= 1 - 4\sqrt{5} + 36 = 37 - 4\sqrt{5}$

답 37-4√5

09

$z = a + bi$ (a, b 는 실수)로 놓으면 $\bar{z} = a - bi$
 $z^2 = 4 - 2i$ 에서
 $z^2 = (a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi = 4 - 2i$
 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
 $a^2 - b^2 = 4, ab = -1$
 $\therefore z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$
 $= \sqrt{(a^2 + b^2)^2} = \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2}$
 $= \sqrt{4^2 + 4 \times (-1)^2} = 2\sqrt{5}$

답 2√5

|다른 풀이|

$z^2 = 4 - 2i$ 에서 $\bar{z}^2 = 4 + 2i$ 이므로
 $(z\bar{z})^2 = z^2 \bar{z}^2 = (4 - 2i)(4 + 2i) = 20$
 $\therefore z\bar{z} = 2\sqrt{5}$ ($\because z\bar{z} > 0$)

10

문제 접근하기

주어진 조건을 만족시키지 않는 z 의 값을 찾거나
 $z = a + bi$ (a, b 는 실수)로 놓고 주어진 등식에 대입해 본다.

ㄱ. $z = i$ 이면 $z^2 = i^2 = -1$ 로 실수이지만 z 는 허수이다. (거짓)
 ㄴ. $z = a + bi$ (a, b 는 실수)로 놓으면 $\bar{z} = a - bi$
 $z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = 0$ 이면
 $a = b = 0 \quad \therefore z = 0$ (참)
 ㄷ. $z = 1 - i$ 이면 $\bar{z} = 1 + i$ 이므로
 $z + \bar{z} = (1 - i) + (1 + i) = 2 \neq 0$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

답 ②

참고

켈레복소수의 성질

복소수 z 의 켈레복소수를 $\bar{z}$ 라고 할 때

- (1) $z + \bar{z} = (\text{실수})$ (2) $z\bar{z} = (\text{실수})$
 (3) $z = -\bar{z} \Rightarrow z$ 는 0 또는 순허수 (4) $z = \bar{z} \Rightarrow z$ 는 실수

11

$z = a + bi$ (a, b 는 실수)로 놓으면 $\bar{z} = a - bi$
 $(2 - i)z + (3 + 4i)\bar{z} = 3(z + \bar{z} + i)$ 에서
 $(2 - i)(a + bi) + (3 + 4i)(a - bi) = 3\{(a + bi) + (a - bi) + i\}$
 $(2a + b) + (-a + 2b)i + (3a + 4b) + (4a - 3b)i = 3(2a + i)$
 $(5a + 5b) + (3a - b)i = 6a + 3i$
 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
 $5a + 5b = 6a, 3a - b = 3 \quad \therefore a - 5b = 0, 3a - b = 3$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a = \frac{15}{14}, b = \frac{3}{14}$

따라서 $z = \frac{15}{14} + \frac{3}{14}i, \bar{z} = \frac{15}{14} - \frac{3}{14}i$ 이므로

$$z + \bar{z} = \left(\frac{15}{14} + \frac{3}{14}i\right) + \left(\frac{15}{14} - \frac{3}{14}i\right) = \frac{15}{7}$$

답 ⑤

12

$i + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^{2025}$
 $= (i + i^2 + i^3 + i^4) + (i^5 + i^6 + i^7 + i^8) + \dots + (i^{2021} + i^{2022} + i^{2023} + i^{2024}) + i^{2025}$
 $= (i - 1 - i + 1) + (i - 1 - i + 1) + \dots + (i - 1 - i + 1) + i$
 $= i$

답 i

13

$i + 2i^2 + 3i^3 + \dots + 51i^{51}$
 $= (i - 2 - 3i + 4) + (5i - 6 - 7i + 8) + \dots + (45i - 46 - 47i + 48) + 49i - 50 - 51i$
 $= \underbrace{(2 - 2i) + (2 - 2i) + \dots + (2 - 2i)}_{12\text{개}} - 50 - 2i$
 $= (2 - 2i) \times 12 - 50 - 2i$
 $= 24 - 24i - 50 - 2i = -26 - 26i$
 따라서 $a = -26, b = -26$ 이므로
 $a - b = -26 - (-26) = 0$

답 ③

14

$z^2 = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{2i}{2} = i$ 이므로
 $1 + z^2 + z^4 + z^6 + z^8 = 1 + z^2 + (z^2)^2 + (z^2)^3 + (z^2)^4$
 $= 1 + i + i^2 + i^3 + i^4$
 $= 1 + i - 1 - i + 1 = 1$

답 1

15

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i \text{이므로}$$

$$f(n) = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n = i^n$$

$$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+f(4) = i+i^2+i^3+i^4 = i-1-i+1=0$$

답 ③

16

$$(4-\sqrt{-3})(4+\sqrt{-3}) + (\sqrt{-6})^2 + \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{-2}}$$

$$= (4-\sqrt{3}i)(4+\sqrt{3}i) + (\sqrt{6}i)^2 + \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}i}$$

$$= 19 - 6 - \sqrt{5}i = 13 - \sqrt{5}i$$

따라서 $a=13$, $b=-\sqrt{5}$ 이므로

$$a+b^2 = 13 + (-\sqrt{5})^2 = 18$$

$$\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}i} = \frac{\sqrt{5}}{i} = \frac{\sqrt{5}i}{i^2} = -\sqrt{5}i$$

답 ④

17

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab} \text{이므로 } a < 0, b < 0$$

$$\textcircled{1} \sqrt{a^3b} = \sqrt{a^2ab} = |a|\sqrt{ab} = -a\sqrt{ab}$$

$$\textcircled{2} \sqrt{ab^2} = |b|\sqrt{a} = -b\sqrt{a}$$

$$\textcircled{3} \sqrt{a^2b^2} = |a||b| = -a \times (-b) = ab$$

$$\textcircled{4} \sqrt{\frac{b}{a^2}} = \frac{\sqrt{b}}{|a|} = \frac{\sqrt{b}}{-a} = -\frac{\sqrt{b}}{a}$$

$$\textcircled{5} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{-ai}}{\sqrt{-bi}} = \frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

따라서 옳지 않은 것은 ②이다.

답 ②

18

문제 접근하기

0이 아닌 두 실수 a, b 에 대하여 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$ 이면 $a > 0, b < 0$ 이므로
음수의 제곱근의 성질을 이용하여 $x-5, 2-x$ 의 부호를 파악한다.

$$\frac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{2-x}} = -\sqrt{\frac{x-5}{2-x}} \text{이므로}$$

$$x-5 \geq 0, 2-x < 0$$

$$\begin{aligned} \therefore |x-5| + |2-x| &= (x-5) - (2-x) \\ &= x-5-2+x \\ &= 2x-7 \end{aligned}$$

답 2x-7



이차방정식

기초를 다지는 유형

본문 057쪽

001

$$(1) 7x+3=4x-6 \text{에서}$$

$$3x = -9 \quad \therefore x = -3$$

$$(2) 5(x-2) = 2(x+3) + x \text{에서}$$

$$5x-10 = 2x+6+x$$

$$2x = 16 \quad \therefore x = 8$$

답 (1) $x = -3$ (2) $x = 8$

002

$$5(5-x) + 3x = 4 - 3(2x+1) \text{에서}$$

$$25 - 5x + 3x = 4 - 6x - 3, 4x = -24 \quad \therefore x = -6$$

따라서 $a = -6$ 이므로

$$a^2 + 2a = (-6)^2 + 2 \times (-6) = 24$$

답 ④

003

$$(1) (i) x < 2 \text{일 때}$$

$$-(x-2) = 1, -x+2=1$$

$$-x = -1 \quad \therefore x = 1$$

$$(ii) x \geq 2 \text{일 때}$$

$$x-2=1 \quad \therefore x=3$$

$$(i), (ii) \text{에서 } x=1 \text{ 또는 } x=3$$

$$(2) (i) x < -\frac{4}{3} \text{일 때}$$

$$-(3x+4) = -x+5, -3x-4 = -x+5$$

$$-2x = 9 \quad \therefore x = -\frac{9}{2}$$

$$(ii) x \geq -\frac{4}{3} \text{일 때}$$

$$3x+4 = -x+5, 4x=1 \quad \therefore x = \frac{1}{4}$$

$$(i), (ii) \text{에서 } x = -\frac{9}{2} \text{ 또는 } x = \frac{1}{4}$$

$$(3) (i) x < -3 \text{일 때}$$

$$-(x+3) = -x, -x-3 = -x$$

즉, $0 \times x = 3$ 이므로 해가 없다.

$$(ii) -3 \leq x < 0 \text{일 때}$$

$$x+3 = -x, 2x = -3 \quad \therefore x = -\frac{3}{2}$$

$$(iii) x \geq 0 \text{일 때}$$

$$x+3 = x$$

즉, $0 \times x = -3$ 이므로 해가 없다.

$$(i) \sim (iii) \text{에서 } x = -\frac{3}{2}$$

답 (1) $x=1$ 또는 $x=3$ (2) $x = -\frac{9}{2}$ 또는 $x = \frac{1}{4}$ (3) $x = -\frac{3}{2}$

|다른 풀이|

(3) $|x+3|=|x|$ 에서 $x+3=\pm x$

(i) $x+3=x$ 일 때, $0 \times x = -3$ 이므로 해가 없다.

(ii) $x+3=-x$ 일 때, $2x=-3 \quad \therefore x=-\frac{3}{2}$

(i), (ii)에서 $x=-\frac{3}{2}$

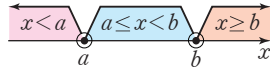
참고

절댓값 기호를 포함한 일차방정식의 풀이

절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x 의 값을 기준으로 구간을 나누어 생각한다.

$|x-a|+|x-b|=c \ (a \leq b)$ 는

$x < a$, $a \leq x < b$, $x \geq b$ 로 구간을 나누어 푼다.



004

(i) $x < -2$ 일 때

$-(x+2)-(x-1)=7$

$-x-2-x+1=7, -2x=8$

$\therefore x=-4$

(ii) $-2 \leq x < 1$ 일 때

$(x+2)-(x-1)=7$

$x+2-x+1=7$

즉, $0 \times x = 4$ 이므로 해가 없다.

(iii) $x \geq 1$ 일 때

$(x+2)+(x-1)=7$

$2x=6 \quad \therefore x=3$

(i)~(iii)에서 $x=-4$ 또는 $x=3$

따라서 $\alpha=3, \beta=-4$ 이므로

$\alpha-\beta=3-(-4)=7$

답 7

005

(1) $x^2+3x-10=0$ 에서

$(x+5)(x-2)=0 \quad \therefore x=-5$ 또는 $x=2$

(2) $2x^2-5x-3=0$ 에서

$(2x+1)(x-3)=0 \quad \therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=3$

(3) $4x^2-12x+9=0$ 에서

$(2x-3)^2=0 \quad \therefore x=\frac{3}{2}$

답 (1) $x=-5$ 또는 $x=2$ (2) $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=3$ (3) $x=\frac{3}{2}$

006

$3x^2-7x-6=0$ 에서

$(3x+2)(x-3)=0 \quad \therefore x=-\frac{2}{3}$ 또는 $x=3$

따라서 $\alpha=3, \beta=-\frac{2}{3}$ 또는 $\alpha=-\frac{2}{3}, \beta=3$ 이므로

$|\alpha-\beta|=\frac{11}{3}$

답 $\frac{11}{3}$

007

$x^2+5x+6=0$ 에서

$(x+3)(x+2)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=-2$

$4x^2+7x-2=0$ 에서

$(x+2)(4x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=\frac{1}{4}$

따라서 공통인 해는 $x=-2$ 이다.

답 $x=-2$

008

$12x^2-6x=3-x$ 에서

$12x^2-5x-3=0$

$(3x+1)(4x-3)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=\frac{3}{4}$

이때 양수인 근은 $\frac{3}{4}$ 이므로

$a=\frac{3}{4}$ ①

$x^2-2x-8=0$ 에서

$(x+2)(x-4)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=4$

이때 음수인 근은 -2 이므로

$b=-2$ ②

$\therefore a+b=\frac{3}{4}+(-2)=-\frac{5}{4}$ ③

답 $-\frac{5}{4}$

채점 기준	비율
① a 의 값을 구할 수 있다.	40%
② b 의 값을 구할 수 있다.	40%
③ $a+b$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

009

$(x \blacktriangle 2x) - (2 \blacktriangle 4x) - 3 = 0$ 에서

$(x \times 2x + x + 2x) - (2 \times 4x + 2 + 4x) - 3 = 0$

$(2x^2+3x) - (12x+2) - 3 = 0$

$2x^2-9x-5=0$

$(2x+1)(x-5)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=5$

따라서 모든 실수 x 의 값의 합은

$-\frac{1}{2}+5=\frac{9}{2}$

답 ⑤

010

(1) $x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2 \times 1}$
 $= \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$

$$(2) x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \times 2 \times 8}}{2 \times 2}$$

$$= \frac{-7 \pm \sqrt{15}i}{4}$$

$$(3) x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 1 \times (-5)}}{1}$$

$$= -1 \pm \sqrt{6}$$

$$(4) x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 3 \times 6}}{3}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{2}i}{3}$$

답 (1) $x = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$ (2) $x = \frac{-7 \pm \sqrt{15}i}{4}$

(3) $x = -1 \pm \sqrt{6}$ (4) $x = \frac{4 \pm \sqrt{2}i}{3}$

011

$$4x^2 - 2x - 3 = 0 \text{에서}$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times (-3)}}{4}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{13}}{4}$$

이때 $\alpha > \beta$ 이므로

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{13}}{4}, \beta = \frac{1 - \sqrt{13}}{4}$$

$$\therefore \alpha - \beta = \frac{1 + \sqrt{13}}{4} - \frac{1 - \sqrt{13}}{4} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

답 ⑤

012

$$3x^2 - \sqrt{2}x + 1 = 0 \text{에서}$$

$$x = \frac{-(-\sqrt{2}) \pm \sqrt{(-\sqrt{2})^2 - 4 \times 3 \times 1}}{2 \times 3}$$

$$= \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{10}i}{6}$$

답 ③

013

$$4x(x+1) - 1 = 3x - x^2 \text{에서}$$

$$4x^2 + 4x - 1 = 3x - x^2$$

$$5x^2 + x - 1 = 0$$

$$\therefore x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 5 \times (-1)}}{2 \times 5}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{10} \dots\dots\dots ①$$

따라서 $\alpha = \frac{-1 - \sqrt{21}}{10}$ 이므로 $\dots\dots\dots ②$

$$10\alpha + 1 = 10 \times \frac{-1 - \sqrt{21}}{10} + 1 = -\sqrt{21} \dots\dots\dots ③$$

답 $-\sqrt{21}$

채점 기준	비율
① 이차방정식의 해를 구할 수 있다.	50%
② α 의 값을 구할 수 있다.	20%
③ $10\alpha + 1$ 의 값을 구할 수 있다.	30%

014

$$3x^2 - 4x + a = 0 \text{에서}$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 3 \times a}}{3}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{4 - 3a}}{3} = \frac{b \pm \sqrt{31}}{3}$$

$$4 - 3a = 31, b = 2$$

$$\therefore a = -9, b = 2$$

$$a = -9, b = 2 \text{를 } bx^2 + ax + 4 = 0 \text{에 대입하면}$$

$$2x^2 - 9x + 4 = 0, (2x - 1)(x - 4) = 0$$

$$\therefore x = \frac{1}{2} \text{ 또는 } x = 4$$

답 $x = \frac{1}{2}$ 또는 $x = 4$

015

$$x^2 - x + a = 0 \text{에 } x = -5 \text{를 대입하면}$$

$$25 + 5 + a = 0 \quad \therefore a = -30$$

$$(b + 1)x^2 - bx - 18 = 0 \text{에 } x = 2 \text{를 대입하면}$$

$$4(b + 1) - 2b - 18 = 0$$

$$2b = 14 \quad \therefore b = 7$$

$$\therefore a + b = -30 + 7 = -23$$

답 ②

016

$$x^2 + kx + \sqrt{3} - 3 = 0 \text{에 } x = -1 + \sqrt{3} \text{를 대입하면}$$

$$(-1 + \sqrt{3})^2 + k(-1 + \sqrt{3}) + \sqrt{3} - 3 = 0$$

$$4 - 2\sqrt{3} + k(-1 + \sqrt{3}) + \sqrt{3} - 3 = 0$$

$$k(-1 + \sqrt{3}) = -1 + \sqrt{3}$$

$$\therefore k = 1$$

답 ④

017

$$x^2 + (m - 2)x - m + 1 = 0 \text{에 } x = 2 \text{를 대입하면}$$

$$4 + 2(m - 2) - m + 1 = 0$$

$$\therefore m = -1 \dots\dots\dots ①$$

$$m = -1 \text{을 } x^2 + (m - 2)x - m + 1 = 0 \text{에 대입하면}$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0, (x - 1)(x - 2) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 2 \dots\dots\dots ②$$

$$\text{따라서 다른 한 근은 } 1 \text{이다.} \dots\dots\dots ③$$

답 1

채점 기준	비율
① m 의 값을 구할 수 있다.	40%
② m 의 값을 대입한 방정식 $x^2 + (m - 2)x - m + 1 = 0$ 의 근을 구할 수 있다.	40%
③ 다른 한 근을 구할 수 있다.	20%

018

$$2x^2 - (k + 3)x + k - 1 = 0 \text{에 } x = k + 1 \text{를 대입하면}$$

$$2(k + 1)^2 - (k + 3)(k + 1) + k - 1 = 0$$

$$2(k^2 + 2k + 1) - (k^2 + 4k + 3) + k - 1 = 0$$

$$k^2+k-2=0, (k+2)(k-1)=0$$

$$\therefore k=-2 \text{ 또는 } k=1$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 합은

$$-2+1=-1$$

답 ③

019

$$x^2+k(2p-3)x-(p^2-2)k+q+2=0 \text{에 } x=1 \text{을 대입하면}$$

$$1+k(2p-3)-(p^2-2)k+q+2=0$$

k 에 대하여 정리하면

$$-(p^2-2p+1)k+q+3=0$$

위의 등식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$$p^2-2p+1=0, q+3=0$$

$$p^2-2p+1=0 \text{에서 } (p-1)^2=0 \quad \therefore p=1$$

$$q+3=0 \text{에서 } q=-3$$

$$\therefore p+q=1+(-3)=-2$$

답 ②

020

(i) $x < 0$ 일 때

$$x^2-4 \times (-x)-5=0$$

$$x^2+4x-5=0$$

$$(x+5)(x-1)=0$$

$$\therefore x=-5 \text{ 또는 } x=1$$

그런데 $x < 0$ 이므로 $x=-5$

(ii) $x \geq 0$ 일 때

$$x^2-4x-5=0$$

$$(x+1)(x-5)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=5$$

그런데 $x \geq 0$ 이므로 $x=5$

(i), (ii)에서 $x=-5$ 또는 $x=5$

답 $x=-5$ 또는 $x=5$

021

(i) $x < \frac{1}{2}$ 일 때

$$x^2-(2x-1)=2, x^2-2x-1=0$$

$$\therefore x=1 \pm \sqrt{2}$$

그런데 $x < \frac{1}{2}$ 이므로 $x=1-\sqrt{2}$

(ii) $x \geq \frac{1}{2}$ 일 때

$$x^2+(2x-1)=2, x^2+2x-3=0$$

$$(x+3)(x-1)=0 \quad \therefore x=-3 \text{ 또는 } x=1$$

그런데 $x \geq \frac{1}{2}$ 이므로 $x=1$

(i), (ii)에서 $x=1-\sqrt{2}$ 또는 $x=1$

따라서 $\alpha=1, \beta=1-\sqrt{2}$ ($\because \alpha > \beta$)이므로

$$\alpha\beta=1-\sqrt{2}$$

답 ①

022

반지름의 길이를 x cm만큼 늘였다고 하면 처음 원의 반지름의 길이가 4 cm이므로

$$\pi(4+x)^2=\pi \times 4^2+20\pi, x^2+8x-20=0$$

$$(x+10)(x-2)=0 \quad \therefore x=-10 \text{ 또는 } x=2$$

이때 $x > 0$ 이므로 $x=2$

따라서 반지름의 길이를 2 cm만큼 늘였다.

답 2 cm

023

변 BQ의 길이를 x cm라고 하면

$$\triangle PQC = \frac{1}{2} \times (8-x) \times (10-x) = 24 \quad \text{①}$$

$$x^2-18x+32=0, (x-2)(x-16)=0$$

$$\therefore x=2 \text{ 또는 } x=16 \quad \text{②}$$

이때 $0 < x < 8$ 이므로 $x=2$ ($x > 0, 8-x > 0, 10-x > 0$ 에서 $0 < x < 8$)

따라서 변 BQ의 길이는 2 cm이다. ③

답 2 cm

채점 기준	비율
① 이차방정식을 세울 수 있다.	40 %
② 이차방정식을 풀 수 있다.	40 %
③ 변 BQ의 길이를 구할 수 있다.	20 %

024

잔디가 깔리지 않는 땅의 넓이가 378 m²이므로

$$(30-x)(20-2x)=378, 2x^2-80x+222=0$$

$$x^2-40x+111=0, (x-3)(x-37)=0$$

$$\therefore x=3 \text{ 또는 } x=37$$

이때 $0 < x < 10$ 이므로 $x=3$

($x > 0, 30-x > 0, 20-2x > 0$ 에서 $0 < x < 10$)

답 3

025

처음 직사각형 모양의 종이의 가로 길이를 x cm라고 하면 세로 길이는 $(x-5)$ cm이다. 직육면체 모양의 상자의 밑면의 가로 길이는 $(x-4)$ cm, 세로 길이는 $(x-9)$ cm, 높이는 2 cm 이고 부피는 300 cm³이므로

$$(x-4) \times (x-9) \times 2 = 300, x^2-13x-114=0$$

$$(x+6)(x-19)=0 \quad \therefore x=-6 \text{ 또는 } x=19$$

이때 $x > 9$ 이므로 $x=19$

따라서 처음 직사각형 모양의 종이의 가로 길이는 19 cm이다.

답 ③

026

이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$$\neg, D=5^2-4 \times 1 \times (-6)=49 > 0$$

따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$$\cup, D=(-3)^2-4 \times 5 \times 2=-31 < 0$$

따라서 서로 다른 두 허근을 갖는다.

$$\text{ㄷ. } \frac{D}{4} = 3^2 - 1 \times 9 = 0$$

따라서 중근을 갖는다.

$$\text{ㄹ. } D = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 17 > 0$$

따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$$\text{ㅁ. } D = (-7)^2 - 4 \times 3 \times 6 = -23 < 0$$

따라서 서로 다른 두 허근을 갖는다.

$$\text{ㅂ. } \frac{D}{4} = (-6)^2 - 4 \times 9 = 0$$

따라서 중근을 갖는다.

답 (1) ㄱ, ㄹ (2) ㄷ, ㅂ (3) ㄴ, ㅁ

027

이차방정식 $x^2 + 3x + k + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$D = 3^2 - 4 \times 1 \times (k + 1) = -4k + 5$$

$$(1) D = -4k + 5 > 0 \quad \therefore k < \frac{5}{4}$$

$$(2) D = -4k + 5 = 0 \quad \therefore k = \frac{5}{4}$$

$$(3) D = -4k + 5 < 0 \quad \therefore k > \frac{5}{4}$$

$$(4) D = -4k + 5 \geq 0 \quad \therefore k \leq \frac{5}{4}$$

답 (1) $k < \frac{5}{4}$ (2) $k = \frac{5}{4}$ (3) $k > \frac{5}{4}$ (4) $k \leq \frac{5}{4}$

028

이차방정식 $2x^2 - 8x + m - 5 = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (-4)^2 - 2(m - 5) > 0$$

$$-2m + 26 > 0$$

$$\therefore m < 13$$

따라서 정수 m 의 최댓값은 12이다.

답 ③

029

이차방정식 $x^2 - 2(k + 1)x + k^2 + 9 = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = \{-(k + 1)\}^2 - 1 \times (k^2 + 9) < 0$$

$$2k - 8 < 0 \quad \therefore k < 4$$

따라서 자연수 k 의 값은 1, 2, 3이므로 그 합은

$$1 + 2 + 3 = 6$$

답 6

030

이차방정식 $mx^2 + 2(3 - m)x + m = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (3 - m)^2 - m^2 \geq 0$$

$$-6m + 9 \geq 0 \quad \therefore m \leq \frac{3}{2}$$

이때 $m \neq 0$ 이므로 $\rightarrow$ 이차방정식의 이차항의 계수가 0이 아니어야
하므로 $m \neq 0$ 이어야 한다.

$$m < 0 \text{ 또는 } 0 < m \leq \frac{3}{2}$$

답 $m < 0$ 또는 $0 < m \leq \frac{3}{2}$

034 정답과 풀이

031

이차방정식 $x^2 + ax + 7 - 3a = 0$ 의 판별식을 D_1 이라고 하면

$$D_1 = a^2 - 4 \times 1 \times (7 - 3a) = 0$$

$$a^2 + 12a - 28 = 0, (a - 2)(a + 14) = 0$$

$$\therefore a = 2 (\because a > 0) \quad \text{①}$$

$a = 2$ 를 $2x^2 - ax + a + 3 = 0$ 에 대입하면

$$2x^2 - 2x + 5 = 0 \quad \text{②}$$

②의 판별식을 D_2 라고 하면

$$\frac{D_2}{4} = (-1)^2 - 2 \times 5 = -9 < 0 \quad \text{③}$$

따라서 ②는 서로 다른 두 허근을 갖는다. ③

답 서로 다른 두 허근을 갖는다.

채점 기준	비율
① a 의 값을 구할 수 있다.	40 %
② 이차방정식 $2x^2 - ax + a + 3 = 0$ 의 판별식의 부호를 조사할 수 있다.	40 %
③ 이차방정식 $2x^2 - ax + a + 3 = 0$ 의 근을 판별할 수 있다.	20 %

032

이차방정식 $x^2 - 2(m + a)x + m^2 + m + b = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = \{-(m + a)\}^2 - (m^2 + m + b) = 0$$

$$m^2 + 2am + a^2 - m^2 - m - b = 0$$

m 에 대하여 정리하면

$$(2a - 1)m + a^2 - b = 0$$

위의 등식이 m 의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$$2a - 1 = 0, a^2 - b = 0$$

$$\therefore a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{4}$$

$$\therefore 12(a + b) = 12 \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = 6 + 3 = 9$$

답 ①

033

$$(1) \alpha + \beta = -\frac{-3}{1} = 3$$

$$(2) \alpha\beta = \frac{-6}{1} = -6$$

$$(3) \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{3}{-6} = -\frac{1}{2}$$

$$(4) (\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\ = 3^2 - 4 \times (-6) = 33$$

$$\therefore \alpha - \beta = \sqrt{33} (\because \alpha > \beta)$$

답 (1) 3 (2) -6 (3) $-\frac{1}{2}$ (4) $\sqrt{33}$

034

이차방정식 $3x^2 + 9x + 2 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -3, \alpha\beta = \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned}\therefore \alpha^3 + \beta^3 &= (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) \\ &= (-3)^3 - 3 \times \frac{2}{3} \times (-3) \\ &= -21\end{aligned}$$

답 -21

035

이차방정식 $2x^2 + 5x + 4 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= -\frac{5}{2}, \alpha\beta = 2 \\ \therefore \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} &= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} \\ &= \frac{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 - 2 \times 2}{2} = \frac{9}{8}\end{aligned}$$

답 ①

036

$$\begin{aligned}\textcircled{1} \alpha + \beta &= -\frac{2}{3} \\ \textcircled{2} \alpha\beta &= \frac{-3}{3} = -1 \\ \textcircled{3} \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 2 \times (-1) = \frac{22}{9} \\ \textcircled{4} (\alpha - \beta)^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 4 \times (-1) = \frac{40}{9} \\ \textcircled{5} \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} &= \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

037

이차방정식 $x^2 - 10x + 1 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= 10, \alpha\beta = 1 \\ \alpha > 0, \beta > 0 \text{이므로} &\rightarrow \text{판별식 } D > 0 \text{이고, 두 근의 합과 곱이 모두 양수이므로} \\ &\quad \text{두 근은 모두 양수이다.} \\ (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 &= \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} \\ &= 10 + 2 \times 1 \\ &= 12 \\ \therefore \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} &= 2\sqrt{3} \quad (\because \sqrt{\alpha} > 0, \sqrt{\beta} > 0)\end{aligned}$$

답 ④

038

이차방정식 $x^2 + 2x + 3 = 0$ 의 서로 다른 두 근이 α, β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= -2, \alpha\beta = 3 \\ \text{또, } \alpha, \beta \text{는 이차방정식 } x^2 + 2x + 3 &= 0 \text{의 근이므로} \\ \alpha^2 + 2\alpha + 3 &= 0, \beta^2 + 2\beta + 3 = 0 \\ \therefore \alpha^2 + 3\alpha + 3 &= \alpha, \beta^2 + 3\beta + 3 = \beta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{1}{\alpha^2 + 3\alpha + 3} + \frac{1}{\beta^2 + 3\beta + 3} &= \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \\ &= \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = -\frac{2}{3}\end{aligned}$$

답 ③

039

이차방정식 $x^2 - x + 6 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= 1, \alpha\beta = 6 \quad \text{..... ①} \\ \text{또, } \alpha \text{는 이차방정식 } x^2 - x + 6 &= 0 \text{의 근이므로} \\ \alpha^2 - \alpha + 6 &= 0 \\ \therefore \alpha^2 - \alpha &= -6 \quad \text{..... ②} \\ \therefore \alpha^3 - \alpha^2 + 2\alpha\beta - 6\beta &= \alpha(\alpha^2 - \alpha) + 2\alpha\beta - 6\beta \\ &= -6\alpha + 2\alpha\beta - 6\beta \\ &= -6(\alpha + \beta) + 2\alpha\beta \\ &= -6 \times 1 + 2 \times 6 = 6 \quad \text{..... ③}\end{aligned}$$

답 6

채점 기준	비율
① $\alpha + \beta, \alpha\beta$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %
② $\alpha^2 - \alpha$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ $\alpha^3 - \alpha^2 + 2\alpha\beta - 6\beta$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %

040

이차방정식 $x^2 - 4x - 3 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= 4, \alpha\beta = -3 \\ \text{또, } \alpha, \beta \text{는 이차방정식 } x^2 - 4x - 3 &= 0 \text{의 근이므로} \\ \alpha^2 - 4\alpha - 3 &= 0 \text{에서 } \alpha^2 - 3\alpha = \alpha + 3 \\ \beta^2 - 4\beta - 3 &= 0 \text{에서 } \beta^2 - 3\beta = \beta + 3 \\ \therefore (2\alpha^2 - 6\alpha - 2)(2\beta^2 - 6\beta - 2) &= \{2(\alpha^2 - 3\alpha) - 2\} \{2(\beta^2 - 3\beta) - 2\} \\ &= \{2(\alpha + 3) - 2\} \{2(\beta + 3) - 2\} \\ &= (2\alpha + 4)(2\beta + 4) \\ &= 4\alpha\beta + 8(\alpha + \beta) + 16 \\ &= 4 \times (-3) + 8 \times 4 + 16 = 36\end{aligned}$$

답 ⑤

041

이차방정식 $x^2 - 8kx + 9 = 0$ 의 두 근을 $\alpha, 3\alpha$ ($\alpha \neq 0$)로 놓으면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}\alpha + 3\alpha &= 8k \quad \text{..... ㉠} \\ \alpha \times 3\alpha &= 9 \quad \text{..... ㉡} \\ \text{㉡에서 } 3\alpha^2 &= 9 \quad \therefore \alpha = \pm\sqrt{3} \\ \alpha = \pm\sqrt{3} \text{을 ㉠에 대입하면} \\ \pm\sqrt{3} \pm 3\sqrt{3} &= 8k \quad (\text{복호동순}) \\ \pm 4\sqrt{3} &= 8k \quad \therefore k = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

답 ①

참고

두 근의 조건이 주어진 이차방정식

이차방정식의 두 근에 대한 조건이 주어진 경우 두 근을 다음과 같이 놓고 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

- (1) 두 근의 차가 $k \Rightarrow \alpha, \alpha+k$
- (2) 두 근의 비가 $m:n \Rightarrow m\alpha, n\alpha (\alpha \neq 0)$
- (3) 한 근이 다른 근의 k 배 $\Rightarrow \alpha, k\alpha (\alpha \neq 0)$
- (4) 두 근이 연속인 정수 $\Rightarrow \alpha, \alpha+1$ (α 는 정수)

042

이차방정식 $x^2 - 2(k-2)x + k^2 = 0$ 의 두 근을 $\alpha, \alpha+2$ 로 놓으면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + (\alpha+2) = 2(k-2) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\alpha(\alpha+2) = k^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } 2\alpha + 2 = 2k - 4, 2\alpha = 2k - 6$$

$$\therefore \alpha = k - 3$$

$\alpha = k - 3$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$(k-3)(k-1) = k^2, k^2 - 4k + 3 = k^2$$

$$-4k + 3 = 0 \quad \therefore k = \frac{3}{4}$$

답 ③

043

이차방정식 $x^2 + 2x + k = 0$ 의 서로 다른 두 근이 α, β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -2, \alpha\beta = k$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 8 \text{에서}$$

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (-2)^2 - 2k \\ &= -2k + 4 = 8 \end{aligned}$$

$$\therefore k = -2$$

답 ④

참고

이차방정식의 두 근 α, β 에 대한 식의 값이 주어진 경우 주어진 식을 $\alpha + \beta, \alpha\beta$ 에 대한 식으로 변형한 후 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 미정 계수를 구한다.

044

이차방정식 $x^2 - (k-2)x + k + 6 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = k - 2, \alpha\beta = k + 6$$

$$\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \alpha + \beta = 10 \text{에서}$$

$$\alpha\beta(\alpha + \beta) + \alpha + \beta = 10, (\alpha + \beta)(\alpha\beta + 1) = 10$$

$$(k-2)(k+6+1) = 10, (k-2)(k+7) = 10$$

$$k^2 + 5k - 24 = 0, (k+8)(k-3) = 0$$

$$\therefore k = 3 (\because k \text{는 자연수})$$

답 3

045

$$(1) (\text{두 근의 합}) = -3 + 2 = -1$$

$$(\text{두 근의 곱}) = -3 \times 2 = -6$$

따라서 구하는 이차방정식은 $x^2 + x - 6 = 0$

$$(2) (\text{두 근의 합}) = (1 - \sqrt{3}) + (1 + \sqrt{3}) = 2$$

$$(\text{두 근의 곱}) = (1 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3}) = -2$$

따라서 구하는 이차방정식은 $x^2 - 2x - 2 = 0$

$$(3) (\text{두 근의 합}) = (-2 + i) + (-2 - i) = -4$$

$$(\text{두 근의 곱}) = (-2 + i)(-2 - i) = 5$$

따라서 구하는 이차방정식은 $x^2 + 4x + 5 = 0$

$$\text{답} (1) x^2 + x - 6 = 0 \quad (2) x^2 - 2x - 2 = 0 \quad (3) x^2 + 4x + 5 = 0$$

046

$$(1) (\text{두 근의 합}) = -1 + \frac{2}{5} = -\frac{3}{5}$$

$$(\text{두 근의 곱}) = -1 \times \frac{2}{5} = -\frac{2}{5}$$

따라서 두 수 $-1, \frac{2}{5}$ 를 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 5인 이차방정식은

$$5\left(x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{2}{5}\right) = 0$$

$$\therefore 5x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$(2) (\text{두 근의 합}) = \frac{1}{3} + \frac{3}{2} = \frac{11}{6}$$

$$(\text{두 근의 곱}) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

따라서 두 수 $\frac{1}{3}, \frac{3}{2}$ 를 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 6인 이차방정식은

$$6\left(x^2 - \frac{11}{6}x + \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\therefore 6x^2 - 11x + 3 = 0$$

$$\text{답} (1) 5x^2 + 3x - 2 = 0 \quad (2) 6x^2 - 11x + 3 = 0$$

047

이차방정식 $2x^2 + 8x + 3 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -4, \alpha\beta = \frac{3}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\therefore \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{-4}{\frac{3}{2}} = -\frac{8}{3}$$

$$\frac{1}{\alpha} \times \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

따라서 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ 을 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 3인 이차방정식은

$$3\left(x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{2}{3}\right) = 0$$

$$\therefore 3x^2 + 8x + 2 = 0$$

따라서 $a = 8, b = 2$ 이므로

$$b - a = 2 - 8 = -6 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

답 -6

채점 기준	비율
① $\alpha + \beta, \alpha\beta$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %
② $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\alpha} \times \frac{1}{\beta}$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ $b - a$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %

048

이차방정식 $x^2-5x+4=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=5, \alpha\beta=4$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} &= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} \\ &= \frac{5^2 - 2 \times 4}{4} = \frac{17}{4}\end{aligned}$$

$$\frac{\beta}{\alpha} \times \frac{\alpha}{\beta} = 1$$

따라서 $\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\alpha}{\beta}$ 를 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 4인 이차방정식은

$$4\left(x^2 - \frac{17}{4}x + 1\right) = 0$$

$$\therefore 4x^2 - 17x + 4 = 0$$

답 ②

|다른 풀이|

이차방정식 $x^2-5x+4=0$ 에서

$$(x-1)(x-4)=0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=4$$

즉, $\alpha=1, \beta=4$ 또는 $\alpha=4, \beta=1$ 이므로

$$\frac{\beta}{\alpha}=4, \frac{\alpha}{\beta}=\frac{1}{4} \text{ 또는 } \frac{\beta}{\alpha}=\frac{1}{4}, \frac{\alpha}{\beta}=4$$

이때

$$(\text{두 근의 합}) = 4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$$

$$(\text{두 근의 곱}) = 4 \times \frac{1}{4} = 1$$

이므로 두 수 4, $\frac{1}{4}$ 을 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 4인 이차방정식은

$$4\left(x^2 - \frac{17}{4}x + 1\right) = 0$$

$$\therefore 4x^2 - 17x + 4 = 0$$

049

(1) 이차방정식 $x^2+x-4=0$ 에서

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-4)}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\begin{aligned}\therefore x^2+x-4 &= \left(x - \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)\left(x - \frac{-1-\sqrt{17}}{2}\right) \\ &= \left(x + \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)\left(x + \frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)\end{aligned}$$

(2) 이차방정식 $x^2+25=0$ 에서

$$x^2 = -25 \quad \therefore x = \pm 5i$$

$$\therefore x^2+25 = (x-5i)(x+5i)$$

(3) 이차방정식 $3x^2-2x+1=0$ 에서

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 3 \times 1}}{3} = \frac{1 \pm \sqrt{2}i}{3}$$

$$\therefore 3x^2-2x+1 = 3\left(x - \frac{1+\sqrt{2}i}{3}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{2}i}{3}\right)$$

$$\text{답 (1)} \left(x + \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)\left(x + \frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)$$

$$(2) (x-5i)(x+5i)$$

$$(3) 3\left(x - \frac{1+\sqrt{2}i}{3}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{2}i}{3}\right)$$

050

이차방정식 $x^2+4x+10=0$ 에서

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 1 \times 10}}{1} = -2 \pm \sqrt{6}i$$

$$\begin{aligned}\therefore x^2+4x+10 &= \{x - (-2+\sqrt{6}i)\} \{x - (-2-\sqrt{6}i)\} \\ &= (x+2-\sqrt{6}i)(x+2+\sqrt{6}i)\end{aligned}$$

따라서 주어진 이차식의 인수인 것은 ⑤이다.

답 ⑤

051

이차방정식 $x^2-ax+b=0$ 의 한 근이

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = 2+\sqrt{3}$$

이고 계수가 모두 유리수이므로 다른 한 근은 $2-\sqrt{3}$ 이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(2+\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3}) = a \quad \therefore a=4$$

$$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = b \quad \therefore b=1$$

$$\therefore ab = 4 \times 1 = 4$$

답 4

052

이차방정식 $x^2-6x+11=0$ 의 서로 다른 두 허근이 α, β 이고 계수가 모두 실수이므로

$$\bar{\alpha} = \beta, \bar{\beta} = \alpha$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 6, \alpha\beta = 11$$

$$\begin{aligned}\therefore 11\left(\frac{\bar{\alpha}}{\alpha} + \frac{\bar{\beta}}{\beta}\right) &= 11\left(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}\right) = 11 \times \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} \\ &= 11 \times \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} \\ &= 11 \times \frac{6^2 - 2 \times 11}{11} \\ &= 36 - 22 = 14\end{aligned}$$

답 14

053

이차방정식 $x^2+2ax+b=0$ 의 한 근이 $3-ai$ 이고 계수가 모두 실수이므로 다른 한 근은 $3+ai$ 이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(3-ai) + (3+ai) = -2a \quad \therefore a = -3$$

$$(3-ai)(3+ai) = b, (3+3i)(3-3i) = b \quad \therefore b = 18$$

$$\therefore b-a = 18 - (-3) = 21$$

답 ③

|다른 풀이|

이차방정식 $x^2+2ax+b=0$ 의 한 근이 $3-ai$ 이므로

$$(3-ai)^2 + 2a(3-ai) + b = 0$$

$$9 - 6ai - a^2 + 6a - 2a^2i + b = 0$$

$$(-a^2 + 6a + b + 9) + (-2a^2 - 6a)i = 0$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$-a^2 + 6a + b + 9 = 0, -2a^2 - 6a = 0$$

$$\begin{aligned}
 & -2a^2 - 6a = 0 \text{에서 } a^2 + 3a = 0 \\
 & a(a+3) = 0 \quad \therefore a = -3 \quad (\because a \neq 0) \\
 & -a^2 + 6a + b + 9 = 0 \text{에서 } -9 - 18 + b + 9 = 0 \\
 & \therefore b = 18 \\
 & \therefore b - a = 18 - (-3) = 21
 \end{aligned}$$

054

이차방정식 $x^2 + mx + n = 0$ 의 한 근이 $-3 + 2i$ 이고 계수가 모두 실수이므로 다른 한 근은 $-3 - 2i$ 이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(-3 + 2i) + (-3 - 2i) = -m \quad \therefore m = 6$$

$$(-3 + 2i) (-3 - 2i) = n \quad \therefore n = 13$$

$$x^2 - nx + m = 0 \text{에서 } x^2 - 13x + 6 = 0$$

$$\begin{aligned}
 \therefore x &= \frac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \times 1 \times 6}}{2 \times 1} \\
 &= \frac{13 \pm \sqrt{145}}{2}
 \end{aligned}$$

$$\text{답 } x = \frac{13 \pm \sqrt{145}}{2}$$

055

이차방정식 $x^2 + (m+n)x - mn = 0$ 의 한 근이 $3 + \sqrt{2}i$ 이고 계수가 모두 실수이므로 다른 한 근은 $3 - \sqrt{2}i$ 이다. ①

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(3 + \sqrt{2}i) + (3 - \sqrt{2}i) = -(m+n)$$

$$(3 + \sqrt{2}i)(3 - \sqrt{2}i) = -mn$$

$$\text{즉, } m+n = -6, mn = -11 \text{이므로} \dots\dots\dots ②$$

$$\begin{aligned}
 m^2 + n^2 &= (m+n)^2 - 2mn \\
 &= (-6)^2 - 2 \times (-11) = 58 \dots\dots\dots ③
 \end{aligned}$$

답 58

채점 기준	비율
① 다른 한 근을 구할 수 있다.	20%
② $m+n, mn$ 의 값을 구할 수 있다.	40%
③ m^2+n^2 의 값을 구할 수 있다.	40%

실력을 높이는 연습 문제

분문 069쪽

01

(i) $x < -2$ 일 때

$$-(x+2) - (x-3) = 2x, \quad -x-2-x+3=2x$$

$$-4x = -1 \quad \therefore x = \frac{1}{4}$$

이때 $x = \frac{1}{4}$ 은 $x < -2$ 에 속하지 않으므로 해가 아니다.

