풍산자
라이트유형

공통수학 2

| 정답과 풀이 |

01 평면좌표

기본을 다지는 유형

본문 009쪽

001

(1) $\overline{AB}=|3-1|=2$ (2) $\overline{AB}=|-6-2|=8$
(3) $\overline{AB}=|5-(-1)|=6$ (4) $\overline{OA}=|-4-0|=4$

답 (1) 2 (2) 8 (3) 6 (4) 4

002

(1) $\overline{AB}=\sqrt{(4-2)^2+(1-3)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$
(2) $\overline{AB}=\sqrt{(7-1)^2+\{-2-(-3)\}^2}=\sqrt{37}$
(3) $\overline{AB}=\sqrt{\{-1-(-2)\}^2+\{5-(-6)\}^2}=\sqrt{122}$
(4) $\overline{OA}=\sqrt{3^2+(-4)^2}=\sqrt{25}=5$

답 (1) $2\sqrt{2}$ (2) $\sqrt{37}$ (3) $\sqrt{122}$ (4) 5

003

$\overline{OA}=4$에서 $\sqrt{a^2+3^2}=4$
양변을 제곱하면 $a^2+9=16$ $\therefore a^2=7$

답 ②

004

$\overline{AC}=\overline{BC}$이므로
$\sqrt{(a-2)^2+(4+2)^2}=\sqrt{(a-3)^2+(4-2)^2}$
양변을 제곱하면
$(a-2)^2+36=(a-3)^2+4,\ a^2-4a+40=a^2-6a+13$
$2a=-27$ $\therefore a=-\dfrac{27}{2}$

답 $-\dfrac{27}{2}$

005

$\overline{AB}\le 4$이므로
$\sqrt{(k+1+1)^2+(2-k)^2}\le 4$
양변을 제곱하면
$(k+2)^2+(2-k)^2\le 16,\ 2k^2+8\le 16,\ k^2-4\le 0$
$(k+2)(k-2)\le 0$ $\therefore -2\le k\le 2$
따라서 정수 k는 $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$의 5개이다.

답 ⑤

006

구하는 y축 위의 점 P의 좌표를 $(0,\ a)$라고 하면
$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$
$(0-2)^2+(a-5)^2=(0-3)^2+(a+1)^2$
$a^2-10a+29=a^2+2a+10$
$-12a=-19$ $\therefore a=\dfrac{19}{12}$
따라서 구하는 점 P의 좌표는 $\left(0,\ \dfrac{19}{12}\right)$이다.

답 ④

참고
같은 거리에 있는 점의 좌표
(1) 두 점 A, B에서 같은 거리에 있는 점을 P라고 하면
➡ $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$
(2) 점 P의 위치에 따라 다음을 이용한다.
① 점 P가 x축 위의 점이면 ➡ $P(a,\ 0)$
② 점 P가 y축 위의 점이면 ➡ $P(0,\ a)$
③ 점 P가 직선 $y=mx+n$ 위의 점이면 ➡ $P(a,\ ma+n)$

007

점 P의 좌표를 $(a,\ 0)$이라고 하면
$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$
$(a+1)^2+(0-2)^2=(a-5)^2+(0-4)^2$
$a^2+2a+5=a^2-10a+41$
$12a=36$ $\therefore a=3$
$\therefore P(3,\ 0)$ ······ ❶
점 Q의 좌표를 $(0,\ b)$라고 하면
$\overline{AQ}=\overline{BQ}$에서 $\overline{AQ}^2=\overline{BQ}^2$
$(0+1)^2+(b-2)^2=(0-5)^2+(b-4)^2$
$b^2-4b+5=b^2-8b+41$
$4b=36$ $\therefore b=9$
$\therefore Q(0,\ 9)$ ······ ❷
따라서 선분 PQ의 길이는
$\overline{PQ}=\sqrt{(0-3)^2+(9-0)^2}=3\sqrt{10}$ ······ ❸

답 $3\sqrt{10}$

채점 기준	비율
❶ 점 P의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❷ 점 Q의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❸ 선분 PQ의 길이를 구할 수 있다.	20 %

008

점 P의 좌표를 $(0,\ a)$라고 하면
$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=\{(0+2)^2+(a-4)^2\}+\{(0-5)^2+(a+2)^2\}$
$=(a^2-8a+20)+(a^2+4a+29)$
$=2a^2-4a+49=2(a-1)^2+47$
따라서 $a=1$일 때 최솟값 47을 갖는다.

답 ③

009

점 P가 직선 $y=x+3$ 위에 있으므로 점 P의 좌표를 $(a,\ a+3)$이라고 하면
$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$
$=\{(a-0)^2+(a+3-6)^2\}+\{(a+3)^2+(a+3-7)^2\}$
$=(2a^2-6a+9)+(2a^2-2a+25)$
$=4a^2-8a+34=4(a-1)^2+30$

따라서 $a=1$일 때 최솟값 30을 갖는다.
즉, $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 값이 최소일 때 점 P의 x좌표는 1이다.

답 1

010

$\overline{AB}=\sqrt{(2+2)^2+(1-7)^2}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$
$\overline{BC}=\sqrt{(6-2)^2+(8-1)^2}=\sqrt{65}$
$\overline{CA}=\sqrt{(-2-6)^2+(7-8)^2}=\sqrt{65}$
$\therefore \overline{BC}=\overline{CA}$
따라서 삼각형 ABC는 $\overline{AC}=\overline{BC}$인 이등변삼각형이다.