(ii) $-2 \leq x < 3$ 일 때

$$(x+2) - (x-3) = 2x, \quad x+2-x+3=2x$$

$$-2x = -5 \quad \therefore x = \frac{5}{2}$$

(iii) $x \geq 3$ 일 때

$$(x+2) + (x-3) = 2x$$

즉, $0 \times x = 1$ 이므로 해가 없다.

$$(i) \sim (iii) \text{에서 } x = \frac{5}{2}$$

답 ⑤

02

$$2x^2 + 13x - 24 = 0 \text{에서}$$

$$(x+8)(2x-3) = 0 \quad \therefore x = -8 \text{ 또는 } x = \frac{3}{2}$$

$$\text{이때 큰 근은 } \frac{3}{2} \text{이므로 } a = \frac{3}{2}$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0 \text{에서}$$

$$(x-2)(x-5) = 0 \quad \therefore x = 2 \text{ 또는 } x = 5$$

이때 작은 근은 2이므로 $b = 2$

$$\therefore a+b = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}$$

답 ②

03

$$2x(x-1) = x^2 + 3 \text{에서 } 2x^2 - 2x = x^2 + 3$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0, \quad (x+1)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

따라서 두 근 사이에 있는 정수는 0, 1, 2이므로 그 합은 $0+1+2=3$

답 3

04

$$2x^2 - 4x + 3 = 0 \text{에서}$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 2 \times 3}}{2}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{2}i}{2} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

따라서 $a=1, b=2$ 이므로

$$3a-b = 3 \times 1 - 2 = 1$$

답 ④

05

$$Ax^2 + 3x - 2 = 0 \text{에서}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times A \times (-2)}}{2A} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+8A}}{2A}$$

따라서 $2A=8, 9+8A=B$ 이므로

$$A=4, B=41$$

$$\therefore AB = 4 \times 41 = 164$$

답 164

06

이차방정식 $2x^2 - 2x + 1 = 0$ 의 한 근이 α 이므로

$$2\alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0, \quad \alpha^2 - \alpha + \frac{1}{2} = 0$$

$$\therefore \alpha^2 = \alpha - \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}\therefore a^4 - a^2 + a &= \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - a^2 + a \\ &= \left(a^2 - a + \frac{1}{4}\right) - a^2 + a = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

답 ①

| 다른 풀이 |

이차방정식 $2x^2 - 2x + 1 = 0$ 에서

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 2 \times 1}}{2} = \frac{1 \pm i}{2}$$

이므로 $\alpha = \frac{1+i}{2}$ 로 놓으면

$$\alpha^2 = \left(\frac{1+i}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}i$$

$$\begin{aligned}\therefore a^4 - a^2 + a &= \left(\frac{1}{2}i\right)^2 - \frac{1}{2}i + \frac{1+i}{2} \\ &= -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}i + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

$\alpha = \frac{1-i}{2}$ 인 경우도 같은 결과를 얻는다.

07

$x^2 - 2x - 24 = 0$ 에서

$$(x+4)(x-6) = 0 \quad \therefore x = -4 \text{ 또는 } x = 6$$

양수인 근은 6이므로 $x^2 - ax + 6 = 0$ 에 $x = 6$ 을 대입하면

$$36 - 6a + 6 = 0, 42 - 6a = 0 \quad \therefore a = 7$$

답 ③

08

$(a-1)x^2 - (a^2 - 3a + 2)x + 2(a-1) = 0$ 에 $x=1$ 을 대입하면

$$a-1 - (a^2 - 3a + 2) + 2(a-1) = 0$$

$$-a^2 + 6a - 5 = 0, a^2 - 6a + 5 = 0$$

$$(a-1)(a-5) = 0 \quad \therefore a = 1 \text{ 또는 } a = 5$$

이때 $a=1$ 이면 $(a-1)x^2 - (a^2 - 3a + 2)x + 2(a-1) = 0$ 이 이차방정식이 아니므로

$$a = 5$$

$(a-1)x^2 - (a^2 - 3a + 2)x + 2(a-1) = 0$ 에 $a=5$ 를 대입하면

$$4x^2 - 12x + 8 = 0, x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(x-1)(x-2) = 0 \quad \therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 2$$

따라서 다른 한 근은 2이다.

답 2

09

$x^2 + 2kx + k - 4 = 0$ 에 $x = -3$ 을 대입하면

$$9 - 6k + k - 4 = 0$$

$$-5k + 5 = 0 \quad \therefore k = 1$$

$x^2 + 2kx + k - 4 = 0$ 에 $k=1$ 을 대입하면

$$x^2 + 2x - 3 = 0, (x+3)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 1$$

$$\therefore a = 1$$

$$\therefore a + k = 1 + 1 = 2$$

답 2

10

(i) $x < 1$ 일 때

$$x^2 - 3x + 2 = -(x-1)$$

$$x^2 - 3x + 2 = -x + 1$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0, (x-1)^2 = 0$$

$$\therefore x = 1$$

이때 $x=1$ 은 $x < 1$ 에 속하지 않으므로 해가 아니다.

(ii) $x \geq 1$ 일 때

$$x^2 - 3x + 2 = x - 1$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0, (x-1)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 3$$

그런데 $x \geq 1$ 이므로 $x = 1$ 또는 $x = 3$

(i), (ii)에서 $x = 1$ 또는 $x = 3$

답 ⑤

11

올해 늘어난  모양의 밭의 넓이가 500 m²이므로

$$(10+x)(10+x-10) - 10 \times 10 = 500$$

$$x(10+x) - 100 = 500$$

$$x^2 + 10x - 600 = 0$$

$$(x+30)(x-20) = 0$$

$$\therefore x = -30 \text{ 또는 } x = 20$$

이때 $x > 10$ 이므로 $x = 20$

답 ①

12

문제 접근하기

물건의 가격을 a 원, 이때의 판매량을 b 개로 놓고 가격 인상 전과 후의 매출액에 대한 식을 세운다.

이때 (매출액) = (상품의 가격) $\times$ (판매량)임을 이용한다.

상품의 가격을 a 원, 이때의 판매량을 b 개라고 하면

$$ab = a\left(1 + \frac{4x}{100}\right) \times b\left(1 - \frac{2x}{100}\right)$$

$$10000 = (100 + 4x)(100 - 2x)$$

$$10000 = 10000 + 200x - 8x^2$$

$$x^2 - 25x = 0, x(x-25) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 25$$

이때 $x > 0$ 이므로 $x = 25$

답 ④

13

이차방정식 $x^2 + kx + 3 - k = 0$ 의 판별식을 D_1 이라고 하면

$$D_1 = k^2 - 4(3 - k) = 0$$

$$k^2 + 4k - 12 = 0, (k+6)(k-2) = 0$$

$$\therefore k = -6 \text{ 또는 } k = 2$$

..... ㉠

이차방정식 $x^2 + 4x - k = 0$ 의 판별식을 D_2 라고 하면

$$\frac{D_2}{4} = 2^2 - (-k) < 0$$

$$4 + k < 0 \quad \therefore k < -4$$

..... ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $k = -6$

답 ②

14

이차방정식 $x^2-2ax+a^2-3a+18=0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4}=(-a)^2-(a^2-3a+18)<0$$

$$3a-18<0 \quad \therefore a<6$$

따라서 자연수 a 의 값은 1, 2, 3, 4, 5이므로 아닌 것은 ⑤이다.

답 ⑤

15

이차방정식 $2x^2-(k-3)x+k-3=0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$D=\{-(k-3)\}^2-4\times 2\times (k-3)=0$$

$$k^2-14k+33=0, (k-3)(k-11)=0$$

$$\therefore k=3 \text{ 또는 } k=11$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 합은

$$3+11=14$$

답 ⑤

참고

이차식이 완전제곱식이 되는 조건

이차식 ax^2+bx+c 가 완전제곱식이다.

→ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 이 중근을 갖는다.

→ 판별식 D 에 대하여 $D=0$ 이다.

16

이차방정식 $x^2+5x+2=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-5, \alpha\beta=2$$

$$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(-5)^2-4\times 2=17 \text{ 이므로}$$

$$\alpha-\beta=\sqrt{17} \quad (\because \alpha>\beta)$$

$$\therefore \frac{\alpha^2}{\beta}-\frac{\beta^2}{\alpha}=\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha-\beta)^3+3\alpha\beta(\alpha-\beta)}{\alpha\beta}$$

$$=\frac{(\sqrt{17})^3+3\times 2\times \sqrt{17}}{2}=\frac{23\sqrt{17}}{2}$$

답 ⑤

17

이차방정식 $x^2-mx+n=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=m, \alpha\beta=n \quad \dots\dots\dots \textcircled{A}$$

이차방정식 $x^2+12x-4=0$ 의 두 근이 $\alpha+\beta, \alpha\beta$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\alpha+\beta)+\alpha\beta=-12, (\alpha+\beta)\alpha\beta=-4 \quad \dots\dots\dots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A} \text{에 } \textcircled{B} \text{을 대입하면 } m+n=-12, mn=-4$$

$$\therefore m+n-mn=-12-(-4)=-8$$

답 -8

18

이차방정식 $x^2-5(m-1)x-16m=0$ 의 두 근을 $\alpha, 4\alpha$ ($\alpha \neq 0$)로 놓으면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+4\alpha=5(m-1) \quad \dots\dots\dots \textcircled{A}$$

$$\alpha \times 4\alpha=-16m \quad \dots\dots\dots \textcircled{B}$$

⑦에서

$$5\alpha=5(m-1) \quad \therefore \alpha=m-1$$

$\alpha=m-1$ 을 ⑥에 대입하면

$$4(m-1)^2=-16m, m^2+2m+1=0$$

$$(m+1)^2=0 \quad \therefore m=-1$$

답 ②

19

이차방정식 $x^2-3kx+20=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=3k, \alpha\beta=20$$

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{9}{20} \text{ 에서}$$

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{3k}{20}=\frac{9}{20}$$

$$3k=9 \quad \therefore k=3$$

답 ③

20

문제 접근하기

이차방정식 $f(x)=0$ 의 두 근을 α, β 라고 하면 $f(\alpha)=0, f(\beta)=0$ 이므로 $f(2x+1)=0$ 을 만족시키는 x 의 값은 $2x+1=\alpha$ 또는 $2x+1=\beta$ 를 만족시킨다.

이차방정식 $f(x)=0$ 의 두 근을 α, β 라고 하면

$$\alpha+\beta=4 \text{ 이고 } f(\alpha)=0, f(\beta)=0$$

이때 $f(2x+1)=0$ 을 만족시키는 x 의 값은

$$2x+1=\alpha \text{ 또는 } 2x+1=\beta$$

이어야 한다.

$$\therefore x=\frac{\alpha-1}{2} \text{ 또는 } x=\frac{\beta-1}{2}$$

따라서 구하는 두 근의 합은

$$\frac{\alpha-1}{2}+\frac{\beta-1}{2}=\frac{\alpha+\beta-2}{2}=\frac{4-2}{2}=1$$

답 1

21

이차방정식 $3x^2-7x+3=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=\frac{7}{3}, \alpha\beta=1$$

$$\begin{aligned} \therefore \left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)+\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right) &= \alpha+\beta+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} \\ &= \frac{7}{3}+\frac{\frac{7}{3}}{1}=\frac{14}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right) &= \alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}+2 \\ &= 1+1+2=4 \end{aligned}$$

따라서 $\alpha+\frac{1}{\beta}, \beta+\frac{1}{\alpha}$ 을 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 3인 이차방정식은

$$3\left(x^2-\frac{14}{3}x+4\right)=0$$

$$\therefore 3x^2-14x+12=0$$

답 ①

22

이차방정식 $x^2 - 2x + 6 = 0$ 에서

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 1 \times 6}}{1} = 1 \pm \sqrt{5}i$$

이므로

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 6 &= \{x - (1 + \sqrt{5}i)\} \{x - (1 - \sqrt{5}i)\} \\ &= (x - 1 - \sqrt{5}i)(x - 1 + \sqrt{5}i) \end{aligned}$$

따라서 주어진 이차식의 인수인 것은 ③, ④이다.

답 ③, ④

23

이차방정식 $x^2 - px + p + 19 = 0$ 의 계수가 모두 실수이므로 한 허근을 $a + 2i$ (a 는 실수)라고 하면 다른 한 근은 $a - 2i$ 이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(a + 2i) + (a - 2i) = p$$

$$(a + 2i)(a - 2i) = p + 19$$

$$\therefore 2a = p, a^2 + 4 = p + 19$$

$2a = p$ 에서 $a = \frac{1}{2}p$ 이므로 이것을 $a^2 + 4 = p + 19$ 에 대입하면

$$\frac{1}{4}p^2 + 4 = p + 19, p^2 - 4p - 60 = 0$$

$$(p + 6)(p - 10) = 0 \quad \therefore p = 10 \quad (\because p > 0)$$

답 10

24

문제 접근하기

이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ (a, b 는 실수)의 두 근이 서로 다른 부호이면 두 근의 곱이 음수이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 b 가 음수임을 알 수 있다.

이차방정식 $x^2 - ax + 3a - 4 = 0$ 에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\text{두 근의 곱}) = 3a - 4$$

주어진 이차방정식의 두 근의 부호가 서로 다르므로

$$(\text{두 근의 곱}) < 0 \text{에서}$$

$$3a - 4 < 0 \quad \therefore a < \frac{4}{3}$$

이때 a 는 자연수이므로 $a = 1$

답 ①

참고

이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 서로 다른 부호이면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\text{두 근의 곱}) = b < 0$$

이때 판별식 $D = a^2 - 4b$ 에서 $a^2 \geq 0, -4b > 0$ 이므로 D 는 항상 양수이다.

따라서 두 근이 서로 다른 부호일 때에는 항상 서로 다른 두 실근을 가지므로 판별식의 부호를 따지지 않아도 된다.



이차방정식과 이차함수

기본을 다지는 유형

본문 075쪽

001

$y = x^2 + 2ax + 4 = (x + a)^2 - a^2 + 4$ 이므로 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-a, -a^2 + 4)$ 이다.

즉, $-a = 1, -a^2 + 4 = b$ 이므로

$$a = -1, b = 3$$

따라서 축의 방정식은 $x = 1$ 이므로 $c = 1$

$$\therefore a - b - c = -1 - 3 - 1 = -5$$

답 ①

002

$y = 2x^2 - 4x + 3 = 2(x - 1)^2 + 1$ 이므로 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = 2(x - m - 1)^2 + 1 + n \quad \dots\dots\dots ㉠$$

$$y = 2x^2 - 8x - 3 = 2(x - 2)^2 - 11 \quad \dots\dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡의 그래프가 일치하므로

$$-m - 1 = -2, 1 + n = -11$$

$$\therefore m = 1, n = -12$$

$$\therefore m + n = 1 + (-12) = -11 \quad \dots\dots\dots ㉢$$

답 -11

채점 기준	비율
① $y = 2x^2 - 4x + 3$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	40 %
② $y = 2x^2 - 8x - 3$ 을 $y = a(x - p)^2 + q$ 의 꼴로 고칠 수 있다.	20 %
③ $m + n$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %

풍습 개념 CHECK

이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프의 평행이동 中 수학 3

이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 그래프의 식은 다음과 같은 순서로 구한다.

① $y = ax^2 + bx + c$ 를 $y = a(x - p)^2 + q$ 의 꼴로 고친다.

② $y = a(x - p)^2 + q$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 그래프의 식을 구한다.

$$\Rightarrow y = a(x - m - p)^2 + q + n$$

003

$$y = -x^2 + 4x - 1 = -(x - 2)^2 + 3$$

① 그래프는 위로 볼록하다.

② 꼭짓점의 좌표는 $(2, 3)$ 이다.

⑤ $y = -x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.
따라서 옳은 것은 ③, ④이다.

답 ③, ④

004

$a < 0$ 이므로 그래프가 위로 볼록하고 $ab < 0$ 이므로 축이 y 축의 오른쪽에 있다.
또, $c < 0$ 에서 y 축과의 교점이 x 축의 아래쪽에 있다.
따라서 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프로 적당한 것은 ④이다.

답 ④

005

$y = a(x-p)^2 + q$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 (p, q) 이므로
 $p = 3, q = 9$
 $y = a(x-3)^2 + 9$ 의 그래프가 점 $(5, -7)$ 을 지나므로
 $-7 = 4a + 9 \quad \therefore a = -4$
 $\therefore a - p + q = -4 - 3 + 9 = 2$

답 2

006

이차함수의 식을 $y = a(x+1)(x-4)$ 라고 하면 이 함수의 그래프가 점 $(0, 8)$ 을 지나므로
 $8 = -4a \quad \therefore a = -2$
 $\therefore y = -2(x+1)(x-4) = -2x^2 + 6x + 8$
따라서 $a = -2, b = 6, c = 8$ 이므로
 $ab - c = -2 \times 6 - 8 = -20$

답 ⑤

007

이차함수의 식을 $y = ax^2 + bx + c$ 라고 하면
 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 점 $(0, 6)$ 을 지나므로
 $6 = c$
 $y = ax^2 + bx + 6$ 의 그래프가 점 $(-2, 14)$ 를 지나므로
 $14 = 4a - 2b + 6 \quad \therefore 2a - b = 4 \quad \dots\dots\dots ㉠$
 $y = ax^2 + bx + 6$ 의 그래프가 점 $(3, 9)$ 를 지나므로
 $9 = 9a + 3b + 6 \quad \therefore 3a + b = 1 \quad \dots\dots\dots ㉡$
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
 $a = 1, b = -2$
 $\therefore y = x^2 - 2x + 6 = (x-1)^2 + 5$
따라서 꼭짓점의 좌표는 $(1, 5)$ 이다.

답 ③

008

(1) 이차방정식 $x^2 - 12x + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면
 $\frac{D}{4} = (-6)^2 - 1 \times 4 = 32 > 0$
이므로 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x 축의 교점의 개수는 2이다.
(2) 이차방정식 $x^2 + 8x + 16 = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면
 $\frac{D}{4} = 4^2 - 1 \times 16 = 0$

이므로 이차방정식은 중근을 갖는다.
따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x 축의 교점의 개수는 1이다.
(3) 이차방정식 $-5x^2 + 3x - 2 = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면
 $D = 3^2 - 4 \times (-5) \times (-2) = -31 < 0$
이므로 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.
따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x 축의 교점의 개수는 0이다.

답 (1) 2 (2) 1 (3) 0

009

이차방정식 $x^2 - 6x + k = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면
 $\frac{D}{4} = (-3)^2 - 1 \times k = 9 - k$
(1) $\frac{D}{4} = 9 - k > 0 \quad \therefore k < 9$
(2) $\frac{D}{4} = 9 - k = 0 \quad \therefore k = 9$
(3) $\frac{D}{4} = 9 - k < 0 \quad \therefore k > 9$

답 (1) $k < 9$ (2) $k = 9$ (3) $k > 9$

010

이차방정식 $x^2 + 4x + a = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면
 $\frac{D}{4} = 2^2 - a = 0 \quad \therefore a = 4$

답 ①

011

이차방정식 $x^2 + 4ax + 4a^2 - a + 5 = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면
 $\frac{D}{4} = (2a)^2 - (4a^2 - a + 5) < 0$
 $a - 5 < 0 \quad \therefore a < 5$
따라서 자연수 a 는 1, 2, 3, 4의 4개이다.

답 ④

012

이차방정식 $x^2 + 2(a-1)x + a^2 + 2a - 3 = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면
 $\frac{D}{4} = (a-1)^2 - (a^2 + 2a - 3) > 0$
 $-4a + 4 > 0 \quad \therefore a < 1$
따라서 정수 a 의 최댓값은 0이다.

답 0

013

$y = x^2 - k(2x-1) + 6 = x^2 - 2kx + k + 6$
이차방정식 $x^2 - 2kx + k + 6 = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면
 $\frac{D}{4} = (-k)^2 - (k+6) = 0$
 $k^2 - k - 6 = 0, (k+2)(k-3) = 0$
 $\therefore k = -2$ 또는 $k = 3$
이때 $k > 0$ 이므로 $k = 3$
따라서 주어진 이차함수는 $y = x^2 - 6x + 9$ 이고, 그 그래프가 점 $(1, a)$ 를 지나므로 $a = 1 - 6 + 9 = 4$
 $\therefore a + k = 4 + 3 = 7$

답 ④

014

이차방정식 $-x^2+3x+k+3=0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$D=3^2-4 \times (-1) \times (k+3) \geq 0$$

$$4k+21 \geq 0 \quad \therefore k \geq -\frac{21}{4}$$

답 ②

015

이차방정식 $x^2-kx+k+3=0$ 의 판별식을 D_1 이라고 하면

$$D_1=(-k)^2-4 \times 1 \times (k+3)=0$$

$$k^2-4k-12=0, (k+2)(k-6)=0$$

$$\therefore k=-2 \text{ 또는 } k=6 \quad \text{..... ㉠}$$

①

이차방정식 $-x^2+2x+k-2=0$ 의 판별식을 D_2 라고 하면

$$\frac{D_2}{4}=1^2-(-1) \times (k-2) < 0$$

$$k-1 < 0 \quad \therefore k < 1 \quad \text{..... ㉡}$$

②

$$\text{㉠, ㉡에서 } k=-2 \quad \text{..... ㉢}$$

답 -2

채점 기준	비율
① 이차함수 $y=x^2-kx+k+3$ 의 그래프가 x 축과 한 점에 서 만나도록 하는 k 의 값을 구할 수 있다.	40 %
② 이차함수 $y=-x^2+2x+k-2$ 의 그래프가 x 축과 만나 지 않도록 하는 k 의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
③ ①, ②를 모두 만족시키는 k 의 값을 구할 수 있다.	20 %

016

(1) $y=2x^2-5x-18$ 에 $y=0$ 을 대입하면

$$2x^2-5x-18=0, (x+2)(2x-9)=0$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=\frac{9}{2}$$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표는 -2 ,

$$\frac{9}{2} \text{이다.}$$

(2) $y=-x^2+10x-25$ 에 $y=0$ 을 대입하면

$$-x^2+10x-25=0, -(x-5)^2=0$$

$$\therefore x=5$$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표는 5이다.

(3) $y=x^2-x-1$ 에 $y=0$ 을 대입하면

$$x^2-x-1=0$$

$$\therefore x=\frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2-4 \times 1 \times (-1)}}{2 \times 1}$$

$$=\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표는

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{이다.}$$

답 (1) $-2, \frac{9}{2}$ (2) 5 (3) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

017

$y=x^2+4x+3$ 에 $y=0$ 을 대입하면

$$x^2+4x+3=0, (x+3)(x+1)=0$$

$$\therefore x=-3 \text{ 또는 } x=-1$$

따라서 두 점 사이의 거리는 $-1-(-3)=2$

답 2

018

이차함수 $y=2x^2+2x+a$ 의 그래프가 x 축과 만나는 두 점의 x 좌표는 이차방정식 $2x^2+2x+a=0$ 의 두 실근과 같다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은 $\frac{a}{2}$ 이므로

$$\frac{a}{2}=-\frac{1}{2} \quad \therefore a=-1$$

답 ②

019

이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2-ax-4$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표가 -4 ,

b 이므로 -4 , b 는 이차방정식 $\frac{1}{2}x^2-ax-4=0$, 즉

$x^2-2ax-8=0$ 의 두 근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-4+b=2a, -4b=-8$$

$$\therefore a=-1, b=2$$

$$\therefore ab=-1 \times 2=-2$$

답 -2

020

이차함수 $y=2x^2+ax+b$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표가 -2 , 1 이므로 -2 , 1 은 이차방정식 $2x^2+ax+b=0$ 의 두 근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-2+1=-\frac{a}{2}, -2 \times 1=\frac{b}{2}$$

$$\therefore a=2, b=-4$$

따라서 주어진 이차함수는 $y=2x^2+2x-4$ 이고, 그 그래프가 점 $(2, k)$ 를 지나므로

$$k=8+4-4=8$$

답 8

021

이차함수 $y=x^2+ax+b$ 의 그래프가 점 $(1, 0)$ 에서 x 축과 접하므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 은 중근 $x=1$ 을 갖는다.

최고차항의 계수가 1이고 $x=1$ 을 중근으로 갖는 이차방정식은

$$(x-1)^2=0 \quad \therefore x^2-2x+1=0$$

$$\therefore a=-2, b=1$$

$y=x^2+bx+a$, 즉 $y=x^2+x-2$ 에 $y=0$ 을 대입하면

$$x^2+x-2=0, (x+2)(x-1)=0$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=1$$

따라서 구하는 두 점 사이의 거리는

$$1-(-2)=3$$

답 ③

022

두 점 A, B의 좌표를 $A(\alpha, 0)$, $B(\beta, 0)$ ($\alpha > \beta$)이라고 하면 이차방정식 $-2x^2 + 8x + k = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 4, \alpha\beta = -\frac{k}{2} \dots\dots\dots ①$$

$$\text{이때 } \overline{AB} = 6 \text{이므로 } \alpha - \beta = 6 \dots\dots\dots ②$$

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \text{에서}$$

$$36 = 16 + 2k \quad \therefore k = 10 \dots\dots\dots ③$$

답 10

채점 기준	비율
① $A(\alpha, 0)$, $B(\beta, 0)$ ($\alpha > \beta$)으로 놓고 $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %
② $\alpha - \beta$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %
③ k 의 값을 구할 수 있다.	40 %

|다른 풀이|

이차방정식 $-2x^2 + 8x + k = 0$ 의 두 근을 $\alpha, \alpha + 6$ 이라고 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + (\alpha + 6) = 4 \dots\dots\dots ㉠$$

$$\alpha(\alpha + 6) = -\frac{k}{2} \dots\dots\dots ㉡$$

$$㉠ \text{에서 } 2\alpha = -2 \quad \therefore \alpha = -1$$

$\alpha = -1$ 을 ㉡에 대입하면

$$-1 \times (-1 + 6) = -\frac{k}{2} \quad \therefore k = 10$$

023

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 x 축과

$x = -3$, $x = 2$ 인 두 점에서 만나므로

$$f(x) = (x + 3)(x - 2)$$

$$\therefore f(2x - 1) = (2x - 1 + 3)(2x - 1 - 2)$$

$$= (2x + 2)(2x - 3)$$

$$= 2(x + 1)(2x - 3)$$

따라서 방정식 $f(2x - 1) = 0$, 즉 $2(x + 1)(2x - 3) = 0$ 의 두 근은

$$x = -1 \text{ 또는 } x = \frac{3}{2}$$

이므로 두 근의 합은

$$-1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

답 ②

024

(1) 이차방정식 $x^2 - 3x + 1 = 2x + 4$, 즉 $x^2 - 5x - 3 = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$D = (-5)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 37 > 0$$

이므로 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 개수는 2이다.

(2) 이차방정식 $-2x^2 + 5x - 2 = 4x + 1$, 즉 $2x^2 - x + 3 = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$D = (-1)^2 - 4 \times 2 \times 3 = -23 < 0$$

이므로 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 개수는 0이다.

(3) 이차방정식 $4x^2 + 9x + 7 = -3x - 2$, 즉 $4x^2 + 12x + 9 = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = 6^2 - 4 \times 9 = 0$$

이므로 이차방정식은 중근을 갖는다.

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 개수는 1이다.

답 (1) 2 (2) 0 (3) 1

025

이차방정식 $x^2 - 3x + 2 = -x + k$, 즉 $x^2 - 2x + 2 - k = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (-1)^2 - (2 - k) = -1 + k$$

$$(1) \frac{D}{4} = -1 + k > 0 \quad \therefore k > 1$$

$$(2) \frac{D}{4} = -1 + k = 0 \quad \therefore k = 1$$

$$(3) \frac{D}{4} = -1 + k < 0 \quad \therefore k < 1$$

답 (1) $k > 1$ (2) $k = 1$ (3) $k < 1$

026

이차함수 $y = 6x^2 - 2x$ 의 그래프와 직선 $y = 3x - k$ 가 만나려면 이차방정식 $6x^2 - 2x = 3x - k$, 즉 $6x^2 - 5x + k = 0$ 이 중근을 갖거나 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $6x^2 - 5x + k = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$D = (-5)^2 - 4 \times 6 \times k \geq 0$$

$$25 - 24k \geq 0 \quad \therefore k \leq \frac{25}{24}$$

답 $k \leq \frac{25}{24}$

027

이차함수 $y = x^2 + 8x - 5$ 의 그래프와 직선 $y = 4x - k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나려면 이차방정식 $x^2 + 8x - 5 = 4x - k$, 즉 $x^2 + 4x - 5 + k = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2 + 4x - 5 + k = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = 2^2 - (-5 + k) > 0$$

$$9 - k > 0 \quad \therefore k < 9$$

$$\therefore a = 9$$

답 9

028

이차함수 $y = x^2 - 7x + k - 1$ 의 그래프와 직선 $y = -2x + 1$ 이 만나지 않으려면 이차방정식 $x^2 - 7x + k - 1 = -2x + 1$, 즉 $x^2 - 5x + k - 2 = 0$ 이 서로 다른 두 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2 - 5x + k - 2 = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$D = (-5)^2 - 4 \times 1 \times (k - 2) < 0$$

$$33 - 4k < 0 \quad \therefore k > \frac{33}{4}$$

따라서 정수 k 의 최솟값은 9이다.

답 ⑤

029

이차함수 $y = -2x^2 + 7x$ 의 그래프와 직선 $y = 2x + k$ 가 적어도 한 점에서 만나려면 이차방정식 $-2x^2 + 7x = 2x + k$, 즉 $2x^2 - 5x + k = 0$ 이 중근을 갖거나 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. 이차방정식 $2x^2 - 5x + k = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면 $D = (-5)^2 - 4 \times 2 \times k \geq 0$
 $25 - 8k \geq 0 \quad \therefore k \leq \frac{25}{8}$
 따라서 자연수 k 는 1, 2, 3의 3개이다.

답 ③

참고

이차함수의 그래프와 직선이 적어도 한 점에서 만난다.

→ 두 그래프의 교점이 1개 또는 2개이다.

→ 두 그래프의 식을 연립하여 얻은 이차방정식의 실근이 1개 또는 2개이므로 판별식 D 에 대하여 $D \geq 0$ 이다.

030

이차함수 $y = x^2 + ax + a^2$ 의 그래프가 직선 $y = -x$ 에 접하려면 이차방정식 $x^2 + ax + a^2 = -x$, 즉 $x^2 + (a+1)x + a^2 = 0$ 이 중근을 가져야 한다. 이차방정식 $x^2 + (a+1)x + a^2 = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면 $D = (a+1)^2 - 4a^2 = 0$
 $3a^2 - 2a - 1 = 0$
 $(3a+1)(a-1) = 0$
 $\therefore a = 1 \quad (\because a > 0)$

답 ②

031

조건 (가)에 의하여 이차함수 $y = x^2 + kx + 4$ 의 그래프가 x 축에 접하므로 이차방정식 $x^2 + kx + 4 = 0$ 이 중근을 가져야 한다. 이차방정식 $x^2 + kx + 4 = 0$ 의 판별식을 D_1 이라고 하면 $D_1 = k^2 - 4 \times 1 \times 4 = 0$
 $k^2 - 16 = 0 \quad \therefore k = \pm 4$ ㉠

①

조건 (나)에 의하여 이차함수 $y = x^2 + kx + 4$ 의 그래프가 직선 $y = (k-2)x + k$ 와 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2 + kx + 4 = (k-2)x + k$, 즉 $x^2 + 2x + 4 - k = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2 + 2x + 4 - k = 0$ 의 판별식을 D_2 라고 하면 $\frac{D_2}{4} = 1^2 - (4 - k) > 0$
 $-3 + k > 0 \quad \therefore k > 3$ ㉡

②

㉠, ㉡에서 $k = 4$ ③

답 4

채점 기준	비율
① 조건 (가)를 만족시키는 k 의 값을 구할 수 있다.	40 %
② 조건 (나)를 만족시키는 k 의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
③ 조건 (가), (나)를 모두 만족시키는 k 의 값을 구할 수 있다.	20 %

032

기울기가 2이므로

$$a = 2$$

직선 $y = 2x + b$ 가 이차함수 $y = -x^2 + 4x - 6$ 의 그래프에 접하므로 이차방정식 $-x^2 + 4x - 6 = 2x + b$, 즉 $x^2 - 2x + 6 + b = 0$ 이 중근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2 - 2x + 6 + b = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (-1)^2 - (6 + b) = 0$$

$$-5 - b = 0 \quad \therefore b = -5$$

$$\therefore ab = 2 \times (-5) = -10$$

답 -10

033

점 $(-1, 0)$ 을 지나고 기울기가 m 인 직선의 방정식은

$$y = m(x + 1) \quad \therefore y = mx + m$$

이 직선이 곡선 $y = x^2 + x + 4$ 에 접하므로 이차방정식

$x^2 + x + 4 = mx + m$, 즉 $x^2 + (1 - m)x + 4 - m = 0$ 이 중근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2 + (1 - m)x + 4 - m = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$D = (1 - m)^2 - 4 \times 1 \times (4 - m) = 0$$

$$m^2 + 2m - 15 = 0$$

$$(m + 5)(m - 3) = 0$$

$$\therefore m = 3 \quad (\because m > 0)$$

답 ④

034

$$(1) x^2 - 6x + 12 = 2x - 3 \text{에서 } x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$(x - 3)(x - 5) = 0 \quad \therefore x = 3 \text{ 또는 } x = 5$$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 x 좌표는 3, 5이다.

$$(2) 2x^2 - x - 1 = 2x + 1 \text{에서 } 2x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$(2x + 1)(x - 2) = 0 \quad \therefore x = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } x = 2$$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 x 좌표는 $-\frac{1}{2}$, 2이다.

$$(3) 4x^2 - 5x + 8 = 7x - 1 \text{에서 } 4x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$(2x - 3)^2 = 0 \quad \therefore x = \frac{3}{2}$$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 x 좌표는 $\frac{3}{2}$ 이다.

$$(4) -x^2 + x - 3 = -3x - 6 \text{에서 } x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$\therefore x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 1 \times (-3)}}{1}$$

$$= 2 \pm \sqrt{7}$$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 x 좌표는 $2 - \sqrt{7}$, $2 + \sqrt{7}$ 이다.

$$\text{답 (1) } 3, 5 \quad (2) -\frac{1}{2}, 2 \quad (3) \frac{3}{2} \quad (4) 2 - \sqrt{7}, 2 + \sqrt{7}$$

035

이차함수 $y=2x^2-3x+k$ 의 그래프와 직선 $y=x+9$ 의 교점의 x 좌표는 이차방정식 $2x^2-3x+k=x+9$, 즉 $2x^2-4x+k-9=0$ 의 두 실근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\text{두 근의 곱}) = \frac{k-9}{2} = -6$$

$$\therefore k = -3$$

답 ①

036

이차방정식 $-x^2-4x+a=bx-1$, 즉 $x^2+(4+b)x-a-1=0$ 의 두 근이 $-3, 1$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-3+1=-(4+b) \quad \therefore b=-2$$

$$-3 \times 1 = -a-1 \quad \therefore a=2$$

$$\therefore ab=2 \times (-2) = -4$$

답 ①

037

이차방정식 $-x^2+ax=x-b$, 즉 $x^2+(1-a)x-b=0$ 의 한 근이 $1-\sqrt{3}$ 이므로 다른 한 근은 $1+\sqrt{3}$ 이다. ①

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(1-\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})=-(1-a)$$

$$\therefore a=3$$

$$(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})=-b$$

$$\therefore b=2 \quad \text{②}$$

$$\therefore a-b=3-2=1 \quad \text{③}$$

답 1

채점 기준	비율
① 다른 한 교점의 x 좌표를 구할 수 있다.	40 %
② a, b 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ $a-b$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

038

$$(1) y=2x^2+12x+17=2(x+3)^2-1$$

따라서 최댓값은 없고 $x=-3$ 일 때 최솟값 -1 을 갖는다.

$$(2) y=-5x^2-10x+1=-5(x+1)^2+6$$

따라서 $x=-1$ 일 때 최댓값 6 을 갖고 최솟값은 없다.

$$(3) y=-3x^2+6x-8=-3(x-1)^2-5$$

따라서 $x=1$ 일 때 최댓값 -5 를 갖고 최솟값은 없다.

$$(4) y=\frac{1}{2}x^2-4x-2=\frac{1}{2}(x-4)^2-10$$

따라서 최댓값은 없고 최솟값은 $x=4$ 일 때 -10 이다.

$$(5) y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+3=-\frac{1}{4}(x-1)^2+\frac{13}{4}$$

따라서 $x=1$ 일 때 최댓값 $\frac{13}{4}$ 을 갖고 최솟값은 없다.

답 (1) 최댓값: 없다., 최솟값: -1 (2) 최댓값: 6 , 최솟값: 없다.

(3) 최댓값: -5 , 최솟값: 없다. (4) 최댓값: 없다., 최솟값: -10

(5) 최댓값: $\frac{13}{4}$, 최솟값: 없다.

039

각각의 최댓값을 구하면

$$\textcircled{1} 1 \quad \textcircled{2} 0 \quad \textcircled{3} -3$$

$$\textcircled{4} y=-x^2+6x-13=-(x-3)^2-4 \text{의 최댓값은 } -4 \text{이다.}$$

$$\textcircled{5} y=-4x^2+8x-2=-4(x-1)^2+2 \text{의 최댓값은 } 2 \text{이다.}$$

따라서 최댓값이 가장 큰 것은 ⑤이다.

답 ⑤

040

$y=4x^2+24x+35=4(x+3)^2-1$ 은 $x=-3$ 일 때 최솟값 -1 을 갖는다.

따라서 $a=-3, b=-1$ 이므로

$$a+b=-3+(-1)=-4$$

답 -4

041

$$y=-3x^2-12x+k=-3(x+2)^2+12+k$$

이때 최댓값이 9 이므로

$$12+k=9 \quad \therefore k=-3$$

답 ①

042

$$y=x^2+2ax+a^2+3a=(x+a)^2+3a$$

이때 최솟값이 -12 이므로

$$3a=-12 \quad \therefore a=-4$$

따라서 주어진 이차함수는 $y=(x-4)^2-12$ 이므로 그래프의 축의 방정식은 $x=4$

답 ④

043

$x=-4$ 일 때 최솟값이 3 이고 x^2 의 계수가 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$y=\frac{1}{2}(x+4)^2+3=\frac{1}{2}x^2+4x+11$$

따라서 $a=4, b=11$ 이므로

$$b-a=11-4=7$$

답 ④

참고

이차함수가 $x=p$ 에서 최댓값 q 또는 최솟값 q 를 갖는다.

→ 이차함수의 식이 $y=a(x-p)^2+q$ 의 꼴이다.

044

→ 꼭짓점의 y 좌표가 5 → 꼭짓점의 x 좌표가 2

최댓값이 5 이고, 그래프의 축의 방정식이 $x=2$ 이므로 꼭짓점의 좌표는 $(2, 5)$ 이다.

또, x^2 의 계수가 -2 이므로

$$y=-2(x-2)^2+5=-2x^2+8x-3$$

따라서 $a=8, b=-3$ 이므로

$$a+b=8+(-3)=5$$

답 ⑤

045

$x = -1$ 일 때 최솟값이 -2 이고 x^2 의 계수가 a 이므로

$$y = a(x+1)^2 - 2 \quad \text{..... ①}$$

이 그래프가 점 $(-2, 1)$ 을 지나므로

$$1 = a - 2 \quad \therefore a = 3 \quad \text{..... ②}$$

따라서 주어진 이차함수의 식은

$$y = 3(x+1)^2 - 2 = 3x^2 + 6x + 1$$

$$\text{이므로 } b = 6, c = 1 \quad \text{..... ③}$$

$$\therefore a - 2b + c = 3 - 2 \times 6 + 1 = -8 \quad \text{..... ④}$$

답 -8

채점 기준	비율
① 최솟값을 이용하여 이차함수의 식을 세울 수 있다.	30 %
② a 의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ b, c 의 값을 구할 수 있다.	30 %
④ $a - 2b + c$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

046

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 9 + a = -\frac{1}{2}(x-4)^2 - 1 + a \text{의 최댓값은 } -1 + a \text{이다.}$$

$$y = 2x^2 + 8x + 11 - a = 2(x+2)^2 + 3 - a \text{의 최솟값은 } 3 - a \text{이다.}$$

즉, $-1 + a = 3 - a$ 이므로

$$a = 2$$

답 ②

047

$$y = x^2 - 2kx + k = (x-k)^2 - k^2 + k$$

$$\therefore M = -k^2 + k = -\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

따라서 M 의 최댓값은 $\frac{1}{4}$ 이다.

답 ①

참고

최댓값의 최솟값 또는 최솟값의 최댓값

① 이차함수의 식을 $y = a(x-p)^2 + q$ 의 꼴로 고친 후 최댓값 (또는 최솟값)인 q 를 구한다.

② ①에서 구한 q 에 대하여 최솟값 (또는 최댓값)을 구한다.

048

$$(1) y = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$$

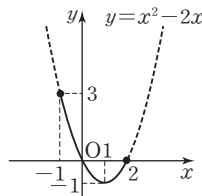
$-1 \leq x \leq 2$ 에서 이 이차함수의 그래프는

오른쪽 그림과 같으므로

$x = -1$ 일 때 최댓값 3,

$x = 1$ 일 때 최솟값 -1

을 갖는다.



$$(2) y = -2x^2 + 12x - 8$$

$$= -2(x-3)^2 + 10$$

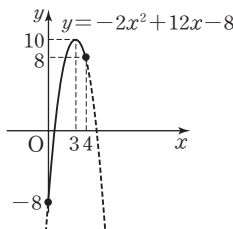
$0 \leq x \leq 4$ 에서 이 이차함수의 그래프

는 오른쪽 그림과 같으므로

$x = 3$ 일 때 최댓값 10,

$x = 0$ 일 때 최솟값 -8

을 갖는다.



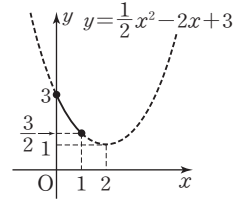
$$(3) y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3 = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 1$$

$0 \leq x \leq 1$ 에서 이 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$x = 0$ 일 때 최댓값 3,

$x = 1$ 일 때 최솟값 $\frac{3}{2}$

을 갖는다.



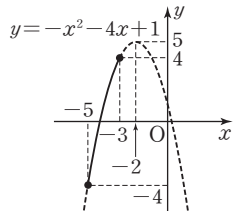
$$(4) y = -x^2 - 4x + 1 = -(x+2)^2 + 5$$

$-5 \leq x \leq -3$ 에서 이 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$x = -3$ 일 때 최댓값 4,

$x = -5$ 일 때 최솟값 -4

를 갖는다.



답 (1) 최댓값: 3, 최솟값: -1 (2) 최댓값: 10, 최솟값: -8

(3) 최댓값: 3, 최솟값: $\frac{3}{2}$ (4) 최댓값: 4, 최솟값: -4

049

$$y = x^2 + 2x - 1 = (x+1)^2 - 2$$

$-2 \leq x \leq 2$ 에서 이 이차함수의 그래프는

오른쪽 그림과 같으므로

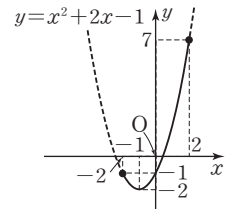
$x = 2$ 일 때 최댓값 7,

$x = -1$ 일 때 최솟값 -2

를 갖는다.

따라서 $M = 7, m = -2$ 이므로

$$M + m = 7 + (-2) = 5$$



답 ③

050

$$y = x^2 - 4x + k = (x-2)^2 + k - 4$$

$0 \leq x \leq 3$ 에서 이 이차함수의 그래프는

오른쪽 그림과 같으므로

$x = 0$ 일 때 최댓값 k ,

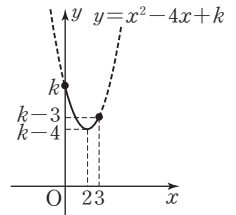
$x = 2$ 일 때 최솟값 $k - 4$

를 갖는다.

이때 최댓값이 9이므로 $k = 9$

따라서 $0 \leq x \leq 3$ 에서 최솟값은

$$k - 4 = 9 - 4 = 5$$



답 ⑤

051

$$f(x) = 2x^2 - 4x + k = 2(x-1)^2 + k - 2$$

$-2 \leq x \leq 3$ 에서 이 이차함수의 그래프는 오른

쪽 그림과 같으므로

$x = -2$ 일 때 최댓값 $k + 16$,

$x = 1$ 일 때 최솟값 $k - 2$

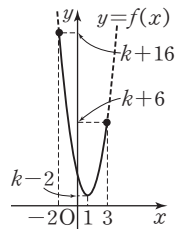
를 갖는다.

이때 최솟값이 1이므로

$$k - 2 = 1 \quad \therefore k = 3$$

따라서 $M = k + 16 = 3 + 16 = 19$ 이므로

$$k + M = 3 + 19 = 22$$



답 22

052

$y = -x^2 + 2x + k = -(x-1)^2 + k+1$
 $-3 \leq x \leq 6$ 에서 이 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

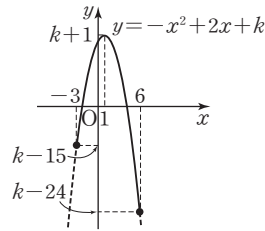
$x=1$ 일 때 최댓값 $k+1$,
 $x=6$ 일 때 최솟값 $k-24$
 를 갖는다.

이때 최댓값과 최솟값의 합이 -5 이

므로

$$(k+1) + (k-24) = -5$$

$$2k = 18 \quad \therefore k = 9$$



답 ④

053

$$y = ax^2 - 2ax + b$$

$$= a(x-1)^2 - a + b \quad (a > 0)$$

$0 \leq x \leq 3$ 에서 이 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$x=3$ 일 때 최댓값 $3a+b$,

$x=1$ 일 때 최솟값 $-a+b$

를 갖는다.

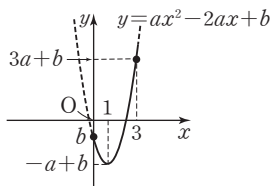
이때 최댓값이 5, 최솟값이 -3 이므로

$$3a+b=5, \quad -a+b=-3$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a=2, \quad b=-1$$

$$\therefore ab = 2 \times (-1) = -2$$



답 ④

054

$$y = -3x^2 + 3x - 2$$

$$= -3\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} \quad \text{..... ①}$$

$0 \leq x \leq a$ 에서 이 이차함수의 최댓값이 $-\frac{5}{4}$ 이므로 $a \geq \frac{1}{2}$

$x=0$ 일 때 $y=-2$ 이므로 $x=a$ 일 때 최솟값 -8 을 갖는다.

..... ②

따라서 $0 \leq x \leq a$ 에서 이 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$$y = -3x^2 + 3x - 2 \text{에 } x=a,$$

$$y=-8 \text{을 대입하면}$$

$$-8 = -3a^2 + 3a - 2$$

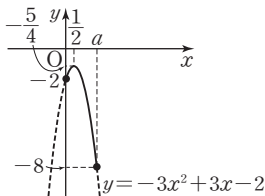
$$a^2 - a - 2 = 0$$

$$(a+1)(a-2) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 2$$

이때 $a \geq \frac{1}{2}$ 이므로 $a=2$ ③

답 2



채점 기준	비율
① 이차함수의 식을 $y = a(x-p)^2 + q$ 의 꼴로 나타낼 수 있다.	20 %
② 최솟값을 갖는 x 의 값을 알 수 있다.	40 %
③ a 의 값을 구할 수 있다.	40 %

055

$$y = 30x - 5x^2 = -5(x-3)^2 + 45$$

따라서 $x=3$ 일 때 최댓값은 45이므로 물 로켓이 가장 높이 올라갔을 때까지 걸린 시간은 3초이다.

답 3초

056

$$y = -\frac{1}{100}x^2 + 12x - 400 = -\frac{1}{100}(x-600)^2 + 3200$$

따라서 $x=600$ 일 때 최댓값은 3200이므로 이익이 최대가 되려면 하루에 600개의 제품을 생산해야 한다.

답 600

057

벽에는 철망을 사용하지 않으므로 담장의 가로 길이는 $(20-2x)$ m이다.

담장의 밑면의 세로의 길이를 x m라고 하면 가로 길이는 $(20-2x)$ m이다.

담장의 밑면의 넓이를 y m²라고 하면

$$y = x(20-2x) = -2x^2 + 20x$$

$$= -2(x-5)^2 + 50$$

따라서 $x=5$ 일 때 최댓값은 50이므로 담장의 밑면의 넓이의 최댓값은 50 m²이다.

답 50 m²

058

반지름의 길이를 x cm라고 하면 부채꼴의 호의 길이는

$$(12-2x) \text{ cm} \quad \text{..... ①}$$

부채꼴의 넓이를 y cm²라고 하면

$$y = \frac{1}{2}x(12-2x) = -x^2 + 6x = -(x-3)^2 + 9 \quad \text{..... ②}$$

따라서 $x=3$ 일 때 최댓값은 9이므로 부채꼴의 넓이가 최대일 때의 반지름의 길이는 3 cm이다. ③

답 3 cm

채점 기준	비율
① 반지름의 길이를 x cm로 놓고 호의 길이를 x 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
② 부채꼴의 넓이에 대한 함수의 식을 세울 수 있다.	40 %
③ 부채꼴의 넓이가 최대일 때의 반지름의 길이를 구할 수 있다.	30 %

풍샘 개념 CHECK

부채꼴의 호의 길이와 넓이 中 수학 1

(1) 반지름의 길이가 r , 중심각의 크기가 a° 인 부채꼴의 호의 길이를 l , 넓이를 S 라고 하면

$$l = 2\pi r \times \frac{a}{360}, \quad S = \pi r^2 \times \frac{a}{360}$$

(2) 반지름의 길이가 r , 호의 길이가 l 인 부채꼴의 넓이를 S 라고 하면

$$S = \frac{1}{2}rl$$

01

$y=x^2-4kx+4k^2-3k-2=(x-2k)^2-3k-2$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(2k, -3k-2)$ 이다.

꼭짓점 $(2k, -3k-2)$ 가 직선 $y=2x-9$ 위에 있으므로

$$\begin{aligned} -3k-2 &= 2 \times 2k-9 \\ -7k &= -7 \quad \therefore k=1 \end{aligned}$$

답 ①

02

그래프가 아래로 볼록하므로 $a>0$

그래프의 축이 y 축의 왼쪽에 있으므로 $ab>0$ (①)

이때 $a>0$ 이므로 $b>0$

y 축과의 교점이 x 축보다 아래쪽에 있으므로 $c<0$

② $a>0, c<0$ 이므로 $ac<0$

③ $b>0, c<0$ 이므로 $\frac{b}{c}<0$

④ $x=-1$ 일 때, $y<0$ 이므로 $a-b+c<0$

⑤ $x=1$ 일 때, $y>0$ 이므로 $a+b+c>0$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

03

축의 방정식이 $x=-1$ 이므로 이차함수의 식을 $y=a(x+1)^2+q$ 라고 하자.

$y=a(x+1)^2+q$ 의 그래프가 점 $(0, 3)$ 을 지나므로

$$3=a+q \quad \dots\dots\dots ①$$

$y=a(x+1)^2+q$ 의 그래프가 점 $(-3, -3)$ 을 지나므로

$$-3=4a+q \quad \dots\dots\dots ②$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a=-2, q=5$$

따라서 주어진 이차함수는 $y=-2(x+1)^2+5$ 이고, 이 함수의 그래프가 점 $(3, k)$ 를 지나므로

$$k=-2 \times (3+1)^2+5=-27$$

답 ②

04

이차방정식 $kx^2+6x+3=0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4}=3^2-3k>0$$

$$9-3k>0 \quad \therefore k<3$$

그런데 $y=kx^2+6x+3$ 은 이차함수이므로 $k \neq 0$

따라서 구하는 k 의 값의 범위는

$$k<0 \text{ 또는 } 0<k<3$$

답 $k<0$ 또는 $0<k<3$

05

이차방정식 $x^2-2kx+3k+4=0$ 의 판별식을 D_1 이라고 하면

$$\frac{D_1}{4}=(-k)^2-(3k+4)=0$$

$$k^2-3k-4=0, (k+1)(k-4)=0$$

$$\therefore k=-1 \text{ 또는 } k=4 \quad \dots\dots\dots ①$$

이차방정식 $-2x^2-12x+11k-9=0$ 의 판별식을 D_2 라고 하면

$$\frac{D_2}{4}=(-6)^2-(-2) \times (11k-9)>0$$

$$22k+18>0 \quad \therefore k>-\frac{9}{11} \quad \dots\dots\dots ②$$

①, ②에서 $k=4$

답 4

06

이차함수 $y=x^2+(a-3)x+b-2$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표가 $-1, 6$ 이므로 $-1, 6$ 은 이차방정식 $x^2+(a-3)x+b-2=0$ 의 두 근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-1+6=-(a-3), -1 \times 6=b-2$$

$$\therefore a=-2, b=-4$$

$$\therefore a-b=-2-(-4)=2$$

답 2

07

이차함수 $y=x^2-ax+b$ 의 그래프가 x 축과 만나는 두 점의 x 좌표는 이차방정식 $x^2-ax+b=0$ 의 두 실근과 같다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a=12, b=8$$

이차함수 $y=x^2-bx+a$, 즉 $y=x^2-8x+12$ 에 $y=0$ 을 대입하면

$$x^2-8x+12=0, (x-2)(x-6)=0$$

$$\therefore x=2 \text{ 또는 } x=6$$

따라서 이차함수 $y=x^2-8x+12$ 의 그래프가 x 축과 만나는 두 점은 $(2, 0), (6, 0)$ 이고 이 두 점 사이의 거리는

$$6-2=4$$

답 4

08

이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 두 점의 x 좌표가 각각 α, β 이므로 이차방정식 $f(x)=0$ 의 두 근은 α, β 이다.

이차방정식 $f(x+1)=0$ 의 두 근은 $x+1=\alpha$ 또는 $x+1=\beta$ 에서

$$x=\alpha-1 \text{ 또는 } x=\beta-1$$

따라서 이차방정식 $f(x+1)=0$ 의 두 실근의 합은

$$(\alpha-1)+(\beta-1)=\alpha+\beta-2=2-2=0$$

답 ③

09

직선 $y=2x+k$ 와 이차함수 $y=x^2-6x+12$ 의 그래프가 만나려면 이차방정식 $x^2-6x+12=2x+k$, 즉 $x^2-8x+12-k=0$ 의 실근이 존재해야 한다.

이차방정식 $x^2-8x+12-k=0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4}=(-4)^2-(12-k) \geq 0$$

$$k+4 \geq 0 \quad \therefore k \geq -4$$

따라서 실수 k 의 최솟값은 -4 이다.

답 ③

10

직선 $y = -x + a$ 와 이차함수 $y = x^2 + bx + 3$ 의 그래프가 접하려면 이차방정식 $x^2 + bx + 3 = -x + a$, 즉 $x^2 + (b+1)x + 3 - a = 0$ 이 중근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2 + (b+1)x + 3 - a = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$D = (b+1)^2 - 4(3-a) = 0$$

$$(b+1)^2 - 12 + 4a = 0$$

$$\therefore a = -\frac{1}{4}(b+1)^2 + 3$$

따라서 실수 a 의 최댓값은 $b = -1$ 일 때 3이다.

답 ③

11

점 $(2, -1)$ 을 지나고 기울기가 m 인 직선의 방정식은

$$y + 1 = m(x - 2)$$

$$\therefore y = mx - 2m - 1$$

이차함수 $y = -x^2 + 2x - 5$ 의 그래프와 직선 $y = mx - 2m - 1$ 이

접하려면 이차방정식 $-x^2 + 2x - 5 = mx - 2m - 1$, 즉

$$x^2 + (m-2)x - 2m + 4 = 0$$
이 중근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2 + (m-2)x - 2m + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$D = (m-2)^2 - 4(-2m+4) = 0$$

$$m^2 + 4m - 12 = 0$$

$$(m+6)(m-2) = 0$$

$$\therefore m = -6 \text{ 또는 } m = 2$$

따라서 두 직선의 기울기는 $-6, 2$ 이다.

답 $-6, 2$

12

이차함수 $y = 2x^2 + 3x + a$ 의 그래프와 직선 $y = bx + 10$ 의 교점의

x 좌표는 이차방정식 $2x^2 + 3x + a = bx + 10$, 즉

$$2x^2 + (3-b)x + a - 10 = 0$$
의 실근과 같다.

교점의 x 좌표가 $-4, 2$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-4 + 2 = -\frac{3-b}{2}, \quad -4 \times 2 = \frac{a-10}{2}$$

$$\therefore a = -6, \quad b = -1$$

$$\therefore b - a = -1 - (-6) = 5$$

답 5

13

두 점 A, B의 x 좌표는 이차방정식 $x^2 + 2x - 3 = -2x + k + 1$, 즉

$$x^2 + 4x - k - 4 = 0 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

의 두 근과 같다.

점 A의 x 좌표가 -5 이므로 ①에 $x = -5$ 를 대입하면

$$25 - 20 - k - 4 = 0$$

$$\therefore k = 1$$

①에 $k = 1$ 을 대입하면

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$(x+5)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = -5 \text{ 또는 } x = 1$$

따라서 점 B의 x 좌표는 1이다.

답 1

14

이차함수 $y = x^2 - 4x + a$ 의 그래프가 점 $(3, 0)$ 을 지나므로

$$0 = 9 - 12 + a \quad \therefore a = 3$$

또, 직선 $y = bx + c$ 도 점 $(3, 0)$ 을 지나므로

$$0 = 3b + c \quad \therefore c = -3b \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

이때 직선 $y = bx - 3b$ 가 이차함수 $y = x^2 - 4x + 3$ 의 그래프에 접하

므로 이차방정식 $x^2 - 4x + 3 = bx - 3b$, 즉

$$x^2 - (4+b)x + 3b + 3 = 0$$
이 중근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2 - (4+b)x + 3b + 3 = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$D = \{-(4+b)\}^2 - 4 \times 1 \times (3b+3) = 0$$

$$b^2 - 4b + 4 = 0, \quad (b-2)^2 = 0$$

$$\therefore b = 2$$

$b = 2$ 를 ①에 대입하면

$$c = -6$$

$$\therefore a + b + c = 3 + 2 + (-6) = -1$$

답 ②

15

$x = 1$ 일 때 최댓값이 $-\frac{3}{2}$ 이고, x^2 의 계수가 -2 이므로

$$y = -2(x-1)^2 - \frac{3}{2} = -2x^2 + 4x - \frac{7}{2}$$

따라서 $a = 4, b = -\frac{7}{2}$ 이므로

$$ab = 4 \times \left(-\frac{7}{2}\right) = -14$$

답 ①

16

축의 방정식이 $x = -\frac{1+3}{2} = 1$ 이고, 최댓값이 8이므로 $a < 0$ 이고

그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(1, 8)$ 이다.

$y = a(x-1)^2 + 8$ 의 그래프가 점 $(3, 0)$ 을 지나므로

$$0 = 4a + 8 \quad \therefore a = -2$$

따라서 이차함수의 식은

$$y = -2(x-1)^2 + 8 = -2x^2 + 4x + 6$$

이므로 $b = 4, c = 6$

$$\therefore ab + c = -2 \times 4 + 6 = -2$$

답 -2

17

$$y = -3x^2 + 3ax + a = -3\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}a^2 + a$$

$$\therefore M = \frac{3}{4}a^2 + a = \frac{3}{4}\left(a + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}$$

따라서 M 은 $a = -\frac{2}{3}$ 일 때 최솟값 $-\frac{1}{3}$ 을 갖는다.

답 ③

18

$y = x^2 + 2x + a = (x+1)^2 + a - 1$ 이고 $b \leq x \leq 0$ 에서 $b < -1$ 이므

로 꼭짓점의 x 좌표 -1 은 $b \leq x \leq 0$ 에 속한다.

따라서 $x = -1$ 일 때 최솟값 -1 을 가지므로

$$a - 1 = -1 \quad \therefore a = 0$$

즉, 주어진 이차함수는 $y = x^2 + 2x$ 이고 $x = 0$ 일 때 $y = 0$ 이므로 $x = b$ 일 때 최댓값 3을 갖는다.

$$y = x^2 + 2x \text{에 } x = b, y = 3 \text{을 대입하면}$$

$$3 = b^2 + 2b, b^2 + 2b - 3 = 0$$

$$(b + 3)(b - 1) = 0$$

$$\therefore b = -3 (\because b < -1)$$

$$\therefore a + b = 0 + (-3) = -3$$

답 ②

19

$$f(x) = x^2 - 2ax + 2a^2 = (x - a)^2 + a^2$$

(i) $0 < a \leq 2$ 일 때

함수 $f(x)$ 의 최솟값은

$$f(a) = a^2 \quad \therefore a^2 = 10$$

그런데 $0 < a \leq 2$ 에서

$$0 < a^2 \leq 4 \text{이므로 } a^2 \neq 10 \text{이다.}$$

(ii) $a > 2$ 일 때

함수 $f(x)$ 의 최솟값은

$$f(2) = 2a^2 - 4a + 4$$

$$2a^2 - 4a + 4 = 10 \text{에서}$$

$$a^2 - 2a - 3 = 0, (a + 1)(a - 3) = 0$$

$$\therefore a = 3 (\because a > 2)$$

이때 함수 $f(x)$ 의 최댓값은

$$f(0) = 2a^2 = 2 \times 3^2 = 18$$

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 18이다.

답 18

20

문제 접근하기

먼저 공통부분을 t 로 치환한 후 t 의 값의 범위를 구한다.

$$y = -(x^2 + 2x)^2 + 4(x^2 + 2x) - 1 \text{에서}$$

$$x^2 + 2x = t \text{로 놓으면}$$

$$t = x^2 + 2x = (x + 1)^2 - 1$$

$-1 \leq x \leq 1$ 에서 이차함수 $t = x^2 + 2x$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

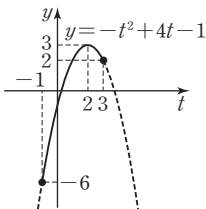
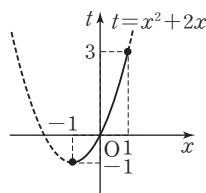
$$-1 \leq t \leq 3$$

따라서 구하는 최댓값은 $-1 \leq t \leq 3$ 에서 함수 $y = -t^2 + 4t - 1$ 의 최댓값과 같다.

$$y = -t^2 + 4t - 1 = -(t - 2)^2 + 3$$

$$-1 \leq t \leq 3 \text{에서 이차함수 } y = -t^2 + 4t - 1$$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $t = 2$ 일 때 최댓값 3을 갖는다.



답 3

참고

공통부분이 있는 함수의 최대·최소

① 공통부분을 t 로 치환한 후 t 의 값의 범위를 구한다.

② ①에서 구한 t 의 값의 범위에서 t 에 대한 함수의 최댓값 또는 최솟값을 구한다.

21

문제 접근하기

주어진 식을 $(x$ 에 대한 완전제곱식) $+(y$ 에 대한 완전제곱식) $+(상수)$ 의 꼴로 변형한다.

$$3x^2 - 12x + y^2 + 2y + 15 = 3(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + 2 \geq 2$$

따라서 $x = 2, y = -1$ 일 때 최솟값 2를 갖는다.

답 ④

참고

완전제곱식을 이용한 이차식의 최대·최소

x, y 가 실수일 때, $ax^2 + by^2 + cx + dy + e$ 의 최대, 최소는

$a(x - m)^2 + b(y - n)^2 + k$ (a, b, m, n, k 는 실수, $ab > 0$)의 꼴로 변형한 후 (실수) $^2 \geq 0$ 임을 이용한다.

즉, $x = m, y = n$ 일 때, 최댓값 또는 최솟값 k 를 갖는다.

22

$x - y = 8$ 에서 $y = x - 8$ 이므로

$$xy = x(x - 8) = x^2 - 8x = (x - 4)^2 - 16$$

$-1 \leq x \leq 5$ 에서 xy 는 $x = -1$ 일 때 최댓값 9, $x = 4$ 일 때 최솟값 -16 을 갖는다.

따라서 xy 의 최댓값과 최솟값의 합은

$$9 + (-16) = -7$$

답 ②

참고

조건이 주어진 이차식의 최대·최소

① 주어진 조건식을 한 문자에 대하여 정리한다.

② ①의 식을 이차식에 대입하여 한 문자에 대한 이차식으로 나타낸다.

③ ②의 식의 최댓값 또는 최솟값을 구한다.

23

직사각형의 세로의 길이를 x cm라고

하면 오른쪽 그림에서 삼각형 ABC가

직각이등변삼각형이므로 삼각형 FBD

와 삼각형 GCE도 직각이등변삼각형이

다. $\angle DBF = \angle ECG = 45^\circ, \angle DFB = \angle EGC = 90^\circ$

$$\therefore \overline{BF} = \overline{DF} = \overline{CG} = \overline{EG} = x \text{ (cm)}$$

이때 $\overline{BC} = x + \overline{FG} + x = 24$ (cm)이므로

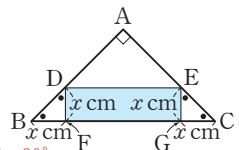
$$\overline{FG} = 24 - 2x \text{ (cm)}$$

직사각형의 넓이를 y cm²라고 하면

$$y = x(24 - 2x) = -2x^2 + 24x = -2(x - 6)^2 + 72$$

따라서 직사각형의 최대 넓이는 $x = 6$ 일 때 72 cm²이다.

답 72 cm²



24

단면의 세로의 길이가 x cm이므로 가로의 길이는 $(16 - 2x)$ cm이다.

단면의 넓이를 y cm²라고 하면

$$y = x(16 - 2x) = -2x^2 + 16x = -2(x - 4)^2 + 32$$

따라서 $x = 4$ 일 때 단면의 넓이가 최대이다.

답 4

07

여러 가지 방정식

기본을 다지는 유형

본문 093쪽

001

(1) $x^3+27=0$ 에서

$$(x+3)(x^2-3x+9)=0$$

$$\therefore x=-3 \text{ 또는 } x=\frac{3\pm 3\sqrt{3}i}{2}$$

(2) $x^3+3x^2-4x=0$ 에서

$$x(x^2+3x-4)=0, x(x+4)(x-1)=0$$

$$\therefore x=-4 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=1$$

(3) $8x^3-12x^2+6x-1=0$ 에서

$$(2x-1)^3=0 \quad \therefore x=\frac{1}{2}$$

$$\text{답 (1) } x=-3 \text{ 또는 } x=\frac{3\pm 3\sqrt{3}i}{2}$$

$$(2) x=-4 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=1$$

$$(3) x=\frac{1}{2}$$

002

(1) $f(x)=x^3-4x^2-x+10$ 으로 놓으면

$$f(2)=0$$

조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -4 & -1 & 10 \\ & & 2 & -4 & -10 \\ \hline & 1 & -2 & -5 & 0 \end{array}$$

$$f(x)=(x-2)(x^2-2x-5)$$

즉, 주어진 방정식은 $(x-2)(x^2-2x-5)=0$

$$\therefore x=2 \text{ 또는 } x=1\pm\sqrt{6}$$

(2) $f(x)=x^3+2x+3$ 으로 놓으면

$$f(-1)=0$$

조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ & & -1 & 1 & -3 \\ \hline & 1 & -1 & 3 & 0 \end{array}$$

$$f(x)=(x+1)(x^2-x+3)$$

즉, 주어진 방정식은 $(x+1)(x^2-x+3)=0$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=\frac{1\pm\sqrt{11}i}{2}$$

$$\text{답 (1) } x=2 \text{ 또는 } x=1\pm\sqrt{6} \quad (2) x=-1 \text{ 또는 } x=\frac{1\pm\sqrt{11}i}{2}$$

003

 $x^3+2x^2-x-2=0$ 에서

$$x^2(x+2)-(x+2)=0, (x+2)(x^2-1)=0$$

$$(x+2)(x+1)(x-1)=0$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

$$\text{답 } x=-2 \text{ 또는 } x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

[다른 풀이]

 $f(x)=x^3+2x^2-x-2$ 로 놓으면

$$f(1)=0$$

조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ & & 1 & 3 & 2 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}$$

$$f(x)=(x-1)(x^2+3x+2)$$

$$=(x-1)(x+1)(x+2)$$

즉, 주어진 방정식은 $(x+2)(x+1)(x-1)=0$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

004

 $f(x)=x^3+3x^2-5x-7$ 로 놓으면

$$f(-1)=0$$

조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 3 & -5 & -7 \\ & & -1 & -2 & 7 \\ \hline & 1 & 2 & -7 & 0 \end{array}$$

$$f(x)=(x+1)(x^2+2x-7)$$

즉, 주어진 방정식은 $(x+1)(x^2+2x-7)=0$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=-1\pm 2\sqrt{2}$$

이때 $\alpha < \beta < \gamma$ 이므로

$$\alpha=-1-2\sqrt{2}, \beta=-1, \gamma=-1+2\sqrt{2}$$

$$\therefore \alpha\beta-\gamma=(-1-2\sqrt{2})\times(-1)-(-1+2\sqrt{2})=2$$

답 ③

005

 $f(x)=x^3+2x^2-3x-10$ 으로 놓으면

$$f(2)=0$$

조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 2 & -3 & -10 \\ & & 2 & 8 & 10 \\ \hline & 1 & 4 & 5 & 0 \end{array}$$

$$f(x)=(x-2)(x^2+4x+5)$$

즉, 주어진 방정식은 $(x-2)(x^2+4x+5)=0$ 주어진 삼차방정식의 서로 다른 두 허근 α, β 는 이차방정식 $x^2+4x+5=0$ 의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에

의하여

$$\alpha+\beta=-4, \alpha\beta=5$$

$$\therefore \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$$

$$=(-4)^3-3\times 5\times(-4)=-4$$

답 ③

[참고]

이차방정식 $x^2+4x+5=0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4}=2^2-5=-1<0$$

이므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

006

(1) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24$ 로 놓으면

$$f(1) = 0, f(-2) = 0$$

조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 2 & -13 & -14 & 24 \\ & & & 1 & 3 & -10 & -24 \\ -2 & 1 & 3 & -10 & -24 & 0 \\ & & -2 & -2 & 24 \\ 1 & 1 & -12 & 0 \end{array}$$

$$f(x) = (x-1)(x+2)(x^2+x-12)$$

$$= (x-1)(x+2)(x+4)(x-3)$$

즉, 주어진 방정식은 $(x+4)(x+2)(x-1)(x-3) = 0$

$$\therefore x = -4 \text{ 또는 } x = -2 \text{ 또는 } x = 1 \text{ 또는 } x = 3$$

(2) $f(x) = x^4 - 8x^2 - 4x + 3$ 으로 놓으면

$$f(-1) = 0, f(3) = 0$$

조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & 0 & -8 & -4 & 3 \\ & & -1 & 1 & 7 & -3 \\ 3 & 1 & -1 & -7 & 3 & 0 \\ & & 3 & 6 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}$$

$$f(x) = (x+1)(x-3)(x^2+2x-1)$$

즉, 주어진 방정식은 $(x+1)(x-3)(x^2+2x-1) = 0$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 3 \text{ 또는 } x = -1 \pm \sqrt{2}$$

답 (1) $x = -4$ 또는 $x = -2$ 또는 $x = 1$ 또는 $x = 3$

(2) $x = -1$ 또는 $x = 3$ 또는 $x = -1 \pm \sqrt{2}$

007

$f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 - 4x + 12$ 로 놓으면

$$f(2) = 0$$

조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & -2 & -1 & -4 & 12 \\ & & 2 & 0 & -2 & -12 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -6 & 0 \end{array}$$

$$f(x) = (x-2)(x^3-x-6)$$

$g(x) = x^3 - x - 6$ 으로 놓으면

$$g(2) = 0$$

조립제법을 이용하여 $g(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 0 & -1 & -6 \\ & & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}$$

$$g(x) = (x-2)(x^2+2x+3)$$

즉, $f(x) = (x-2)^2(x^2+2x+3)$ 이므로 주어진 방정식은

$$(x-2)^2(x^2+2x+3) = 0$$

$$\therefore x = 2 \text{ 또는 } x = -1 \pm \sqrt{2i} \quad \text{①}$$

따라서 $\alpha = -1 - \sqrt{2i}$, $\beta = -1 + \sqrt{2i}$ 또는

$$\alpha = -1 + \sqrt{2i}, \beta = -1 - \sqrt{2i} \text{이므로}$$

$$\alpha + \beta = (-1 + \sqrt{2i}) + (-1 - \sqrt{2i}) = -2$$

$$\alpha\beta = (-1 + \sqrt{2i})(-1 - \sqrt{2i}) = 3$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

$$= (-2)^2 - 2 \times 3 = -2 \quad \text{②}$$

답 -2

채점 기준	비율
① 사차방정식의 해를 구할 수 있다.	60 %
② $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %

|다른 풀이|

주어진 방정식은 $(x-2)^2(x^2+2x+3) = 0$ 이므로 α, β 는 이차방정식 $x^2+2x+3=0$ 의 두 근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -2, \alpha\beta = 3$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

$$= (-2)^2 - 2 \times 3 = -2$$

008

$(x^2+2x-2)(x^2+2x-5)-18=0$ 에서

$x^2+2x=t$ 로 놓으면

$$(t-2)(t-5)-18=0, t^2-7t-8=0$$

$$(t+1)(t-8)=0 \quad \therefore t = -1 \text{ 또는 } t = 8$$

(i) $t = -1$, 즉 $x^2+2x = -1$ 일 때, $x^2+2x+1=0$

$$(x+1)^2=0 \quad \therefore x = -1$$

(ii) $t = 8$, 즉 $x^2+2x = 8$ 일 때, $x^2+2x-8=0$

$$(x+4)(x-2)=0 \quad \therefore x = -4 \text{ 또는 } x = 2$$

(i), (ii)에서 양수인 근은 2이다.

답 ②

009

$x^4-3x^2-28=0$ 에서 $x^2=X$ 로 놓으면

$$X^2-3X-28=0, (X+4)(X-7)=0$$

$$(x^2+4)(x^2-7)=0 \quad \therefore x^2 = -4 \text{ 또는 } x^2 = 7$$

$$\therefore x = \pm 2i \text{ 또는 } x = \pm \sqrt{7}$$

따라서 주어진 사차방정식의 해인 것은 ①, ⑤이다.

답 ①, ⑤

010

$x=1$ 을 $x^3+(k+1)x^2+(4k-3)x+k+7=0$ 에 대입하면

$$1+(k+1)+(4k-3)+k+7=0$$

$$6k+6=0 \quad \therefore k = -1$$

$$\therefore x^3-7x+6=0$$

$f(x) = x^3-7x+6$ 으로 놓으면

$$f(1) = 0$$

조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -7 & 6 \\ & & 1 & 1 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

$$f(x) = (x-1)(x^2+x-6)$$

$$= (x-1)(x+3)(x-2)$$

즉, 주어진 방정식은

$$(x+3)(x-1)(x-2)=0$$

$$\therefore x=-3 \text{ 또는 } x=1 \text{ 또는 } x=2$$

따라서 $a=-3, \beta=2$ 또는 $a=2, \beta=-3$ 이므로

$$|a-\beta|=|2-(-3)|=5$$

답 ①

011

$x=-2$ 를 $x^4-x^3+ax^2+bx+6=0$ 에 대입하면

$$16+8+4a-2b+6=0 \quad \therefore 2a-b=-15 \quad \dots\dots ㉠$$

$x=-1$ 을 $x^4-x^3+ax^2+bx+6=0$ 에 대입하면

$$1+1+a-b+6=0 \quad \therefore a-b=-8 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=-7, b=1$$

$$\therefore x^4-x^3-7x^2+x+6=0$$

$$f(x)=x^4-x^3-7x^2+x+6 \text{으로 놓으면}$$

$$f(-2)=0, f(-1)=0$$

조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -2 & 1 & -1 & -7 & 1 & 6 \\ & & -2 & 6 & 2 & -6 \\ \hline -1 & 1 & -3 & -1 & 3 & 0 \\ & & -1 & 4 & -3 & \\ \hline & 1 & -4 & 3 & 0 & \end{array}$$

$$f(x)=(x+2)(x+1)(x^2-4x+3)$$

$$=(x+2)(x+1)(x-1)(x-3)$$

즉, 주어진 방정식은 $(x+2)(x+1)(x-1)(x-3)=0$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=-1 \text{ 또는 } x=1 \text{ 또는 } x=3$$

따라서 네 실근 중에서 가장 큰 근은 3이고, 가장 작은 근은 -2이므로 구하는 합은

$$3+(-2)=1$$

답 1

012

$$f(x)=x^3+(3-a)x-4+a \text{로 놓으면}$$

$$f(1)=0$$

조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & 3-a & -4+a \\ & & 1 & 1 & 4-a \\ \hline & 1 & 1 & 4-a & 0 \end{array}$$

$$f(x)=(x-1)(x^2+x+4-a)$$

즉, 주어진 방정식은 $(x-1)(x^2+x+4-a)=0$

이차방정식 $x^2+x+4-a=0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$D=1^2-4 \times 1 \times (4-a) > 0$$

$$4a-15 > 0 \quad \therefore a > \frac{15}{4}$$

이때 삼차방정식 $x^3+(3-a)x-4+a=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $x^2+x+4-a=0$ 은 $x=1$ 을 근으로 가질 수 없다.

즉, $1+1+4-a \neq 0$ 이므로 $a \neq 6$

따라서 주어진 삼차방정식이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 a 의 값의 범위는

$$\frac{15}{4} < a < 6 \text{ 또는 } a > 6$$

이므로 정수 a 의 최솟값은 4이다.

답 4

참고

삼차방정식의 근의 조건이 주어질 때 미정계수 구하기

삼차방정식을 $(x-a)(ax^2+bx+c)=0$ (a 는 실수)의 꼴로 변형하였을 때 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 판별식을 D 라고 하면

(1) 세 근이 모두 실수이다. $\Rightarrow D \geq 0$

(2) 서로 다른 세 실근을 갖는다. $\Rightarrow D > 0$ 이고 $aa^2+ba+c \neq 0$

(3) 한 개의 실근과 두 개의 허근을 갖는다. $\Rightarrow D < 0$

(4) 중근을 갖는다. $\Rightarrow D=0$ 또는 $aa^2+ba+c=0$

013

$$f(x)=x^3-(2a-6)x^2+(a^2-2a+5)x+a^2 \text{으로 놓으면}$$

$$f(-1)=0$$

조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -2a+6 & a^2-2a+5 & a^2 \\ & & -1 & 2a-5 & -a^2 \\ \hline & 1 & -2a+5 & a^2 & 0 \end{array}$$

$$f(x)=(x+1)\{x^2+(-2a+5)x+a^2\}$$

즉, 주어진 방정식은 $(x+1)\{x^2+(-2a+5)x+a^2\}=0$

이차방정식 $x^2+(-2a+5)x+a^2=0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$D=(-2a+5)^2-4 \times 1 \times a^2 < 0$$

$$-20a+25 < 0 \quad \therefore a > \frac{5}{4}$$

답 $a > \frac{5}{4}$

014

잘라 낸 정사각형의 한 변의 길이를 x cm라고 하면

직육면체 모양의 상자의 가로 길이는 $(10-2x)$ cm, 세로의 길이는 $(8-2x)$ cm, 높이는 x cm이다.

상자의 부피가 48 cm^3 이므로

$$x(10-2x)(8-2x)=48$$

$$x^3-9x^2+20x-12=0$$

$$f(x)=x^3-9x^2+20x-12 \text{로 놓으면}$$

$$f(1)=0$$

조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -9 & 20 & -12 \\ & & 1 & -8 & 12 \\ \hline & 1 & -8 & 12 & 0 \end{array}$$

$$f(x)=(x-1)(x^2-8x+12)$$

$$=(x-1)(x-2)(x-6)$$

$$(x-1)(x-2)(x-6)=0 \text{에서}$$

$$x=1 \text{ 또는 } x=2 \text{ 또는 } x=6$$

그런데 $0 < x < 4$ 이므로

$$x=1 \text{ 또는 } x=2 \quad \rightarrow x > 0, 10-2x > 0, 8-2x > 0 \text{에서}$$

$$0 < x < 4$$

따라서 잘라 낸 정사각형의 한 변의 길이로 가능한 것은
1 cm, 2 cm이다.

답 1 cm, 2 cm

015

$$(3) \alpha + \beta + \gamma = -\frac{-4}{2} = 2, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{9}{2},$$

$$\alpha\beta\gamma = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$(4) \alpha + \beta + \gamma = -\frac{10}{3}, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{-6}{3} = -2,$$

$$\alpha\beta\gamma = -\frac{3}{3} = -1$$

답 (1) 6, 4, -5 (2) -2, -1, 7

(3) 2, $\frac{9}{2}$, $\frac{1}{2}$ (4) $-\frac{10}{3}$, -2, -1

016

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 2, \alpha\beta\gamma = 4$$

$$\therefore \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

답 ①

017

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta + \gamma = -1, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -2, \alpha\beta\gamma = 3$$

$$\therefore (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$$

$$= 1 - (\alpha + \beta + \gamma) + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma$$

$$= 1 - (-1) + (-2) - 3 = -3$$

답 ②

참고

곱셈 공식

$$(x-a)(x-b)(x-c)$$

$$= x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc$$

018

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta + \gamma = 4, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 5, \alpha\beta\gamma = 2 \quad \text{①}$$

이때 $\alpha + \beta + \gamma = 4$ 에서

$$\alpha + \beta = 4 - \gamma, \beta + \gamma = 4 - \alpha, \gamma + \alpha = 4 - \beta \quad \text{②}$$

$$\therefore (\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)$$

$$= (4 - \gamma)(4 - \alpha)(4 - \beta)$$

$$= 64 - 16(\alpha + \beta + \gamma) + 4(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma$$

$$= 64 - 16 \times 4 + 4 \times 5 - 2$$

$$= 18 \quad \text{③}$$

답 18

채점 기준	비율
① $\alpha + \beta + \gamma$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$, $\alpha\beta\gamma$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %
② $\alpha + \beta$, $\beta + \gamma$, $\gamma + \alpha$ 를 변형할 수 있다.	30 %
③ $(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %

019

삼차방정식 $x^3 - 6x^2 + ax + b = 0$ 의 세 근을 α , 2α , 3α ($\alpha \neq 0$)라고 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + 2\alpha + 3\alpha = 6, 6\alpha = 6 \quad \therefore \alpha = 1$$

따라서 세 근이 1, 2, 3이므로

$$a = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 1 = 11, b = -(1 \times 2 \times 3) = -6$$

$$\therefore 2a + b = 2 \times 11 + (-6) = 16$$

답 ④

020

$$(1) x^3 - (-4 + 1 + 2)x^2 + \{-4 \times 1 + 1 \times 2 + 2 \times (-4)\}x$$

$$- (-4) \times 1 \times 2 = 0$$

$$\therefore x^3 + x^2 - 10x + 8 = 0$$

$$(2) x^3 - \{-1 + (1 - \sqrt{2}) + (1 + \sqrt{2})\}x^2$$

$$+ \{-1 \times (1 - \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) + (1 + \sqrt{2}) \times (-1)\}x$$

$$- (-1) \times (1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) = 0$$

$$\therefore x^3 - x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$(3) x^3 - \{2 + (2 - 3i) + (2 + 3i)\}x^2$$

$$+ \{2 \times (2 - 3i) + (2 - 3i)(2 + 3i) + (2 + 3i) \times 2\}x$$

$$- 2(2 - 3i)(2 + 3i) = 0$$

$$\therefore x^3 - 6x^2 + 21x - 26 = 0$$

답 (1) $x^3 + x^2 - 10x + 8 = 0$

(2) $x^3 - x^2 - 3x - 1 = 0$

(3) $x^3 - 6x^2 + 21x - 26 = 0$

021

삼차방정식 $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$ 에서 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta + \gamma = 3, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0, \alpha\beta\gamma = -2$$

이므로

$$-\alpha + (-\beta) + (-\gamma) = -(\alpha + \beta + \gamma) = -3$$

$$-\alpha \times (-\beta) + (-\beta) \times (-\gamma) + (-\gamma) \times (-\alpha) = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0$$

$$-\alpha \times (-\beta) \times (-\gamma) = -\alpha\beta\gamma = -(-2) = 2$$

따라서 $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$ 를 세 근으로 하고 x^3 의 계수가 1인 삼차방정식은 $x^3 + 3x^2 - 2 = 0$

답 $x^3 + 3x^2 - 2 = 0$

022

삼차방정식 $x^3 - x^2 - 9x + 4 = 0$ 에서 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta + \gamma = 1, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -9, \alpha\beta\gamma = -4$$

이므로

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -9$$

$$\alpha\beta \times \beta\gamma + \beta\gamma \times \gamma\alpha + \gamma\alpha \times \alpha\beta = \alpha\beta^2\gamma + \beta\gamma^2\alpha + \gamma\alpha^2\beta$$

$$= \alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) = -4 \times 1 = -4$$

$$\alpha\beta \times \beta\gamma \times \gamma\alpha = \alpha^2\beta^2\gamma^2 = (\alpha\beta\gamma)^2 = (-4)^2 = 16$$

따라서 $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$ 를 세 근으로 하고 x^3 의 계수가 2인 삼차방정식은 $2(x^3 + 9x^2 - 4x - 16) = 0$, 즉 $2x^3 + 18x^2 - 8x - 32 = 0$

답 $2x^3 + 18x^2 - 8x - 32 = 0$

023

삼차방정식 $x^3+8x-7=0$ 에서 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a+\beta+\gamma=0, a\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=8, a\beta\gamma=7 \quad \text{①}$$

이므로

$$(a+1)+(\beta+1)+(\gamma+1)=(a+\beta+\gamma)+3=0+3=3$$

$$(a+1)(\beta+1)+(\beta+1)(\gamma+1)+(\gamma+1)(a+1)$$

$$=(a\beta+a\beta+1)+(\beta\gamma+\beta\gamma+1)+(\gamma\alpha+\gamma\alpha+1)$$

$$=2(a+\beta+\gamma)+a\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+3$$

$$=2 \times 0 + 8 + 3 = 11$$

$$(a+1)(\beta+1)(\gamma+1)$$

$$=a\beta\gamma+(a+\beta+\gamma)+(a\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+1$$

$$=7+0+8+1=16 \quad \text{②}$$

따라서 $a+1, \beta+1, \gamma+1$ 을 세 근으로 하고 x^3 의 계수가 1인 삼차 방정식은 $x^3-3x^2+11x-16=0$

즉, $a=-3, b=11, c=-16$ 이므로

$$a+b-c=-3+11-(-16)=24 \quad \text{③}$$

답 24

채점 기준	비율
① $a+\beta+\gamma, a\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha, a\beta\gamma$ 의 값을 구할 수 있다.	30%
② $(a+1)+(\beta+1)+(\gamma+1),$ $(a+1)(\beta+1)+(\beta+1)(\gamma+1)+(\gamma+1)(a+1),$ $(a+1)(\beta+1)(\gamma+1)$ 의 값을 구할 수 있다.	40%
③ $a+b-c$ 의 값을 구할 수 있다.	30%

024

삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 의 계수가 모두 실수이므로 한 근이 $1+i$ 이면 $1-i$ 도 근이다.

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-a=1+(1+i)+(1-i)=3 \quad \therefore a=-3$$

$$b=1 \times (1+i) + (1+i)(1-i) + (1-i) \times 1 = 4$$

$$-c=1 \times (1+i)(1-i)=2 \quad \therefore c=-2$$

$$\therefore abc=-3 \times 4 \times (-2)=24$$

답 24

025

삼차방정식의 계수가 모두 유리수이므로 한 근이 $2+\sqrt{3}$ 이면 $2-\sqrt{3}$ 도 근이다.

나머지 한 근을 α (α 는 유리수)라고 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$10=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})+\alpha \quad \therefore \alpha=6$$

즉, 세 근이 $2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}, 6$ 이므로

$$p=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})+(2-\sqrt{3}) \times 6+6 \times (2+\sqrt{3})=25$$

$$-q=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) \times 6=6 \quad \therefore q=-6$$

$$\therefore p+q=25+(-6)=19$$

답 ⑤

026

$$x^3=1 \text{에서 } x^3-1=0, (x-1)(x^2+x+1)=0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x^2+x+1=0$$

따라서 ω 는 $x^3=1, x^2+x+1=0$ 의 근이다.