답 ②

참고
삼각형 ABC의 세 변의 길이를 각각 a, b, c라고 할 때
(1) $a=b=c$ ➡ 정삼각형
(2) $a^2+b^2=c^2$ ➡ c가 빗변인 직각삼각형
(3) $a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$ ➡ 이등변삼각형

011

삼각형 ABC가 $\angle A=90°$인 직각삼각형이 되려면
$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{CA}^2$이어야 하므로 ❶
$(5-3)^2+(4-0)^2$
$=\{(3-2)^2+(0-a)^2\}+\{(2-5)^2+(a-4)^2\}$
$20=2a^2-8a+26$, $2a^2-8a+6=0$
$a^2-4a+3=0$, $(a-1)(a-3)=0$
$\therefore a=1$ 또는 $a=3$ ❷
따라서 모든 실수 a의 값의 합은
$1+3=4$ ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ 삼각형 ABC가 $\angle A=90°$인 직각삼각형이 되는 조건을 알고 있다.	40 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ a의 값의 합을 구할 수 있다.	20 %

012

(1) $\frac{2\times(-4)+3\times 6}{2+3}=2$이므로 P(2)
(2) $\frac{2\times 6+3\times(-4)}{2+3}=0$이므로 Q(0)
(3) $\frac{6+(-4)}{2}=1$이므로 M(1)

답 (1) P(2) (2) Q(0) (3) M(1)

013

선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점의 좌표가 -1이므로
$\frac{1\times 7+2\times a}{1+2}=-1$, $\frac{7+2a}{3}=-1$
$7+2a=-3$, $2a=-10$ $\quad\therefore a=-5$

답 -5

014

(1) $\frac{1\times 2+2\times(-1)}{1+2}=0$, $\frac{1\times 5+2\times 2}{1+2}=3$이므로
P(0, 3)
(2) $\frac{-1+2}{2}=\frac{1}{2}$, $\frac{2+5}{2}=\frac{7}{2}$이므로 $M\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$

답 (1) (0, 3) (2) $\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$

015

선분 BA를 3 : 1로 내분하는 점의 좌표는
$\left(\frac{3\times(-7)+1\times(-3)}{3+1}, \frac{3\times 3+1\times(-5)}{3+1}\right)$
$\therefore (-6, 1)$

답 ①

016

선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표는
$\left(\frac{2\times 0+1\times(-3)}{2+1}, \frac{2\times(-4)+1\times 2}{2+1}\right)$
$\therefore (-1, -2)$
점 $(-1, -2)$가 직선 $y=x+k$ 위의 점이므로
$-2=-1+k$ $\quad\therefore k=-1$

답 ②

017

선분 AB의 중점의 좌표가 $(-1, 3)$이므로
$\frac{a+(-6)}{2}=-1$, $\frac{8+b}{2}=3$
$\therefore a=4$, $b=-2$
$\therefore ab=4\times(-2)=-8$

답 ②

018

선분 AB를 1 : 3으로 내분하는 점의 좌표는
$\left(\frac{1\times a+3\times(-2)}{1+3}, \frac{1\times(-4)+3\times 4}{1+3}\right)$
$\therefore \left(\frac{a-6}{4}, 2\right)$ ❶
따라서 $\frac{a-6}{4}=0$, $2=b$이므로 $a=6$, $b=2$ ❷
$\therefore a+b=6+2=8$ ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ 선분 AB를 1 : 3으로 내분하는 점의 좌표를 구할 수 있다.	50 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

019

두 점 A, B의 좌표를 각각 (a, b), (c, d)라고 하면 선분 AB의 중점의 좌표가 $(1, 3)$이므로

$\frac{a+c}{2}=1$, $\frac{b+d}{2}=3$

$\therefore a+c=2$ ········ ㉠ $b+d=6$ ········ ㉡

선분 AB를 2 : 3으로 내분하는 점의 좌표가 $(-1, 4)$이므로

$\frac{2c+3a}{2+3}=-1$, $\frac{2d+3b}{2+3}=4$

$\therefore 3a+2c=-5$ ········ ㉢ $3b+2d=20$ ········ ㉣

㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-9$, $c=11$

㉡, ㉣을 연립하여 풀면 $b=8$, $d=-2$

$\therefore$ A$(-9, 8)$, B$(11, -2)$

답 A$(-9, 8)$, B$(11, -2)$

020

선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{3\times2+1\times a}{3+1}, \frac{3\times(-4)+1\times0}{3+1}\right)$

$\therefore \left(\frac{a+6}{4}, -3\right)$

점 $\left(\frac{a+6}{4}, -3\right)$이 y축 위에 있으므로

$\frac{a+6}{4}=0$ $\therefore a=-6$

따라서 A$(-6, 0)$, B$(2, -4)$이므로 선분 AB의 길이는

$\overline{AB}=\sqrt{(2+6)^2+(-4-0)^2}=4\sqrt{5}$

답 ③

021

$t:(1-t)$에서 $t>0$, $1-t>0$

$\therefore 0<t<1$ ········ ㉠

점 P의 좌표를 (a, b)라고 하면 점 P는 제1사분면 위에 있으므로

$a>0$, $b>0$

$a=\frac{t\times7+(1-t)\times(-4)}{t+(1-t)}=11t-4>0$에서

$t>\frac{4}{11}$ ········ ㉡

$b=\frac{t\times4+(1-t)\times6}{t+(1-t)}=-2t+6>0$에서

$t<3$ ········ ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면

$\frac{4}{11}<t<1$

답 $\frac{4}{11}<t<1$

022

두 대각선 AC와 BD의 중점이 일치하므로

$\frac{4+b}{2}=\frac{6+3}{2}$, $\frac{-2+3}{2}=\frac{a+(-9)}{2}$ $\therefore a=10$, $b=5$

$\therefore a+b=10+5=15$

답 ⑤

풍쌤 개념 CHECK

평행사변형과 마름모의 성질_中 수학 2

① 평행사변형의 두 대각선은 서로를 이등분한다.

② 마름모의 두 대각선은 서로를 수직이등분한다.