(1) ω 는 $x^2+x+1=0$ 의 근이므로

$$\omega^2+\omega+1=0$$

(2) $\omega^2+\omega+1=0$ 의 양변을 ω 로 나누면

$$\omega+1+\frac{1}{\omega}=0 \quad \therefore \omega+\frac{1}{\omega}=-1$$

(3) ω 는 $x^3=1$ 의 근이므로 $\omega^3=1$

$$\therefore \omega^{12}=(\omega^3)^4=1^4=1$$

(4) ω 는 $x^2+x+1=0$ 의 한 허근이므로 ω 의 켤레복소수 $\bar{\omega}$ 도

$$x^2+x+1=0 \text{의 한 허근이다.}$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\omega+\bar{\omega}=-1, \omega\bar{\omega}=1$$

$$\therefore \omega+\bar{\omega}+\omega\bar{\omega}=-1+1=0$$

답 (1) 0 (2) -1 (3) 1 (4) 0

|다른 풀이|

$$(2) \omega+\frac{1}{\omega}=\frac{\omega^2+1}{\omega}=\frac{-\omega}{\omega}=-1$$

027

$$x^3=-1 \text{에서 } x^3+1=0, (x+1)(x^2-x+1)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x^2-x+1=0$$

따라서 ω 는 $x^3=-1, x^2-x+1=0$ 의 근이다.

(1) ω 는 $x^2-x+1=0$ 의 근이므로

$$\omega^2-\omega+1=0$$

(2) $\omega^2-\omega+1=0$ 의 양변을 ω 로 나누면

$$\omega-1+\frac{1}{\omega}=0 \quad \therefore \omega+\frac{1}{\omega}=1$$

(3) ω 는 $x^3=-1$ 의 근이므로 $\omega^3=-1$

$$\begin{aligned} \therefore -\omega^{10}+\omega^5+\omega^3 &=-(\omega^3)^3 \times \omega + \omega^3 \times \omega^2 + \omega^3 \\ &=-(-1)^3 \times \omega + (-1) \times \omega^2 + (-1) \\ &=-\omega^2+\omega-1 \\ &=-(\omega^2-\omega+1)=0 \end{aligned}$$

(4) ω 는 $x^2-x+1=0$ 의 한 허근이므로 ω 의 켤레복소수 $\bar{\omega}$ 도

$$x^2-x+1=0 \text{의 한 허근이다.}$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\omega+\bar{\omega}=1, \omega\bar{\omega}=1$$

$$\therefore \omega+\bar{\omega}+\omega\bar{\omega}=1+1=2$$

답 (1) 0 (2) 1 (3) 0 (4) 2

|다른 풀이|

$$(2) \omega+\frac{1}{\omega}=\frac{\omega^2+1}{\omega}=\frac{\omega}{\omega}=1$$

028

$$x^3=1 \text{에서 } x^3-1=0, (x-1)(x^2+x+1)=0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x^2+x+1=0$$

ω 는 $x^3=1, x^2+x+1=0$ 의 근이므로

$$\omega^3=1, \omega^2+\omega+1=0$$

$$\begin{aligned} \therefore 1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^9 \\ = (1 + \omega + \omega^2) + \omega^3(1 + \omega + \omega^2) + \omega^6(1 + \omega + \omega^2) + \omega^9 \\ = 0 + 0 + 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

답 1

029

$$\begin{aligned} x^3 = -1 \text{에서 } x^3 + 1 = 0, (x+1)(x^2 - x + 1) = 0 \\ \therefore x = -1 \text{ 또는 } x^2 - x + 1 = 0 \\ \omega, \bar{\omega} \text{는 } x^2 - x + 1 = 0 \text{의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 } \omega + \bar{\omega} = 1, \omega\bar{\omega} = 1 \\ \therefore \frac{1}{1+\omega} + \frac{1}{1+\bar{\omega}} = \frac{1+\bar{\omega}+1+\omega}{(1+\omega)(1+\bar{\omega})} = \frac{2+(\omega+\bar{\omega})}{1+(\omega+\bar{\omega})+\omega\bar{\omega}} \\ = \frac{2+1}{1+1+1} = 1 \end{aligned}$$

답 ①

030

$$\begin{aligned} x^3 = 1 \text{에서 } x^3 - 1 = 0, (x-1)(x^2 + x + 1) = 0 \\ \therefore x = 1 \text{ 또는 } x^2 + x + 1 = 0 \\ \omega \text{는 } x^3 = 1, x^2 + x + 1 = 0 \text{의 근이므로} \\ \omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0 \quad \text{..... ①} \\ \therefore 3\omega^{90} + 2\omega^{32} + \omega^{13} = 3(\omega^3)^{30} + 2(\omega^3)^{10} \times \omega^2 + (\omega^3)^4 \times \omega \\ = 3 \times 1^{30} + 2 \times 1^{10} \times \omega^2 + 1^4 \times \omega \\ = 2\omega^2 + \omega + 3 \\ = 2(-\omega - 1) + \omega + 3 \quad \rightarrow \omega^2 + \omega + 1 = 0 \text{에서 } \omega^2 = -\omega - 1 \\ = -2\omega - 2 + \omega + 3 \\ = -\omega + 1 \quad \text{..... ②} \end{aligned}$$

따라서 $a = -1, b = 1$ 이므로
 $a + b = -1 + 1 = 0$ ③

답 0

채점 기준	비율
① $\omega^3, \omega^2 + \omega + 1$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %
② $3\omega^{90} + 2\omega^{32} + \omega^{13}$ 을 간단히 할 수 있다.	50 %
③ $a + b$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

031

$$\begin{aligned} (1) \begin{cases} x + y = 1 \\ 3x^2 - y^2 = 3 \end{cases} \quad \text{..... ㉠} \\ \text{㉠에서 } y = 1 - x \text{를 ㉡에 대입하면} \\ 3x^2 - (1 - x)^2 = 3, 2x^2 + 2x - 4 = 0 \\ x^2 + x - 2 = 0, (x+2)(x-1) = 0 \\ \therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 1 \\ \text{이 값을 } y = 1 - x \text{에 대입하면} \\ x = -2 \text{일 때 } y = 3, x = 1 \text{일 때 } y = 0 \\ \text{따라서 주어진 연립방정식의 해는} \\ \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \\ (2) \begin{cases} x - 3y = -1 \\ xy - 4y^2 = -6 \end{cases} \quad \text{..... ㉡} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{㉡에서 } x = 3y - 1 \text{을 ㉠에 대입하면} \\ (3y - 1) \times y - 4y^2 = -6, y^2 + y - 6 = 0 \\ (y+3)(y-2) = 0 \quad \therefore y = -3 \text{ 또는 } y = 2 \\ \text{이 값을 } x = 3y - 1 \text{에 대입하면} \\ y = -3 \text{일 때 } x = -10, y = 2 \text{일 때 } x = 5 \\ \text{따라서 주어진 연립방정식의 해는} \\ \begin{cases} x = -10 \\ y = -3 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases} \\ \text{답 (1) } \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x = -10 \\ y = -3 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

032

$$\begin{aligned} (1) \begin{cases} (x+y)(x-y) = 0 \\ x^2 + y^2 + xy = 3 \end{cases} \quad \text{..... ㉠} \\ \text{㉠에서 } x = -y \text{ 또는 } x = y \\ (i) x = -y \text{일 때} \\ x = -y \text{를 ㉡에 대입하면} \\ y^2 + y^2 - y^2 = 3, y^2 = 3 \quad \therefore y = \pm\sqrt{3} \\ \text{이 값을 } x = -y \text{에 대입하면} \\ y = -\sqrt{3} \text{일 때 } x = \sqrt{3}, y = \sqrt{3} \text{일 때 } x = -\sqrt{3} \\ (ii) x = y \text{일 때} \\ x = y \text{를 ㉡에 대입하면} \\ y^2 + y^2 + y^2 = 3, 3y^2 = 3 \\ y^2 = 1 \quad \therefore y = \pm 1 \\ \text{이 값을 } x = y \text{에 대입하면} \\ y = 1 \text{일 때 } x = 1, y = -1 \text{일 때 } x = -1 \\ (i), (ii) \text{에서 주어진 연립방정식의 해는} \\ \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = -\sqrt{3} \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y = \sqrt{3} \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases} \\ (2) \begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ x^2 + xy - 2y^2 = 0 \end{cases} \quad \text{..... ㉡} \\ \text{㉡에서 } (x-y)(x+2y) = 0 \quad \therefore x = y \text{ 또는 } x = -2y \\ (i) x = y \text{일 때} \\ x = y \text{를 ㉢에 대입하면} \\ y^2 + y^2 = 20, y^2 = 10 \quad \therefore y = \pm\sqrt{10} \\ \text{이 값을 } x = y \text{에 대입하면} \\ y = -\sqrt{10} \text{일 때 } x = -\sqrt{10}, y = \sqrt{10} \text{일 때 } x = \sqrt{10} \\ (ii) x = -2y \text{일 때} \\ x = -2y \text{를 ㉢에 대입하면} \\ (-2y)^2 + y^2 = 20, y^2 = 4 \quad \therefore y = \pm 2 \\ \text{이 값을 } x = -2y \text{에 대입하면} \\ y = 2 \text{일 때 } x = -4, y = -2 \text{일 때 } x = 4 \\ (i), (ii) \text{에서 주어진 연립방정식의 해는} \\ \begin{cases} x = -\sqrt{10} \\ y = -\sqrt{10} \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x = \sqrt{10} \\ y = \sqrt{10} \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases} \\ \text{답 (1) } \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = -\sqrt{3} \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y = \sqrt{3} \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases} \\ (2) \begin{cases} x = -\sqrt{10} \\ y = -\sqrt{10} \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x = \sqrt{10} \\ y = \sqrt{10} \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

033

- (1) x, y 는 이차방정식 $t^2 - 3t - 10 = 0$ 의 두 근이므로
 $(t+2)(t-5) = 0 \quad \therefore t = -2 \text{ 또는 } t = 5$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x = 5 \\ y = -2 \end{cases}$$

- (2) $\begin{cases} x+y=5 \\ x^2+y^2=17 \end{cases}$ 에서 $x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy$
 임을 이용하여 식을 변형한다.

$$\begin{cases} x+y=5 \\ (x+y)^2 - 2xy = 17 \end{cases}$$

$x+y=u, xy=v$ 로 놓으면 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} u=5 \\ u^2 - 2v = 17 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{..... ㉠} \\ \text{..... ㉡} \end{matrix}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$25 - 2v = 17 \quad \therefore v = 4$$

즉, $x+y=5, xy=4$

x, y 는 이차방정식 $t^2 - 5t + 4 = 0$ 의 두 근이므로

$$(t-1)(t-4) = 0 \quad \therefore t = 1 \text{ 또는 } t = 4$$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$$\begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$$

$$\text{답} \quad (1) \begin{cases} x=-2 \\ y=5 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=5 \\ y=-2 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$$

| 다른 풀이 |

- (1) $x+y=3$ 에서 $y=3-x$

$y=3-x$ 를 $xy=-10$ 에 대입하면

$$x(3-x) = -10, \quad x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$(x+2)(x-5) = 0 \quad \therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 5$$

이 값을 $y=3-x$ 에 대입하면

$$x = -2 \text{ 일 때 } y = 5, \quad x = 5 \text{ 일 때 } y = -2$$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$$\begin{cases} x=-2 \\ y=5 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=5 \\ y=-2 \end{cases}$$

- (2) $x+y=5$ 에서 $y=-x+5$

$y=-x+5$ 를 $x^2+y^2=17$ 에 대입하면

$$x^2 + (-x+5)^2 = 17, \quad 2x^2 - 10x + 8 = 0$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0, \quad (x-1)(x-4) = 0 \quad \therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 4$$

이 값을 $y=-x+5$ 에 대입하면

$$x = 1 \text{ 일 때 } y = 4, \quad x = 4 \text{ 일 때 } y = 1$$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$$\begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$$

034

$$\begin{cases} x-y=6 \\ x^2+xy+y^2=12 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{..... ㉠} \\ \text{..... ㉡} \end{matrix}$$

㉠에서 $y=x-6$

$y=x-6$ 을 ㉡에 대입하면

$$x^2 + x(x-6) + (x-6)^2 = 12, \quad 3x^2 - 18x + 24 = 0$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0, \quad (x-2)(x-4) = 0 \quad \therefore x = 2 \text{ 또는 } x = 4$$

이 값을 $y=x-6$ 에 대입하면

$$x=2 \text{ 일 때 } y=-4, \quad x=4 \text{ 일 때 } y=-2$$

$$\text{따라서 } \begin{cases} x=2 \\ y=-4 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=4 \\ y=-2 \end{cases} \text{ 이므로}$$

$$x^2 + y^2 = 20$$

답 ③

035

$$\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 - y^2 = 9 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{..... ㉠} \\ \text{..... ㉡} \end{matrix}$$

㉠에서 $(x-y)(x-2y) = 0$

$$\therefore x=y \text{ 또는 } x=2y$$

(i) $x=y$ 일 때

$x=y$ 를 ㉡에 대입하면

$$y^2 - y^2 = 9 \quad \therefore 0 \times y^2 = 9$$

위의 식을 만족시키는 y 의 값이 존재하지 않으므로 해가 없다.

(ii) $x=2y$ 일 때

$x=2y$ 를 ㉡에 대입하면

$$4y^2 - y^2 = 9, \quad 3y^2 = 9, \quad y^2 = 3 \quad \therefore y = \pm\sqrt{3}$$

이 값을 $x=2y$ 에 대입하면

$$y = -\sqrt{3} \text{ 일 때 } x = -2\sqrt{3}, \quad y = \sqrt{3} \text{ 일 때 } x = 2\sqrt{3}$$

(i), (ii)에서 주어진 연립방정식의 해는

$$\begin{cases} x = -2\sqrt{3} \\ y = -\sqrt{3} \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x = 2\sqrt{3} \\ y = \sqrt{3} \end{cases}$$

이때 $\alpha_1 < \alpha_2$ 이므로 $\alpha_1 = -2\sqrt{3}, \alpha_2 = 2\sqrt{3}$

따라서 $\beta_1 = -\sqrt{3}, \beta_2 = \sqrt{3}$ 이므로

$$\beta_1 - \beta_2 = -\sqrt{3} - \sqrt{3} = -2\sqrt{3}$$

답 ①

036

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6 \end{cases} \text{ 에서 } x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$$

$$\begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 13 \\ xy = 6 \end{cases}$$

$x+y=u, xy=v$ 로 놓으면 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} u^2 - 2v = 13 \\ v = 6 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{..... ㉠} \\ \text{..... ㉡} \end{matrix}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$u^2 - 12 = 13, \quad u^2 = 25 \quad \therefore u = \pm 5$$

즉, $x+y = -5, xy = 6$ 또는 $x+y = 5, xy = 6$

(i) $x+y = -5, xy = 6$ 일 때

x, y 는 이차방정식 $t^2 + 5t + 6 = 0$ 의 두 근이므로

$$(t+3)(t+2) = 0 \quad \therefore t = -3 \text{ 또는 } t = -2$$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases}$$

(ii) $x+y = 5, xy = 6$ 일 때

x, y 는 이차방정식 $t^2 - 5t + 6 = 0$ 의 두 근이므로

$$(t-2)(t-3) = 0 \quad \therefore t = 2 \text{ 또는 } t = 3$$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

(i), (ii)에서 x, y 의 순서쌍 (x, y) 는 $(-3, -2), (-2, -3), (2, 3), (3, 2)$ 의 4개이다.

답 4

037

$$\begin{cases} x+y-xy=1 \\ x^2+xy+y^2=13 \end{cases} \text{에서 } \begin{matrix} \rightarrow x^2+y^2=(x+y)^2-2xy \\ \text{임을 이용하여 식을 변형한다.} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x+y-xy=1 \\ (x+y)^2-xy=13 \end{cases}$$

$x+y=u, xy=v$ 로 놓으면 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} u-v=1 & \text{..... ㉠} \\ u^2-v=13 & \text{..... ㉡} \end{cases}$$

㉠에서 $v=u-1$ 을 ㉡에 대입하면

$$u^2-(u-1)=13, u^2-u-12=0$$

$$(u+3)(u-4)=0$$

$$\therefore u=-3 \text{ 또는 } u=4$$

이 값을 $v=u-1$ 에 대입하면

$$u=-3 \text{ 일 때 } v=-4, u=4 \text{ 일 때 } v=3 \text{ ㉢}$$

즉, $x+y=-3, xy=-4$ 또는 $x+y=4, xy=3$

(i) $x+y=-3, xy=-4$ 일 때

x, y 는 이차방정식 $t^2+3t-4=0$ 의 두 근이므로

$$(t+4)(t-1)=0 \quad \therefore t=-4 \text{ 또는 } t=1$$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$$\begin{cases} x=-4 \\ y=1 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=1 \\ y=-4 \end{cases}$$

(ii) $x+y=4, xy=3$ 일 때

x, y 는 이차방정식 $t^2-4t+3=0$ 의 두 근이므로

$$(t-1)(t-3)=0 \quad \therefore t=1 \text{ 또는 } t=3$$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$$\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$$

(i), (ii)에서 주어진 연립방정식의 해는

$$\begin{cases} x=-4 \\ y=1 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=1 \\ y=-4 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases} \text{ ㉣}$$

따라서 $|\alpha-\beta|$ 의 최댓값은 5이다. ㉤
 $\rightarrow \alpha=-4, \beta=1 \text{ 또는 } \alpha=1, \beta=-4 \text{ 일 때이다.}$

답 5

채점 기준	비율
㉠ $x+y=u, xy=v$ 로 치환하고 u, v 의 값을 구할 수 있다.	40 %
㉡ 연립방정식의 해를 구할 수 있다.	40 %
㉢ $ \alpha-\beta $ 의 최댓값을 구할 수 있다.	20 %

038

$$2x+y=1 \text{에서 } y=1-2x$$

$$y=1-2x \text{를 } x^2-ky=-6 \text{에 대입하면}$$

$$x^2-k(1-2x)=-6$$

$$\therefore x^2+2kx+6-k=0$$

위의 이차방정식이 오직 한 쌍의 해를 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면 $\rightarrow$ 중근을 가져야 한다.

$$\frac{D}{4}=k^2-1 \times (6-k)=0, k^2+k-6=0$$

$$(k+3)(k-2)=0 \quad \therefore k=-3 \text{ 또는 } k=2$$

이때 k 는 양수이므로 $k=2$

답 ②

참고

연립이차방정식의 해의 조건

① 일차방정식을 이차방정식에 대입한다.

② 해의 조건을 만족시키도록 ①에서 구한 이차방정식의 판별식을 이용한다.

039

$$x-2y=-1 \text{에서 } x=2y-1$$

$$x=2y-1 \text{을 } x^2+xy=k+3 \text{에 대입하면}$$

$$(2y-1)^2+y(2y-1)=k+3$$

$$6y^2-5y-2-k=0$$

위의 이차방정식의 실근이 존재하지 않아야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면 $\rightarrow$ 허근을 가져야 한다.

$$D=(-5)^2-4 \times 6 \times (-2-k) < 0$$

$$73+24k < 0$$

$$\therefore k < -\frac{73}{24}$$

따라서 구하는 정수 k 의 최댓값은 -4 이다.

답 -4

040

두 이차방정식의 공통근을 α 라고 하면

$$\begin{cases} \alpha^2+(k+1)\alpha-2=0 & \text{..... ㉠} \\ \alpha^2+(k+2)\alpha-3=0 & \text{..... ㉡} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha^2+(k+1)\alpha-2=0 \\ \alpha^2+(k+2)\alpha-3=0 \end{cases}$$

㉠-㉡을 하면

$$-\alpha+1=0 \quad \therefore \alpha=1$$

$\alpha=1$ 을 ㉠에 대입하면

$$1+(k+1)-2=0 \quad \therefore k=0$$

답 0

참고

방정식 $f(x)=0, g(x)=0$ 이 공통근을 가질 때, 공통근을 α 로 놓고 연립방정식

$$\begin{cases} f(\alpha)=0 \\ g(\alpha)=0 \end{cases} \text{을 푼다.}$$

041

두 이차방정식의 공통근이 α 이므로

$$\begin{cases} \alpha^2+(k-1)\alpha+2k=0 & \text{..... ㉠} \\ \alpha^2-(k-3)\alpha-2k=0 & \text{..... ㉡} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha^2+(k-1)\alpha+2k=0 \\ \alpha^2-(k-3)\alpha-2k=0 \end{cases}$$

㉠+㉡을 하면

$$2\alpha^2+2\alpha=0, \alpha^2+\alpha=0$$

$$\alpha(\alpha+1)=0 \quad \therefore \alpha=0 \text{ 또는 } \alpha=-1$$

이때 $\alpha \neq 0$ 이므로 $\alpha=-1$

$$\alpha=-1 \text{을 ㉠에 대입하면 } 1-(k-1)+2k=0$$

$$k+2=0 \quad \therefore k=-2$$

$$\therefore \alpha+k=-1+(-2)=-3$$

답 -3

042

처음 두 자리 자연수의 십의 자리의 숫자를 x , 일의 자리의 숫자를 y 라고 하자.

각 자리의 숫자의 제곱의 합이 74이므로

$x^2 + y^2 = 74$ ㉠
 일의 자리의 숫자와 십의 자리의 숫자를 바꾼 수가 처음 수보다 18
 만큼 크므로
 $10y + x = 10x + y + 18$
 $\therefore y = x + 2$
 $y = x + 2$ 를 ㉠에 대입하면
 $x^2 + (x + 2)^2 = 74$
 $2x^2 + 4x - 70 = 0, x^2 + 2x - 35 = 0$
 $(x + 7)(x - 5) = 0$
 $\therefore x = -7$ 또는 $x = 5$
 이때 x 는 자연수이므로 $x = 5$
 $x = 5$ 를 $y = x + 2$ 에 대입하면 $y = 7$
 따라서 처음 수는 57이다.

답 57

043

$xy - 2x + y - 8 = 0$ 에서
 $x(y - 2) + (y - 2) = 6$
 $\therefore (x + 1)(y - 2) = 6$
 x, y 가 양의 정수이므로 $x + 1 > 1, y - 2 > -2$

$x + 1$	$y - 2$	
2	3	$\Rightarrow x = 1, y = 5$
3	2	$\Rightarrow x = 2, y = 4$
6	1	$\Rightarrow x = 5, y = 3$

따라서 $\begin{cases} x=1 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases}$ 이므로 $x + y$ 의 최댓값은
 $5 + 3 = 8$ 이다. $\rightarrow x + y = 6$ $\rightarrow x + y = 8$

답 ③

044

$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13 = 0$ 에서
 $(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) = 0$
 $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 0$
 이때 x, y 가 실수이므로
 $x - 2 = 0, y + 3 = 0$
 $\therefore x = 2, y = -3$

답 $x = 2, y = -3$

045

$2x^2 + 9y^2 - 6xy - 2x + 1 = 0$ 에서
 $(x^2 - 6xy + 9y^2) + (x^2 - 2x + 1) = 0$
 $(x - 3y)^2 + (x - 1)^2 = 0$
 이때 x, y 가 실수이므로
 $x - 3y = 0, x - 1 = 0$
 $\therefore x = 1, y = \frac{1}{3}$
 $\therefore x + y = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

답 ④

046

$x^2 + 2y^2 + 2xy - 2x - 6y + 5 = 0$ 에서

$x^2 + 2(y - 1)x + 2y^2 - 6y + 5 = 0$ 완전제곱식으로 변형하기 어려우므로 x 에 대한 내림차순으로 정리한다.
 위의 x 에 대한 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면
 $\frac{D}{4} = (y - 1)^2 - (2y^2 - 6y + 5) \geq 0$
 $y^2 - 4y + 4 \leq 0, (y - 2)^2 \leq 0$
 이때 y 는 실수이므로
 $y - 2 = 0 \therefore y = 2$
 $y = 2$ 를 $x^2 + 2(y - 1)x + 2y^2 - 6y + 5 = 0$ 에 대입하면
 $x^2 + 2x + 1 = 0, (x + 1)^2 = 0$
 $\therefore x = -1$
 $\therefore xy = -1 \times 2 = -2$

답 ②

실력을 높이는 연습 문제

본문 104쪽

01

$f(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$ 로 놓으면
 $f(1) = 0$
 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr}
 1 & 2 & 1 & -5 & 2 \\
 & & 2 & 3 & -2 \\
 \hline
 & 2 & 3 & -2 & 0
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (x - 1)(2x^2 + 3x - 2) \\
 &= (x - 1)(x + 2)(2x - 1)
 \end{aligned}$$

즉, 주어진 방정식은

$$(x + 2)(2x - 1)(x - 1) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = \frac{1}{2} \text{ 또는 } x = 1$$

따라서 $\alpha = 1, \beta = -2$ 이므로

$$\alpha + \beta = 1 + (-2) = -1$$

답 ③

02

$f(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 7x - 6$ 으로 놓으면
 $f(-1) = 0, f(2) = 0$
 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 -1 & 1 & 1 & -1 & -7 & -6 \\
 & & -1 & 0 & 1 & 6 \\
 \hline
 2 & 1 & 0 & -1 & -6 & 0 \\
 & & 2 & 4 & 6 & \\
 \hline
 & 1 & 2 & 3 & 0 &
 \end{array}$$

$$f(x) = (x + 1)(x - 2)(x^2 + 2x + 3)$$

즉, 주어진 방정식은

$$(x + 1)(x - 2)(x^2 + 2x + 3) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 2 \text{ 또는 } x = -1 \pm \sqrt{2}i$$

따라서 모든 허근의 합은

$$(-1 + \sqrt{2}i) + (-1 - \sqrt{2}i) = -2$$

답 ②

03

문제 접근하기

두 일차식의 상수항의 합이 같아지도록 일차식을 두 개씩 짝을 지어 전개한다.

$$\begin{aligned}(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-120=0 \text{에서} \\ \{(x+1)(x+4)\}\{(x+2)(x+3)\}-120=0 \\ (x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-120=0 \\ x^2+5x=X \text{로 놓으면} \\ (X+4)(X+6)-120=0 \\ X^2+10X-96=0 \\ (X+16)(X-6)=0 \\ (x^2+5x+16)(x^2+5x-6)=0 \\ (x^2+5x+16)(x+6)(x-1)=0 \\ \therefore x=\frac{-5\pm\sqrt{39}i}{2} \text{ 또는 } x=-6 \text{ 또는 } x=1\end{aligned}$$

$$\text{답 } x=\frac{-5\pm\sqrt{39}i}{2} \text{ 또는 } x=-6 \text{ 또는 } x=1$$

04

$$\begin{aligned}x^4+3x^2+4=0 \text{에서} \rightarrow A^2-B^2=0 \text{의 꼴로 변형하여 인수분해한다.} \\ \underline{(x^4+4x^2+4)-x^2=0} \\ (x^2+2)^2-x^2=0 \\ (x^2+2+x)(x^2+2-x)=0 \\ (x^2+x+2)(x^2-x+2)=0 \\ \therefore x=\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2} \text{ 또는 } x=\frac{1\pm\sqrt{7}i}{2}\end{aligned}$$

$$\text{답 } x=\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2} \text{ 또는 } x=\frac{1\pm\sqrt{7}i}{2}$$

05

$$\begin{aligned}x^4+5x^3-4x^2+5x+1=0 \text{의 양변을 } x^2 \text{으로 나누면} \\ x^2+5x-4+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}=0 \\ \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-4=0 \rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2 \\ \left(x+\frac{1}{x}\right)^2+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-6=0 \rightarrow \text{임을 이용한다.} \\ x+\frac{1}{x}=X \text{로 놓으면} \\ X^2+5X-6=0 \\ (X+6)(X-1)=0 \\ \therefore X=-6 \text{ 또는 } X=1 \\ \text{(i) } X=-6 \text{일 때} \\ x+\frac{1}{x}=-6 \text{의 양변에 } x \text{를 곱하여 정리하면} \\ x^2+6x+1=0 \\ \therefore x=-3\pm 2\sqrt{2} \\ \text{(ii) } X=1 \text{일 때} \\ x+\frac{1}{x}=1 \text{의 양변에 } x \text{를 곱하여 정리하면} \\ x^2-x+1=0 \\ \therefore x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(i), (ii)에서 두 실근은 } -3+2\sqrt{2}, -3-2\sqrt{2} \text{이므로 그 합은} \\ (-3+2\sqrt{2})+(-3-2\sqrt{2})=-6\end{aligned}$$

답 ①

06

$$\begin{aligned}\text{(i) 1이 방정식 } x-a=0 \text{의 근일 경우} \\ a=1 \text{이므로 주어진 방정식은} \\ (x-1)(x^2-2x+4)=0 \\ \text{이차방정식 } x^2-2x+4=0 \text{의 판별식을 } D \text{라고 하면} \\ \frac{D}{4}=(-1)^2-4=-3<0 \\ \text{즉, 주어진 삼차방정식은 서로 다른 세 실근을 갖지 않는다.} \\ \text{(ii) 1이 방정식 } x^2+(1-3a)x+4=0 \text{의 근일 경우} \\ x=1 \text{을 } x^2+(1-3a)x+4=0 \text{에 대입하면} \\ 1+(1-3a)+4=0 \\ \therefore a=2 \\ \text{주어진 방정식은} \\ (x-2)(x^2-5x+4)=0 \\ \therefore (x-1)(x-2)(x-4)=0 \\ \text{즉, 주어진 방정식은 세 실근 1, 2, 4를 갖는다.} \\ \text{(i), (ii)에서 } a=2, \beta=4 \text{ 또는 } a=4, \beta=2 \text{이므로} \\ a\beta=8\end{aligned}$$

답 ③

07

$$\begin{aligned}f(x)=x^3+(3k-7)x+3k-6 \text{으로 놓으면} \\ f(-1)=0 \\ \text{조립제법을 이용하여 } f(x) \text{를 인수분해하면} \\ \begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 0 & 3k-7 & 3k-6 \\ & & -1 & 1 & -3k+6 \\ \hline & 1 & -1 & 3k-6 & 0 \end{array} \\ f(x)=(x+1)(x^2-x+3k-6) \\ \text{즉, 주어진 방정식은} \\ (x+1)(x^2-x+3k-6)=0 \\ \text{(i) } x^2-x+3k-6=0 \text{이 중근을 갖는 경우} \\ \text{이차방정식 } x^2-x+3k-6=0 \text{의 판별식을 } D \text{라고 하면} \\ D=(-1)^2-4\times 1\times (3k-6)=0 \\ 25-12k=0 \\ \therefore k=\frac{25}{12} \\ \text{(ii) } x^2-x+3k-6=0 \text{의 한 근이 } -1 \text{인 경우} \\ x=-1 \text{을 } x^2-x+3k-6=0 \text{에 대입하면} \\ 1+1+3k-6=0 \\ \therefore k=\frac{4}{3} \\ \text{(i), (ii)에서 } k=\frac{25}{12} \text{ 또는 } k=\frac{4}{3} \text{이므로 모든 실수 } k \text{의 값의 합은} \\ \frac{25}{12}+\frac{4}{3}=\frac{41}{12}\end{aligned}$$

답 $\frac{41}{12}$

08

그릇의 밑면의 반지름의 길이와 높이를 x cm라고 하면
물의 높이는 $(x-2)$ cm이고, 물의 부피가 $144\pi x \text{ cm}^3$ 이므로

$$\pi x^2(x-2)=144\pi$$

$$\therefore x^3-2x^2-144=0$$

$$f(x)=x^3-2x^2-144 \text{로 놓으면}$$

$$f(6)=0$$

조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 6 & 1 & -2 & 0 & -144 \\ & & 6 & 24 & 144 \\ \hline & 1 & 4 & 24 & 0 \end{array}$$

$$f(x)=(x-6)(x^2+4x+24)$$

$$(x-6)(x^2+4x+24)=0 \text{에서}$$

$$x=6 \text{ 또는 } x=-2 \pm 2\sqrt{5}i$$

이때 x 는 자연수이므로

$$x=6$$

따라서 그릇의 높이는 6 cm이다.

답 6 cm

09

삼차방정식 $x^3-6x^2-3x+2=0$ 에서 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=6, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-3, \alpha\beta\gamma=-2$$

이때 $\alpha+\beta+\gamma=6$ 에서

$$\alpha+\beta=6-\gamma, \beta+\gamma=6-\alpha, \gamma+\alpha=6-\beta$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\beta+\gamma}{\alpha} + \frac{\alpha+\gamma}{\beta} + \frac{\alpha+\beta}{\gamma} &= \frac{6-\alpha}{\alpha} + \frac{6-\beta}{\beta} + \frac{6-\gamma}{\gamma} \\ &= \frac{6}{\alpha} - 1 + \frac{6}{\beta} - 1 + \frac{6}{\gamma} - 1 \\ &= 6\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right) - 3 \\ &= 6 \times \frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} - 3 \\ &= 6 \times \frac{-3}{-2} - 3 = 6 \end{aligned}$$

답 ⑤

10

문제 접근하기

세 근 중에서 양수인 두 근의 비가 1 : 2이므로 양수인 한 근이 α 이면 다른 한 근은 2α 이다.

세 근을 $\alpha, 2\alpha$ ($\alpha > 0$), β 로 놓으면 삼차방정식 $x^3+kx+48=0$ 에서 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+2\alpha+\beta=0 \text{에서}$$

$$3\alpha+\beta=0 \quad \therefore \beta=-3\alpha \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

$$\alpha \times 2\alpha + 2\alpha \times \beta + \beta \times \alpha = k \text{에서}$$

$$2\alpha^2+3\alpha\beta=k \quad \cdots \cdots \text{㉡}$$

$$\alpha \times 2\alpha \times \beta = -48 \text{에서}$$

$$2\alpha^2\beta=-48 \quad \therefore \alpha^2\beta=-24 \quad \cdots \cdots \text{㉢}$$

㉠을 ㉢에 대입하면

$$\alpha^2 \times (-3\alpha) = -24$$

$$-3\alpha^3=-24$$

$$\alpha^3=8 \quad \therefore \alpha=2 \quad (\because \alpha > 0)$$

$\alpha=2$ 를 ㉠에 대입하면

$$\beta=-6$$

$\alpha=2, \beta=-6$ 을 ㉢에 대입하면

$$8-36=k \quad \therefore k=-28$$

답 ②

11

삼차방정식 $x^3-5x-6=0$ 에서 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=0, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-5, \alpha\beta\gamma=6$$

이때 $\alpha+\beta+\gamma=0$ 에서

$$\alpha+\beta=-\gamma, \beta+\gamma=-\alpha, \gamma+\alpha=-\beta$$

이므로

$$\begin{aligned} (\alpha+\beta)+(\beta+\gamma)+(\gamma+\alpha) &= -\gamma+(-\alpha)+(-\beta) \\ &= -(\alpha+\beta+\gamma)=0 \end{aligned}$$

$$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)+(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)+(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)$$

$$= -\gamma \times (-\alpha) + (-\alpha) \times (-\beta) + (-\beta) \times (-\gamma)$$

$$= \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-5$$

$$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) = -\gamma \times (-\alpha) \times (-\beta)$$

$$= -\alpha\beta\gamma=-6$$

따라서 $\alpha+\beta, \beta+\gamma, \gamma+\alpha$ 를 세 근으로 하고 x^3 의 계수가 1인 삼차방정식은

$$x^3-5x+6=0$$

$$\text{답 } x^3-5x+6=0$$

12

삼차방정식의 계수가 모두 유리수이므로 $3-\sqrt{2}$ 가 근이면 $3+\sqrt{2}$ 도 근이다.

나머지 한 근을 α (α 는 유리수)라고 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(3-\sqrt{2})+(3+\sqrt{2})+\alpha=0$$

$$\therefore \alpha=-6$$

따라서 구하는 다른 두 근의 곱은 $-6(3+\sqrt{2})$ 이다.

답 ①

13

삼차방정식의 계수가 모두 실수이므로 $1-3i$ 가 근이면 $1+3i$ 도 근이다.

이때

$$-1+(1-3i)+(1+3i)=1,$$

$$-1 \times (1-3i) + (1-3i)(1+3i) + (1+3i) \times (-1) = 8,$$

$$-1 \times (1-3i)(1+3i) = -10,$$

이므로 $-1, 1-3i, 1+3i$ 를 세 근으로 하고 x^3 의 계수가 1인 삼차방정식은

$$x^3-x^2+8x+10=0$$

즉, $P(x)=x^3-x^2+8x+10$ 이므로

$$P(2)=8-4+16+10=30$$

답 30

14

$x^3-1=0$ 에서

$$(x-1)(x^2+x+1)=0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x^2+x+1=0$$

따라서 ω 는 $x^3=1, x^2+x+1=0$ 의 근이므로

$$\omega^3=1, \omega^2+\omega+1=0$$

$\therefore \omega^2+\omega+1=0$ 의 양변을 ω 로 나누면

$$\omega+1+\frac{1}{\omega}=0 \quad \therefore \omega+\frac{1}{\omega}=-1 \text{ (거짓)}$$

$\therefore \omega, \bar{\omega}$ 는 $x^2+x+1=0$ 의 두 근이 $\omega, \bar{\omega}$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\omega+\bar{\omega}=-1 \text{ (ㄷ: 거짓)}, \omega\bar{\omega}=1$$

$$\therefore \bar{\omega}=\frac{1}{\omega} \text{ (ㄴ: 참)}$$

ㄹ, ㄱ. $\omega^2+\omega+1=0$ 에서 $\omega^2=-\omega-1$

$$\omega+\bar{\omega}=-1 \text{에서 } \bar{\omega}=-\omega-1$$

$$\therefore \omega^2=\bar{\omega} \text{ (ㄹ: 참)}$$

이때 $\bar{\omega}$ 가 방정식 $x^3-1=0$ 의 근이므로 ω^2 도 방정식 $x^3-1=0$ 의 근이다. (ㄱ: 참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ, ㄱ이다.

답 ④

15

$x^3=-1$ 에서

$$x^3+1=0, (x+1)(x^2-x+1)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x^2-x+1=0$$

$x^2-x+1=0$ 의 두 근이 $\omega, \bar{\omega}$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\omega+\bar{\omega}=1, \omega\bar{\omega}=1$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\bar{\omega}^2}{\omega} + \frac{\omega^2}{\bar{\omega}} &= \frac{\omega^3 + \bar{\omega}^3}{\omega\bar{\omega}} \\ &= \frac{(\omega+\bar{\omega})^3 - 3\omega\bar{\omega}(\omega+\bar{\omega})}{\omega\bar{\omega}} \\ &= \frac{1^3 - 3 \times 1 \times 1}{1} = -2 \end{aligned}$$

답 ②

16

$x^3=1$ 에서

$$x^3-1=0, (x-1)(x^2+x+1)=0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x^2+x+1=0$$

따라서 ω 는 $x^3=1, x^2+x+1=0$ 의 근이므로

$$\omega^3=1, \omega^2+\omega+1=0$$

$\omega^2+\omega+1=0$ 의 양변을 ω 로 나누면

$$\omega+1+\frac{1}{\omega}=0 \quad \therefore \omega+\frac{1}{\omega}=-1$$

$$\begin{aligned} \therefore \omega^{10} + \frac{1}{\omega^{10}} &= (\omega^3)^3 \times \omega + \frac{1}{(\omega^3)^3 \times \omega} \\ &= 1^3 \times \omega + \frac{1}{1^3 \times \omega} \\ &= \omega + \frac{1}{\omega} = -1 \end{aligned}$$

답 ②

17

$x-y-1=0$ 에서 $y=x-1$

$y=x-1$ 을 $x^2-xy+2y=4$ 에 대입하면

$$x^2-x(x-1)+2(x-1)=4$$

$$3x=6 \quad \therefore x=2$$

$x=2$ 를 $y=x-1$ 에 대입하면

$$y=1$$

따라서 $\alpha=2, \beta=1$ 이므로

$$\alpha+\beta=2+1=3$$

답 ③

18

$$\begin{cases} x^2-xy-2y^2=0 & \text{..... ㉠} \\ 2x^2-y^2=14 & \text{..... ㉡} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-xy-2y^2=0 & \text{..... ㉠} \\ 2x^2-y^2=14 & \text{..... ㉡} \end{cases}$$

㉠에서 $(x+y)(x-2y)=0$

$$\therefore x=-y \text{ 또는 } x=2y$$

(i) $x=-y$ 일 때

$x=-y$ 를 ㉡에 대입하면

$$2y^2-y^2=14, y^2=14$$

$$\therefore y=\pm\sqrt{14}$$

이 값을 $x=-y$ 에 대입하면

$$y=-\sqrt{14} \text{일 때 } x=\sqrt{14}, y=\sqrt{14} \text{일 때 } x=-\sqrt{14}$$

(ii) $x=2y$ 일 때

$x=2y$ 를 ㉡에 대입하면

$$8y^2-y^2=14, 7y^2=14$$

$$y^2=2 \quad \therefore y=\pm\sqrt{2}$$

이 값을 $x=2y$ 에 대입하면

$$y=-\sqrt{2} \text{일 때 } x=-2\sqrt{2}, y=\sqrt{2} \text{일 때 } x=2\sqrt{2}$$

(i), (ii)에서 주어진 연립방정식의 해는

$$\begin{cases} x=\sqrt{14} \\ y=-\sqrt{14} \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-\sqrt{14} \\ y=\sqrt{14} \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-2\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{2} \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=2\sqrt{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases}$$

따라서 $\alpha^2+\beta^2$ 의 최댓값은 28이다.

$$\begin{aligned} \alpha &= -\sqrt{14}, \beta = \sqrt{14} \text{ 또는} \\ \alpha &= \sqrt{14}, \beta = -\sqrt{14} \text{일 때이다.} \end{aligned}$$

답 ④

19

$$\begin{cases} x+y+xy=11 \\ x^2y+xy^2=30 \end{cases} \text{에서}$$

$$\begin{cases} x+y+xy=11 \\ xy(x+y)=30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+xy=11 \\ xy(x+y)=30 \end{cases}$$

$x+y=u, xy=v$ 로 놓으면 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} u+v=11 \\ uv=30 \end{cases}$$

v, u 는 이차방정식 $X^2-11X+30=0$ 의 두 근이므로

$$(X-5)(X-6)=0 \quad \therefore X=5 \text{ 또는 } X=6$$

$$\therefore \begin{cases} u=5 \\ v=6 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} u=6 \\ v=5 \end{cases}$$

즉, $x+y=5, xy=6$ 또는 $x+y=6, xy=5$

(i) $x+y=5, xy=6$ 일 때

x, y 는 이차방정식 $t^2-5t+6=0$ 의 두 근이므로

$$(t-2)(t-3)=0 \quad \therefore t=2 \text{ 또는 } t=3$$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$$\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$$

(ii) $x+y=6$, $xy=5$ 일 때

x, y 는 이차방정식 $t^2-6t+5=0$ 의 두 근이므로

$$(t-1)(t-5)=0$$

$$\therefore t=1 \text{ 또는 } t=5$$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$$\begin{cases} x=1 \\ y=5 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=5 \\ y=1 \end{cases}$$

(i), (ii)에서 주어진 연립방정식의 해는

$$\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=1 \\ y=5 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=5 \\ y=1 \end{cases}$$

따라서 $2x-y$ 의 최댓값은 9이다.

$\rightarrow x=5, y=1$ 일 때이다.

답 ⑤

20

주어진 두 연립방정식의 해가 일치하므로 연립방정식

$$\begin{cases} x-y=2 \\ x^2+y^2=2 \end{cases} \text{를 풀면}$$

$$x-y=2 \text{에서 } y=x-2$$

$$y=x-2 \text{를 } x^2+y^2=2 \text{에 대입하면}$$

$$x^2+(x-2)^2=2$$

$$2x^2-4x+4=2, x^2-2x+1=0$$

$$(x-1)^2=0 \quad \therefore x=1$$

$$x=1 \text{을 } y=x-2 \text{에 대입하면 } y=-1$$

따라서 주어진 두 연립방정식의 해는 $x=1, y=-1$ 이다.

$$x=1, y=-1 \text{을 } ax+3y=-2 \text{에 대입하면}$$

$$a-3=-2 \quad \therefore a=1$$

$$x=1, y=-1 \text{을 } 2x+y=b \text{에 대입하면}$$

$$b=2-1=1$$

$$\therefore a+b=1+1=2$$

답 2

21

$$x+y=4 \text{에서 } y=4-x$$

$$y=4-x \text{를 } xy+x+y=k+4 \text{에 대입하면}$$

$$x(4-x)+x+(4-x)=k+4$$

$$-x^2+4x+4=k+4$$

$$\therefore x^2-4x+k=0$$

위의 이차방정식이 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-k \geq 0$$

$$4-k \geq 0 \quad \therefore k \leq 4$$

따라서 구하는 실수 k 의 최댓값은 4이다.

답 ⑤

|다른 풀이|

$$x+y=4 \text{를 } xy+x+y=k+4 \text{에 대입하면}$$

$$xy+4=k+4 \quad \therefore xy=k$$

따라서 $x+y=4, xy=k$ 를 만족시키는 x, y 를 두 근으로 하는 이차방정식 $t^2-4t+k=0$ 이 실근을 갖는다.

이차방정식 $t^2-4t+k=0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-k \geq 0$$

$$4-k \geq 0 \quad \therefore k \leq 4$$

따라서 구하는 실수 k 의 최댓값은 4이다.

22

문제 접근하기

$x^2+(a-1)x-a=0$ 의 해를 구한 후 $2x^2+3ax-a+2=0$ 에 대입하여 공통근이 한 개가 되도록 하는 a 의 값을 구한다.

$$x^2+(a-1)x-a=0 \text{에서}$$

$$(x+a)(x-1)=0$$

$$\therefore x=-a \text{ 또는 } x=1$$

(i) 공통근이 $-a$ 일 때

$$x=-a \text{를 } 2x^2+3ax-a+2=0 \text{에 대입하면}$$

$$2a^2-3a^2-a+2=0$$

$$a^2+a-2=0$$

$$(a+2)(a-1)=0$$

$$\therefore a=-2 \text{ 또는 } a=1$$

② $a=-2$ 이면

$$2x^2-6x+4=0$$

$$x^2-3x+2=0$$

$$(x-1)(x-2)=0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=2$$

따라서 두 개의 공통근을 갖는다.

③ $a=1$ 이면

$$2x^2+3x+1=0$$

$$(x+1)(2x+1)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=-\frac{1}{2}$$

따라서 한 개의 공통근을 갖는다.

(ii) 공통근이 1일 때 $\rightarrow x=1$

$$x=1 \text{을 } 2x^2+3ax-a+2=0 \text{에 대입하면}$$

$$2+3a-a+2=0, 2a=-4 \quad \therefore a=-2$$

이때는 ③의 경우와 같아지므로 두 개의 공통근을 갖는다.

(i), (ii)에서 $a=1$

답 ④

23

처음 땅의 가로와 세로의 길이를 각각 x m, y m라고 하면 대각선의 길이가 13 m이므로

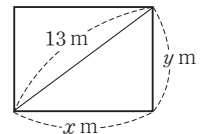
$$x^2+y^2=13^2$$

$$\therefore x^2+y^2=169$$

이 땅의 가로와 세로의 길이를 1 m 줄이고 세로의 길이를 2 m 늘이면 땅의 넓이는 처음 땅의 넓이보다 17 m²만큼 넓어지므로

$$(x-1)(y+2)=xy+17$$

$$xy+2x-y-2=xy+17$$



..... ①

$$\therefore y=2x-19$$

㉔을 ㉓에 대입하면

$$x^2 + (2x-19)^2 = 169$$

$$5x^2 - 76x + 192 = 0$$

$$(x-12)(5x-16)=0$$

$$\therefore x=12 \text{ 또는 } x=\frac{16}{5}$$

이때 가로와 세로의 길이는 모두 자연수이므로

$$x=12$$

$$x=12 \text{ 를 } ㉔ \text{ 에 대입하면 } y=5$$

따라서 처음 직사각형의 가로와 세로의 길이는 각각 12 m,

5 m이므로 그 합은

$$12+5=17(\text{m})$$

답 17 m

참고

연립방정식의 활용

연립방정식의 활용 문제는 다음과 같은 순서로 푼다.

- ① 구하려는 것을 미지수 x, y 로 놓는다.
- ② 주어진 조건을 이용하여 연립방정식을 세운다.
- ③ 방정식을 풀고 구한 해가 문제의 조건에 맞는지 확인한다.

24

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3} \text{ 에서 } \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{3}$$

$$3(x+y)=xy$$

$$xy-3x-3y=0$$

$$x(y-3)-3(y-3)=9$$

$$\therefore (x-3)(y-3)=9$$

$$x, y \text{ 가 자연수이므로 } x-3 > -3, y-3 > -3$$

$$\begin{array}{cc} x-3 & y-3 \\ 1 & 9 \end{array} \Rightarrow x=4, y=12$$

$$\begin{array}{cc} 9 & 1 \end{array} \Rightarrow x=12, y=4$$

$$\begin{array}{cc} 3 & 3 \end{array} \Rightarrow x=6, y=6$$

따라서 구하는 x, y 의 순서쌍은

(4, 12), (6, 6), (12, 4)

의 3개이다.

답 ③



일차부등식과 연립일차부등식

기본을 다지는 유형

본문 110쪽

001

$$(1) 5a - \frac{1}{2} \geq 5b - \frac{1}{2} \text{ 이면 } 5a \geq 5b$$

$$\therefore a \geq b$$

$$(2) 3 - 7a < 3 - 7b \text{ 이면 } -7a < -7b$$

$$\therefore a > b$$

$$(3) -\frac{a}{4} - 2 \leq -\frac{b}{4} - 2 \text{ 이면 } -\frac{a}{4} \leq -\frac{b}{4}$$

$$\therefore a \geq b$$

$$(4) 1 + \frac{a}{3} < 1 + \frac{b}{3} \text{ 이면 } \frac{a}{3} < \frac{b}{3}$$

$$\therefore a < b$$

답 (1) $\geq$ (2) $>$ (3) $\geq$ (4) $<$

002

$$(1) -1 < x \leq 3 \text{ 에서 } -2 < 2x \leq 6$$

$$\therefore -3 < 2x - 1 \leq 5$$

$$(2) -1 < x \leq 3 \text{ 에서 } -9 \leq -3x < 3$$

$$\therefore -5 \leq -3x + 4 < 7$$

$$(3) -1 < x \leq 3 \text{ 에서 } -\frac{1}{2} < \frac{1}{2}x \leq \frac{3}{2}$$

$$\therefore -\frac{11}{2} < \frac{1}{2}x - 5 \leq -\frac{7}{2}$$

답 (1) $-3 < 2x - 1 \leq 5$

(2) $-5 \leq -3x + 4 < 7$

(3) $-\frac{11}{2} < \frac{1}{2}x - 5 \leq -\frac{7}{2}$

003

$$-2a + 1 > -2b + 1 \text{ 에서 } -2a > -2b \quad \therefore a < b$$

$$① a < b \text{ 에서 } 3a < 3b$$

$$② a < b \text{ 에서 } \frac{a}{5} < \frac{b}{5}$$

$$③ a < b \text{ 에서 } -8a > -8b$$

$$④ a < b \text{ 에서 } a - 6 < b - 6$$

$$⑤ a < b \text{ 에서 } 4a < 4b \quad \therefore 4a - 1 < 4b - 1$$

따라서 항상 성립하는 것은 ⑤이다.

답 ⑤

004

ㄱ. $a > b$ 이면 c 의 부호에 관계없이 $a - c > b - c$ (참)

ㄴ. $a > b, c < 0$ 이면 $ac < bc$ (참)

ㄷ. $a > b, c > 0$ 이므로 $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

$$c > d > 0 \text{ 이므로 } \frac{1}{c} < \frac{1}{d}$$

$$\text{이때 } a > 0 \text{ 이므로 } \frac{a}{c} < \frac{a}{d}$$

$$\text{즉, } \frac{a}{d} > \frac{a}{c} > \frac{b}{c} \text{이므로}$$

$$\frac{a}{d} > \frac{b}{c} \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

005

(1) $x-1 \leq 2x-3$ 에서

$$-x \leq -2 \quad \therefore x \geq 2$$

(2) $3(x+1) < 2(x-3)$ 에서

$$3x+3 < 2x-6 \quad \therefore x < -9$$

(3) $0.2x-1 \geq 0.4x+0.6$ 의 양변에 10을 곱하면

$$2x-10 \geq 4x+6, -2x \geq 16 \quad \therefore x \leq -8$$

(4) $\frac{4}{3}x > \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$ 의 양변에 12를 곱하면

$$16x > 6x+9, 10x > 9 \quad \therefore x > \frac{9}{10}$$

답 (1) $x \geq 2$ (2) $x < -9$ (3) $x \leq -8$ (4) $x > \frac{9}{10}$

006

(1) $ax > a-1$ 에서

(i) $a > 0$ 일 때, $x > \frac{a-1}{a}$

(ii) $a < 0$ 일 때, $x < \frac{a-1}{a}$

(iii) $a = 0$ 일 때, $0 \times x > -1$ 이므로 해는 모든 실수이다.

(2) $(a+1)x < a-2$ 에서

(i) $a > -1$ 일 때, $x < \frac{a-2}{a+1}$

(ii) $a < -1$ 일 때, $x > \frac{a-2}{a+1}$

(iii) $a = -1$ 일 때, $0 \times x < -3$ 이므로 해는 없다.

답 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

007

$3(ax-1) > 2ax-7$ 에서

$3ax-3 > 2ax-7, ax > -4$

이때 $a < 0$ 이므로 $x < -\frac{4}{a}$

답 ③

008

$ax+2a < 3x+5$ 에서

$(a-3)x < -2a+5$

부등식의 해가 존재하지 않아야 하므로

$a-3=0, -2a+5 \leq 0$ → 부등식 $ax < b$ 의 해가 존재하지 않으려면 $a=0, b \leq 0$ 이어야 한다.

따라서 $a=3, a \geq \frac{5}{2}$ 이므로 $a=3$

답 ③

009

$-8x+2(a+4) > 3(x+a)$ 에서

$-8x+2a+8 > 3x+3a$

$$-11x > a-8 \quad \therefore x < \frac{8-a}{11}$$

주어진 부등식의 해가 $x < 2$ 이므로

$$\frac{8-a}{11} = 2, 8-a=22 \quad \therefore a=-14$$

답 -14

010

(1) $\begin{cases} 2x-1 \leq x+1 \\ 3x+2 < 2(x-1) \end{cases}$

㉠에서 $x \leq 2$

㉡에서 $3x+2 < 2x-2 \quad \therefore x < -4$

따라서 연립부등식의 해는

$$x < -4$$

(2) $\begin{cases} \frac{5x-1}{3} < 2+\frac{x}{2} \\ 0.2x-1 \leq 5+1.4x \end{cases}$

㉢의 양변에 6을 곱하면

$$2(5x-1) < 12+3x, 10x-2 < 12+3x$$

$$7x < 14 \quad \therefore x < 2$$

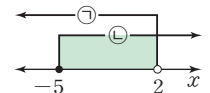
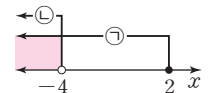
㉣의 양변에 10을 곱하면

$$2x-10 \leq 50+14x, -12x \leq 60$$

$$\therefore x \geq -5$$

따라서 연립부등식의 해는

$$-5 \leq x < 2$$



답 (1) $x < -4$ (2) $-5 \leq x < 2$

011

$\begin{cases} x+6 \leq 4x \\ 3x+4 < x+16 \end{cases}$

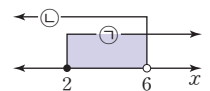
㉠에서 $-3x \leq -6 \quad \therefore x \geq 2$

㉡에서 $2x < 12 \quad \therefore x < 6$

따라서 연립부등식의 해는

$$2 \leq x < 6$$

이므로 정수 x 는 2, 3, 4, 5의 4개이다.



답 ④

012

$\begin{cases} 2x+5 \geq 3x-1 \\ 4x-2 \geq x+3 \end{cases}$

㉠에서 $-x \geq -6 \quad \therefore x \leq 6$

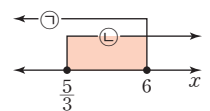
㉡에서 $3x \geq 5 \quad \therefore x \geq \frac{5}{3}$

따라서 연립부등식의 해는

$$\frac{5}{3} \leq x \leq 6$$

즉, $a = \frac{5}{3}, b = 6$ 이므로

$$ab = \frac{5}{3} \times 6 = 10$$



답 ⑤

013

$$\begin{cases} 2(x-1) \leq 3x+5 & \dots\dots\dots ㉠ \\ 3x-2 < 2(x-5)+3 & \dots\dots\dots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $2x-2 \leq 3x+5, -x \leq 7 \quad \therefore x \geq -7$

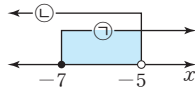
㉡에서 $3x-2 < 2x-10+3 \quad \therefore x < -5$

따라서 연립부등식의 해는

$$-7 \leq x < -5$$

즉, $M = -6, m = -7$ 이므로

$$M-m = -6 - (-7) = 1$$



답 1

014

$$\begin{cases} 1, 2x+0,4 \geq 4-2,4x & \dots\dots\dots ㉠ \\ x+1 \geq \frac{2}{3}(x-1) & \dots\dots\dots ㉡ \end{cases}$$

㉠의 양변에 10을 곱하면

$$12x+4 \geq 40-24x, 36x \geq 36 \quad \therefore x \geq 1$$

㉡의 양변에 3을 곱하면

$$3(x+1) \geq 2(x-1)$$

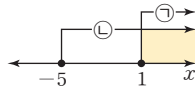
$$3x+3 \geq 2x-2$$

$$\therefore x \geq -5$$

따라서 연립부등식의 해는

$$x \geq 1$$

이므로 수직선 위에 해를 바르게 나타낸 것은 ㉠이다.



답 1

015

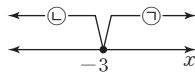
$$(1) \begin{cases} 3x-1 \leq 4x+2 & \dots\dots\dots ㉠ \\ x+1 \leq -2 & \dots\dots\dots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $-x \leq 3 \quad \therefore x \geq -3$

㉡에서 $x \leq -3$

따라서 연립부등식의 해는

$$x = -3$$

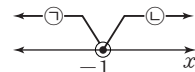


$$(2) \begin{cases} 2x+3 < -x & \dots\dots\dots ㉠ \\ 4-3x \leq 5-2x & \dots\dots\dots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $3x < -3 \quad \therefore x < -1$

㉡에서 $-x \leq 1 \quad \therefore x \geq -1$

따라서 연립부등식의 해는 없다.



답 (1) $x = -3$ (2) 해는 없다.

016

각 연립부등식의 해를 구하면 다음과 같다.

① $x > 1$ ② $2 < x < 3$ ③ 해는 없다.

④ $1 < x \leq 3$ ⑤ $x = 5$

따라서 해가 없는 것은 ③이다.

답 ③

017

$$\begin{cases} -(3x+5) \leq x-9 & \dots\dots\dots ㉠ \\ 0,2x+0,4 \leq 0,6 & \dots\dots\dots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $-3x-5 \leq x-9, -4x \leq -4 \quad \therefore x \geq 1$

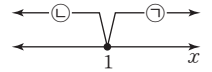
㉡의 양변에 10을 곱하면

$$2x+4 \leq 6, 2x \leq 2 \quad \therefore x \leq 1$$

따라서 연립부등식의 해는

$$x = 1$$

이므로 $a = 1$



답 ④

018

$$\begin{cases} 0,3x-0,6 \leq 0,4x & \dots\dots\dots ㉠ \\ \frac{x}{3}-2 > \frac{3}{4}x+8 & \dots\dots\dots ㉡ \end{cases}$$

㉠의 양변에 10을 곱하면

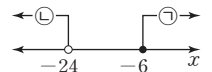
$$3x-6 \leq 4x, -x \leq 6 \quad \therefore x \geq -6$$

㉡의 양변에 12를 곱하면

$$4x-24 > 9x+96, -5x > 120$$

$$\therefore x < -24$$

따라서 연립부등식의 해는 없다.



답 ⑤

019

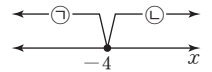
$$\begin{cases} 3x+1 \leq 2x-3 & \dots\dots\dots ㉠ \\ 2(3-x) \geq 2-3x & \dots\dots\dots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $x \leq -4$

㉡에서 $6-2x \geq 2-3x \quad \therefore x \geq -4$

따라서 연립부등식의 해는

$$x = -4$$



①

$x = -4$ 를 $kx-2=6$ 에 대입하면

$$-4k-2=6, -4k=8$$

$$\therefore k = -2 \quad \dots\dots\dots ②$$

답 -2

채점 기준	비율
① 연립부등식의 해를 구할 수 있다.	60%
② k 의 값을 구할 수 있다.	40%

020

$$(1) \begin{cases} -x+5 \leq 3x+1 & \dots\dots\dots ㉠ \\ 3x+1 < 2x+3 & \dots\dots\dots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $-4x \leq -4 \quad \therefore x \geq 1$

㉡에서 $x < 2$

따라서 연립부등식의 해는

$$1 \leq x < 2$$

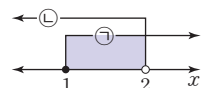
$$(2) \begin{cases} 3x-1 < 2x+3 & \dots\dots\dots ㉠ \\ 2x+3 \leq 4x+7 & \dots\dots\dots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $x < 4$

㉡에서 $-2x \leq 4 \quad \therefore x \geq -2$

따라서 연립부등식의 해는

$$-2 \leq x < 4$$



답 (1) $1 \leq x < 2$ (2) $-2 \leq x < 4$

021

$$\begin{cases} x-1 < 1-\frac{2-x}{3} & \text{..... ㉠} \\ 1-\frac{2-x}{3} \leq \frac{2}{3}x+1 & \text{..... ㉡} \end{cases}$$

㉠의 양변에 3을 곱하면

$$3x-3 < 3-(2-x), 3x-3 < 3-2+x$$

$$2x < 4 \quad \therefore x < 2$$

㉡의 양변에 3을 곱하면

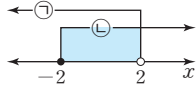
$$3-(2-x) \leq 2x+3, 3-2+x \leq 2x+3$$

$$-x \leq 2 \quad \therefore x \geq -2$$

따라서 연립부등식의 해는

$$-2 \leq x < 2$$

이므로 연립부등식의 해가 아닌 것은 ㉤이다.



답 ㉤

022

$$\begin{cases} 2x-3a > 5 & \text{..... ㉠} \\ x+5 > 6x & \text{..... ㉡} \end{cases}$$

$$\text{㉠에서 } 2x > 3a+5 \quad \therefore x > \frac{3a+5}{2}$$

$$\text{㉡에서 } -5x > -5 \quad \therefore x < 1$$

연립부등식의 해가 $-2 < x < 1$ 이므로

$$\frac{3a+5}{2} = -2, 3a+5 = -4$$

$$3a = -9 \quad \therefore a = -3$$

답 -3

023

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x-4 \geq x-\frac{5}{2} & \text{..... ㉠} \\ 2(x-a) \geq x-4 & \text{..... ㉡} \end{cases}$$

㉠의 양변에 2를 곱하면

$$x-8 \geq 2x-5, -x \geq 3 \quad \therefore x \leq -3$$

$$\text{㉡에서 } 2x-2a \geq x-4 \quad \therefore x \geq 2a-4$$

연립부등식의 해가 $x = -3$ 이므로

$$2a-4 = -3, 2a = 1 \quad \therefore a = \frac{1}{2}$$

답 ㉢

024

$$\begin{cases} x-1 > 8 & \text{..... ㉠} \\ 2x-16 \leq x+a & \text{..... ㉡} \end{cases}$$

$$\text{㉠에서 } x > 9$$

$$\text{㉡에서 } x \leq a+16$$

연립부등식의 해가 $b < x \leq 28$ 이므로 $b=9, a+16=28$

따라서 $a=12, b=9$ 이므로 $a+b=12+9=21$

답 21

025

$$\begin{cases} 3x+a < 2x+5 & \text{..... ㉠} \\ 2x+5 < 4x+b & \text{..... ㉡} \end{cases}$$

$$\text{㉠에서 } x < 5-a$$

$$\text{㉡에서 } -2x < b-5 \quad \therefore x > \frac{5-b}{2} \quad \text{..... ㉢}$$

부등식의 해가 $1 < x < 4$ 이므로

$$5-a=4, \frac{5-b}{2}=1 \quad \therefore a=1, b=3 \quad \text{..... ㉡}$$

$$\therefore ab=1 \times 3=3 \quad \text{..... ㉢}$$

답 3

채점 기준	비율
㉠ 주어진 부등식을 연립부등식으로 나타내고 각 부등식의 해를 구할 수 있다.	40 %
㉡ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
㉢ ab의 값을 구할 수 있다.	20 %

026

$$\begin{cases} 2x-1 < 3 & \text{..... ㉠} \\ ax+3 \leq 8 & \text{..... ㉡} \end{cases}$$

$$\text{㉠에서 } 2x < 4 \quad \therefore x < 2$$

$$\text{㉡에서 } ax \leq 5$$

이때 주어진 수직선에서 연립부등식의 해가 $-1 \leq x < 2$ 이므로 $ax \leq 5$ 의 해는 $x \geq -1$ 이어야 한다.

따라서 $a < 0$ 이고, $ax \leq 5$ 에서 $x \geq \frac{5}{a}$ 이므로

$$\frac{5}{a} = -1 \quad \therefore a = -5$$

답 ㉢

027

$$\begin{cases} x+5 < 1-x & \text{..... ㉠} \\ x-a > 7 & \text{..... ㉡} \end{cases}$$

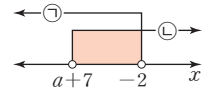
$$\text{㉠에서 } 2x < -4 \quad \therefore x < -2$$

$$\text{㉡에서 } x > a+7 \quad \text{..... ㉢}$$

연립부등식이 해를 가져야 하므로

$$a+7 < -2$$

$$\therefore a < -9$$



$$\text{..... ㉡}$$

$$\text{따라서 정수 } a \text{의 최댓값은 } -10 \text{이다.} \quad \text{..... ㉢}$$

답 -10

채점 기준	비율
㉠ 각 부등식의 해를 구할 수 있다.	40 %
㉡ 연립부등식이 해를 갖도록 하는 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
㉢ 정수 a의 최댓값을 구할 수 있다.	20 %

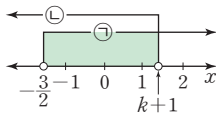
028

$$\begin{cases} 3x-4 < 5x-1 & \text{..... ㉠} \\ 5x-1 < 4x+k & \text{..... ㉡} \end{cases}$$

$$\text{㉠에서 } -2x < 3 \quad \therefore x > -\frac{3}{2}$$

$$\text{㉡에서 } x < k+1$$

부등식을 만족시키는 정수 x 의 개수가 3
이므로
 $1 < k+1 \leq 2$
 $\therefore 0 < k \leq 1$



답 ③

029

연속하는 세 홀수를 $x-2, x, x+2$ 라고 하면
 $12 < (x-2) + x + (x+2) \leq 18$
 $12 < 3x \leq 18 \quad \therefore 4 < x \leq 6$
이때 x 는 홀수이므로 $x=5$
따라서 연속하는 세 홀수는 3, 5, 7이므로 세 홀수의 곱은
 $3 \times 5 \times 7 = 105$

답 105

030

직사각형의 가로의 길이를 x cm라고 하면 세로의 길이는
 $(2x-3)$ cm이다.
이 직사각형의 둘레의 길이가 24 cm 이상 30 cm 미만이므로
 $24 \leq 2x + 2(2x-3) < 30$ ①
 $24 \leq 6x - 6 < 30$
 $24 \leq 6x - 6$ 에서 $-6x \leq -30 \quad \therefore x \geq 5$
 $6x - 6 < 30$ 에서 $6x < 36 \quad \therefore x < 6$
따라서 $5 \leq x < 6$ 이고 ②
 x 는 자연수이므로 $x=5$
즉, 직사각형의 가로의 길이는 5 cm이다. ③

답 5 cm

채점 기준	비율
① 부등식을 세울 수 있다.	40 %
② 부등식의 해를 구할 수 있다.	40 %
③ 직사각형의 가로의 길이를 구할 수 있다.	20 %

031

$|2x-3| > 5$ 에서
 $2x-3 < -5$ 또는 $2x-3 > 5, 2x < -2$ 또는 $2x > 8$
 $\therefore x < -1$ 또는 $x > 4$
따라서 $a=-1, b=4$ 이므로
 $a+b=-1+4=3$

답 ②

032

$|x-7| \leq a+1$ 에서
 $-a-1 \leq x-7 \leq a+1 \quad \therefore -a+6 \leq x \leq a+8$
부등식을 만족시키는 정수 x 의 개수가 9이고 $a+8, -a+6$ 은 정수이므로
 $(a+8) - (-a+6) + 1 = 9$
 $2a+3=9, 2a=6 \quad \therefore a=3$

답 ③

033

(1) 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x 의 값인 2를 기준으로 범위를 나누어 풀면

(i) $x < 2$ 일 때

$$-(2x-4) < x-1 \text{에서}$$

$$-2x+4 < x-1, -3x < -5 \quad \therefore x > \frac{5}{3}$$

$$\text{그런데 } x < 2 \text{이므로 } \frac{5}{3} < x < 2$$

(ii) $x \geq 2$ 일 때

$$2x-4 < x-1 \text{에서 } x < 3$$

$$\text{그런데 } x \geq 2 \text{이므로 } 2 \leq x < 3$$

(i), (ii)에서 부등식의 해는 $\frac{5}{3} < x < 3$

(2) 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x 의 값인 3, 5를 기준으로 범위를 나누어 풀면

(i) $x < 3$ 일 때

$$-(x-3) - (x-5) > 4 \text{에서}$$

$$-x+3-x+5 > 4, -2x+8 > 4$$

$$-2x > -4 \quad \therefore x < 2$$

(ii) $3 \leq x < 5$ 일 때

$$(x-3) - (x-5) > 4 \text{에서 } 0 < x > 2 \text{이므로 해는 없다.}$$

(iii) $x \geq 5$ 일 때

$$(x-3) + (x-5) > 4 \text{에서}$$

$$2x-8 > 4, 2x > 12 \quad \therefore x > 6$$

(i)~(iii)에서 부등식의 해는 $x < 2$ 또는 $x > 6$

답 (1) $\frac{5}{3} < x < 3$ (2) $x < 2$ 또는 $x > 6$

034

절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x 의 값을 기준으로 범위를 나누어 풀면

(i) $1-x < 0$, 즉 $x > 1$ 일 때

$$-(1-x) < 3x-5 \text{에서}$$

$$-1+x < 3x-5, -2x < -4 \quad \therefore x > 2$$

(ii) $1-x \geq 0$, 즉 $x \leq 1$ 일 때

$$1-x < 3x-5 \text{에서}$$

$$-4x < -6 \quad \therefore x > \frac{3}{2}$$

그런데 $x \leq 1$ 이므로 해는 없다.

(i), (ii)에서 부등식의 해는 $x > 2$

$\therefore a=2$

답 ④

035

절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x 의 값인 $-1, 2$ 를 기준으로 범위를 나누어 풀면

(i) $x < -1$ 일 때

$$-(x+1)-5 \leq -(x-2) \text{에서}$$

$$-x-6 \leq -x+2$$

$0 \times x \leq 8$ 이므로 부등식이 항상 성립한다.

$\therefore x < -1$ ①

(ii) $-1 \leq x < 2$ 일 때
 $x+1-5 \leq -(x-2)$ 에서
 $x-4 \leq -x+2, 2x \leq 6 \quad \therefore x \leq 3$
 그런데 $-1 \leq x < 2$ 이므로
 $-1 \leq x < 2$ ②

(iii) $x \geq 2$ 일 때
 $x+1-5 \leq x-2$ 에서
 $0 \times x \leq 2$ 이므로 부등식이 항상 성립한다.
 $\therefore x \geq 2$ ③

(i)~(iii)에서 부등식의 해는 모든 실수이다. ④

답 모든 실수

채점 기준	비율
① $x < -1$ 일 때 부등식의 해를 구할 수 있다.	30%
② $-1 \leq x < 2$ 일 때 부등식의 해를 구할 수 있다.	30%
③ $x \geq 2$ 일 때 부등식의 해를 구할 수 있다.	30%
④ 부등식의 해를 구할 수 있다.	10%

036

절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x 의 값인 $-1, 1$ 을 기준으로 범위를 나누어 풀면

(i) $x < -1$ 일 때
 $-(x+1)+2(x-1) > -1$ 에서
 $x-3 > -1 \quad \therefore x > 2$
 그런데 $x < -1$ 이므로 해는 없다.

(ii) $-1 \leq x < 1$ 일 때
 $(x+1)+2(x-1) > -1$ 에서
 $3x-1 > -1, 3x > 0 \quad \therefore x > 0$
 그런데 $-1 \leq x < 1$ 이므로 $0 < x < 1$

(iii) $x \geq 1$ 일 때
 $(x+1)-2(x-1) > -1$ 에서
 $-x+3 > -1, -x > -4 \quad \therefore x < 4$
 그런데 $x \geq 1$ 이므로 $1 \leq x < 4$

(i)~(iii)에서 부등식의 해는 $0 < x < 4$
 따라서 정수 x 는 1, 2, 3의 3개이다.

답 ①

실력을 높이는 연습 문제

본문 118쪽

01

$-3a-4 < -3b-4$ 에서 $-3a < -3b \quad \therefore a > b$

① $a > b$ 에서 $-6a < -6b$

② $a > b$ 에서 $2a > 2b$

③ $a > b$ 에서 $5a > 5b \quad \therefore 5a-3 > 5b-3$

④ $a > b$ 에서 $\frac{a}{4} > \frac{b}{4}$

⑤ $a > b$ 에서 $-\frac{a}{2} < -\frac{b}{2} \quad \therefore 3-\frac{a}{2} < 3-\frac{b}{2}$

따라서 항상 성립하는 것은 ③이다.

답 ③

02

$7(1-x) > 2-5(x-3)$ 에서

$7-7x > 2-5x+15, -2x > 10 \quad \therefore x < -5$

$3x-1 > ax+4$ 에서 $(3-a)x > 5$

두 일차부등식의 해가 서로 같으므로

$3-a < 0$ 이고 $(3-a)x > 5$ 에서 $x < \frac{5}{3-a}$

$\frac{5}{3-a} = -5$ 이므로 $3-a = -1 \quad \therefore a = 4$

답 ②

03

$\begin{cases} 2x+5 \geq 3x-1 \\ 4x-2 > x+3 \end{cases}$ ㉠

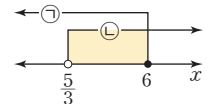
㉠에서 $-x \geq -6 \quad \therefore x \leq 6$

㉡에서 $3x > 5 \quad \therefore x > \frac{5}{3}$

따라서 연립부등식의 해는

$\frac{5}{3} < x \leq 6$

이므로 x 의 값이 될 수 없는 것은 ⑤이다.



답 ⑤

04

$\begin{cases} 0.3x-1 < 0.2(x-1) \\ \frac{x+2}{4} \leq x+5 \end{cases}$ ㉠

㉠의 양변에 10을 곱하면

$3x-10 < 2(x-1), 3x-10 < 2x-2 \quad \therefore x < 8$

㉡의 양변에 4를 곱하면

$x+2 \leq 4(x+5), x+2 \leq 4x+20$

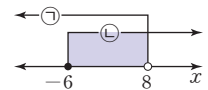
$-3x \leq 18 \quad \therefore x \geq -6$

따라서 연립부등식의 해는

$-6 \leq x < 8$

이므로 모든 정수 x 의 값의 합은

$-6 + (-5) + (-4) + \dots + 6 + 7 = 7$



답 ②

05

㉠. $\begin{cases} x > 2 \\ x \leq -2 \end{cases}$ 이므로 해는 없다.

㉡. $\begin{cases} x \geq -3 \\ x \leq -3 \end{cases}$ 이므로 $x = -3$

㉢. $\begin{cases} x > -1 \\ x < -1 \end{cases}$ 이므로 해는 없다.

$$\therefore \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq \frac{7}{3} \end{cases} \text{이므로 } x \geq \frac{7}{3}$$

따라서 해가 없는 연립부등식인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

06

$$\begin{cases} 5x-2 < 3x+4 \\ 3x+4 \leq 4x+7 \end{cases}$$

..... ㉠

..... ㉡

㉠에서 $2x < 6 \quad \therefore x < 3$

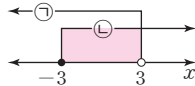
㉡에서 $-x \leq 3 \quad \therefore x \geq -3$

따라서 연립부등식의 해는

$$-3 \leq x < 3$$

이므로 $M=2, m=-3$

$$\therefore Mm=2 \times (-3) = -6$$



답 -6

07

$$\begin{cases} 4x+a < 3x+8 \\ 3x+4 < 7x+b \end{cases}$$

..... ㉠

..... ㉡

㉠에서 $x < 8-a$

㉡에서 $-4x < b-4 \quad \therefore x > \frac{4-b}{4}$

부등식의 해가 $1 < x < 6$ 이므로

$$8-a=6, \frac{4-b}{4}=1 \quad \therefore a=2, b=0$$

$$\therefore a+b=2+0=2$$

답 ①

08

$$\begin{cases} 3x-1 < 5x+3 \\ 5x+3 \leq 4x+a \end{cases}$$

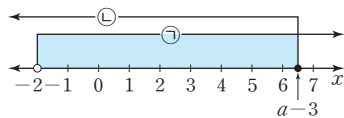
..... ㉠

..... ㉡

㉠에서 $-2x < 4 \quad \therefore x > -2$

㉡에서 $x \leq a-3$

정수 x 의 개수가 8이 되려면 다음 그림과 같아야 한다.



즉, $6 \leq a-3 < 7$ 이어야 하므로 $9 \leq a < 10$

이때 a 는 자연수이므로 $a=9$

답 9

09

$$\begin{cases} 2(x-a) \leq x-1 \\ 3x-1 > x+5 \end{cases}$$

..... ㉠

..... ㉡

㉠에서 $2x-2a \leq x-1 \quad \therefore x \leq 2a-1$

㉡에서 $2x > 6 \quad \therefore x > 3$

연립부등식의 해가 존재하지 않으므로

$$2a-1 \leq 3, 2a \leq 4 \quad \therefore a \leq 2$$



답 $a \leq 2$

10

문제 접근하기

용기의 개수를 미지수 x 로 놓고 찰싹떡의 개수를 이용하여 x 에 대한 부등식을 세운다.

용기의 개수를 x 라고 하자.

찰싹떡을 한 용기에 6개씩 담으면 찰싹떡이 17개가 남으므로 찰싹떡의 개수는

$$6x+17$$

한 용기에 8개씩 담으면 찰싹떡이 1개 이상 3개 미만으로 남으므로

$$8x+1 \leq 6x+17 < 8x+3$$

$$8x+1 \leq 6x+17 \text{에서 } 2x \leq 16 \quad \therefore x \leq 8$$

$$6x+17 < 8x+3 \text{에서 } -2x < -14 \quad \therefore x > 7$$

따라서 $7 < x \leq 8$ 이고 x 는 자연수이므로 $x=8$

즉, 용기의 개수는 8이다.

답 8

11

$$\begin{cases} |x-1| \leq 6 \\ 3x+1 \geq x+5 \end{cases}$$

..... ㉠

..... ㉡

㉠에서 $-6 \leq x-1 \leq 6 \quad \therefore -5 \leq x \leq 7$

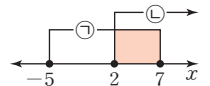
㉡에서 $2x \geq 4 \quad \therefore x \geq 2$

따라서 연립부등식의 해는

$$2 \leq x \leq 7$$

이므로 $a=2, \beta=7$

$$\therefore a+\beta=2+7=9$$



답 9

12

문제 접근하기

절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x 의 값을 기준으로 범위를 나누어 부등식을 푼 후 주어진 해와 비교한다.

절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x 의 값인 $\frac{1}{4}$ 을 기준으로 범위를 나누어 풀면

(i) $x < \frac{1}{4}$ 일 때

$$-(4x-1)-2x < a \text{에서 } -6x < a-1 \quad \therefore x > \frac{1-a}{6}$$

(ii) $x \geq \frac{1}{4}$ 일 때

$$4x-1-2x < a \text{에서 } 2x < a+1 \quad \therefore x < \frac{a+1}{2}$$

이때 주어진 부등식의 해가 $0 < x < 1$ 이고, (i), (ii)에서 부등식의 해가

$$\frac{1-a}{6} < x < \frac{a+1}{2}$$

$$\text{이므로 } \frac{1-a}{6} = 0, \frac{a+1}{2} = 1 \quad \therefore a = 1$$

답 ①

참고

주어진 부등식의 해가 $0 < x < 1$ 이므로 (i)과 (ii)에서 부등식의 해는 각각

$$\frac{1-a}{6} < x < \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \leq x < \frac{a+1}{2} \text{이어야 한다.}$$



이차부등식과 연립이차부등식

기본을 다지는 유형

본문 122쪽

001

(1) $f(x) > 0$ 을 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$x < -4 \text{ 또는 } x > 6$$

(2) $f(x) \leq 0$ 을 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$-4 \leq x \leq 6$$

답 (1) $x < -4$ 또는 $x > 6$ (2) $-4 \leq x \leq 6$

002

$f(x)g(x) < 0$ 에서

$f(x) < 0, g(x) > 0$ 또는 $f(x) > 0, g(x) < 0$

(i) $f(x) < 0, g(x) > 0$ 을 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$-3 < x < 0$$

(ii) $f(x) > 0, g(x) < 0$ 을 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$x < -3 \text{ 또는 } x > 6$$

(i), (ii)에서 $f(x)g(x) < 0$ 의 해는

$$x < -3 \text{ 또는 } -3 < x < 0 \text{ 또는 } x > 6$$

답 $x < -3$ 또는 $-3 < x < 0$ 또는 $x > 6$

003

(1) $x^2 + 3x - 4 > 0$ 에서

$$(x+4)(x-1) > 0 \quad \therefore x < -4 \text{ 또는 } x > 1$$

(2) $2x^2 - 5x - 3 \leq 0$ 에서

$$(2x+1)(x-3) \leq 0 \quad \therefore -\frac{1}{2} \leq x \leq 3$$

(3) $x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2 \geq 0$ 이므로 $x^2 - 8x + 16 < 0$ 의 해는 없다.

(4) $-9x^2 + 6x - 1 \geq 0$ 에서 $9x^2 - 6x + 1 \leq 0$

$$9x^2 - 6x + 1 = (3x-1)^2 \geq 0 \text{이므로 } -9x^2 + 6x - 1 \geq 0 \text{의 해는}$$

$$x = \frac{1}{3}$$

답 (1) $x < -4$ 또는 $x > 1$ (2) $-\frac{1}{2} \leq x \leq 3$

(3) 해는 없다. (4) $x = \frac{1}{3}$

참고

이차부등식 $ax^2 + bx + c > 0$ 의 좌변 $ax^2 + bx + c$ 에 대하여 $a < 0$ 인 경우에는 주어진 이차부등식의 양변에 -1 을 곱하여 x^2 의 계수를 양수로 바꾸어 풀다. 이때 부등호의 방향이 바뀌는 것에 주의한다.

004

(1) $x^2 + 4x + 10 = (x+2)^2 + 6 \geq 6$ 이므로 $x^2 + 4x + 2 > 0$ 의 해는 모든 실수이다.

(2) $2x^2 - 4x + 5 = 2(x-1)^2 + 3 \geq 3$ 이므로 $2x^2 - 4x + 5 \leq 0$ 의 해는 없다.

답 (1) 모든 실수 (2) 해는 없다.

005

$x^2 - 6x - 8 > -2x + 4$ 에서

$$x^2 - 4x - 12 > 0, (x+2)(x-6) > 0$$

$$\therefore x < -2 \text{ 또는 } x > 6$$

따라서 구하는 자연수 x 의 최솟값은 7이다.

답 ④

006

① $(x+1)(x-1) > 0$ 에서

$$x < -1 \text{ 또는 } x > 1$$

② $x^2 + x - 6 < 0$ 에서

$$(x+3)(x-2) < 0 \quad \therefore -3 < x < 2$$

③ $x^2 - 2x - 15 \geq 0$ 에서

$$(x+3)(x-5) \geq 0 \quad \therefore x \leq -3 \text{ 또는 } x \geq 5$$

④ $x^2 + 12x + 38 = (x+6)^2 + 2 \geq 2$ 이므로 $x^2 + 12x + 38 \leq 0$ 의 해는 없다.

⑤ $4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2 \geq 0$ 이므로 $4x^2 - 4x + 1 \geq 0$ 의 해는 모든 실수이다.

따라서 해가 존재하지 않는 것은 ④이다.

답 ④

007

$a < 0$ 이므로 $ax^2 - 2a^2x - 3a^3 \geq 0$ 에서

$$x^2 - 2ax - 3a^2 \leq 0, (x-3a)(x+a) \leq 0$$

$$\therefore 3a \leq x \leq -a$$

답 $3a \leq x \leq -a$

008

$$(1) (x+1)(x-7) > 0 \quad \therefore x^2 - 6x - 7 > 0$$

$$(2) (x+3)(x-4) \leq 0 \quad \therefore x^2 - x - 12 \leq 0$$

$$(3) (x-2)(x-9) \geq 0 \quad \therefore x^2 - 11x + 18 \geq 0$$

$$(4) (x+5)(x+1) < 0 \quad \therefore x^2 + 6x + 5 < 0$$

답 (1) $x^2 - 6x - 7 > 0$ (2) $x^2 - x - 12 \leq 0$

(3) $x^2 - 11x + 18 \geq 0$ (4) $x^2 + 6x + 5 < 0$

009

해가 $b \leq x \leq 6$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x-b)(x-6) \leq 0 \quad \therefore x^2 - (b+6)x + 6b \leq 0$$

이때 $b+6=8, 6b=a$ 이므로 $a=12, b=2$

$$\therefore a+b=12+2=14$$

답 ①

010

해가 $x=-4$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x+4)^2 \leq 0$$

$$\therefore x^2 + 8x + 16 \leq 0$$

이때 $-2k=8, -4k=16$ 이므로

$$k=-4$$

답 -4

011

해가 $-2 < x < 5$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x+2)(x-5) < 0$$

$$\therefore x^2 - 3x - 10 < 0$$

$$\therefore a = -3, b = -10 \quad \text{..... ①}$$

따라서 $ax^2 + bx - 3 > 0$ 은 $-3x^2 - 10x - 3 > 0$ 이므로

$$3x^2 + 10x + 3 < 0, (x+3)(3x+1) < 0$$

$$\therefore -3 < x < -\frac{1}{3} \quad \text{..... ②}$$

$$\text{답 } -3 < x < -\frac{1}{3}$$

채점 기준	비율
① a, b 의 값을 구할 수 있다.	50 %
② 부등식 $ax^2 + bx - 3 > 0$ 의 해를 구할 수 있다.	50 %

012

해가 $x \leq -7$ 또는 $x \geq -1$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x+7)(x+1) \geq 0$$

$$\therefore x^2 + 8x + 7 \geq 0 \quad \text{..... ⑦}$$

⑦의 부등식과 주어진 부등식의 부등호의 방향이 다르므로

$$a < 0$$

⑦의 양변에 a 를 곱하면

$$ax^2 + 8ax + 7a \leq 0$$

이때 $8a = b, 7a = -14$ 이므로

$$a = -2, b = -16$$

$$\therefore ab = -2 \times (-16) = 32$$

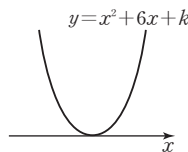
$$\text{답 } ⑤$$

013

이차방정식 $x^2 + 6x + k = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = 3^2 - k = 0$$

$$\therefore k = 9$$



$$\text{답 } 9$$

014

이차부등식 $kx^2 + 2kx - k - 3 \geq 0$ 이 오직 하나의 해를 가져야 하므로

(i) $k < 0$

(ii) 이차방정식 $kx^2 + 2kx - k - 3 = 0$ 의

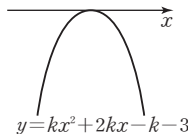
판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = k^2 - k(-k-3) = 0$$

$$2k^2 + 3k = 0, k(2k+3) = 0$$

$$\therefore k = -\frac{3}{2} \text{ 또는 } k = 0$$

(i), (ii)에서 $k = -\frac{3}{2}$



$$\text{답 } ③$$

참고

이차부등식의 해가 한 개일 조건

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

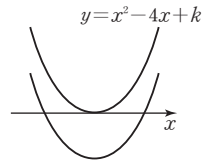
(1) $ax^2 + bx + c \geq 0$ 의 해가 한 개일 조건 $\Rightarrow a < 0, D = 0$

(2) $ax^2 + bx + c \leq 0$ 의 해가 한 개일 조건 $\Rightarrow a > 0, D = 0$

015

이차방정식 $x^2 - 4x + k = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

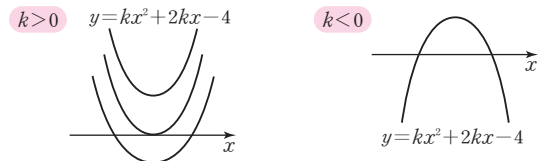
$$\frac{D}{4} = (-2)^2 - k \geq 0 \quad \therefore k \leq 4$$



$$\text{답 } k \leq 4$$

016

이차부등식 $kx^2 + 2kx - 4 > 0$ 이 해를 가지므로 $y = kx^2 + 2kx - 4$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



(i) $k > 0$ 일 때

$kx^2 + 2kx - 4 > 0$ 은 항상 해를 갖는다.