023

두 대각선 AC와 BD의 중점이 일치하므로 중점의 x좌표에서

$\frac{a+6}{2}=\frac{2+b}{2}$ $\therefore a-b=-4$ ········ ㉠

········ ❶

또, 마름모의 네 변의 길이는 모두 같으므로

$\overline{AB}=\overline{BC}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$

$(2-a)^2+(4-0)^2=(6-2)^2+(2-4)^2$

$a^2-4a+20=20$, $a^2-4a=0$

$a(a-4)=0$ $\therefore a=0$ 또는 $a=4$ ········ ❷

$a=0$을 ㉠에 대입하면 $b=4$

$a=4$를 ㉠에 대입하면 $b=8$

········ ❸

따라서 ab의 값은 0 또는 32이다. ········ ❹

답 0, 32

채점 기준	비율
❶ 두 대각선의 중점이 일치함을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	30 %
❷ 마름모의 네 변의 길이는 모두 같음을 이용하여 a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ b의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ ab의 값을 구할 수 있다.	20 %

024

(1) $\frac{0+(-4)+10}{3}=2$, $\frac{0+5+(-2)}{3}=1$이므로

G$(2, 1)$

(2) $\frac{-4+(-1)+2}{3}=-1$, $\frac{-2+5+9}{3}=4$이므로

G$(-1, 4)$

(3) $\frac{-3+1+2}{3}=0$, $\frac{2+7+(-3)}{3}=2$이므로

G$(0, 2)$

(4) $\frac{-1+3+5}{3}=\frac{7}{3}$, $\frac{6+(-8)+(-1)}{3}=-1$이므로

G$\left(\frac{7}{3}, -1\right)$

답 (1) $(2, 1)$ (2) $(-1, 4)$ (3) $(0, 2)$ (4) $\left(\frac{7}{3}, -1\right)$

025

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(2, -3)$이므로

$\frac{a+(-2)+6}{3}=2$, $\frac{b+(-4)+(-7)}{3}=-3$

$\therefore a=2$, $b=2$

$\therefore a+b=2+2=4$

답 ④

026

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(1, 1)$이므로

$\frac{a+(a+1)+(b-2)}{3}=1$, $\frac{(b+2)+(-5)+a}{3}=1$

$\frac{2a+b-1}{3}=1$, $\frac{a+b-3}{3}=1$

$\therefore 2a+b=4$, $a+b=6$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-2$, $b=8$

$\therefore ab=-2\times8=-16$

답 -16

027

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(3, 2)$이므로

$\frac{-6+x_1+x_2}{3}=3$, $\frac{3+y_1+y_2}{3}=2$

$\therefore x_1+x_2=15$, $y_1+y_2=3$

따라서 선분 BC의 중점의 좌표는

$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$, 즉 $\left(\frac{15}{2}, \frac{3}{2}\right)$

답 ①

028

두 점 B, C의 좌표를 각각 (c, d), (e, f)라고 하면 선분 BC의 중점의 좌표가 $(1, 2)$이므로

$\frac{c+e}{2}=1$, $\frac{d+f}{2}=2$

$\therefore c+e=2$, $d+f=4$ ········ ㉠

삼각형 ABC의 무게중심이 원점이므로

$\frac{a+c+e}{3}=0$, $\frac{b+d+f}{3}=0$

위의 식에서 ㉠을 대입하면

$\frac{a+2}{3}=0$, $\frac{b+4}{3}=0$

$\therefore a=-2$, $b=-4$

$\therefore a\times b=-2\times(-4)=8$

답 ②

| 다른 풀이 |

변 BC의 중점을 M이라고 하면 삼각형 ABC의 무게중심은 선분 AM을 $2:1$로 내분하는 점이다.

$A(a, b)$, $M(1, 2)$이므로 선분 AM을 $2:1$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{2\times1+1\times a}{2+1}, \frac{2\times2+1\times b}{2+1}\right)$

$\therefore \left(\frac{a+2}{3}, \frac{b+4}{3}\right)$

이 점이 원점이므로 $\frac{a+2}{3}=0$, $\frac{b+4}{3}=0$에서

$a=-2$, $b=-4$

$\therefore a\times b=-2\times(-4)=8$

029

점 M이 변 BC의 중점이므로

$\overline{BM}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\times10=5$

중선 정리에 의하여 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$이므로

$7^2+5^2=2(\overline{AM}^2+5^2)$

$2\overline{AM}^2=24$, $\overline{AM}^2=12$

$\therefore \overline{AM}=2\sqrt{3}$ ($\because \overline{AM}>0$)

답 ④

030

(1) 각의 이등분선의 성질에 의하여

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{DC}$

이때

$\overline{AB}=\sqrt{(-3-2)^2+(-4-8)^2}=13$,

$\overline{AC}=\sqrt{(6-2)^2+(5-8)^2}=5$

이므로

$\overline{BD}:\overline{DC}=\overline{AB}:\overline{AC}$

$=13:5$ ········ ❶

(2) (1)에 의하여 점 D는 선분 BC를 $13:5$로 내분하는 점이다.

$\frac{13\times6+5\times(-3)}{13+5}=\frac{7}{2}$, $\frac{13\times5+5\times(-4)}{13+5}=\frac{5}{2}$이므로

$D\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$ ········ ❷

답 (1) $13:5$ (2) $\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$

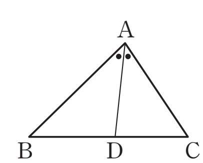
채점 기준	비율
❶ $\overline{BD}:\overline{DC}$를 구할 수 있다.	50 %
❷ 점 D의 좌표를 구할 수 있다.	50 %

풍쌤 개념 CHECK

내각의 이등분선의 성질_中 수학 2

삼각형 ABC에서 $\angle A$를 이등분하는 선이 변 BC와 만나는 점을 D라고 하면

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$



실력을 높이는 연습 문제

본문 016쪽

01

$\overline{AB}=l$에서 $\overline{AB}^2=l^2$이므로

$l^2=(-1-2t)^2+(2t+3)^2$

$=8t^2+16t+10$

$=8(t+1)^2+2$

따라서 l^2은 $t=-1$일 때 최솟값 2를 갖는다.