(ii) $k < 0$ 일 때

이차방정식 $kx^2 + 2kx - 4 = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = k^2 + 4k > 0$$

$$k(k+4) > 0 \quad \therefore k < -4 \text{ 또는 } k > 0$$

그런데 $k < 0$ 이므로 $k < -4$

(i), (ii)에서 $k < -4$ 또는 $k > 0$ 이므로 실수 k 의 값이 될 수 없는 것은 ③이다.

$$\text{답 } ③$$

참고

이차부등식의 해가 존재할 조건

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

(1) $ax^2 + bx + c > 0$ 의 해가 존재할 조건 $\Rightarrow a > 0$ 또는 $a < 0, D > 0$

(2) $ax^2 + bx + c < 0$ 의 해가 존재할 조건 $\Rightarrow a < 0$ 또는 $a > 0, D > 0$

017

(1) 이차부등식 $x^2 + kx + 4 > 0$ 이 모든 실수 x 에 대하여 성립해야

하므로 이차방정식 $x^2 + kx + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$D = k^2 - 4 \times 1 \times 4 < 0$$

$$k^2 - 16 < 0, (k+4)(k-4) < 0 \quad \therefore -4 < k < 4$$

(2) 이차부등식 $-x^2 + 3x - k \leq 0$, 즉 $x^2 - 3x + k \geq 0$ 이 모든 실수 x 에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2 - 3x + k = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$D = (-3)^2 - 4 \times 1 \times k \leq 0$$

$$9 - 4k \leq 0 \quad \therefore k \geq \frac{9}{4}$$

$$\text{답 } (1) -4 < k < 4 \quad (2) k \geq \frac{9}{4}$$

018

(1) 이차부등식 $kx^2 - 4kx + 4 \geq 0$ 이 모든 실수 x 에 대하여 성립해야 하므로

(i) $k > 0$

(ii) 이차방정식 $kx^2 - 4kx + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (-2k)^2 - k \times 4 \leq 0$$

$$k^2 - k \leq 0, k(k-1) \leq 0 \quad \therefore 0 \leq k \leq 1$$

(i), (ii)에서 $0 < k \leq 1$

(2) 이차부등식 $kx^2 + kx - 1 < 0$ 이 모든 실수 x 에 대하여 성립해야 하므로

(i) $k < 0$

(ii) 이차방정식 $kx^2 + kx - 1 = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$D = k^2 - 4 \times k \times (-1) < 0$$

$$k^2 + 4k < 0, k(k+4) < 0 \quad \therefore -4 < k < 0$$

(i), (ii)에서 $-4 < k < 0$

답 (1) $0 < k \leq 1$ (2) $-4 < k < 0$

참고

(2) $k=0$ 일 때, $-1 < 0$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 항상 성립한다. 그러나 $k=0$ 이면 이차부등식이 아니므로 $k \neq 0$ 이다.

019

이차부등식 $x^2 + (m+2)x + 2m+1 > 0$ 이 모든 실수 x 에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2 + (m+2)x + 2m+1 = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$D = (m+2)^2 - 4 \times 1 \times (2m+1) < 0$$

$$m^2 - 4m < 0, m(m-4) < 0 \quad \therefore 0 < m < 4$$

따라서 모든 정수 m 의 값의 합은 $1+2+3=6$

답 ④

020

$$kx^2 + 8x \leq 6 - k \text{에서 } kx^2 + 8x + k - 6 \leq 0$$

이차부등식 $kx^2 + 8x + k - 6 \leq 0$ 이 모든 실수 x 에 대하여 성립해야 하므로

(i) $k < 0$ ①

(ii) 이차방정식 $kx^2 + 8x + k - 6 = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = 4^2 - k(k-6) \leq 0$$

$$-kx^2 + 6k + 16 \leq 0, k^2 - 6k - 16 \geq 0$$

$$(k+2)(k-8) \geq 0$$

$$\therefore k \leq -2 \text{ 또는 } k \geq 8 \text{ ②}$$

(i), (ii)에서 $k \leq -2$

따라서 조건을 만족시키는 정수 k 의 최댓값은 -2 이다. ③

답 -2

채점 기준	비율
① x^2 의 계수를 이용하여 k 의 값의 범위를 구할 수 있다.	20%
② 이차방정식의 판별식을 이용하여 k 의 값의 범위를 구할 수 있다.	50%
③ 정수 k 의 최댓값을 구할 수 있다.	30%

021

이차부등식 $(k-1)x^2 + 2(k-1)x + 1 > 0$ 이 모든 실수 x 에 대하여 성립해야 하므로

(i) $k-1 > 0 \quad \therefore k > 1$

(ii) 이차방정식 $(k-1)x^2 + 2(k-1)x + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라고

$$\text{하면 } \frac{D}{4} = (k-1)^2 - (k-1) \times 1 < 0$$

$$k^2 - 3k + 2 < 0, (k-1)(k-2) < 0 \quad \therefore 1 < k < 2$$

(i), (ii)에서 $1 < k < 2$

답 ②

022

이차부등식 $x^2 + 8x + a - 4 < 0$ 이 해를 갖지 않으려면 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + 8x + a - 4 \geq 0$ 이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2 + 8x + a - 4 = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = 4^2 - (a-4) \leq 0, -a+20 \leq 0 \quad \therefore a \geq 20$$

답 $a \geq 20$

023

이차부등식 $kx^2 + 4x + k - 3 \geq 0$ 이 해를 갖지 않으려면 모든 실수 x 에 대하여 $kx^2 + 4x + k - 3 < 0$ 이 성립해야 하므로

(i) $k < 0$

(ii) 이차방정식 $kx^2 + 4x + k - 3 = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = 2^2 - k(k-3) < 0$$

$$-k^2 + 3k + 4 < 0, k^2 - 3k - 4 > 0$$

$$(k+1)(k-4) > 0 \quad \therefore k < -1 \text{ 또는 } k > 4$$

(i), (ii)에서 $k < -1$

따라서 정수 k 의 최댓값은 -2 이다.

답 ③

참고

이차부등식이 해를 갖지 않을 조건

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

(1) 이차부등식 $ax^2 + bx + c > 0$ 이 해를 갖지 않는다.

⇒ 이차부등식 $ax^2 + bx + c \leq 0$ 의 해는 모든 실수이다.

⇒ $a < 0, D \leq 0$

(2) 이차부등식 $ax^2 + bx + c < 0$ 이 해를 갖지 않는다.

⇒ 이차부등식 $ax^2 + bx + c \geq 0$ 의 해는 모든 실수이다.

⇒ $a > 0, D \leq 0$

024

(1) $y = x^2 - 3x - 5$ 의 그래프가 직선 $y = -4x + 1$ 보다 위쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위는

$$x^2 - 3x - 5 > -4x + 1 \text{에서 } x^2 + x - 6 > 0$$

$$(x+3)(x-2) > 0 \quad \therefore x < -3 \text{ 또는 } x > 2$$

(2) $y = x^2 - 9x + 1$ 의 그래프가 $y = -x^2 + 2x - 4$ 의 그래프보다 아래쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위는

$$x^2 - 9x + 1 < -x^2 + 2x - 4 \text{에서 } 2x^2 - 11x + 5 < 0$$

$$(2x-1)(x-5) < 0 \quad \therefore \frac{1}{2} < x < 5$$

답 (1) $x < -3$ 또는 $x > 2$ (2) $\frac{1}{2} < x < 5$

025

$y=x^2+6x-3$ 의 그래프와 직선 $y=kx-7$ 이 만나지 않으려면 이차방정식 $x^2+6x-3=kx-7$, 즉 $x^2+(6-k)x+4=0$ 이 실근을 갖지 않아야 한다.

이차방정식 $x^2+(6-k)x+4=0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$D=(6-k)^2-4 \times 1 \times 4 < 0$$

$$k^2-12k+20 < 0, (k-2)(k-10) < 0$$

$$\therefore 2 < k < 10$$

따라서 자연수 k 는 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9의 7개이다.

답 ⑤

026

$$-5t^2+28t \geq 15 \text{에서}$$

$$5t^2-28t+15 \leq 0, (5t-3)(t-5) \leq 0$$

$$\therefore \frac{3}{5} \leq t \leq 5$$

따라서 공을 쏘아 올린 지 $\frac{3}{5}(=0.6)$ 초부터 5초까지 공의 높이가

15 m 이상이므로 공의 높이가 15 m 이상인 시간은

$$5-0.6=4.4(\text{초})$$

동안이다.

답 4.4초

027

직사각형의 가로의 길이를 x cm라고 하면 세로의 길이는

$(21-x)$ cm이므로 $\rightarrow$ 세로의 길이는 $\frac{1}{2}(42-2x)$ cm

$$x(21-x) \geq 108 \text{에서}$$

$$x^2-21x+108 \leq 0, (x-9)(x-12) \leq 0$$

$$\therefore 9 \leq x \leq 12$$

따라서 직사각형의 가로의 길이의 최댓값은 12 cm이다.

답 12 cm

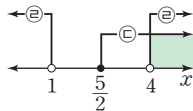
028

$$(1) \begin{cases} -3x+7 \leq x-3 & \dots\dots\dots ㉠ \\ x^2-5x+4 > 0 & \dots\dots\dots ㉡ \end{cases}$$

$$\text{㉠에서 } -4x \leq -10 \quad \therefore x \geq \frac{5}{2} \quad \dots\dots\dots ㉢$$

$$\text{㉡에서 } (x-1)(x-4) > 0 \\ \therefore x < 1 \text{ 또는 } x > 4 \quad \dots\dots\dots ㉣$$

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면
 $x > 4$

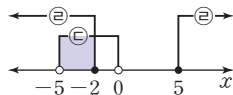


$$(2) \begin{cases} x^2+5x < 0 & \dots\dots\dots ㉠ \\ x^2-3x-10 \geq 0 & \dots\dots\dots ㉡ \end{cases}$$

$$\text{㉠에서 } x(x+5) < 0 \quad \therefore -5 < x < 0 \quad \dots\dots\dots ㉢$$

$$\text{㉡에서 } (x+2)(x-5) \geq 0 \\ \therefore x \leq -2 \text{ 또는 } x \geq 5 \quad \dots\dots\dots ㉣$$

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면
 $-5 < x \leq -2$



답 (1) $x > 4$ (2) $-5 < x \leq -2$

029

$$(1) \begin{cases} 6 < x^2-x & \dots\dots\dots ㉠ \\ x^2-x \leq 4x & \dots\dots\dots ㉡ \end{cases}$$

$$\text{㉠에서 } x^2-x-6 > 0, (x+2)(x-3) > 0$$

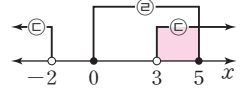
$$\therefore x < -2 \text{ 또는 } x > 3 \quad \dots\dots\dots ㉢$$

$$\text{㉡에서 } x^2-5x \leq 0, x(x-5) \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq x \leq 5 \quad \dots\dots\dots ㉣$$

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면

$$3 < x \leq 5$$



$$(2) \begin{cases} -x+4 < x^2+2x & \dots\dots\dots ㉠ \\ x^2+2x \leq -4x-5 & \dots\dots\dots ㉡ \end{cases}$$

$$\text{㉠에서 } x^2+3x-4 > 0, (x+4)(x-1) > 0$$

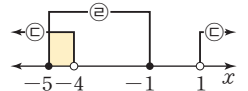
$$\therefore x < -4 \text{ 또는 } x > 1 \quad \dots\dots\dots ㉢$$

$$\text{㉡에서 } x^2+6x+5 \leq 0, (x+5)(x+1) \leq 0$$

$$\therefore -5 \leq x \leq -1 \quad \dots\dots\dots ㉣$$

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면

$$-5 \leq x < -4$$



답 (1) $3 < x \leq 5$ (2) $-5 \leq x < -4$

030

$$\begin{cases} x^2-4x-12 \leq 0 & \dots\dots\dots ㉠ \\ x^2-4x+4 > 0 & \dots\dots\dots ㉡ \end{cases}$$

$$\text{㉠에서 } (x+2)(x-6) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq x \leq 6 \quad \dots\dots\dots ㉢$$

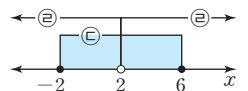
$$\text{㉡에서 } (x-2)^2 > 0$$

$$\therefore x \neq 2 \text{인 모든 실수}$$

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면

$$-2 \leq x < 2 \text{ 또는 } 2 < x \leq 6$$

따라서 정수 x 는 -2, -1, 0, 1, 3, 4, 5, 6의 8개이다.



답 ④

031

$$\begin{cases} |x-1| \leq 4 & \dots\dots\dots ㉠ \\ (x+1)(x-6) \leq 0 & \dots\dots\dots ㉡ \end{cases}$$

$$\text{㉠에서 } -4 \leq x-1 \leq 4$$

$$\therefore -3 \leq x \leq 5 \quad \dots\dots\dots ㉢$$

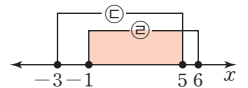
$$\text{㉡에서 } -1 \leq x \leq 6 \quad \dots\dots\dots ㉣$$

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면

$$-1 \leq x \leq 5$$

따라서 $M=5, m=-1$ 이므로

$$Mm=5 \times (-1) = -5$$



답 -5

032

$$\begin{cases} x^2+9x < 3x^2+2x+5 & \dots\dots\dots ㉠ \\ 3x^2+2x+5 \leq 2x^2+8 & \dots\dots\dots ㉡ \end{cases}$$

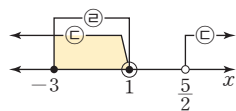
$$\text{㉠에서 } 2x^2-7x+5 > 0, (x-1)(2x-5) > 0$$

$$\therefore x < 1 \text{ 또는 } x > \frac{5}{2} \quad \dots\dots\dots ㉢$$

㉔에서 $x^2+2x-3 \leq 0$, $(x+3)(x-1) \leq 0$
 $\therefore -3 \leq x \leq 1$ ㉔

㉔, ㉔의 공통부분을 구하면
 $-3 \leq x < 1$

따라서 모든 정수 x 의 값의 합은
 $-3 + (-2) + (-1) + 0 = -6$



답 ①

033

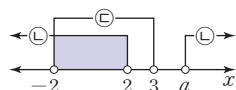
$\begin{cases} x^2-x-6 < 0 & \text{..... ㉔} \\ (x-2)(x-a) > 0 & \text{..... ㉔} \end{cases}$

㉔에서 $(x+2)(x-3) < 0$

$\therefore -2 < x < 3$ ㉔

㉔, ㉔의 공통부분이 $-2 < x < 2$ 이려면
 오른쪽 그림과 같아야 하므로
 $a \geq 3$

따라서 실수 a 의 최솟값은 3이다.



답 3

034

$\begin{cases} -1-3x > a & \text{..... ㉔} \\ x^2+4x-5 \leq 0 & \text{..... ㉔} \end{cases}$

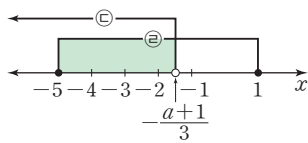
㉔에서 $-3x > a+1$

$\therefore x < -\frac{a+1}{3}$ ㉔

㉔에서 $(x+5)(x-1) \leq 0$

$\therefore -5 \leq x \leq 1$ ㉔

연립부등식을 만족시키는 정수
 x 의 개수가 4이려면 ㉔, ㉔의
 공통부분이 오른쪽 그림과 같아
 야 하므로



$-2 < -\frac{a+1}{3} \leq -1$, $3 \leq a+1 < 6$

$\therefore 2 \leq a < 5$ ㉔

답 $2 \leq a < 5$

채점 기준	비율
① 부등식 $-1-3x > a$ 의 해를 a 를 사용하여 나타낼 수 있다.	30%
② 부등식 $x^2+4x-5 \leq 0$ 의 해를 구할 수 있다.	30%
③ a 의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%

035

새로 만든 직육면체의 가로 길이는 $(x+4)$ cm, 세로 길이는
 $(x-3)$ cm, 높이는 x cm이므로

$x+4 > 0$, $x-3 > 0$, $x > 0$

$\therefore x > 3$ ㉔

직육면체의 부피가 처음 정육면체의 부피보다 작아야 하므로

$x(x+4)(x-3) < x^3$

$x^2-12x < 0$, $x(x-12) < 0$

$\therefore 0 < x < 12$ ㉔

㉔, ㉔의 공통부분을 구하면

$3 < x < 12$

따라서 자연수 x 는 4, 5, 6, ..., 11의 8개이다.

답 ①

036

이차방정식 $x^2-(k+2)x+k+5=0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$D = \{-(k+2)\}^2 - 4 \times 1 \times (k+5) < 0$

$k^2-16 < 0$, $(k+4)(k-4) < 0$

$\therefore -4 < k < 4$

따라서 정수 k 는 -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3의 7개이다.

답 7

참고

이차방정식의 근의 판별

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 판별식을 D 라고 하면

(1) $D > 0 \Rightarrow$ 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(2) $D = 0 \Rightarrow$ 중근(서로 같은 두 실근)을 갖는다.

(3) $D < 0 \Rightarrow$ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

$D \geq 0 \Rightarrow$ 실근을 갖는다.

037

이차방정식 $x^2-2x-k=0$ 의 판별식을 D_1 이라고 하면

$\frac{D_1}{4} = (-1)^2 - (-k) \geq 0$

$1+k \geq 0 \quad \therefore k \geq -1$ ㉔

이차방정식 $x^2+2\sqrt{2}kx+k^2-k+6=0$ 의 판별식을 D_2 라고 하면

$\frac{D_2}{4} = (\sqrt{2}k)^2 - (k^2-k+6) < 0$

$k^2+k-6 < 0$, $(k+3)(k-2) < 0$

$\therefore -3 < k < 2$ ㉔

㉔, ㉔의 공통부분을 구하면

$-1 \leq k < 2$

따라서 실수 k 의 최솟값은 -1이다.

답 -1

038

(i) 이차방정식 $x^2-2(k+4)x+2(k^2-2)=0$ 의 판별식을 D 라고
 하면

$\frac{D}{4} = \{-(k+4)\}^2 - 2(k^2-2) \geq 0$

$-k^2+8k+20 \geq 0$, $k^2-8k-20 \leq 0$

$(k+2)(k-10) \leq 0$

$\therefore -2 \leq k \leq 10$ ㉔

(ii) (두 근의 합) $= 2(k+4) > 0$, $k+4 > 0$

$\therefore k > -4$ ㉔

(iii) (두 근의 곱) $= 2(k^2-2) > 0$, $k^2-2 > 0$

$(k+\sqrt{2})(k-\sqrt{2}) > 0$

$\therefore k < -\sqrt{2}$ 또는 $k > \sqrt{2}$ ㉔

㉔, ㉔, ㉔의 공통부분을 구하면

$-2 \leq k < -\sqrt{2}$ 또는 $\sqrt{2} < k \leq 10$

따라서 실수 k 의 최솟값은 -2이다.

답 -2

참고

이차방정식의 실근의 부호

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 두 실근을 α, β 라 하고, 판별식을 D 라고 하면

- (1) 두 근이 모두 양수일 조건 $\Rightarrow D \geq 0, \alpha + \beta > 0, \alpha\beta > 0$
- (2) 두 근이 모두 음수일 조건 $\Rightarrow D \geq 0, \alpha + \beta < 0, \alpha\beta > 0$
- (3) 두 근이 서로 다른 부호일 조건 $\Rightarrow \alpha\beta < 0$

039

이차방정식 $x^2+7x+a^2+5a-14=0$ 의 두 근의 부호가 서로 다르므로

$$(\text{두 근의 곱}) = a^2+5a-14 < 0$$

$$(a+7)(a-2) < 0 \quad \therefore -7 < a < 2$$

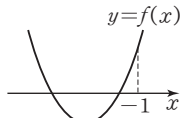
따라서 모든 정수 a 의 값의 합은

$$-6 + (-5) + (-4) + \cdots + 1 = -20$$

답 ③

040

$f(x)=x^2+kx+4$ 로 놓으면 $f(x)=0$ 의 두 근이 모두 -1 보다 작으므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(i) 이차방정식 $x^2+kx+4=0$ 의 판별식을

D 라고 하면

$$D = k^2 - 4 \times 1 \times 4 \geq 0$$

$$k^2 - 16 \geq 0, (k+4)(k-4) \geq 0$$

$$\therefore k \leq -4 \text{ 또는 } k \geq 4$$

..... ㉠

(ii) $f(-1)=1-k+4>0, -k+5>0$

$$\therefore k < 5$$

..... ㉡

(iii) $y=f(x)$ 의 그래프의 축의 방정식이 $x=-\frac{k}{2}$ 이므로

$$-\frac{k}{2} < -1 \quad \therefore k > 2$$

..... ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면 $4 \leq k < 5$

따라서 실수 k 의 최솟값은 4이다.

답 ④

041

$f(x)=x^2+k^2x+k-7$ 로 놓으면

$$f(2)=4+2k^2+k-7 < 0$$

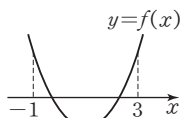
$$2k^2+k-3 < 0, (2k+3)(k-1) < 0$$

$$\therefore -\frac{3}{2} < k < 1$$

답 ②

042

$f(x)=x^2-ax+2a$ 로 놓으면 $f(x)=0$ 의 두 근이 모두 -1 과 3 사이에 있으므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(i) 이차방정식 $x^2-ax+2a=0$ 의 판별식을

D 라고 하면

$$D = (-a)^2 - 4 \times 1 \times 2a \geq 0$$

$$a^2 - 8a \geq 0, a(a-8) \geq 0$$

$$\therefore a \leq 0 \text{ 또는 } a \geq 8$$

..... ㉠

(ii) $f(-1)=1+a+2a>0, 3a+1>0$

$$\therefore a > -\frac{1}{3}$$

..... ㉡

(iii) $f(3)=9-3a+2a>0, -a+9>0$

$$\therefore a < 9$$

..... ㉢

(iv) $y=f(x)$ 의 그래프의 축의 방정식이 $x=\frac{a}{2}$ 이므로

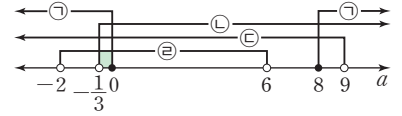
$$-1 < \frac{a}{2} < 3 \quad \therefore -2 < a < 6$$

..... ㉣

㉠, ㉡, ㉢, ㉣의 공통부

분을 구하면

$$-\frac{1}{3} < a \leq 0$$



$$\text{답 } -\frac{1}{3} < a \leq 0$$

실력을 높이는 연습 문제

본문 132쪽

01

$ax^2+(b-m)x+c-n < 0$ 에서

$$ax^2+bx+c < mx+n$$

이차부등식 $ax^2+bx+c < mx+n$ 의 해는 이차함수

$y=ax^2+bx+c$ 의 그래프가 직선 $y=mx+n$ 보다 아래쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위이므로

$$-5 < x < 1$$

$$\text{답 } -5 < x < 1$$

02

$$x^2+8x \geq 3x^2+x-4 \text{에서}$$

$$-2x^2+7x+4 \geq 0, 2x^2-7x-4 \leq 0$$

$$(2x+1)(x-4) \leq 0$$

$$\therefore -\frac{1}{2} \leq x \leq 4$$

따라서 정수 x 의 최댓값은 4이다.

답 ⑤

03

문제 접근하기

절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x 의 값을 기준으로 x 의 값의 범위를 나누어 부등식을 푼다.

$$x^2-2x-3 < 3|x-1| \text{에서}$$

(i) $x < 1$ 일 때

$$x^2-2x-3 < -3(x-1), x^2-2x-3 < -3x+3$$

$$x^2+x-6 < 0, (x+3)(x-2) < 0$$

$$\therefore -3 < x < 2$$

이때 $x < 1$ 이므로 $-3 < x < 1$

(ii) $x \geq 1$ 일 때

$$x^2 - 2x - 3 < 3(x-1), x^2 - 2x - 3 < 3x - 3$$

$$x^2 - 5x < 0, x(x-5) < 0$$

$$\therefore 0 < x < 5$$

이때 $x \geq 1$ 이므로 $1 \leq x < 5$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$$-3 < x < 5$$

답 ①

04

해가 $\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) < 0$$

$$\therefore x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6} < 0$$

..... ①

①의 부등식과 주어진 부등식의 부등호의 방향이 다르므로

$$a < 0$$

①의 양변에 a 를 곱하면

$$ax^2 - \frac{5}{6}ax + \frac{a}{6} > 0$$

$$\text{이때 } b = -\frac{5}{6}a, -2 = \frac{a}{6} \text{이므로}$$

$$a = -12, b = 10$$

$$\therefore a + b = -12 + 10 = -2$$

답 ①

05

x 에 대한 이차부등식 $ax^2 + bx + c \geq 0$ 의 해가 오직 $x=3$ 뿐이므로 $a < 0, a(x-3)^2 \geq 0$ 이어야 한다.

$$a(x-3)^2 \geq 0 \text{에서 } ax^2 - 6ax + 9a \geq 0$$

$$\therefore b = -6a, c = 9a$$

$$bx^2 + cx + 6a < 0 \text{에서}$$

$$-6ax^2 + 9ax + 6a < 0$$

$$a < 0 \text{이므로 } 2x^2 - 3x - 2 < 0$$

$$(2x+1)(x-2) < 0$$

$$\therefore -\frac{1}{2} < x < 2$$

따라서 정수 x 는 0, 1의 2개이다.

답 ②

06

이차부등식

$$(a-10)x^2 + 2(a-6)x - a \geq 0$$

이 오직 하나의 해를 가지므로

$$(i) a-10 < 0 \quad \therefore a < 10$$

(ii) 이차방정식 $(a-10)x^2 + 2(a-6)x - a = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (a-6)^2 - (a-10) \times (-a) = 0$$

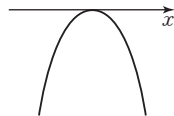
$$2a^2 - 22a + 36 = 0, a^2 - 11a + 18 = 0$$

$$(a-2)(a-9) = 0$$

$$\therefore a = 2 \text{ 또는 } a = 9$$

(i), (ii)에서 $a = 2$ 또는 $a = 9$

답 2, 9



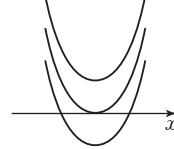
$$y = (a-10)x^2 + 2(a-6)x - a$$

07

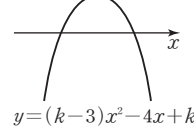
이차부등식 $(k-3)x^2 - 4x + k > 0$ 이 해를 가져야 하므로

$y = (k-3)x^2 - 4x + k$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.

$$k > 3 \quad y = (k-3)x^2 - 4x + k$$



$$k < 3$$



$$y = (k-3)x^2 - 4x + k$$

(i) $k-3 > 0$, 즉 $k > 3$ 일 때

이차함수 $y = (k-3)x^2 - 4x + k$ 의 그래프는 아래로 볼록하므로 주어진 이차부등식은 항상 해를 갖는다.

(ii) $k-3 < 0$, 즉 $k < 3$ 일 때

이차부등식이 해를 가지려면 이차방정식

$(k-3)x^2 - 4x + k = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (-2)^2 - (k-3) \times k > 0$$

$$k^2 - 3k - 4 < 0, (k+1)(k-4) < 0$$

$$\therefore -1 < k < 4$$

이때 $k < 3$ 이므로 $-1 < k < 3$

(i), (ii)에서 $-1 < k < 3$ 또는 $k > 3$

답 $-1 < k < 3$ 또는 $k > 3$

08

이차부등식 $x^2 + 2(k+2)x - k + 10 > 0$ 이 모든 실수 x 에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2 + 2(k+2)x - k + 10 = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (k+2)^2 - (-k+10) < 0$$

$$k^2 + 5k - 6 < 0, (k+6)(k-1) < 0$$

$$\therefore -6 < k < 1$$

따라서 정수 k 의 최솟값은 -5 이다.

답 ①

09

문제 접근하기

$f(x) = x^2 - 6x + k^2 - 6k - 2$ 로 놓고 $3 \leq x \leq 5$ 에서

$(f(x) \text{의 최댓값}) < 0$ 임을 이용한다.

$f(x) = x^2 - 6x + k^2 - 6k - 2$ 로 놓으면

$$f(x) = (x-3)^2 + k^2 - 6k - 11$$

$3 \leq x \leq 5$ 에서 $f(x) < 0$ 이어야 하므로 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.

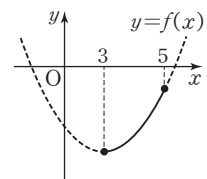
$3 \leq x \leq 5$ 에서 $f(x)$ 는 $x=5$ 일 때 최댓값 $f(5)$ 를 갖고, $f(5) < 0$ 이어야 하므로

$$25 - 30 + k^2 - 6k - 2 < 0$$

$$k^2 - 6k - 7 < 0$$

$$(k+1)(k-7) < 0$$

$$\therefore -1 < k < 7$$



따라서 자연수 k 의 최댓값은 6이다.

답 ③

참고

제한된 범위에서 항상 성립하는 이차부등식

(1) $a \leq x \leq \beta$ 에서 이차부등식 $f(x) > 0$ 이 항상 성립한다.

→ $a \leq x \leq \beta$ 에서 $(f(x) \text{의 최솟값}) > 0$ 이다.

(2) $a \leq x \leq \beta$ 에서 이차부등식 $f(x) < 0$ 이 항상 성립한다.

→ $a \leq x \leq \beta$ 에서 $(f(x) \text{의 최댓값}) < 0$ 이다.

10

이차부등식 $-x^2 + (1-k)x + 5 - 2k \geq 0$, 즉

$x^2 + (k-1)x + 2k - 5 \leq 0$ 이 해를 갖지 않으려면 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + (k-1)x + 2k - 5 > 0$ 이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2 + (k-1)x + 2k - 5 = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$D = (k-1)^2 - 4 \times 1 \times (2k-5) < 0$$

$$k^2 - 10k + 21 < 0, (k-3)(k-7) < 0$$

$$\therefore 3 < k < 7$$

따라서 $M=6, m=4$ 이므로

$$M+m=6+4=10$$

답 ④

11

이차함수 $y=kx^2-2$ 의 그래프가 직선 $y=6x-k-2$ 보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 x 에 대하여 $kx^2-2 > 6x-k-2$, 즉

$kx^2-6x+k > 0$ 이 성립해야 하므로

(i) $k > 0$

(ii) 이차방정식 $kx^2-6x+k=0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (-3)^2 - k^2 < 0$$

$$k^2 - 9 > 0, (k+3)(k-3) > 0$$

$$\therefore k < -3 \text{ 또는 } k > 3$$

(i), (ii)에서 $k > 3$

답 $k > 3$

12

길의 폭을 x m라고 하면 길을 제외한 땅의 넓이가 875 m^2 이상이 되어야 하므로

$$(40-x)(30-x) \geq 875$$

$$x^2 - 70x + 325 \geq 0$$

$$(x-5)(x-65) \geq 0$$

$$\therefore x \leq 5 \text{ 또는 } x \geq 65 \rightarrow x > 0, 40-x > 0, 30-x > 0 \text{에서}$$

$$\text{그런데 } 0 < x < 30 \text{이므로 } 0 < x \leq 5 \quad 0 < x < 30$$

따라서 길의 최대 폭은 5 m이다.

답 5 m

13

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 3 \leq 0 \\ x^2 + 7x + 10 \geq 0 \end{cases}$$

..... ㉠

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 3 \leq 0 \\ x^2 + 7x + 10 \geq 0 \end{cases}$$

..... ㉡

$$\text{㉠에서 } (x+3)(x-1) \leq 0$$

$$\therefore -3 \leq x \leq 1$$

..... ㉢

$$\text{㉡에서 } (x+5)(x+2) \geq 0$$

$$\therefore x \leq -5 \text{ 또는 } x \geq -2$$

㉢, ㉡의 공통부분을 구하면

$$-2 \leq x \leq 1$$

해가 $-2 \leq x \leq 1$ 이고 x^2 의 계수가 1인

이차부등식은

$$(x+2)(x-1) \leq 0$$

$$\therefore x^2 + x - 2 \leq 0$$

..... ㉣

㉡의 부등식과 부등식 $ax^2 - bx + 4 \geq 0$ 의 해가 서로 같고, 두 부등식의 부등호의 방향이 다르므로

$$a < 0$$

㉡의 양변에 a 를 곱하면

$$ax^2 + ax - 2a \geq 0$$

이때 $-b=a, 4=-2a$ 이므로 $a=-2, b=2$

$$\therefore ab = -2 \times 2 = -4$$

답 -4

14

$$\begin{cases} 3x - x^2 \leq -2x + 6 \\ -2x + 6 < x + a \end{cases}$$

..... ㉠

$$\begin{cases} 3x - x^2 \leq -2x + 6 \\ -2x + 6 < x + a \end{cases}$$

..... ㉡

$$\text{㉠에서 } -x^2 + 5x - 6 \leq 0, x^2 - 5x + 6 \geq 0$$

$$(x-2)(x-3) \geq 0$$

$$\therefore x \leq 2 \text{ 또는 } x \geq 3$$

..... ㉢

$$\text{㉡에서 } -3x < a - 6$$

$$\therefore x > \frac{6-a}{3}$$

..... ㉣

㉢, ㉣의 공통부분이 $-1 < x \leq 2$ 이려면 오

른쪽 그림과 같아야 하므로

$$\frac{6-a}{3} = -1$$

$$6-a = -3 \quad \therefore a = 9$$

답 ④

15

문제 접근하기

트럭으로 운송하는 것이 가장 유리하려면

(트럭을 이용할 경우 운송 비용) < (선박을 이용할 경우 운송 비용)

(트럭을 이용할 경우 운송 비용) < (열차를 이용할 경우 운송 비용)

을 모두 만족시켜야 한다.

$$x^2 + 4x + 20 < x + 60 \text{에서}$$

$$x^2 + 3x - 40 < 0, (x+8)(x-5) < 0$$

$$\therefore -8 < x < 5$$

..... ㉠

$$x^2 + 4x + 20 < 6x + 44 \text{에서}$$

$$x^2 - 2x - 24 < 0, (x+4)(x-6) < 0$$

$$\therefore -4 < x < 6$$

..... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-4 < x < 5$

그런데 $x > 0$ 이므로 $0 < x < 5$

따라서 트럭으로 운송하는 것이 가장 유리할 때의 운송 거리는

$$100 \times 5 = 500 \text{ (km) 미만일 때이므로}$$

$$a = 500$$

답 500

16

이차방정식 $x^2+ax+1=0$ 의 판별식을 D_1 이라고 하면
 $D_1=a^2-4 \times 1 \times 1 > 0$
 $a^2-4 > 0, (a+2)(a-2) > 0$
 $\therefore a < -2$ 또는 $a > 2$ ㉠
 이차방정식 $x^2-2ax+2a+3=0$ 의 판별식을 D_2 라고 하면
 $\frac{D_2}{4}=(-a)^2-(2a+3) < 0$
 $a^2-2a-3 < 0, (a+1)(a-3) < 0$
 $\therefore -1 < a < 3$ ㉡
 ㉠, ㉡의 공통부분을 구하면
 $2 < a < 3$

답 $2 < a < 3$

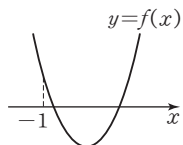
17

이차방정식 $x^2+(a^2-2a-15)x+a^2-16=0$ 의 두 근의 절댓값이 같고 부호가 서로 다르므로
 (두 근의 합)=0, (두 근의 곱)<0
 (i) (두 근의 합) $=-(a^2-2a-15)=0$
 $a^2-2a-15=0, (a+3)(a-5)=0$
 $\therefore a=-3$ 또는 $a=5$
 (ii) (두 근의 곱) $=a^2-16 < 0, (a+4)(a-4) < 0$
 $\therefore -4 < a < 4$
 (i), (ii)에서 $a=-3$

답 -3

18

$f(x)=x^2+2kx+4k+5$ 로 놓으면
 $f(x)=0$ 의 두 근이 모두 -1보다 크므로
 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
 (i) 이차방정식 $x^2+2kx+4k+5=0$ 의 판별식을 D 라고 하면
 $\frac{D}{4}=k^2-(4k+5) \geq 0$
 $k^2-4k-5 \geq 0, (k+1)(k-5) \geq 0$
 $\therefore k \leq -1$ 또는 $k \geq 5$ ㉠
 (ii) $f(-1)=1-2k+4k+5 > 0$
 $2k+6 > 0 \therefore k > -3$ ㉡
 (iii) $y=f(x)$ 의 그래프의 축의 방정식이 $x=-k$ 이므로
 $-k > -1 \therefore k < 1$ ㉢
 ㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면
 $-3 < k \leq -1$



답 $-3 < k \leq -1$



순열

기본을 다지는 유형

본문 137쪽

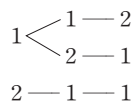
001

- (1) 6의 약수의 눈이 나오는 경우는
 1, 2, 3, 6
 의 4가지이다.
- (2) 소수가 나오는 경우는
 2, 3, 5, 7, 11, 13
 의 6가지이다.
- (3) 앞면을 H, 뒷면을 T라고 하면 앞면이 두 개 나오는 경우는
 (H, H, T), (H, T, H), (T, H, H)
 의 3가지이다.
- (4) 두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면 두 눈의 수의 차가 3인 경우는
 (1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 1), (5, 2), (6, 3)
 의 6가지이다.

답 (1) 4 (2) 6 (3) 3 (4) 6

002

1, 1, 2를 일렬로 나열하여 만들 수 있는 세 자리의 자연수를 수형도로 나타내면 오른쪽과 같다.
 따라서 구하는 자연수의 개수는 3이다.



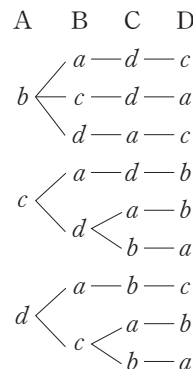
답 3

참고

경우의 수를 구할 때, 규칙성을 찾기 어려운 경우에는 수형도를 이용하면 편리하다.

003

A, B, C, D의 우산을 각각 a, b, c, d 라 하고, 자기 우산이 아닌 다른 학생의 우산을 들고 나오는 경우를 수형도로 나타내면 다음과 같다.

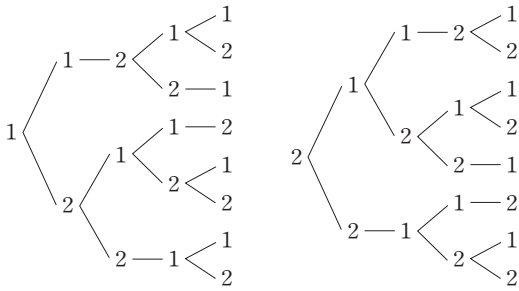


따라서 구하는 경우의 수는 9이다.

답 ②

004

조건을 만족시키는 5자리 자연수를 수형도로 나타내면 다음과 같다.



따라서 구하는 자연수의 개수는 16이다.

답 16

005

(1) 5의 배수가 적힌 공이 나오는 경우는

5, 10, 15, 20

의 4가지이다.

6의 배수가 적힌 공이 나오는 경우는

6, 12, 18

의 3가지이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$4+3=7$$

(2) 4의 배수가 적힌 공이 나오는 경우는

4, 8, 12, 16, 20

의 5가지이다.

7의 배수가 적힌 공이 나오는 경우는

7, 14

의 2가지이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$5+2=7$$

(3) 12의 약수가 적힌 공이 나오는 경우는

1, 2, 3, 4, 6, 12

의 6가지이다.

20의 약수가 적힌 공이 나오는 경우는

1, 2, 4, 5, 10, 20

의 6가지이다.

12와 20의 최대공약수인 4의 약수가 적힌 공이 나오는 경우는

1, 2, 4

의 3가지이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$6+6-3=9$$

답 (1) 7 (2) 7 (3) 9

006

두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면 다음과 같다.

(i) 눈의 수의 합이 6이 되는 경우는

(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)

의 5가지이다.

(ii) 눈의 수의 합이 9가 되는 경우는

(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)

의 4가지이다.

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$5+4=9$$

답 ⑤

007

(i) 각 자리의 숫자의 합이 4인 자연수는

13, 22, 31, 40

의 4가지이다.

(ii) 각 자리의 숫자의 합이 9인 자연수는

18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90

의 9가지이다.

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$$4+9=13$$

답 ⑤

008

1부터 100까지의 자연수 중에서

2로 나누어떨어지는 수는

2, 4, 6, ..., 100

의 50개이다. ①

7로 나누어떨어지는 수는

7, 14, 21, ..., 98

의 14개이다. ②

2와 7의 최소공배수 14로 나누어떨어지는 수는

14, 28, 42, ..., 98

의 7개이다. ③

따라서 구하는 자연수의 개수는

$$50+14-7=57$$

답 57

채점 기준	비율
① 2로 나누어떨어지는 자연수의 개수를 구할 수 있다.	30%
② 7로 나누어떨어지는 자연수의 개수를 구할 수 있다.	30%
③ 14로 나누어떨어지는 자연수의 개수를 구할 수 있다.	30%
④ 2 또는 7로 나누어떨어지는 자연수의 개수를 구할 수 있다.	10%

009

(i) $x=1$ 일 때

$$3+y+z=10 \quad \therefore y+z=7$$

따라서 순서쌍 (x, y, z) 는

(1, 1, 6), (1, 2, 5), (1, 3, 4), (1, 4, 3), (1, 5, 2), (1, 6, 1)

의 6개이다.

(ii) $x=2$ 일 때

$$6+y+z=10 \quad \therefore y+z=4$$

따라서 순서쌍 (x, y, z) 는

(2, 1, 3), (2, 2, 2), (2, 3, 1)

의 3개이다.

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는
 $6+3=9$

답 ④

010

(i) $x=1$ 일 때

$$3+y < 8 \quad \therefore y < 5$$

따라서 순서쌍 (x, y) 는

$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)$

의 4개이다.

(ii) $x=2$ 일 때

$$6+y < 8 \quad \therefore y < 2$$

따라서 순서쌍 (x, y) 는

$(2, 1)$

의 1개이다.

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (x, y) 의 개수는

$$4+1=5$$

답 ③

|다른 풀이|

x, y 가 자연수이므로 부등식 $3x+y < 8$ 을 만족시키는 경우는

$$3x+y=4, 3x+y=5, 3x+y=6, 3x+y=7$$

(i) $3x+y=4$ 일 때

순서쌍 (x, y) 는 $(1, 1)$ 의 1개이다.

(ii) $3x+y=5$ 일 때

순서쌍 (x, y) 는 $(1, 2)$ 의 1개이다.

(iii) $3x+y=6$ 일 때

순서쌍 (x, y) 는 $(1, 3)$ 의 1개이다.

(iv) $3x+y=7$ 일 때

순서쌍 (x, y) 는 $(1, 4), (2, 1)$ 의 2개이다.

(i)~(iv)에서 구하는 순서쌍 (x, y) 의 개수는

$$1+1+1+2=5$$

011

100원, 200원, 500원짜리 스티커를 각각 x 개, y 개, z 개 산다고 하면

$$100x+200y+500z=1600$$

$$\therefore x+2y+5z=16 \quad \text{..... ①}$$

(i) $z=1$ 일 때

$$x+2y+5=16 \quad \therefore x+2y=11$$

따라서 순서쌍 (x, y, z) 는

$(9, 1, 1), (7, 2, 1), (5, 3, 1), (3, 4, 1), (1, 5, 1)$

의 5개이다. ②

(ii) $z=2$ 일 때

$$x+2y+10=16 \quad \therefore x+2y=6$$

따라서 순서쌍 (x, y, z) 는

$(4, 1, 2), (2, 2, 2)$

의 2개이다. ③

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$5+2=7 \quad \text{..... ④}$$

답 7

채점 기준	비율
① x, y, z 에 대한 방정식을 세울 수 있다.	30 %
② $z=1$ 일 때, 순서쌍 (x, y, z) 의 개수를 구할 수 있다.	30 %
③ $z=2$ 일 때, 순서쌍 (x, y, z) 의 개수를 구할 수 있다.	30 %
④ 세 종류의 스티커를 1600원어치 사는 경우의 수를 구할 수 있다.	10 %

012

이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$D=a^2-4b \geq 0 \quad \therefore a^2 \geq 4b$$

(i) $b=0$ 일 때

$a^2 \geq 0$ 이므로 순서쌍 (a, b) 는

$(0, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 0), (4, 0), (5, 0)$

의 6개이다.

(ii) $b=1$ 일 때

$a^2 \geq 4$ 이므로 순서쌍 (a, b) 는

$(2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1)$

의 4개이다.

(iii) $b=2$ 일 때

$a^2 \geq 8$ 이므로 순서쌍 (a, b) 는

$(3, 2), (4, 2), (5, 2)$

의 3개이다.

(iv) $b=3$ 일 때

$a^2 \geq 12$ 이므로 순서쌍 (a, b) 는

$(4, 3), (5, 3)$

의 2개이다.

(v) $b=4$ 일 때

$a^2 \geq 16$ 이므로 순서쌍 (a, b) 는

$(4, 4), (5, 4)$

의 2개이다.

(vi) $b=5$ 일 때

$a^2 \geq 20$ 이므로 순서쌍 (a, b) 는

$(5, 5)$

의 1개이다.

(i)~(vi)에서 구하는 순서쌍 (a, b) 의 개수는

$$6+4+3+2+2+1=18$$

답 ④

참고

이차방정식의 근의 판별

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 판별식을 D 라고 하면

(1) $D > 0 \Rightarrow$ 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(2) $D = 0 \Rightarrow$ 중근(서로 같은 두 실근)을 갖는다. $\boxed{D \geq 0 \Rightarrow \text{실근을 갖는다.}}$

(3) $D < 0 \Rightarrow$ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

013

(1) 첫 번째에 짝수의 눈이 나오는 경우는

2, 4, 6의 3가지

두 번째에 소수의 눈이 나오는 경우는

2, 3, 5의 3가지

- 따라서 구하는 경우의 수는 $3 \times 3 = 9$
- (2) 남학생 한 명을 뽑는 경우의 수는 6, 여학생 한 명을 뽑는 경우의 수는 5이므로 구하는 경우의 수는 $6 \times 5 = 30$
- (3) 티셔츠를 택하는 경우의 수는 4, 반바지를 택하는 경우의 수는 3, 양말을 택하는 경우의 수는 5이므로 구하는 경우의 수는 $4 \times 3 \times 5 = 60$
- (4) A 지점에서 B 지점으로 가는 경우의 수는 3, B 지점에서 C 지점으로 가는 경우의 수는 2이므로 구하는 경우의 수는 $3 \times 2 = 6$

답 (1) 9 (2) 30 (3) 60 (4) 6

014

조건 (가)에 의하여 일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은 0, 2, 4, 6, 8의 5개

조건 (나)에 의하여 십의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 6의 4개

따라서 구하는 수의 개수는 $5 \times 4 = 20$

답 ②

015

나오는 눈의 수의 곱이 홀수이려면 두 주사위에서 나오는 눈의 수가 모두 홀수이어야 한다.

주사위에서 홀수의 눈의 수는 1, 3, 5의 3개이므로 구하는 경우의 수는 $3 \times 3 = 9$

답 9

참고

(홀수) $\times$ (짝수) = (짝수)
 (짝수) $\times$ (홀수) = (짝수)
 (짝수) $\times$ (짝수) = (짝수)
 (홀수) $\times$ (홀수) = (홀수)

016

500원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은 0원, 500원, 1000원의 3가지

100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은 0원, 100원, 200원, 300원, 400원의 5가지

10원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은 0원, 10원, 20원, 30원의 4가지

이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 지불할 수 있는 금액의 가짓수는 $3 \times 5 \times 4 - 1 = 60 - 1 = 59$

답 59가지

017

- (1) x, y, z 에 곱해지는 항이 각각 a, b, c 의 3개이므로 구하는 항의 개수는 $3 \times 3 = 9$

- (2) a, b 에 곱해지는 항이 각각 x, y, z 의 3개이고, 그 각각에 곱해지는 항이 p, q 의 2개이므로 구하는 항의 개수는 $2 \times 3 \times 2 = 12$

답 (1) 9 (2) 12

018

- (1) $48 = 2^4 \times 3$ 이므로 48의 양의 약수의 개수는 $(4+1)(1+1) = 5 \times 2 = 10$
- (2) $240 = 2^4 \times 3 \times 5$ 이므로 240의 양의 약수의 개수는 $(4+1)(1+1)(1+1) = 5 \times 2 \times 2 = 20$

답 (1) 10 (2) 20

풍샘 개념 CHECK

자연수의 양의 약수의 개수와 총합 中 수학 1

자연수 N 이 $N = x^a y^b z^c$ (x, y, z 는 서로 다른 소수, a, b, c 는 자연수)의 꼴로 소인수분해될 때

(1) N 의 양의 약수의 개수는 $(a+1)(b+1)(c+1)$

(2) N 의 양의 약수의 총합은

$$(1+x+\cdots+x^a)(1+y+\cdots+y^b)(1+z+\cdots+z^c)$$

019

$(a+b)(x+y)$ 를 전개하면 나타나는 항의 개수는 $2 \times 2 = 4$

$(a+b)(p+q+r)$ 를 전개하면 나타나는 항의 개수는 $2 \times 3 = 6$

이때 두 전개식에서 동류항이 없으므로 구하는 항의 개수는 $4 + 6 = 10$

답 ③

다른 풀이

$(a+b)(x+y) - (a+b)(p+q+r) = (a+b)(x+y-p-q-r)$
 즉, a, b 에 곱해지는 항이 각각 $x, y, -p, -q, -r$ 의 5개이므로 구하는 항의 개수는 $2 \times 5 = 10$

020

$50 = 2 \times 5^2$ 이므로 50의 양의 약수의 개수는 $a = (1+1)(2+1) = 2 \times 3 = 6$ ①

$150 = 2 \times 3 \times 5^2$ 이므로 150의 양의 약수의 개수는 $b = (1+1)(1+1)(2+1) = 2 \times 2 \times 3 = 12$ ②

$\therefore a+b = 6+12 = 18$ ③

답 18

채점 기준	비율
① a 의 값을 구할 수 있다.	40 %
② b 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ $a+b$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

021

$2^2 \times 3^4 \times 5^a$ 의 양의 약수의 개수가 60이므로 $(2+1)(4+1)(a+1) = 60$

$$a+1=4 \quad \therefore a=3$$

답 ③

022

(i) A와 C에 같은 색을 칠할 경우

A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색과 같으므로 1가지, D에 칠할 수 있는 색은 A(C)에 칠한 색을 제외한 3가지이다.

따라서 칠하는 경우의 수는 $4 \times 3 \times 1 \times 3 = 36$

(ii) A와 C에 다른 색을 칠할 경우

A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 A와 B에 칠한 색을 제외한 2가지, D에 칠할 수 있는 색은 A와 C에 칠한 색을 제외한 2가지이다.

따라서 칠하는 경우의 수는 $4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $36 + 48 = 84$

답 84

023

(i) C와 D에 같은 색을 칠할 경우

A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 3가지, D에 칠할 수 있는 색은 C에 칠한 색과 같으므로 1가지, E에 칠할 수 있는 색은 C(D)에 칠한 색을 제외한 3가지이다.

따라서 칠하는 경우의 수는 $4 \times 3 \times 3 \times 1 \times 3 = 108$

(ii) C와 D에 다른 색을 칠할 경우

A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 3가지, D에 칠할 수 있는 색은 B와 C에 칠한 색을 제외한 2가지, E에 칠할 수 있는 색은 C와 D에 칠한 색을 제외한 2가지이다.

따라서 칠하는 경우의 수는 $4 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 = 144$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $108 + 144 = 252$

답 252

024

$$(1) {}_5P_2 = 5 \times 4 = 20$$

$$(3) {}_4P_4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

$$(4) 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

답 (1) 20 (2) 1 (3) 24 (4) 120

025

(1) ${}_nP_3 = 210$ 에서

$$n(n-1)(n-2) = 7 \times 6 \times 5$$

$$\therefore n = 7$$

(2) ${}_nP_n = 120$ 에서

$$n(n-1)(n-2) \times \cdots \times 1 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$\therefore n = 5$$

$$(3) 30 = 6 \times 5 \text{이므로 } {}_6P_2 = 30 \quad \therefore r = 2$$

$$(4) {}_8P_r = \frac{8!}{5!} \text{에서 } \frac{8!}{(8-r)!} = \frac{8!}{5!}$$

$$\text{즉, } 8-r=5 \text{이므로 } r=3$$

답 (1) 7 (2) 5 (3) 2 (4) 3

026

$${}_n P_3 = 132 \times {}_n P_2 \text{에서 } \rightarrow {}_n P_3 \text{에서 } 2n \geq 3, {}_n P_2 \text{에서 } n \geq 2 \text{이므로 } n \geq 2$$

$$2n(2n-1)(2n-2) = 132 \times n(n-1)$$

$$4n(2n-1)(n-1) = 132 \times n(n-1)$$

이때 $n \geq 2$ 이므로 양변을 $4n(n-1)$ 로 나누면

$$2n-1=33, 2n=34$$

$$\therefore n=17$$

답 ②

027

$${}_n P_3 : {}_{n+1} P_2 = 2 : 1 \text{에서 } \rightarrow {}_n P_3 \text{에서 } n \geq 3, {}_{n+1} P_2 \text{에서 } n+1 \geq 2 \text{이므로 } n \geq 3$$

$${}_n P_3 = 2 \times {}_{n+1} P_2, n(n-1)(n-2) = 2(n+1)n$$

이때 $n \geq 3$ 이므로 양변을 n 으로 나누면

$$(n-1)(n-2) = 2(n+1), n^2 - 3n + 2 = 2n + 2$$

$$n^2 - 5n = 0, n(n-5) = 0$$

$$\therefore n=5 (\because n \geq 3)$$

답 ⑤

028

$${}_n P_2 \text{에서 } n \geq 2, {}_{n-2} P_1 \text{에서 } n-2 \geq 1 \text{이므로}$$

$$n \geq 3 \quad \cdots \cdots \cdots \text{①}$$

$${}_n P_2 + 10 \times {}_{n-2} P_1 = 92 \text{에서}$$

$$n(n-1) + 10(n-2) = 92 \quad \cdots \cdots \cdots \text{②}$$

$$n^2 + 9n - 112 = 0, (n+16)(n-7) = 0$$

$$\therefore n=7 (\because n \geq 3) \quad \cdots \cdots \cdots \text{③}$$

답 7

채점 기준	비율
① n 의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %
② n 에 대한 이차방정식을 세울 수 있다.	40 %
③ n 의 값을 구할 수 있다.	40 %

029

$$(1) 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

$$(2) {}_6P_4 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$$

답 (1) 24 (2) 360

030

$${}_n P_2 = 210 \text{이므로}$$

$$n(n-1) = 210, n^2 - n - 210 = 0$$

$$(n+14)(n-15) = 0$$

이때 $n \geq 2$ 이므로 $n=15$

답 ⑤

031

- (1) A, D를 1개의 문자로 생각하여 4개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는
 $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$
 A, D가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는
 $2! = 2 \times 1 = 2$
 따라서 A, D를 이웃하게 배열하는 경우의 수는
 $24 \times 2 = 48$
- (2) B, C를 이웃하지 않게 배열하려면 이웃해도 되는 A, D, E를 일렬로 배열하고, 그 사이사이와 양 끝 네 자리 중에서 두 자리에 B, C를 놓으면 된다.
 A, D, E를 일렬로 배열하는 경우의 수는
 $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$
 A, D, E의 사이사이와 양 끝 네 자리 중에서 두 자리에 B, C를 일렬로 배열하는 경우의 수는
 ${}_4P_2 = 4 \times 3 = 12$
 따라서 구하는 경우의 수는
 $6 \times 12 = 72$

답 (1) 48 (2) 72

032

- 여학생 2명을 한 명으로 생각하여 5명의 순서를 정하는 경우의 수는
 $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$
 여학생 2명이 서로 순서를 바꾸는 경우의 수는
 $2! = 2 \times 1 = 2$
 따라서 구하는 경우의 수는
 $120 \times 2 = 240$

답 ③

033

- e, e를 하나로 생각하여 6개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는
 $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$
 e, e끼리 서로 자리를 바꾸어도 문자의 배열이 바뀌지 않으므로 구하는 경우의 수는 720이다.

답 720

034

- 소설책 3권, 시집 5권, 사진집 2권을 각각 한 권으로 생각하여 3권을 쫓는 경우의 수는
 $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$
 소설책 3권끼리 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는
 $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$
 시집 5권끼리 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는
 $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$
 사진집 2권끼리 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는
 $2! = 2 \times 1 = 2$
 따라서 구하는 경우의 수는
 $6 \times 6 \times 120 \times 2 = 8640$

답 ④

035

- 어린이 4명을 한 줄로 세우는 경우의 수는
 $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ ①
 어린이의 사이사이와 양 끝의 다섯 자리 중에서 세 자리에 어른 3명을 세우는 경우의 수는
 ${}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$ ②
 따라서 구하는 경우의 수는
 $24 \times 60 = 1440$ ③

답 1440

채점 기준	비율
① 어린이 4명을 한 줄로 세우는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
② 어린이의 사이사이와 양 끝의 다섯 자리 중에서 세 자리에 어른 3명을 세우는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
③ 어른끼리 이웃하지 않게 서는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %

036

- (1) B를 맨 앞에 놓고 나머지 4개의 문자를 일렬로 배열하면 되므로 구하는 경우의 수는
 $4! = 24$
- (2) E와 D의 자리가 정해져 있으므로 이 두 문자를 제외한 나머지 3개의 문자를 일렬로 배열한 후 E를 두 번째, D를 네 번째에 배열하면 된다.
 따라서 구하는 경우의 수는 $3! = 6$
- (3) A와 E를 양 끝에 놓고 가운데에 나머지 3개의 문자를 배열하는 경우의 수는
 $3! = 6$
 A, E가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는
 $2! = 2$
 따라서 구하는 경우의 수는 $6 \times 2 = 12$

답 (1) 24 (2) 6 (3) 12

037

- 여학생 3명을 일렬로 세운 후 그 사이사이에 남학생 2명을 세우면 되므로 구하는 경우의 수는
 $3! \times 2! = 6 \times 2 = 12$

답 12

참고

남학생 2명을 일렬로 세운 후 그 사이사이와 양 끝의 세 자리에 여학생 3명을 세운다고 생각해도 같은 결과를 얻는다.

038

- 남자 3명 중 2명을 뽑아 양 끝에 세우는 경우의 수는
 ${}_3P_2 = 3 \times 2 = 6$
 양 끝에 세운 두 남자를 제외한 나머지 5명을 중간에 세우는 경우의 수는
 $5! = 120$
 따라서 구하는 경우의 수는 $6 \times 120 = 720$

답 ④

039

연수와 시연이를 제외한 4명의 학생 중에서 2명을 뽑아 연수와 시연이 사이에 세우는 경우의 수는

$${}_4P_2 = 4 \times 3 = 12$$

연수와 시연이가 자리를 바꾸는 경우의 수는

$$2! = 2$$

연수와 시연이, 이 두 사람 사이에 있는 2명을 포함한 4명을 한 명으로 생각하여 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$$3! = 6$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$12 \times 2 \times 6 = 144$$

답 ③

040

7개의 깃발을 일렬로 배열하는 경우의 수는

$$7! = 5040 \dots\dots\dots ①$$

양 끝에 노란색 깃발이 오지 않도록 배열하는 경우는 노란색 깃발을 제외한 5개의 깃발 중에서 2개를 뽑아 양 끝에 세우고, 나머지 5개의 깃발을 중간에 세우는 경우와 같다.

양 끝에 노란색 깃발이 오지 않도록 배열하는 경우의 수는

$${}_5P_2 \times 5! = (5 \times 4) \times 120 = 2400 \dots\dots\dots ②$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$5040 - 2400 = 2640 \dots\dots\dots ③$$

답 2640

채점 기준	비율
① 7개의 깃발을 일렬로 배열하는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
② 노란색 깃발이 양 끝에 오지 않도록 배열하는 경우의 수를 구할 수 있다.	50 %
③ 적어도 한쪽 끝에 노란색 깃발이 오도록 배열하는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

041

(1) 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 0을 제외한 1, 2, 3, 4, 5의 5개이고, 나머지 두 자리에는 백의 자리에 온 숫자를 제외한 5개의 숫자 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 구하는 자연수의 개수는

$$5 \times {}_5P_2 = 5 \times (5 \times 4) = 100$$

(2) 짝수가 되려면 일의 자리의 숫자는 0 또는 2 또는 4이어야 한다.

(i) 일의 자리의 숫자가 0인 경우

나머지 두 자리에는 0을 제외한 5개의 숫자 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 경우의 수는

$${}_5P_2 = 5 \times 4 = 20$$

(ii) 일의 자리의 숫자가 2 또는 4인 경우

백의 자리에는 0과 일의 자리에 온 숫자를 제외한 4개의 숫자가 올 수 있고 십의 자리에는 백의 자리와 일의 자리에 온 숫자를 제외한 4개의 숫자가 올 수 있으므로 경우의 수는

$$2 \times 4 \times 4 = 32$$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$$20 + 32 = 52$$

답 (1) 100 (2) 52

042

1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 3의 배수는 3, 6이므로 일의 자리와 백의 자리에 3의 배수가 오는 경우는 다음의 두 가지가 있다.

$$\square\square\square 3 \square 6, \square\square\square 6 \square 3$$

각각의 경우에 나머지 네 자리에는 3, 6을 제외한 4개의 숫자를 배열하면 되므로 구하는 자연수의 개수는

$$2 \times 4! = 2 \times 24 = 48$$

답 48

043

(1) a로 시작하는 것의 개수는 $3! = 6$

b로 시작하는 것의 개수는 $3! = 6$

ca로 시작하는 것의 개수는 $2! = 2$

따라서 a로 시작하는 것에서 ca로 시작하는 것까지의 개수는

$$6 + 6 + 2 = 14$$

이때 cbda는 cb로 시작하는 것 중에서 2번째이므로 cbda는 16번째에 오는 문자열이다. $\rightarrow$ cbad, cbda

(2) a로 시작하는 것의 개수는 $3! = 6$

b로 시작하는 것의 개수는 $3! = 6$

c로 시작하는 것의 개수는 $3! = 6$

da로 시작하는 것의 개수는 $2! = 2$

따라서 a로 시작하는 것에서 da로 시작하는 것까지의 개수는

$$6 + 6 + 6 + 2 = 20$$

즉, 20번째에 오는 문자열은 da로 시작하는 것 중에서 마지막 문자열이다.

da로 시작하는 것은 순서대로 dabc, dacb이므로 20번째에 오는 문자열은 dacb이다.

답 (1) 16번째 (2) dacb

044

1□□□□의 풀인 자연수의 개수는

$$4! = 24$$

2□□□□의 풀인 자연수의 개수는

$$4! = 24$$

따라서 10234부터 24310까지의 자연수의 개수는

$$24 + 24 = 48$$

이므로 50번째에 오는 수는 3□□□□의 풀인 자연수 중에서 2번째로 작은 수이다. $\dots\dots\dots ①$

3□□□□의 풀인 자연수를 작은 수부터 차례대로 쓰면

$$30124, 30142, \dots$$

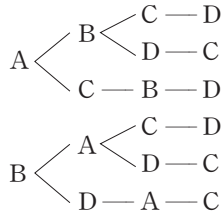
이므로 50번째에 오는 수는 30142이다. $\dots\dots\dots ②$

답 30142

채점 기준	비율
① 50번째에 오는 수가 어떤 풀인지 알 수 있다.	60 %
② 50번째에 오는 수를 구할 수 있다.	40 %

01

제일 먼저 꺼낼 수 있는 커피 캡슐은 A 또는 B이므로 커피 캡슐을 모두 꺼내는 경우를 수형도로 나타내면 다음과 같다.



따라서 구하는 경우의 수는 6이다.

답 ②

02

3의 배수가 적힌 공은

3, 6, 9, ..., 33의 11개

8의 배수가 적힌 공은

8, 16, 24, 32의 4개

3과 8의 최소공배수인 24의 배수가 적힌 공은

24의 1개

따라서 구하는 경우의 수는

$$11 + 4 - 1 = 14$$

답 ⑤

03

문제 접근하기

a, b 는 주사위의 눈의 수이므로 a, b 가 될 수 있는 수는 1, 2, 3, 4, 5, 6임을 알고, $|2a-b| \leq 1$ 을 $|2a-b|=0$ 인 경우와 $|2a-b|=1$ 인 경우로 나누어 순서쌍 (a, b) 를 구한다.

$|2a-b| \leq 1$ 에서 $|2a-b|=0$ 또는 $|2a-b|=1$

(i) $|2a-b|=0$ 일 때

$$2a-b=0 \quad \therefore b=2a$$

따라서 순서쌍 (a, b) 는

(1, 2), (2, 4), (3, 6)의 3개

(ii) $|2a-b|=1$ 일 때

$$2a-b=1 \text{ 또는 } 2a-b=-1$$

$$\therefore b=2a-1 \text{ 또는 } b=2a+1$$

따라서 순서쌍 (a, b) 는

(1, 1), (1, 3), (2, 3), (2, 5), (3, 5)의 5개

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (a, b) 의 개수는

$$3 + 5 = 8$$

답 8

04

(i) A조에서 남학생 1명, B조에서 여학생 1명을 뽑는 경우의 수는

$$3 \times 4 = 12$$

(ii) A조에서 여학생 1명, B조에서 남학생 1명을 뽑는 경우의 수는

$$3 \times 2 = 6$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$12 + 6 = 18$$

답 18

05

$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ 이므로 360의 양의 약수의 개수는

$$(3+1)(2+1)(1+1) = 24$$

이 중에서 홀수의 개수는 $3^2 \times 5$ 의 양의 약수의 개수와 같으므로

$$(2+1)(1+1) = 6$$

따라서 360의 양의 약수 중 짝수의 개수는

$$24 - 6 = 18$$

답 ②

06

1과 6에는 같은 색을 칠하고, 변을 공유하는 두 정사각형에는 서로 다른 색을 칠하므로

$$1 \rightarrow 6 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 4$$

의 순서로 색을 칠해 보자.

1에 칠할 수 있는 색은 4가지

6에는 1에 칠한 색과 같은 색을 칠해야 하므로 6에 칠할 수 있는 색은 1가지

2에 칠할 수 있는 색은 1에 칠한 색을 제외한 3가지

3에 칠할 수 있는 색은 2와 6에 칠한 색을 제외한 2가지

5에 칠할 수 있는 색은 2와 6에 칠한 색을 제외한 2가지

4에 칠할 수 있는 색은 1과 5에 칠한 색을 제외한 2가지

따라서 색을 칠하는 경우의 수는

$$4 \times 1 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 = 96$$

답 ③

07

$$\begin{aligned}
 {}_{n-1}P_r + r \times {}_{n-1}P_{r-1} &= \frac{({}^{(n-1)}P_r)}{(n-1-r)!} + r \times \frac{({}^{(n-1)}P_{r-1})}{(n-r)!} \\
 &= \frac{(n-r) \times (n-1)!}{(n-r) \times (n-1-r)!} + r \times \frac{(n-1)!}{(n-r)!} \\
 &= \frac{(n-r) \times (n-1)!}{(n-r)!} + r \times \frac{(n-1)!}{(n-r)!} \\
 &= \frac{(n-1)!}{(n-r)!} \{ (n-r) + r \} \\
 &= \frac{(n-1)!}{(n-r)!} \times ({}^{(n)}P_r) \\
 &= \frac{n!}{(n-r)!} \\
 &= ({}^{(n)}P_r)
 \end{aligned}$$

$$\therefore {}_{n-1}P_r + r \times {}_{n-1}P_{r-1} = ({}^{(n)}P_r)$$

$$\therefore ({}^{(n)}P_r), ({}^{(n-1)}P_r), ({}^{(n-1)}P_{r-1}), ({}^{(n)}P_r)$$

답 ({}^{(n)}P_r), ({}^{(n-1)}P_r), ({}^{(n-1)}P_{r-1}), ({}^{(n)}P_r)

08

n 개의 영업소 중에서 첫 방문지와 마지막 방문지를 선택하는 경우의 수가 56이므로

$${}_nP_2=56, n(n-1)=8 \times 7 \quad \therefore n=8$$

답 8

09

2학년 학생 4명을 일렬로 앉히는 경우의 수는

$$4!=4 \times 3 \times 2 \times 1=24$$

2학년 학생 4명 사이사이의 세 자리 중에서 두 자리를 골라 1학년 학생 2명을 앉히는 경우의 수는

$${}_3P_2=3 \times 2=6$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$24 \times 6=144$$

답 ③

10

문제 접근하기

인접한 두 지역을 선택하는 경우의 수를 먼저 구해 보고, 지역에 팀을 정하는 경우의 수를 구한다.

인접한 두 지역을 짝 지으면

(A, B), (A, C), (A, E), (B, C), (B, D), (C, D), (C, E), (C, F), (D, F), (E, F)

의 10가지가 있다.

인접한 두 지역을 탐방할 팀을 정하는 경우의 수는

5

나머지 네 팀이 남은 4개의 지역을 나누어 탐방하는 경우의 수는

$$4!=24$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$10 \times 5 \times 24=1200$$

답 ⑤

11

(i) 4의 배수의 개수

세 자리 자연수가 4의 배수가 되려면 뒤의 두 자리가 4의 배수가 되어야 한다.

5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5에서 서로 다른 2개를 선택했을 때 4의 배수가 되는 경우는

12, 24, 32, 52

의 4가지이고, 이때 각각에 대하여 백의 자리에는 십의 자리와 일의 자리의 숫자를 제외한 3개의 숫자가 올 수 있으므로 4의 배수의 개수는

$$a=3 \times 4=12$$

(ii) 5의 배수의 개수

세 자리 자연수가 5의 배수가 되려면 일의 자리에는 5가 와야 한다.

이때 백의 자리와 십의 자리에는 5를 제외한 4개의 숫자 중에서 서로 다른 2개의 숫자를 골라 배열하면 되므로 5의 배수의 개수는

$$b={}_4P_2=4 \times 3=12$$

(i), (ii)에서

$$a+b=12+12=24$$

답 ⑤

12

25000보다 큰 수는

25□□□, 3□□□□, 4□□□□, 5□□□□

의 꼴이다.

25□□□의 풀인 자연수의 개수는

$$3!=6$$

3□□□□의 풀인 자연수의 개수는

$$4!=24$$

4□□□□의 풀인 자연수의 개수는

$$4!=24$$

5□□□□의 풀인 자연수의 개수는

$$4!=24$$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$$6+24+24+24=78$$

답 78

|다른 풀이|

1, 2, 3, 4, 5의 다섯 개의 숫자를 모두 한 번씩 이용하여 만들 수 있는 다섯 자리의 자연수의 개수는

$$5!=120$$

25000보다 작은 수는

1□□□□, 21□□□, 23□□□, 24□□□

의 꼴이다.

1□□□□의 풀인 자연수의 개수는

$$4!=24$$

21□□□의 풀인 자연수의 개수는

$$3!=6$$

23□□□의 풀인 자연수의 개수는

$$3!=6$$

24□□□의 풀인 자연수의 개수는

$$3!=6$$

따라서 25000보다 큰 자연수의 개수는

$$120-(24+6+6+6)=78$$



조합

기본을 다지는 유형

본문 150쪽

001

$$(1) {}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

$$(2) {}_7C_4 = {}_7C_{7-4} = {}_7C_3 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$$

답 (1) 10 (2) 35 (3) 1 (4) 8

002

$$(1) {}_nC_2 = 21 \text{에서}$$

$$\frac{n(n-1)}{2 \times 1} = 21, n^2 - n = 42$$

$$n^2 - n - 42 = 0, (n+6)(n-7) = 0$$

$$\therefore n = 7 (\because n \geq 2)$$

$$(2) {}_7C_r = 35 \text{에서}$$

$$\frac{7!}{r!(7-r)!} = 35$$

$$7! = 35 \times r!(7-r)!, \quad \begin{matrix} \rightarrow 6 \times 4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! \\ 3 \times 2 \times 1 = 3! \end{matrix}$$

$$7! = 35 \times r!(7-r)!, \quad 6 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = r!(7-r)!$$

$$3!4! = r!(7-r)! \quad \therefore r = 3 \text{ 또는 } r = 4$$

$$(3) {}_nC_4 = {}_nC_6 \text{에서 } 4 = n - 6 \quad \therefore n = 10$$

$$(4) {}_{n+3}C_n = 120 \text{에서}$$

$${}_{n+3}C_{(n+3)-n} = 120, {}_{n+3}C_3 = 120$$

$$\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

$$(n+3)(n+2)(n+1) = 720 = 10 \times 9 \times 8$$

$$\text{즉, } n+1 = 8 \text{이므로 } n = 7$$

답 (1) 7 (2) 3, 4 (3) 10 (4) 7

003

$${}_{10}C_r = {}_{10}C_{r-6} \text{에서}$$

$$r = r - 6 \text{ 또는 } r = 10 - (r - 6)$$

$$\text{이때 } r \text{는 자연수이므로 } r = 10 - (r - 6) \text{에서}$$

$$2r = 16 \quad \therefore r = 8$$

답 ④

004

$${}_nP_r = 60, {}_nC_r = 10 \text{이고 } {}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} \text{이므로}$$

$$\frac{60}{r!} = 10, r! = 6 = 3 \times 2 \times 1 = 3!$$

$$\therefore r = 3 \dots\dots\dots ①$$

$$\text{즉, } {}_nC_3 = 10 \text{이므로}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1} = 10, n(n-1)(n-2) = 60 = 5 \times 4 \times 3$$

$$\therefore n = 5 \dots\dots\dots ②$$

$$\therefore n+r = 5+3 = 8 \dots\dots\dots ③$$

답 8

채점 기준	비율
① r 의 값을 구할 수 있다.	40 %
② n 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ $n+r$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

005

$$6 \times {}_nC_3 = 7 \times {}_nP_2 \text{에서}$$

$$\rightarrow {}_nC_3 \text{에서 } n \geq 3, {}_nP_2 \text{에서 } n \geq 2 \text{이므로 } n \geq 3$$

$$6 \times \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1} = 7 \times n(n-1)$$

$$\text{이때 } n \geq 3 \text{이므로 양변을 } n(n-1) \text{로 나누면}$$

$$n-2 = 7 \quad \therefore n = 9$$

답 9

006

$$(1) {}_7C_2 = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21$$

$$(2) {}_{10}C_7 = {}_{10}C_{10-7} = {}_{10}C_3 = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

답 (1) 21 (2) 120

007

1학년 6명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는

$${}_6C_4 = {}_6C_{6-4} = {}_6C_2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$$

2학년 4명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

$${}_4C_3 = {}_4C_{4-3} = {}_4C_1 = 4$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$15 \times 4 = 60$$

답 60

008

전체 경기 수는 10명 중에서 2명을 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_{10}C_2 = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45$$

답 ③

009

소방관 5명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

$${}_5C_3 = {}_5C_{5-3} = {}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10 \dots\dots\dots ①$$

구급 요원 4명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

$${}_4C_3 = {}_4C_{4-3} = {}_4C_1 = 4 \dots\dots\dots ②$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$10 + 4 = 14 \dots\dots\dots ③$$

답 14

채점 기준	비율
① 소방관 중에서 3명을 뽑는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
② 구급 요원 중에서 3명을 뽑는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
③ 직업이 같은 3명을 뽑는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

010

장미 n 송이 중에서 3송이를 택하는 경우의 수는 ${}_nC_3$
 카네이션 8송이 중에서 5송이를 택하는 경우의 수는

$${}_8C_5 = {}_8C_{8-5} = {}_8C_3 = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$$

따라서 ${}_nC_3 \times 56 = 6720$ 이므로 ${}_nC_3 = 120$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1} = 120, n(n-1)(n-2) = 720 = 10 \times 9 \times 8$$

$\therefore n = 10$

답 ③

011

(1) 구하는 경우의 수는 A, C를 제외한 4개의 문자 중에서 1개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_4C_1 = 4$$

(2) 구하는 경우의 수는 C, D를 제외한 4개의 문자 중에서 3개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_4C_3 = {}_4C_{4-3} = {}_4C_1 = 4$$

(3) 구하는 경우의 수는 B, D, E를 제외한 3개의 문자 중에서 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_3C_2 = {}_3C_{3-2} = {}_3C_1 = 3$$

답 (1) 4 (2) 4 (3) 3

012

3, 5가 적힌 카드를 제외한 홀수가 적힌 카드 3장 중에서 1장, 2가 적힌 카드를 제외한 짝수가 적힌 카드 4장 중에서 1장을 뽑는 경우의 수와 같으므로

$${}_3C_1 \times {}_4C_1 = 3 \times 4 = 12$$

답 12

013

A는 뽑고 B는 뽑지 않는 경우의 수는 A, B를 제외한 6명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수와 같으므로

$${}_6C_3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$$

A는 뽑지 않고 B는 뽑는 경우의 수도 A, B를 제외한 6명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수와 같으므로

$${}_6C_3 = 20$$

따라서 구하는 경우의 수는 $20 + 20 = 40$

답 ③

|다른 풀이|

A, B 중에서 한 명만 뽑는 경우는 A, B를 제외한 6명 중에서 3명을 뽑은 후 A, B 중에서 한 명을 뽑는 경우와 같으므로 구하는 경우의 수는

$${}_6C_3 \times {}_2C_1 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} \times 2 = 40$$

014

지민이와 민재를 반드시 포함하여 4명을 뽑는 경우의 수는 지민이

와 민재를 제외한 $(n-2)$ 명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수와 같으므로

$${}_{n-2}C_2 = 45 \dots\dots\dots ①$$

$$\frac{(n-2)(n-3)}{2 \times 1} = 45, (n-2)(n-3) = 90$$

$$n^2 - 5n - 84 = 0, (n+7)(n-12) = 0$$

$$\text{이때 } n \geq 2 \text{이므로 } n = 12 \dots\dots\dots ②$$

답 12

채점 기준	비율
① 경우의 수를 이용하여 식을 세울 수 있다.	50 %
② n 의 값을 구할 수 있다.	50 %

015

7컬레의 장갑 중에서 짝이 맞는 한 컬레의 장갑을 택하는 경우의 수는 ${}_7C_1 = 7$

나머지 6컬레의 장갑 12짝 중에서 2짝을 택하는 경우의 수는

$${}_{12}C_2 = \frac{12 \times 11}{2 \times 1} = 66$$

이고 이 중에서 짝이 맞는 경우의 수는 6이므로 짝이 맞지 않는 2짝을 택하는 경우의 수는

$$66 - 6 = 60$$

따라서 구하는 경우의 수는 $7 \times 60 = 420$

답 ③

016

10명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는

$${}_{10}C_4 = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 210$$

(1) 남자만 4명을 뽑는 경우의 수는

$${}_6C_4 = {}_6C_{6-4} = {}_6C_2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$$

따라서 구하는 경우의 수는 $210 - 15 = 195$

(2) 여자만 4명을 뽑는 경우의 수는 ${}_4C_4 = 1$

따라서 구하는 경우의 수는 $210 - 1 = 209$

답 (1) 195 (2) 209

017

15장 중에서 3장을 뽑는 경우의 수는

$${}_{15}C_3 = \frac{15 \times 14 \times 13}{3 \times 2 \times 1} = 455$$

15의 약수가 적힌 카드는 1, 3, 5, 15의 4장이므로 이것을 제외한 11장 중에서 3장을 뽑는 경우의 수는

$${}_{11}C_3 = \frac{11 \times 10 \times 9}{3 \times 2 \times 1} = 165$$

따라서 구하는 경우의 수는 $455 - 165 = 290$

답 290

018

12명 중에서 3명을 선발하는 경우의 수는

$${}_{12}C_3 = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = 220$$

선생님만 3명을 선발하는 경우의 수는

$${}_5C_3 = {}_5C_{5-3} = {}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

학생만 3명을 선발하는 경우의 수는

$${}_7C_3 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$$

따라서 구하는 경우의 수는 $220 - (10 + 35) = 175$

답 175

019

10개 중에서 3개를 고르는 경우의 수는

$${}_{10}C_3 = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120 \quad \text{①}$$

초콜릿만 3개를 고르는 경우의 수는 ${}_3C_3 = 1$

쿠키가 1개 포함되도록 고르는 경우의 수는

$${}_7C_1 \times {}_3C_2 = 7 \times 3 = 21$$

즉, 쿠키가 1개 이하로 포함되는 경우의 수는

$$1 + 21 = 22 \quad \text{②}$$

따라서 쿠키가 적어도 2개 포함되도록 포장하는 경우의 수는

$$120 - 22 = 98 \quad \text{③}$$

답 98

채점 기준	비율
① 10개 중에서 3개를 고르는 경우의 수를 구할 수 있다.	30%
② 쿠키가 1개 이하로 포함되는 경우의 수를 구할 수 있다.	40%
③ 쿠키가 적어도 2개 포함되도록 포장하는 경우의 수를 구할 수 있다.	30%

020

1학년 학생을 n 명이라고 하자.

$$9\text{명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는 }{}_9C_2 = \frac{9 \times 8}{2 \times 1} = 36$$

1학년을 제외한 $(9-n)$ 명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

$${}_{9-n}C_2 = \frac{(9-n)(8-n)}{2 \times 1}$$

1학년을 적어도 1명 포함하여 뽑는 경우의 수가 21이므로

$$36 - \frac{(9-n)(8-n)}{2 \times 1} = 21, \quad \frac{(9-n)(8-n)}{2 \times 1} = 15$$

$$(9-n)(8-n) = 30, \quad n^2 - 17n + 42 = 0, \quad (n-3)(n-14) = 0$$

이때 $n \leq 9$ 이므로 $n = 3$

따라서 1학년은 3명이다.

답 ②

021

$$\text{여학생 2명을 뽑는 경우의 수는 }{}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$

$$\text{남학생 2명을 뽑는 경우의 수는 }{}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

4명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $4! = 24$

따라서 구하는 경우의 수는

$$6 \times 10 \times 24 = 1440$$

답 1440

참고

뽑아서 나열하는 경우의 수

n 개 중에서 r 개, m 개 중에서 s 개를 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수는

$${}_nC_r \times {}_mC_s \times (r+s)!$$

022

홀수 1, 3, 5의 3개 중에서 1개를 택하는 경우의 수는

$${}_3C_1 = 3$$

짝수 2, 4, 6의 3개 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_3C_2 = {}_3C_{3-2} = {}_3C_1 = 3$$

홀수 1개와 짝수 2개를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$3! = 6$$

따라서 구하는 자연수의 개수는 $3 \times 3 \times 6 = 54$

답 54

023

A, B를 제외한 6명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

$${}_6C_3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20 \quad \text{①}$$

5명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$$5! = 120 \quad \text{②}$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$20 \times 120 = 2400 \quad \text{③}$$

답 2400

채점 기준	비율
① A, B를 제외한 6명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수를 구할 수 있다.	40%
② 5명을 일렬로 세우는 경우의 수를 구할 수 있다.	30%
③ A, B를 모두 포함하여 5명을 일렬로 세우는 경우의 수를 구할 수 있다.	30%

024

2, 5, 6을 제외한 4개의 숫자 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$

4개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $4! = 24$

따라서 구하는 자연수의 개수는 $6 \times 24 = 144$

답 ⑤

025

모음 a, e, i의 3개 중에서 2개를 뽑는 경우의 수는

$${}_3C_2 = {}_3C_{3-2} = {}_3C_1 = 3$$

자음 b, c, d, f의 4개 중에서 3개를 뽑는 경우의 수는

$${}_4C_3 = {}_4C_{4-3} = {}_4C_1 = 4$$

모음 2개를 1개의 문자로 생각하여 문자 4개를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $4! = 24$

모음 2개가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$

따라서 구하는 경우의 수는 $3 \times 4 \times 24 \times 2 = 576$

답 576

026

7개의 점 중에서 어떤 세 점도 한 직선 위에 있지 않으므로 구하는 직선의 개수는

$${}_7C_2 = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21$$

답 21

027

9개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_9C_2 = \frac{9 \times 8}{2 \times 1} = 36$$

한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$

한 직선 위에 있는 5개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

그런데 한 직선 위에 있는 점들을 연결하여 만들 수 있는 서로 다른 직선은 1개뿐이므로 구하는 직선의 개수는

$$36 - (6 + 10) + 2 = 22$$

답 ③

|다른 풀이|

두 직선 위의 점을 각각 하나씩 택하여 연결하면 한 개의 직선을 만들 수 있으므로

$${}_4C_1 \times {}_5C_1 = 4 \times 5 = 20$$

한 직선 위에 있는 점들을 연결하여 만들 수 있는 직선은 1개뿐이므로 한 직선 위의 점들로 만들 수 있는 직선의 개수는 2

따라서 구하는 직선의 개수는 $20 + 2 = 22$

028

10개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_{10}C_2 = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45 \quad \text{①}$$

한 직선 위에 있는 5개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10 \quad \text{②}$$

그런데 한 직선 위에 있는 점들을 연결하여 만들 수 있는 서로 다른 직선은 1개뿐이므로 구하는 직선의 개수는

$$45 - 10 + 1 = 36 \quad \text{③}$$

답 36

채점 기준	비율
① 10개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수를 구할 수 있다.	30%
② 한 직선 위의 5개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수를 구할 수 있다.	30%
③ 서로 다른 직선의 개수를 구할 수 있다.	40%

029

7개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_7C_2 = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21$$

한 직선 위에 있는 3개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$$2 \times {}_3C_2 = 2 \times {}_3C_{3-2} = 2 \times {}_3C_1 = 2 \times 3 = 6$$

한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$

그런데 한 직선 위에 있는 점들을 연결하여 만들 수 있는 서로 다른 직선은 1개뿐이므로 구하는 직선의 개수는

$$21 - 6 - 6 + 3 = 12$$

답 ①

030

12개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_{12}C_2 = \frac{12 \times 11}{2 \times 1} = 66$$

한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$$4 \times {}_4C_2 = 4 \times \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 4 \times 6 = 24$$

그런데 한 직선 위에 있는 점들을 연결하여 만들 수 있는 서로 다른 직선은 1개뿐이므로 구하는 직선의 개수는

$$66 - 24 + 4 = 46$$

답 ④

031

12개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_{12}C_3 = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = 220$$

한 직선 위에 있는 3개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$$6 \times {}_3C_3 = 6 \times 1 = 6$$

그런데 한 직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는

$$220 - 6 = 214$$

답 ③

032

7개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_7C_3 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$$

한 직선 위에 있는 3개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_3C_3 = 1$$

한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_4C_3 = {}_4C_{4-3} = {}_4C_1 = 4$$

그런데 한 직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는

$$35 - 1 - 4 = 30$$

답 30

|다른 풀이|

한 직선 위에 있는 점 중에서 2개를 택하고 다른 한 직선 위에 있는 점 중에서 1개를 택하면 삼각형을 만들 수 있으므로 구하는 삼각형의 개수는

$$\begin{aligned} {}_3C_2 \times {}_4C_1 + {}_3C_1 \times {}_4C_2 &= {}_3C_1 \times {}_4C_1 + {}_3C_1 \times {}_4C_2 \\ &= 3 \times 4 + 3 \times \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \\ &= 12 + 3 \times 6 = 12 + 18 = 30 \end{aligned}$$

033

가로 방향의 평행선 중에서 2개, 세로 방향의 평행선 중에서 2개를 택하면 하나의 평행사변형이 만들어지므로 구하는 평행사변형의 개수는 ${}_3C_2 \times {}_4C_2 = \frac{3 \times 2}{2 \times 1} \times \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 18$

답 18

034

(1) 가로 방향의 평행선 중에서 2개, 세로 방향의 평행선 중에서 2개를 택하면 하나의 직사각형이 만들어지므로 구하는 직사각형의 개수는

$${}_4C_2 \times {}_5C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \times \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 60 \quad \text{①}$$

(2) 한 변의 길이가 1인 정사각형의 개수는 12

한 변의 길이가 2인 정사각형의 개수는 6

한 변의 길이가 3인 정사각형의 개수는 2

따라서 정사각형의 개수는

$$12 + 6 + 2 = 20 \quad \text{②}$$

(3) 정사각형이 아닌 직사각형의 개수는

$$60 - 20 = 40 \quad \text{③}$$

답 (1) 60 (2) 20 (3) 40

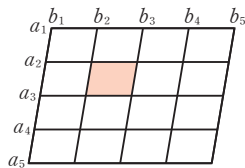
채점 기준	비율
① 직사각형의 개수를 구할 수 있다.	40%
② 정사각형의 개수를 구할 수 있다.	40%
③ 정사각형이 아닌 직사각형의 개수를 구할 수 있다.	20%

035

오른쪽 그림과 같이 가로의 평행선을 각각 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 라 하고, 세로의 평행선을 각각 b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 라고 하자. 색칠한 부분을 포함하는 평행사변형을 만들기 위해서는 가로의 평행선은 a_1, a_2 중에서 하나, a_3, a_4, a_5 중에서 하나를 택하고, 세로의 평행선은 b_1, b_2 중에서 하나, b_3, b_4, b_5 중에서 하나를 택해야 하므로 구하는 평행사변형의 개수는

$$({}_2C_1 \times {}_3C_1) \times ({}_2C_1 \times {}_3C_1) = (2 \times 3) \times (2 \times 3) = 36$$

답 ③



실력을 높이는 연습 문제

본문 157쪽

01

주어진 이차방정식의 두 근을 α, β 라고 하면 두 근의 합이 14이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = \frac{3 \times {}_n C_4}{{}_n C_2} = 14$$

$$3 \times {}_n C_4 = 14 \times {}_n C_2$$

$\rightarrow {}_n C_4$ 에서 $n \geq 4$, ${}_n C_2$ 에서 $n \geq 2$ 이므로 $n \geq 4$

$$3 \times \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 14 \times \frac{n(n-1)}{2 \times 1}$$

이때 $n \geq 4$ 이므로 양변에 $\frac{4 \times 2 \times 1}{n(n-1)}$ 을 곱하면

$$(n-2)(n-3) = 56, n^2 - 5n - 50 = 0$$

$$(n+5)(n-10) = 0 \quad \therefore n = 10 \quad (\because n \geq 4)$$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 두 근의 곱은

$$\alpha\beta = \frac{{}_{10}C_3}{{}_{10}C_2} = \frac{\frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1}}{\frac{10 \times 9}{2 \times 1}} = \frac{8}{3}$$

답 ③

02

$$\begin{aligned} {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r &= \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} + \frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{(r-1)!(({}^{(r)}n-r-1)!)} \left(\frac{1}{n-r} + \frac{1}{r} \right) \\ &= \frac{(n-1)!}{(r-1)!(({}^{(r)}n-r-1)!)} \times \frac{({}^{(r)}n)}{(n-r)r} \\ &= \frac{n!}{r!({}^{(r)}n-r)!} = {}_n C_r \end{aligned}$$

$\therefore ({}^{(r)}n-r-1, ({}^{(r)}n, ({}^{(r)}n-r$

답 ({}^{(r)}n-r-1 ({}^{(r)}n ({}^{(r)}n-r

03

문제 접근하기

세 수의 합이 홀수가 되려면 세 수 중에서 하나만 홀수이거나 세 수가 모두 홀수이어야 한다.