답 2

02

직선 $y=x$ 위의 점 P의 좌표를 (a, a)라고 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$이므로

$\sqrt{(a-4)^2+(a+4)^2}=\sqrt{(a+3)^2+(a-6)^2}$

양변을 제곱하면

$(a-4)^2+(a+4)^2=(a+3)^2+(a-6)^2$

$2a^2+32=2a^2-6a+45$

$6a=13 \qquad \therefore a=\dfrac{13}{6}$

$\therefore \mathrm{P}\left(\dfrac{13}{6}, \dfrac{13}{6}\right)$

답 ⑤

03

문제 접근하기

O$(0, 0)$, A(x, y), B$(2, -3)$으로 놓고 선분의 길이의 합의 최솟값을 이용하여 구한다.

O$(0, 0)$, A(x, y), B$(2, -3)$이라고 하면

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2}&=\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{BA}}\\&=\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{AB}}\\&\geq\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}\end{aligned}$$

따라서 $m=\sqrt{13}$이므로

$m^2=13$

답 ④

참고

선분의 길이의 합의 최솟값

(1) 실수 x, y, a, b에 대하여 $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$은 두 점 (x, y), (a, b) 사이의 거리와 같다.

(2) 두 점 A, B와 임의의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 값이 최소인 경우는 점 P가 선분 AB 위에 있을 때이다.
➡ $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}\geq\overline{\mathrm{AB}}$

04

점 P의 좌표를 (x, y)라고 하면

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{OP}}^2+\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2&=(x^2+y^2)+\{(x-3)^2+y^2\}+\{x^2+(y-6)^2\}\\&=3x^2-6x+3y^2-12y+45\\&=3(x-1)^2+3(y-2)^2+30\end{aligned}$$

따라서 $\overline{\mathrm{OP}}^2+\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$은 $x=1$, $y=2$일 때 최솟값 30을 갖는다.

이때 점 P의 좌표는 $(1, 2)$이다.

삼각형 OAB의 무게중심이다.

답 ④

참고

(1) 두 점 A, B와 임의의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$의 최솟값 구하기
$\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$을 $(x-a)^2+(y-b)^2+c$의 꼴로 나타내면 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$은 $x=a$, $y=b$일 때 최솟값 c를 갖는다. 이때 점 P의 좌표는 (a, b)이다.

(2) 삼각형 ABC의 내부의 한 점 P에 대하여 점 P에서 삼각형의 각 꼭짓점까지의 거리의 합이 최소가 되도록 하는 점 P는 삼각형 ABC의 무게중심이다.

05

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(1+1)^2+(-1-1)^2}=2\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{3}+1)^2}=2\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{CA}}=\sqrt{(-1-\sqrt{3})^2+(1-\sqrt{3})^2}=2\sqrt{2}$

$\therefore \overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{CA}}$

따라서 삼각형 ABC는 정삼각형이다.

답 ①

06

선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점이 P(3)이므로

$\dfrac{2\times b+1\times a}{2+1}=3 \qquad \therefore a+2b=9$ ⋯⋯ ㉠

선분 AB의 중점이 M(2)이므로

$\dfrac{a+b}{2}=2 \qquad \therefore a+b=4$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=5$

$\therefore 2a+b=2\times(-1)+5=3$

답 3

07

ㄱ. $\dfrac{2\times4+1\times1}{2+1}=3$, $\dfrac{2\times(-3)+1\times3}{2+1}=-1$이므로
P$(3, -1)$ (참)

ㄴ. $\dfrac{2\times1+1\times4}{2+1}=2$, $\dfrac{2\times3+1\times(-3)}{2+1}=1$이므로
Q$(2, 1)$ (거짓)

ㄷ. $\dfrac{1+4}{2}=\dfrac{5}{2}$, $\dfrac{3+(-3)}{2}=0$이므로 M$\left(\dfrac{5}{2}, 0\right)$ (거짓)

ㄹ. P$(3, -1)$, Q$(2, 1)$이므로
$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(2-3)^2+(1+1)^2}=\sqrt{5}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ②

08

$x_3=\dfrac{3x_2+x_1}{3+1}=\dfrac{1}{4}x_1+\dfrac{3}{4}x_2$, $y_3=\dfrac{3y_2+y_1}{3+1}=\dfrac{1}{4}y_1+\dfrac{3}{4}y_2$

$x_4=\dfrac{x_2+4x_1}{1+4}=\dfrac{4}{5}x_1+\dfrac{1}{5}x_2$, $y_4=\dfrac{y_2+4y_1}{1+4}=\dfrac{4}{5}y_1+\dfrac{1}{5}y_2$

$$\begin{aligned}\therefore \begin{pmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{pmatrix}&=\begin{pmatrix} \frac{1}{4}x_1+\frac{3}{4}x_2 & \frac{1}{4}y_1+\frac{3}{4}y_2 \\ \frac{4}{5}x_1+\frac{1}{5}x_2 & \frac{4}{5}y_1+\frac{1}{5}y_2 \end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

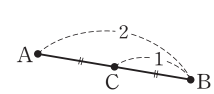
따라서 $X=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$이므로 행렬 X의 $(2, 2)$ 성분은 $\dfrac{1}{5}$이다.

답 $\dfrac{1}{5}$

09

$\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{BC}}$에서 $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=2:1$

이때 점 C는 선분 AB 위의 점이므로 오른쪽 그림과 같이 선분 AB의 중점이다.



따라서 점 C의 좌표는

$\left(\dfrac{-1+4}{2}, \dfrac{2+1}{2}\right)$, 즉 $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$

이므로 $a=\dfrac{3}{2}$, $b=\dfrac{3}{2}$

$\therefore a+b=\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}=3$

답 ②

10

점 B의 좌표를 $(a,\ b)$라고 하면 선분 AB의 중점이 $\mathrm{M}(0,\ 1)$이므로

$\dfrac{-1+a}{2}=0,\ \dfrac{2+b}{2}=1 \qquad \therefore a=1,\ b=0 \qquad \therefore \mathrm{B}(1,\ 0)$

점 D의 좌표를 $(x,\ y)$라고 하면 두 대각선 AC와 BD의 중점이 일치하므로

$\dfrac{-1+4}{2}=\dfrac{1+x}{2},\ \dfrac{2+1}{2}=\dfrac{0+y}{2} \qquad \therefore x=2,\ y=3$

따라서 꼭짓점 D의 좌표는 $(2,\ 3)$이다.

답 ②

11

점 D는 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점이므로 $\mathrm{D}\left(\dfrac{-2+3}{2},\ \dfrac{3+(-1)}{2}\right)$, 즉 $\mathrm{D}\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$

점 E는 $\overline{\mathrm{BC}}$의 중점이므로 $\mathrm{E}\left(\dfrac{3+5}{2},\ \dfrac{-1+4}{2}\right)$, 즉 $\mathrm{E}\left(4,\ \dfrac{3}{2}\right)$

점 F는 $\overline{\mathrm{CA}}$의 중점이므로 $\mathrm{F}\left(\dfrac{5+(-2)}{2},\ \dfrac{4+3}{2}\right)$, 즉 $\mathrm{F}\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{7}{2}\right)$

따라서 삼각형 DEF의 무게중심의 좌표는

$\left(\dfrac{\frac{1}{2}+4+\frac{3}{2}}{3},\ \dfrac{1+\frac{3}{2}+\frac{7}{2}}{3}\right)$, 즉 $(2,\ 2)$

답 $(2,\ 2)$

| 다른 풀이 |

삼각형 ABC의 무게중심과 삼각형 DEF의 무게중심은 일치하므로 삼각형 DEF의 무게중심의 좌표는

$\left(\dfrac{-2+3+5}{3},\ \dfrac{3+(-1)+4}{3}\right)$, 즉 $(2,\ 2)$

참고

삼각형의 무게중심의 성질

삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA를 $m:n\ (m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점을 각각 D, E, F라고 할 때, 삼각형 ABC와 DEF의 무게중심은 일치한다.

012

문제 접근하기

두 삼각형 ABE, ADC에서 각각 중선 정리를 이용하여 a^2, b^2에 대한 식을 세우고 두 식을 연립하여 a^2, b^2의 값을 구한다.

두 점 D, E가 변 BC의 삼등분점이므로 $\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{DE}}=\overline{\mathrm{EC}}=2$

삼각형 ABE에서 중선 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AE}}^2=\boxed{(가)\ 2}(\overline{\mathrm{AD}}^2+\overline{\mathrm{BD}}^2)$

$6^2+b^2=2(a^2+2^2) \qquad \therefore 2a^2-b^2=\boxed{(나)\ 28}$ ⋯⋯ ㉠

삼각형 ADC에서 중선 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AD}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=\boxed{(가)\ 2}(\overline{\mathrm{AE}}^2+\overline{\mathrm{DE}}^2)$

$a^2+4^2=2(b^2+2^2) \qquad \therefore a^2-2b^2=\boxed{(다)\ -8}$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a^2=\boxed{(라)\ \dfrac{64}{3}}$, $b^2=\boxed{(마)\ \dfrac{44}{3}}$

$\therefore a^2+b^2=\dfrac{64}{3}+\dfrac{44}{3}=\boxed{(바)\ 36}$

$\therefore$ (가): 2, (나): 28, (다): -8, (라): $\dfrac{64}{3}$, (마): $\dfrac{44}{3}$, (바): 36

답 (가): 2 (나): 28 (다): -8 (라): $\dfrac{64}{3}$ (마): $\dfrac{44}{3}$ (바): 36

02 직선의 방정식

기본을 다지는 유형

본문 019쪽

001

(2) $y-3=2(x-1) \qquad \therefore y=2x+1$

(3) $y-5=-(x+2) \qquad \therefore y=-x+3$

(4) $y+4=\dfrac{1}{2}(x-6) \qquad \therefore y=\dfrac{1}{2}x-7$

답 (1) $y=3x-1$ (2) $y=2x+1$ (3) $y=-x+3$ (4) $y=\dfrac{1}{2}x-7$

002

(3) 점 $(4,\ -2)$를 지나고 x축에 수직인 직선은 y축에 평행한 직선이므로 $x=4$

(4) 점 $(-3,\ -9)$를 지나고 y축에 수직인 직선은 x축에 평행한 직선이므로 $y=-9$

답 (1) $y=5$ (2) $x=2$ (3) $x=4$ (4) $y=-9$

참고

좌표축에 평행한 직선의 방정식

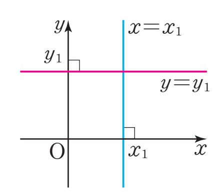
점 $(x_1,\ y_1)$을 지나고

(1) x축에 평행한 직선 (y축에 수직인 직선)

➡ $y=y_1$

(2) y축에 평행한 직선 (x축에 수직인 직선)

➡ $x=x_1$



003

직선의 x절편이 2이므로 점 $(2,\ 0)$을 지난다.

따라서 기울기가 -3이고 점 $(2,\ 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=-3(x-2) \qquad \therefore y=-3x+6$

답 $y=-3x+6$

004

점 $(3,\ 9)$를 지나고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$y-9=2(x-3) \qquad \therefore y=2x+3$

따라서 구하는 y절편은 3이다.

답 ①

005

점 $(2,\ -3)$을 지나고 기울기가 a인 직선의 방정식은

$y+3=a(x-2) \qquad \therefore y=ax-2a-3$

즉, $a=5,\ -2a-3=b$이므로 $a=5,\ b=-13$

$\therefore a-b=5-(-13)=18$

답 ⑤

006

두 점 $(-3,\ 2)$, $(5,\ -8)$을 이은 선분의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-3+5}{2}, \frac{2+(-8)}{2}\right)$ $\quad\therefore (1, -3)$

따라서 점 $(1, -3)$을 지나고 기울기가 -2인 직선의 방정식은

$y+3=-2(x-1)$ $\quad\therefore y=-2x-1$

답 $y=-2x-1$

007

$3x-y-5=0$에서 $y=3x-5$이므로 기울기는 3이다.