1부터 9까지의 자연수 중에서 짝수는 2, 4, 6, 8의 4개, 홀수는 1, 3, 5, 7, 9의 5개이므로 세 수의 합이 홀수가 되는 경우는 다음과 같다.

(i) (홀수) + (짝수) + (짝수)인 경우

5개의 홀수 중 1개, 4개의 짝수 중 2개를 택하면 되므로 경우의

$$\text{수는 } {}_5C_1 \times {}_4C_2 = 5 \times \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 30$$

(ii) (홀수) + (홀수) + (홀수)인 경우

5개의 홀수 중 3개를 택하면 되므로 경우의 수는

$${}_5C_3 = {}_5C_{5-3} = {}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $30 + 10 = 40$

답 ⑤

04

5일 중에서 요가를 하는 3일을 선택하는 경우의 수는

$${}_5C_3 = {}_5C_{5-3} = {}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

요가를 하지 않는 2일 중에서 하루를 선택하여 수영, 줄넘기 중 한 가지를 하는 경우의 수는

$${}_2C_1 \times {}_2C_1 = 2 \times 2 = 4$$

남은 하루에 농구, 축구 중에서 한 가지를 하는 경우의 수는

$${}_2C_1 = 2$$

따라서 구하는 계획의 가짓수는 $10 \times 4 \times 2 = 80$

답 ④

05

영신이를 항상 포함하는 경우는 영신이를 제외한 5명 중에서 3명을 뽑으면 되므로 $a = {}_5C_3 = {}_5C_{5-3} = {}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$
 영신이를 포함하지 않는 경우는 영신이를 제외한 5명 중에서 4명을 뽑으면 되므로 $b = {}_5C_4 = {}_5C_{5-4} = {}_5C_1 = 5$
 $\therefore a - b = 10 - 5 = 5$

답 ④

06

12명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

$${}_{12}C_3 = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = 220$$

(i) 탁구 선수가 한 명도 포함되지 않는 경우

탁구 선수를 제외한 7명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

$${}_7C_3 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$$

(ii) 탁구 선수가 한 명 포함되는 경우

탁구 선수 5명 중에서 1명을 뽑고, 탁구 선수를 제외한 7명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

$${}_5C_1 \times {}_7C_2 = 5 \times \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 105$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $220 - (35 + 105) = 80$

답 80

다른 풀이

(i) 탁구 선수가 2명 포함되는 경우

탁구 선수 5명 중에서 2명을 뽑고, 탁구 선수를 제외한 7명 중에서 1명을 뽑는 경우의 수는

$${}_5C_2 \times {}_7C_1 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times 7 = 70$$

(ii) 탁구 선수 3명을 뽑는 경우

탁구 선수 5명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

$${}_5C_3 = {}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $70 + 10 = 80$

07

1부 공연 순서를 정하는 경우는 노래 3팀 중에서 2팀을 뽑고, 댄스 3팀, 개그 2팀 중에서 각각 1팀씩 뽑고, 노래 2팀은 서로 순서를 바꿀 수 있으므로 경우의 수는

$${}_3C_2 \times {}_3C_1 \times {}_2C_1 \times 2! = 3 \times 3 \times 2 \times 2 = 36$$

2부 공연 순서에서는 노래 1팀, 댄스 2팀, 개그 1팀은 1부에서 뽑히지 않은 팀으로 자동 결정되고 댄스 2팀은 서로 순서가 바뀔 수 있으므로 경우의 수는

$$1 \times 1 \times 1 \times 2! = 2$$

따라서 구하는 경우의 수는 $36 \times 2 = 72$

답 ③

08

사과 4개 중에서 2개를 고르는 경우의 수는 ${}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$

복숭아 2개 중에서 1개를 고르는 경우의 수는 ${}_2C_1 = 2$

멜론 3개 중에서 1개를 고르는 경우의 수는 ${}_3C_1 = 3$

4명의 학생에게 각각 하나씩 나누어주는 경우의 수는 $4! = 24$

따라서 구하는 경우의 수는 $6 \times 2 \times 3 \times 24 = 864$

답 864

09

문제 접근하기

a 의 값이 2, 3, 4인 각 경우에서 b, c 가 될 수 있는 두 수를 뽑는 경우의 수를 구한다.

200보다 크고 500보다 작은 수의 백의 자리의 수는 2 또는 3 또는 4이므로 다음과 같이 경우를 나누어 생각해 보자.

(i) $a = 2$ 인 경우

$2 < b < c < 10$ 이므로 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9의 7개의 수 중에서 2개를 택하여 작은 수를 b , 큰 수를 c 라고 하면 된다.

$$\text{따라서 경우의 수는 } {}_7C_2 = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21$$

(ii) $a = 3$ 인 경우

$3 < b < c < 10$ 이므로 4, 5, 6, 7, 8, 9의 6개의 수 중에서 2개를 택하여 작은 수를 b , 큰 수를 c 라고 하면 된다.

$$\text{따라서 경우의 수는 } {}_6C_2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$$

(iii) $a = 4$ 인 경우

$4 < b < c < 10$ 이므로 5, 6, 7, 8, 9의 5개의 수 중에서 2개를 택하여 작은 수를 b , 큰 수를 c 라고 하면 된다.

$$\text{따라서 경우의 수는 } {}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

(i)~(iii)에서 구하는 자연수의 개수는

$$21 + 15 + 10 = 46$$

답 46

10

14개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_{14}C_2 = \frac{14 \times 13}{2 \times 1} = 91$$

한 직선 위에 있는 8개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_8C_2 = \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = 28$$

그런데 한 직선 위에 있는 점들을 연결하여 만들 수 있는 직선은 1개뿐이므로 구하는 직선의 개수는

$$91 - 28 + 1 = 64$$

답 64

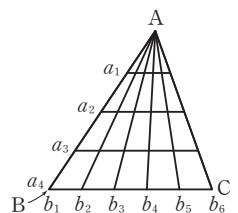
11

오른쪽 그림과 같이 가로 방향의 선분들을 각각 a_1, a_2, a_3, a_4 라 하고, 세로 방향의 선분들을 각각 $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$ 이라고 하자.

이때 선분 a_1, a_2, a_3, a_4 중에서 1개, 선분 $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$ 중에서 2개를 택하면 삼각형 1개가 만들어지므로 구하는 삼각형의 개수는

$${}_4C_1 \times {}_6C_2 = 4 \times \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 60$$

답 ④





행렬

기본을 다지는 유형

본문 162쪽

001

(4) $a_{31} = -3$, $a_{22} = -2$ 이므로 $a_{31} + a_{22} = -3 + (-2) = -5$

답 (1) 0, -2 (2) 1, 0, -3 (3) 7 (4) -5

002

- ① 1×3 행렬 ② 2×2 행렬 ③ 3×2 행렬
 ④ 2×3 행렬 ⑤ 3×3 행렬

따라서 2×3 행렬인 것은 ④이다.

답 ④

003

- ② (3, 1) 성분은 3이다.
 ③ $a_{12} + a_{33} = 5 + 5 = 10$
 ④ 제3열의 모든 성분의 합은 $0 + 4 + 5 = 9$
 ⑤ $i = j$ 를 만족시키는 성분은 a_{11} , a_{22} , a_{33} 이므로 이 성분의 곱은
 $(-1) \times 2 \times 5 = -10$
 따라서 옳지 않은 것은 ②이다.

답 ②

004

행렬 A 는 2×2 행렬이므로

$$\frac{a_{11}=1+1=2, a_{12}=1-2 \times 2=-3,}{i=j \text{인 경우} \quad i < j \text{인 경우}}$$

$$\frac{a_{21}=2-1=1, a_{22}=2+2=4}{i > j \text{인 경우} \quad i=j \text{인 경우}}$$

따라서 행렬 $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ 이므로 모든 성분의 합은
 $2 + (-3) + 1 + 4 = 4$

답 ④

005

 P_1 지점에서 P_1 지점으로 가는 길의 개수는 1이므로 $a_{11} = 1$ P_1 지점에서 P_2 지점으로 가는 길의 개수는 1이므로 $a_{12} = 1$ P_1 지점에서 P_3 지점으로 가는 길의 개수는 1이므로 $a_{13} = 1$

같은 방법으로 하면

$$a_{21} = 1, a_{22} = 0, a_{23} = 2,$$

$$a_{31} = 0, a_{32} = 1, a_{33} = 0$$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{답 } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

006

(1) 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$2a+1=5, b-4=3$$

$$\therefore a=2, b=7$$

(2) 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$3a-2=5a, 2b=3-b$$

$$\therefore a=-1, b=1$$

답 (1) $a=2, b=7$ (2) $a=-1, b=1$

참고

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \text{이면 } a=c, b=d$$

007

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$a-1=5, 6=b+2 \quad \therefore a=6, b=4$$

$$\therefore a+b=6+4=10$$

답 ②

008

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$x=\sqrt{2}-y, -2=xy$$

$$\therefore x+y=\sqrt{2}, xy=-2$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} &= \frac{x^3+y^3}{xy} = \frac{(x+y)^3-3xy(x+y)}{xy} \\ &= \frac{(\sqrt{2})^3-3 \times (-2) \times \sqrt{2}}{-2} = -4\sqrt{2} \end{aligned}$$

답 ①

참고

곱셈 공식의 변형

$$\textcircled{1} a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab$$

$$\textcircled{2} (a+b)^2=(a-b)^2+4ab, (a-b)^2=(a+b)^2-4ab$$

$$\textcircled{3} a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b), a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$$

009

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$1=2a-b, 0=2b-c, 0=2c-a$$

위의 세 식을 각 변끼리 더하면

$$a+b+c=1$$

답 ③

010

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$x^2-15=6-4x, xy+5=8, k=x^2+y^2 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$x^2-15=6-4x \text{에서 } x^2+4x-21=0$$

$$(x+7)(x-3)=0 \quad \therefore x=-7 \text{ 또는 } x=3$$

$$x>0 \text{이므로 } x=3$$

$$x=3 \text{을 } xy+5=8 \text{에 대입하면}$$

$$3y+5=8 \quad \therefore y=1 \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

$$\therefore k=x^2+y^2=3^2+1^2=10 \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

답 10

채점 기준	비율
① 행렬이 서로 같을 조건을 이용할 수 있다.	30%
② x, y 의 값을 구할 수 있다.	50%
③ k 의 값을 구할 수 있다.	20%

011

$$(1) A+B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(2) A-B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(3) 3A=3\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 18 & 9 \end{pmatrix}$$

$$(4) A+2B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$$

답 (1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 18 & 9 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$

012

$$2A+B=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \text{에서}$$

$$2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 2+a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$2+a=7 \quad \therefore a=5$$

답 ⑤

013

$$A+2X=3B+X \text{에서}$$

$$X=3B-A$$

$$=3\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

답 ③

014

$$xA+yB=\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 17 & 6 \end{pmatrix} \text{에서}$$

$$x\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 17 & 6 \end{pmatrix} \dots\dots\dots ①$$

$$\begin{pmatrix} x & 2x \\ 3x & 4x \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2y & y \\ -4y & 3y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 17 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x-2y & 2x+y \\ 3x-4y & 4x+3y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 17 & 6 \end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$x-2y=7, 2x+y=4, 3x-4y=17, 4x+3y=6$$

위의 식을 연립하여 풀면

→ 4개의 식 중 어느 두 식을 연립하여 풀어도 결과는 같다.

$$x=3, y=-2 \dots\dots\dots ②$$

$$\therefore xy=3 \times (-2) = -6 \dots\dots\dots ③$$

답 -6

채점 기준	비율
① 행렬을 이용하여 등식을 세울 수 있다.	30%
② x, y 의 값을 구할 수 있다.	50%
③ xy 의 값을 구할 수 있다.	20%

015

주어진 두 식을 각 변끼리 더하면

$$(A+2B)+(2A+B)=\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$3A+3B=\begin{pmatrix} 9 & 15 \\ -12 & 9 \end{pmatrix}, 3(A+B)=\begin{pmatrix} 9 & 15 \\ -12 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A+B=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 9 & 15 \\ -12 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 $A+B$ 의 모든 성분의 합은

$$3+5+(-4)+3=7$$

답 ④

[다른 풀이]

$$A+2B=\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \dots\dots\dots ㉠$$

$$2A+B=\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} \dots\dots\dots ㉡$$

→ 다항식에서의 연립일차방정식과 같은 방법으로 푼다.

$2 \times ㉡ - ㉠$ 을 하면

$$2(2A+B)-(A+2B)=2\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$4A+2B-A-2B=\begin{pmatrix} 8 & 16 \\ -14 & 8 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$3A=\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$2 \times ㉠ - ㉡$ 을 하면

$$2(A+2B)-(2A+B)=2\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$2A+4B-2A-B=\begin{pmatrix} 10 & 14 \\ -10 & 10 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$3B=\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\therefore B=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A+B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 $A+B$ 의 모든 성분의 합은

$$3+5+(-4)+3=7$$

016

$$(1) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}(4-5)=\begin{pmatrix} 2 \times 4 & 2 \times (-5) \\ 1 \times 4 & 1 \times (-5) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = (4 \times 3 + 6 \times (-1) \quad 4 \times (-2) + 6 \times 5) \\ = (6 \quad 22)$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 6 + (-3) \times (-1) \\ 2 \times 6 + 1 \times (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \times 1 + (-1) \times 3 & 0 \times 2 + (-1) \times 0 \\ 2 \times 1 + 2 \times 3 & 2 \times 2 + 2 \times 0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{답 (1)} \begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 6 & 22 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$$

참고

$$(1) \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = (ap + bq)$$

$$(2) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap & aq \\ bp & bq \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} a & b \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = (ap + br \quad aq + bs)$$

$$(4) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap + bq \\ cp + dq \end{pmatrix}$$

017

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -x \\ 2 & y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+2x & -2x+xy \\ 4y-8 & -xy-4y+4 \end{pmatrix}$$

$AB=O$ 에서

$$\begin{pmatrix} 4+2x & -2x+xy \\ 4y-8 & -xy-4y+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$4+2x=0, -2x+xy=0, 4y-8=0, -xy-4y+4=0$$

$$\therefore x=-2, y=2$$

$$\therefore x+y=-2+2=0$$

답 0

018

$$\begin{pmatrix} x & 1 \\ x^2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} \text{에서}$$

$$\begin{pmatrix} 2x+y \\ 2x^2-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2y \\ 4+y \end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$2x+y=3+2y, 2x^2-y=4+y$$

$$\therefore y=2x-3, x^2-y-2=0$$

$$y=2x-3 \text{을 } x^2-y-2=0 \text{에 대입하면}$$

$$x^2-(2x-3)-2=0, x^2-2x+1=0$$

$$(x-1)^2=0 \quad \therefore x=1$$

$$x=1 \text{을 } y=2x-3 \text{에 대입하면 } y=-1$$

$$\therefore x-y=1-(-1)=2$$

답 ⑤

019

$a_{ij}=i-j+1$ 이므로

$$a_{11}=1-1+1=1, a_{12}=1-2+1=0,$$

$$a_{21}=2-1+1=2, a_{22}=2-2+1=1$$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$b_{ij}=i+j+1$ 이므로

$$b_{11}=1+1+1=3, b_{12}=1+2+1=4,$$

$$b_{21}=2+1+1=4, b_{22}=2+2+1=5$$

$$\therefore B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\therefore AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 10 & 13 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 AB 의 $(2, 2)$ 성분은 13이다.

답 13

020

α, β 가 이차방정식 $x^2-5x+1=0$ 의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 5, \alpha\beta = 1 \quad \text{..... ①}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ \alpha & 2\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\beta & 0 \\ \alpha^2 + \beta^2 & 2\alpha\beta \end{pmatrix} \quad \text{..... ②}$$

따라서 모든 성분의 합은

$$\alpha\beta + 0 + (\alpha^2 + \beta^2) + 2\alpha\beta = \alpha^2 + \beta^2 + 3\alpha\beta \\ = (\alpha + \beta)^2 + \alpha\beta \\ = 5^2 + 1 = 26 \quad \text{..... ③}$$

답 26

채점 기준	비율
① 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha + \beta, \alpha\beta$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %
② 행렬의 곱을 구할 수 있다.	30 %
③ 행렬의 곱의 모든 성분의 합을 구할 수 있다.	40 %

참고 이차방정식의 근과 계수의 관계

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 두 근을 α, β 라고 하면

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

021

$$(1) A^2 = AA = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(2) A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & -18 \\ 18 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{답 (1)} \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 19 & -18 \\ 18 & 1 \end{pmatrix}$$

022

$$A-B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$(A-B)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 10 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\text{답 } \begin{pmatrix} -10 & 10 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$$

023

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ a & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ a & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3a & 18 \\ 6a & 3a+25 \end{pmatrix}$$

행렬 A^2 의 모든 성분의 합이 8이므로

$$(1+3a)+18+6a+(3a+25)=8$$

$$12a+44=8 \quad \therefore a=-3$$

답 ①

024

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1+a \\ -1-a & -1+a^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1+a \\ -1-a & -1+a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1-a & a+a^2 \\ -a-a^2 & -1-2a+a^3 \end{pmatrix} \dots\dots\dots ①$$

$$A^3 = O \text{에서}$$

$$\begin{pmatrix} -1-a & a+a^2 \\ -a-a^2 & -1-2a+a^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$-1-a=0, a+a^2=0, -a-a^2=0, -1-2a+a^3=0$$

$$\therefore a=-1 \dots\dots\dots ②$$

답 -1

채점 기준	비율
① 행렬 A^3 을 구할 수 있다.	50%
② a 의 값을 구할 수 있다.	50%

025

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= 4A$$

$$\therefore k=4$$

답 ④

026

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (2, 1) \text{ 성분: } 4=2 \times 2$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (2, 1) \text{ 성분: } 6=2 \times 3$$

$$A^4 = A^3 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (2, 1) \text{ 성분: } 8=2 \times 4$$

⋮

$$\text{따라서 } A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2n & 1 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$A^{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 22 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{답 } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 22 & 1 \end{pmatrix}$$

027

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

⋮

$$\text{따라서 } A^n = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{이므로 } -n = -64 \text{에서}$$

$$n=64$$

답 64

028

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 A = \begin{pmatrix} -27 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 81 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

⋮

$$\therefore A^n = \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots ①$$

행렬 A^n 의 모든 성분의 합이 -242이므로

$$(-3)^n + 0 + 0 + 1 = -242, (-3)^n = -243$$

$$-243 = (-3)^5 \text{이므로 } n=5 \dots\dots\dots ②$$

답 5

채점 기준	비율
① 행렬 A^n 을 구할 수 있다.	60%
② 자연수 n 의 값을 구할 수 있다.	40%

참고

특수한 행렬의 거듭제곱

자연수 n 에 대하여

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{일 때, } A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \text{일 때, } A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ na & 1 \end{pmatrix}$$

$$(3) A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \text{일 때, } A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$$

029

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 3A$$

$$A^3 = A^2 A = 3AA = 3A^2 = 3(3A) = 3^2 A$$

$$A^6 = A^3 A^3 = (3^2 A)(3^2 A) = 3^4 A^2 = 3^4(3A) = 3^5 A$$

$$\therefore k=5$$

답 ①

030

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -A$$

$$A^3 = A^2 A = -AA = -A^2 = -(-A) = A$$

$$\begin{aligned}
 A^4 &= A^3 A = A A = A^2 = -A \\
 A^5 &= A^4 A = -A A = -A^2 = -(-A) = A \\
 \therefore A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 &= A + (-A) + A + (-A) + A \\
 &= A
 \end{aligned}$$

답 ②

031

$$\begin{aligned}
 QP &= \begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 \\ 0.4 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 120 & 100 \\ 110 & 130 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0.6 \times 120 + 0.8 \times 110 & 0.6 \times 100 + 0.8 \times 130 \\ 0.4 \times 120 + 0.2 \times 110 & 0.4 \times 100 + 0.2 \times 130 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

이때 행렬 QP 의 (1, 2) 성분은

$$\begin{aligned}
 &0.6 \times 100 + 0.8 \times 130 \\
 &\text{A 후보를 지지} \quad \text{A 후보를 지지} \\
 &\text{하는 1학년} \quad \text{하는 2학년} \\
 &\text{여학생의 수} \quad \text{여학생의 수}
 \end{aligned}$$

이므로 A 후보를 지지하는 1학년과 2학년의 여학생 수를 나타낸다.

답 ②

032

$$\begin{pmatrix} 100 & a \\ 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 59 \\ 122 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \times 59 + a \times 122 \\ x \times 122 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

행렬 $\begin{pmatrix} 100 & a \\ 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 59 \\ 122 \end{pmatrix}$ 의 모든 성분의 합은

$$100 \times 59 + a \times 122 + x \times 122 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

한 달간 사용한 전력량이 a kWh ($100 < a \leq 200$)일 때, 전력량 요금(원)은

$$\begin{aligned}
 &100 \times 59 + (a - 100) \times 122 \\
 &= 100 \times 59 + a \times 122 - 100 \times 122 \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}
 \end{aligned}$$

①, ②를 비교하면

$$x = -100$$

답 ①

033

$$(1) AB + AC = A(B + C)$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \\
 &= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -4 & 12 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$(2) AC - BC = (A - B)C$$

$$\begin{aligned}
 &= \left\{ \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -6 & -11 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\text{답 } (1) \begin{pmatrix} -4 & 12 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} -6 & -11 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$$

034

$$A^2 - AB = A(A - B)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

따라서 $A^2 - AB$ 의 모든 성분의 합은

$$9 + 2 + 4 + (-3) = 12$$

답 ①

035

$$A(B + C) - (A - B)C - B(C - B)$$

$$= AB + AC - AC + BC - BC + B^2$$

$$= AB + B^2 = (A + B)B$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & -12 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

답 ⑤

036

$$A - B = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \text{에서}$$

$$(A - B)(A - B) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$A^2 - AB - BA + B^2 = \begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 15 & -19 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$\therefore A^2 + B^2 = (A^2 - AB - BA + B^2) + (AB + BA)$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 15 & -19 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 & 6 \\ -2 & 12 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 13 & -7 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

따라서 행렬 $A^2 + B^2$ 의 (2, 2) 성분은 -7 이다. $\dots\dots\dots \textcircled{3}$

답 -7

채점 기준	비율
① 행렬 $A^2 - AB - BA + B^2$ 을 구할 수 있다.	40 %
② 행렬 $A^2 + B^2$ 을 구할 수 있다.	40 %
③ 행렬 $A^2 + B^2$ 의 (2, 2) 성분을 구할 수 있다.	20 %

037

$$BAB - X = A^2B \text{에서}$$

$$X = BAB - A^2B$$

$$= (B - A)AB$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 18 & 4 \end{pmatrix}$$

답 ③

038

$AB=BA$ 이므로

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2-a & -1+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2-a \\ -1 & -1+a \end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$2-a=-1 \quad \therefore a=3$$

답 3

039

$$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$$

$$A^2-AB+BA-B^2=A^2-B^2$$

$$\therefore AB=BA \quad \text{..... ①}$$

$$\text{즉, } \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$\begin{pmatrix} 1+xy & x \\ y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & xy+1 \end{pmatrix} \quad \text{..... ②}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$xy+1=1 \quad \therefore xy=0 \quad \text{..... ③}$$

답 0

채점 기준	비율
① $AB=BA$ 임을 알 수 있다.	40%
② 행렬의 곱 AB, BA 를 구할 수 있다.	30%
③ xy 의 값을 구할 수 있다.	30%

참고

$(AB)^2=A^2B^2$, $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$, $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ 과 같이 두 행렬 A, B 에 대하여 지수법칙과 곱셈 공식이 성립하기 위한 조건은 $AB=BA$ 이다.

040

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} 3a+2 \\ 3b+1 \end{pmatrix} &= A \left\{ \begin{pmatrix} 3a \\ 3b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = A \left\{ 3 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= 3A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

답 $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

041

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} 2a+c \\ 2b+d \end{pmatrix} &= A \left\{ \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right\} \\ &= A \left\{ 2 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right\} \\ &= 2A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} 2a+c \\ 2b+d \end{pmatrix} - 2A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

따라서 행렬 $A \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ 의 모든 성분의 합은

$$1+(-3)=-2$$

답 -2

042

두 실수 k, l 에 대하여 $k \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ 라고 하면

$$\begin{pmatrix} -k+3l \\ -2k+l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$-k+3l=3, \quad -2k+l=-4$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $k=3, l=2$

따라서 $3 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ 이므로

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} &= A \left\{ 3 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = 3A \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + 2A \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

따라서 $a=4, b=7$ 이므로

$$a+b=4+7=11$$

답 ④

043

$$A^2 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = AA \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{..... ①}$$

두 실수 k, l 에 대하여 $k \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 이라고 하면

$$\begin{pmatrix} 4k+l \\ 2k+l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$4k+l=2, \quad 2k+l=0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $k=1, l=-2$

따라서 $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 이므로 ②

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} &= A \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= A \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} - 2A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \text{..... ③} \end{aligned}$$

답 $\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}$

채점 기준	비율
① 행렬 $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 을 구할 수 있다.	30%
② 행렬 $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 을 두 행렬 $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 을 이용하여 나타낼 수 있다.	40%
③ 행렬 $A \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 을 구할 수 있다.	30%

044

$$(A+E)(A-E)=A^2-E^2=A^2-E$$

$$=\begin{pmatrix} 7 & -10 \\ -15 & 22 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 6 & -10 \\ -15 & 21 \end{pmatrix}$$

$$\text{답} \begin{pmatrix} 6 & -10 \\ -15 & 21 \end{pmatrix}$$

045

$$A^2+A^3=-3A-3E \text{이므로}$$

$$A^4+A^5=A^2(A^2+A^3)=A^2(-3A-3E)$$

$$=-3(A^3+A^2)=-3(-3A-3E)$$

$$=9A+9E$$

이때 행렬 $9A$ 의 모든 성분의 합은 0이고, 행렬 $9E$ 의 모든 성분의 합은 18이므로 행렬 A^4+A^5 의 모든 성분의 합은 18이다.

답 18

046

$$A^2=AA=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-E$$

$$\therefore A^{2026}=(A^2)^{1013}=(-E)^{1013}=-E=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 A^{2026} 의 모든 성분의 합은

$$-1+0+0+(-1)=-2$$

답 -2

047

$$A^2=AA=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-E$$

$$A^4=A^3A=-EA=-A$$

$$A^5=A^4A=-AA=-A^2$$

$$A^6=A^5A=-A^2A=-A^3=-(-E)=E$$

따라서 $A^n=E$ 를 만족시키는 가장 작은 자연수 n 의 값은 6이다.

답 ③

048

$$A^2=AA=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}=-8E$$

$$\therefore A^{96}=(A^3)^{32}=(-8E)^{32}=8^{32}E^{32}$$

$$=(2^3)^{32}E=2^{96}E$$

$$\therefore k=96$$

답 96

049

$$A^2=AA=\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-E$$

$$A^3=A^2A=-EA=-A$$

$$A^4=A^3A=-AA=-A^2=-(-E)=E$$

$$A^5=A^4A=EA=A$$

⋮

이때

$$A+A^2+A^3+A^4=A+(-E)+(-A)+E=O$$

이므로

$$A+A^2+A^3+\cdots+A^{25}$$

$$=(\underbrace{A+A^2+A^3+A^4}_{\rightarrow O})+\cdots+A^{20}(\underbrace{A+A^2+A^3+A^4}_{\rightarrow O})+(A^4)^6A$$

$$=A$$

답 ①

050

$$A-B=O \text{에서 } A=B$$

$$AB=E \text{에 } A=B \text{를 대입하면}$$

$$A^2=E, B^2=E \cdots \cdots \cdots \text{①}$$

$$\therefore A^{100}+B^{102}=(A^2)^{50}+(B^2)^{51}=E^{50}+E^{51}$$

$$=E+E=2E \cdots \cdots \cdots \text{②}$$

$$\therefore k=2 \cdots \cdots \cdots \text{③}$$

답 2

채점 기준	비율
① $A^2=E, B^2=E$ 임을 구할 수 있다.	50 %
② $A^{100}+B^{102}$ 을 단위행렬 E 를 사용하여 나타낼 수 있다.	40 %
③ k 의 값을 구할 수 있다.	10 %

051

$$\neg. A^5=A^3A^2=EA^2=A^2 \text{이므로 } A^5=E \text{이면 } A^2=E \text{이다.}$$

$$A^3=A^2A=EA=A \text{이므로 } A^3=E \text{이면 } A=E \text{이다. (참)}$$

$$\neg. A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{이면}$$

$$AB=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O \text{이고, } A \neq O \text{이지만}$$

$$B \neq O \text{이다. (거짓)}$$

$$\neg. A+B=E \text{에서 } B=E-A \text{이므로}$$

$$AB=A(E-A)=A-A^2$$

$$BA=(E-A)A=A-A^2$$

$$\therefore AB=BA \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다.

답 $\neg, \neg$

052

케일리-해밀턴 정리에 의하여

$$A^2-(2+3)A+(2 \times 3-1 \times 4)E=O$$

$$A^2-5A+2E=O$$

$$\therefore A^3-5A^2+3E=A(A^2-5A+2E)-2A+3E$$

$$=-2A+3E$$

따라서 $a=-2, b=3$ 이므로

$$a+b=-2+3=1$$

답 1

053

케일리-해밀턴 정리에 의하여

$$A^2 - \{0 + (-1)\}A + \{0 \times (-1) - 1 \times (-1)\}E = O$$

$$A^2 + A + E = O$$

양변에 $A - E$ 를 곱하면

$$(A - E)(A^2 + A + E) = O$$

$$A^3 - E = O \quad \therefore A^3 = E$$

$$\therefore A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{100}$$

$$= A(E + A + A^2) + A^4(E + A + A^2) + \cdots$$

$$+ A^{97}(E + A + A^2) + A^{100}$$

$$= A^{100} = (A^3)^{33}A = A$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{답 } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

실력을 높이는 연습 문제

본문 174쪽

01

주어진 행렬의 제1행의 모든 성분의 합과 제2열의 모든 성분의 합이 같으므로

$$1 + 3 + x = 3 + (2x - 1)$$

$$x + 4 = 2x + 2 \quad \therefore x = 2$$

답 ②

02

$$a_{11} = x + y = 3, a_{21} = 2x + y = 5, a_{22} = 2x + 2y = 6$$

$$\therefore x + y = 3, 2x + y = 5$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$x = 2, y = 1$$

$$\text{따라서 } a_{ij} = 2i + j \text{이므로 } a = a_{12} = 2 \times 1 + 2 = 4$$

$$\therefore a + x + y = 4 + 2 + 1 = 7$$

답 ⑤

03

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$x^2 = 6x - 5, x = \frac{7}{y}, y^2 - 10 = 5y + 4$$

$$x^2 = 6x - 5 \text{에서}$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0, (x - 1)(x - 5) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 5$$

$$y^2 - 10 = 5y + 4 \text{에서}$$

$$y^2 - 5y - 14 = 0, (y + 2)(y - 7) = 0$$

$$\therefore y = -2 \text{ 또는 } y = 7$$

$$x = \frac{7}{y} \text{에서 } xy = 7 \text{이므로 이를 만족시키는 } x, y \text{의 값은}$$

$$x = 1, y = 7$$

$$\therefore x + y = 1 + 7 = 8$$

답 ③

04

$$A + B = \begin{pmatrix} a & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+4 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

행렬 $A + B$ 의 모든 성분의 합이 9이므로

$$(a+4) + 4 + (-1) + 1 = 9 \quad \therefore a = 1$$

답 ①

05

$$-3 \begin{pmatrix} x+3y & 1 \\ -3 & 2y \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -x-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & -4 \end{pmatrix} \text{에서}$$

$$\begin{pmatrix} -3x-9y & -3 \\ 9 & -6y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -2 & -2x-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3x-9y+6 & 1 \\ 7 & -2x-6y-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$-3x - 9y + 6 = 3, -2x - 6y - 2 = -4$$

$$\therefore x + 3y = 1$$

답 ②

06

A 는 1×2 행렬, B 는 2×2 행렬, C 는 2×1 행렬이다.

③ BA 에서 행렬 B 의 열의 개수는 2, 행렬 A 의 행의 개수는 1로 서로 다르므로 곱셈이 가능하지 않다.

답 ③

참고

두 행렬 A, B 에 대하여 행렬 A 의 열의 개수와 행렬 B 의 행의 개수가 같을 때에만 두 행렬의 곱 AB 가 정의된다.

07

문제 접근하기

행렬 A 가 이차 정사각행렬이므로 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 로 놓고, 행렬이 서로 같을 조건을 이용하여 행렬 A 의 성분을 구한다.

이차 정사각행렬 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 로 놓으면

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix} \text{에서 } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} a+2b \\ c+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

$$A \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 22 \end{pmatrix} \text{에서 } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 22 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} -a+8b \\ -c+8d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 22 \end{pmatrix} \quad \cdots \cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$a + 2b = -1, c + 2d = 8, -a + 8b = 1, -c + 8d = 22$$

$$a + 2b = -1, -a + 8b = 1 \text{을 연립하여 풀면}$$

$$a = -1, b = 0$$

$$c + 2d = 8, -c + 8d = 22 \text{를 연립하여 풀면}$$

$$c = 2, d = 3$$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{답 } \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

08

$$a_{11} = -a_{11} \text{ 이므로 } a_{11} = 0$$

$$a_{12} = 2 \text{ 이므로 } a_{21} = -a_{12} = -2$$

$$a_{22} = -a_{22} \text{ 이므로 } a_{22} = 0$$

$$\text{즉, } A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ 이므로}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 A^2 의 제2열의 모든 성분의 합은
 $0 + (-4) = -4$

답 ②

09

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a^2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2a^2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2a^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a^2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3a^2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3a^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a^2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4a^2 & 1 \end{pmatrix}$$

⋮

$$\therefore A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ na^2 & 1 \end{pmatrix}$$

따라서 $A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10a^2 & 1 \end{pmatrix}$ 이고, 행렬 A^{10} 의 모든 성분의 합이 42이

므로

$$1 + 0 + 10a^2 + 1 = 42, \quad 10a^2 = 40$$

$$a^2 = 4 \quad \therefore a = 2 \quad (\because a > 0)$$

답 ②

10

$$PQ = \begin{pmatrix} 30 & 40 \\ 10 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5.1 & 21.4 \\ 10.7 & 11.5 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 30 \times 5.1 + 40 \times 10.7 & 30 \times 21.4 + 40 \times 11.5 \\ 10 \times 5.1 + 20 \times 10.7 & 10 \times 21.4 + 20 \times 11.5 \end{pmatrix}$$

$$QP = \begin{pmatrix} 5.1 & 21.4 \\ 10.7 & 11.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 & 40 \\ 10 & 20 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 5.1 \times 30 + 21.4 \times 10 & 5.1 \times 40 + 21.4 \times 20 \\ 10.7 \times 30 + 11.5 \times 10 & 10.7 \times 40 + 11.5 \times 20 \end{pmatrix}$$

(지원자 수) = (선발 인원수) × (경쟁률) 이므로

A, B 두 학과의 일반 전형 지원자 수의 합은

$$m = 30 \times 5.1 + 40 \times 10.7$$

즉, m 의 값은 행렬 PQ 의 (1, 1) 성분과 같다.

B 학과의 일반 전형과 특별 전형 지원자 수의 합은

$$n = 40 \times 10.7 + 20 \times 11.5$$

즉, n 의 값은 행렬 QP 의 (2, 2) 성분과 같다.

따라서 $m+n$ 의 값은 행렬 PQ 의 (1, 1) 성분과 행렬 QP 의 (2, 2) 성분의 합과 같다.

답 ③

11

$$(A-B)(A+2B) = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{에서}$$

$$A^2 + 2AB - BA - 2B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 2B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} + 2AB - BA = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore 2AB - BA = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 $2AB - BA$ 의 모든 성분의 합은

$$-3 + 3 + 1 + (-6) = -5$$

답 -5

12

문제 접근하기

$A \begin{pmatrix} ka+lc \\ kb+ld \end{pmatrix}$ 의 꼴인 행렬을 구하는 경우 먼저 행렬의 성질을 이용하여

$A \begin{pmatrix} ka+lc \\ kb+ld \end{pmatrix} = kA \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + lA \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ 로 변형한 후, 주어진 조건에서

$A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ 와 $A \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ 를 찾는다.

$A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 의 양변의 왼쪽에 A 를 곱하면

$$A^2 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b \\ a+b \end{pmatrix}$$

$$\therefore A \begin{pmatrix} a+1 \\ b+2 \end{pmatrix} = A \left[\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a+b \\ a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b+1 \\ a+b+2 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 $A \begin{pmatrix} a+1 \\ b+2 \end{pmatrix}$ 의 성분인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

13

$$2A+B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad 2A-B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{에서}$$

$$(2A+B)(2A-B) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$4A^2 - 2AB + 2BA - B^2 = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$$

$$AB = BA \text{이므로 } 4A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 $4A^2 - B^2$ 의 모든 성분의 합은

$$7 + 8 + 8 + 7 = 30$$

답 30

|다른 풀이|

$$2A+B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \dots\dots ㉠$$

$$2A-B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \dots\dots ㉡$$

㉠+㉡을 하면

$$4A=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \quad \therefore A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

㉠-㉡을 하면

$$2B=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \therefore B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \therefore 4A^2-B^2 &= 4\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 4\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

따라서 행렬 $4A^2-B^2$ 의 모든 성분의 합은

$$7+8+8+7=30$$

14

$$\begin{aligned} &(A^2+A+E)(A^2-A+E) \\ &= A^4+A^2+E \\ &= A^2A^2+A^2+E \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

따라서 행렬 $(A^2+A+E)(A^2-A+E)$ 의 (1, 1) 성분과 (2, 2) 성분의 합은

$$12+6=18$$

답 ④

15

$$a_{11}=1-1=0, \quad a_{12}=1-2=-1,$$

$$a_{21}=2-1=1, \quad a_{22}=2-2=0$$

$$\text{이므로 } A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2=AA=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-E$$

$$A^3=A^2A=-EA=-A$$

$$A^4=A^3A=-AA=-A^2=-(-E)=E$$

$$A^5=A^4A=EA=A$$

⋮

이때

$$A+A^2+A^3+A^4=A+(-E)+(-A)+E=O$$

이므로

$$\begin{aligned} &A+A^2+A^3+\dots+A^{2010} \\ &= \underbrace{(A+A^2+A^3+A^4)}_{\rightarrow O}+\dots+A^{2004}\underbrace{(A+A^2+A^3+A^4)}_{\rightarrow O} \\ &\quad + (A^4)^{502}A + (A^4)^{502}A^2 \\ &= A+A^2=A-E \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

따라서 행렬 $A+A^2+A^3+\dots+A^{2010}$ 의 (2, 1) 성분은 1이다.

답 ④

16

$$\begin{aligned} \neg. (A+B)^2 &= A^2+AB+BA+B^2 \\ &= A^2-BA+BA+B^2 \\ &= A^2+B^2 \text{ (거짓)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg. (A+B)(A-B) &= A^2-AB+BA-B^2 \\ &= A^2+BA+BA-B^2 \\ &= A^2+2BA-B^2 \text{ (참)} \end{aligned}$$

$$\neg. A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{이면}$$

$$AB=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

이므로 $AB=-BA$ 이지만 $AB \neq O$ 이다. (거짓)

$$\begin{aligned} \neg. (AB)^2 &= (AB)(AB)=A(BA)B \\ &= A(-AB)B=-A^2B^2 \text{ (참)} \end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 $\neg$, $\neg$ 이다.

답 ④

17

문제 접근하기

케일리-해밀턴 정리를 이용하여 $A^n=E$ 가 되는 자연수 n 의 값을 찾고, 행렬 A^2 을 A 와 E 에 대한 식으로 나타낸다.

케일리-해밀턴 정리에 의하여

$$A^2-\{(-2)+1\}A+\{(-2)\times 1-1\times(-3)\}E=O$$

$$A^2+A+E=O$$

양변에 $A-E$ 를 곱하면

$$(A-E)(A^2+A+E)=O$$

$$A^3-E=O \quad \therefore A^3=E$$

$$A^2+A+E=O \text{에서 } A^2=-A-E \text{ 이므로}$$

$$A^{20}=(A^3)^6A^2=E^6A^2=A^2=-A-E$$

따라서 $a=-1, b=-1$ 이므로

$$ab=(-1)\times(-1)=1$$

답 1