점 $(-1, 1)$을 지나고 기울기가 3인 직선의 방정식은

$y-1=3(x+1)$ $\quad\therefore 3x-y+4=0$

따라서 $a=3$, $b=4$이므로 $a+b=3+4=7$

답 ③

008

직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 60°이므로 직선의 기울기는

$\tan 60^\circ=\sqrt{3}$ ······ ❶

점 $(4, -2\sqrt{3})$을 지나고 기울기가 $\sqrt{3}$인 직선의 방정식은

$y+2\sqrt{3}=\sqrt{3}(x-4)$

$\therefore \sqrt{3}x-y-6\sqrt{3}=0$ ······ ❷

따라서 $a=-1$, $b=-6\sqrt{3}$이므로

$ab=-1\times(-6\sqrt{3})=6\sqrt{3}$ ······ ❸

답 $6\sqrt{3}$

채점 기준	비율
❶ 직선의 기울기를 구할 수 있다.	40 %
❷ 직선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	20 %

009

(1) $y-3=\frac{6-3}{1+2}(x+2)$ $\quad\therefore y=x+5$

(2) $y+1=\frac{2+1}{8-7}(x-7)$ $\quad\therefore y=3x-22$

(3) $y=\frac{0-2}{5-4}(x-5)$ $\quad\therefore y=-2x+10$

(4) $y+3=\frac{-2+3}{4-2}(x-2)$ $\quad\therefore y=\frac{1}{2}x-4$

답 (1) $y=x+5$ (2) $y=3x-22$ (3) $y=-2x+10$ (4) $y=\frac{1}{2}x-4$

010

두 점 $(-3, 1)$, $(6, 7)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-1=\frac{7-1}{6+3}(x+3)$ $\quad\therefore 2x-3y+9=0$

따라서 $a=2$, $b=3$이므로 $ab=2\times3=6$

답 ②

011

선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{2\times2+1\times(-7)}{2+1}, \frac{2\times6+1\times3}{2+1}\right)$

$\therefore (-1, 5)$ ······ ❶

두 점 $(-1, 5)$, $(2, -4)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-5=\frac{-4-5}{2+1}(x+1)$ $\quad\therefore y=-3x+2$ ······ ❷

따라서 $a=-3$, $b=2$이므로

$a^2+b^2=(-3)^2+2^2=13$ ······ ❸

답 13

채점 기준	비율
❶ 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❷ 직선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❸ a^2+b^2의 값을 구할 수 있다.	20 %

012

$\frac{-3+(-2)+8}{3}=1$, $\frac{-5+3+(-1)}{3}=-1$이므로 $G(1, -1)$

따라서 두 점 $A(-3, -5)$, $G(1, -1)$을 지나는 직선 AG의 방정식은

$y+5=\frac{-1+5}{1+3}(x+3)$ $\quad\therefore y=x-2$

답 $y=x-2$

013

두 점 $(-1, 2)$, $(2, a)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-2=\frac{a-2}{2+1}(x+1)$ $\quad\therefore y=\frac{a-2}{3}x+\frac{a+4}{3}$

이 직선이 y축과 점 $(0, 5)$에서 만나므로 y절편은 5이다.

즉, $\frac{a+4}{3}=5$이므로 $a=11$

답 ④

| 다른 풀이 |

두 점 $(-1, 2)$, $(0, 5)$를 지나는 직선의 방정식은

세 점 $(-1, 2)$, $(2, a)$, $(0, 5)$는 한 직선 위에 있다.

$y-5=\frac{5-2}{0+1}x$ $\quad\therefore y=3x+5$

이 직선이 점 $(2, a)$를 지나므로 $a=3\times2+5=11$

014

(1) $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1$ $\quad\therefore y=-2x+4$

(2) $\frac{x}{-6}+\frac{y}{3}=1$ $\quad\therefore y=\frac{1}{2}x+3$

답 (1) $y=-2x+4$ (2) $y=\frac{1}{2}x+3$

015

주어진 직선의 x절편이 -3, y절편이 2이므로 직선의 방정식은

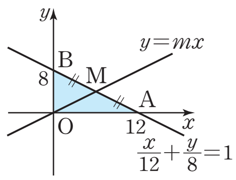
$\frac{x}{-3}+\frac{y}{2}=1$ $\quad\therefore y=\frac{2}{3}x+2$

이 직선이 점 $(k, 1)$을 지나므로

$1=\frac{2}{3}k+2$ $\quad\therefore k=-\frac{3}{2}$

답 $-\frac{3}{2}$

016



직선 $\frac{x}{12}+\frac{y}{8}=1$이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라고 하면

A$(12,\ 0)$, B$(0,\ 8)$

직선 $y=mx$는 원점 O를 지나고 오른쪽 그림의 삼각형 AOB의 넓이를 이등분하므로 변 AB의 중점을 지난다.

변 AB의 중점을 M이라고 하면

$\frac{12+0}{2}=6,\ \frac{0+8}{2}=4 \qquad \therefore$ M$(6,\ 4)$

즉, 직선 $y=mx$가 점 M$(6,\ 4)$를 지나므로

$4=6m \qquad \therefore m=\frac{2}{3}$

답 ③

017

직사각형 ABCD의 넓이를 이등분하는 직선은 직사각형의 두 대각선 AC, BD의 교점을 지난다.

이때 두 대각선의 교점을 M이라고 하면 점 M은 선분 AC의 중점이고 A$(2,\ 3)$, C$(5,\ 1)$이므로

점 M은 선분 BD의 중점이기도 하다.

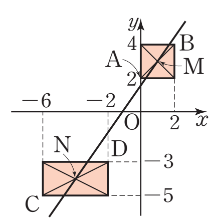
$\frac{2+5}{2}=\frac{7}{2},\ \frac{3+1}{2}=2 \qquad \therefore$ M$\left(\frac{7}{2},\ 2\right)$

즉, 직선 $y=ax$가 점 M$\left(\frac{7}{2},\ 2\right)$를 지나므로

$2=\frac{7}{2}a \qquad \therefore a=\frac{4}{7}$

답 ③

018



두 직사각형의 넓이를 동시에 이등분하는 직선은 두 직사각형의 대각선의 교점을 모두 지난다.

A$(0,\ 2)$, B$(2,\ 4)$라 하고, 작은 직사각형의 대각선의 교점을 M이라고 하면 점 M은 선분 AB의 중점이므로

$\frac{0+2}{2}=1,\ \frac{2+4}{2}=3 \qquad \therefore$ M$(1,\ 3)$

C$(-6,\ -5)$, D$(-2,\ -3)$이라 하고, 큰 직사각형의 대각선의 교점을 N이라고 하면 점 N은 선분 CD의 중점이므로

$\frac{-6+(-2)}{2}=-4,\ \frac{-5+(-3)}{2}=-4$

$\therefore$ N$(-4,\ -4)$

두 점 M$(1,\ 3)$, N$(-4,\ -4)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-3=\frac{-4-3}{-4-1}(x-1) \qquad \therefore 7x-5y+8=0$

따라서 $a=7,\ b=-5$이므로

$a+b=7+(-5)=2$

답 ④

019

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로 직선 AB와 직선 AC의 기울기가 같다. ❶

즉, $\frac{2+3}{a+1}=\frac{a+3}{6+1}$에서 $\frac{5}{a+1}=\frac{a+3}{7}$

$(a+1)(a+3)=35,\ a^2+4a-32=0$

$(a+8)(a-4)=0 \qquad \therefore a=-8$ 또는 $a=4$

이때 $a>0$이므로 $a=4$ ❷

따라서 두 점 A$(-1,\ -3)$, B$(4,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y+3=\frac{2+3}{4+1}(x+1)$

$\therefore y=x-2$ ❸

답 $y=x-2$

채점 기준	비율
❶ 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있을 조건을 알 수 있다.	30 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 직선의 방정식을 구할 수 있다.	30 %

참고

세 점이 한 직선 위에 있을 조건

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있다.

➡ (직선 AB의 기울기)=(직선 BC의 기울기)=(직선 AC의 기울기)

➡ 세 점 A, B, C가 삼각형을 이루지 않는다.

020

세 점 A, B, C가 삼각형을 이루지 않으므로 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있어야 한다.

즉, 직선 AC와 직선 BC의 기울기가 같아야 하므로

$\frac{-2-(2k+1)}{-3-0}=\frac{-2-6}{-3-(k+2)},\ \frac{2k+3}{3}=\frac{8}{k+5}$

$(2k+3)(k+5)=24$

$2k^2+13k-9=0$

판별식을 D라고 하면 $D=13^2-4\times2\times(-9)=241>0$ 이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 k의 값의 합은 $-\frac{13}{2}$이다.

답 ②

021

ㄱ. $y=2x-7$ ㄹ. $y=\frac{1}{2}x-3$

직선 $y=2x+4$에 평행한 직선은 기울기가 2인 ㄱ이다.

직선 $y=2x+4$에 수직인 직선은 기울기가 $-\frac{1}{2}$인 ㄴ이다.

답 평행한 직선: ㄱ, 수직인 직선: ㄴ

022

(1) 두 직선이 서로 평행하려면 두 직선의 기울기가 같아야 하므로

$3a+1=-8 \qquad \therefore a=-3$

(2) 두 직선이 서로 수직이려면 두 직선의 기울기의 곱이 -1이어야 하므로

$-8\times(3a+1)=-1,\ -24a=7 \qquad \therefore a=-\frac{7}{24}$

답 (1) -3 (2) $-\frac{7}{24}$

023

$a\times(a+4)+(-3)\times4=0$에서 $a^2+4a-12=0$

판별식을 D라고 하면 $\frac{D}{4}=2^2-1\times(-12)=16>0$ 이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 모든 실수 a의 값의 합은 -4이다.

답 ②

024

두 직선 $x+ky+6=0$, $(k-1)x+6y+4k=0$이 서로 평행하거나 일치하려면

$\dfrac{1}{k-1}=\dfrac{k}{6}$에서 $k(k-1)=6$

$k^2-k-6=0$, $(k+2)(k-3)=0$

$\therefore$ $k=-2$ 또는 $k=3$

(i) $k=-2$일 때

두 직선 $x-2y+6=0$, $-3x+6y-8=0$에서

$\dfrac{1}{-3}=\dfrac{-2}{6}\neq\dfrac{6}{-8}$이므로 두 직선은 서로 평행하다.

(ii) $k=3$일 때

두 직선 $x+3y+6=0$, $2x+6y+12=0$에서

$\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{6}{12}$이므로 두 직선은 일치한다.

(i), (ii)에서 $a=-2$, $b=3$

$\therefore$ $2b-a=2\times3-(-2)=8$

답 ③

025

직선 $4x+ay-1=0$이 점 $(-2, 3)$을 지나므로

$-8+3a-1=0$ $\quad\therefore$ $a=3$

직선 $-3x+by+c=0$이 점 $(-2, 3)$을 지나므로

$6+3b+c=0$ $\quad\therefore$ $3b+c=-6$ ······ ㉠

두 직선 $4x+3y-1=0$, $-3x+by+c=0$이 서로 수직으로 만나므로

$4\times(-3)+3\times b=0$ $\quad\therefore$ $b=4$

$b=4$를 ㉠에 대입하면 $c=-18$

$\therefore$ $ab+c=3\times4+(-18)=-6$

답 ①

026

두 점 A$(5, 1)$, B$(2, 4)$를 지나는 직선의 기울기는 $\dfrac{4-1}{2-5}=-1$이므로 두 점 A, B를 지나는 직선에 수직인 직선의 기울기는 1이다. ······ ❶

선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{1\times2+2\times5}{1+2}, \dfrac{1\times4+2\times1}{1+2}\right)$, 즉 $(4, 2)$ ······ ❷

따라서 기울기가 1이고 점 $(4, 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-2=x-4$ $\quad\therefore$ $y=x-2$ ······ ❸

답 $y=x-2$

채점 기준	비율
❶ 직선의 기울기를 구할 수 있다.	30 %
❷ 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❸ 직선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %

027

$4x-2y+1=0$에서 $y=2x+\dfrac{1}{2}$

기울기가 2이고 점 $(1, a)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-a=2(x-1)$ $\quad\therefore$ $2x-y+a-2=0$

따라서 $b=2$, $a-2=5$이므로

$a=7$, $b=2$

$\therefore$ $a\times b=7\times2=14$

답 ⑤

028

직선 AB의 기울기는 $\dfrac{-3-5}{1-5}=2$이므로 선분 AB의 수직이등분선의 기울기는 $-\dfrac{1}{2}$이다.

선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{5+1}{2}, \dfrac{5+(-3)}{2}\right)$, 즉 $(3, 1)$

기울기가 $-\dfrac{1}{2}$이고 점 $(3, 1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-1=-\dfrac{1}{2}(x-3)$ $\quad\therefore$ $x+2y-5=0$

따라서 $a=1$, $b=2$이므로

$ab=1\times2=2$

답 2

참고

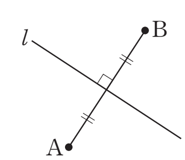
선분의 수직이등분선의 방정식

선분 AB의 수직이등분선을 l이라고 하면

(1) 직선 l과 직선 AB는 서로 수직이므로

(직선 l의 기울기)$\times$(직선 AB의 기울기)$=-1$

(2) 직선 l은 선분 AB의 중점을 지난다.



029

$x-2y-3=0$에서 $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2}$

따라서 직선 $x-2y-3=0$의 기울기는 $\dfrac{1}{2}$이므로 직선 AB의 기울기는 -2이다.

즉, $\dfrac{b-a}{3+1}=-2$이므로

$-a+b=-8$ ······ ㉠

······ ❶

선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{-1+3}{2}, \dfrac{a+b}{2}\right)$, 즉 $\left(1, \dfrac{a+b}{2}\right)$

직선 $x-2y-3=0$이 점 $\left(1, \dfrac{a+b}{2}\right)$를 지나므로

$1-(a+b)-3=0$

$\therefore$ $a+b=-2$ ······ ㉡

······ ❷

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=3$, $b=-5$

$\therefore$ $a+2b=3+2\times(-5)=-7$ ······ ❸

답 -7

채점 기준	비율
❶ 직선 AB의 기울기를 이용하여 a, b에 대한 식을 세울 수 있다.	40 %
❷ 선분 AB의 중점의 좌표를 이용하여 a, b에 대한 식을 세울 수 있다.	40 %
❸ $a+2b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

030

$mx+y-4m+5=0$을 m에 대하여 정리하면

$m(x-4)+y+5=0$

이 식이 m의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$x-4=0$, $y+5=0$ $\quad\therefore x=4,\ y=-5$

따라서 $\mathrm{P}(4,\ -5)$이므로

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{4^2+(-5)^2}=\sqrt{41}$

답 $\sqrt{41}$

참고

정점을 지나는 직선

직선 $ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$이 실수 k의 값에 관계없이 항상 지나는 점의 좌표

➡ 연립방정식 $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$의 해

031

$(k+2)x+(2k-1)y-3k-1=0$을 k에 대하여 정리하면

$k(x+2y-3)+2x-y-1=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$x+2y-3=0$, $2x-y-1=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=1$

이때 점 $(1,\ 1)$이 존재하는 사분면은 제1사분면이므로 주어진 직선이 항상 지나는 사분면은 제1사분면이다.

답 제1사분면

032

두 직선 $x+y+1=0$, $3x+2y-1=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$x+y+1+k(3x+2y-1)=0$ (k는 실수) ⋯⋯ ㉠

으로 놓으면 직선 ㉠이 점 $(-1,\ 8)$을 지나므로

$-1+8+1+k(-3+16-1)=0$

$12k=-8$ $\quad\therefore k=-\dfrac{2}{3}$

$k=-\dfrac{2}{3}$를 ㉠에 대입하면

$x+y+1-\dfrac{2}{3}(3x+2y-1)=0$ $\quad\therefore 3x+y-5=0$

답 ④

033

두 직선 $3x+2y+4=0$, $2x-y+6=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$3x+2y+4+k(2x-y+6)=0$ (k는 실수) ⋯⋯ ㉠

으로 놓으면 직선 ㉠이 점 $(-4,\ 1)$을 지나므로

$-12+2+4+k(-8-1+6)=0$

$-3k=6$ $\quad\therefore k=-2$

$k=-2$를 ㉠에 대입하면

$3x+2y+4-2(2x-y+6)=0$ $\quad\therefore x-4y+8=0$

따라서 이 직선이 x축과 만나는 점은 $(-8,\ 0)$, y축과 만나는 점은 $(0,\ 2)$이므로 좌표축에 의하여 잘린 선분의 길이는

$\sqrt{(0+8)^2+(2-0)^2}=\sqrt{68}=2\sqrt{17}$

답 $2\sqrt{17}$

034

(1) $\dfrac{|-3+1+4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

(2) $\dfrac{|4\times4-3\times(-2)-2|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\dfrac{20}{5}=4$

(3) $\dfrac{|2\times(-1)-(-5)-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

(4) $\dfrac{|10|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$

답 (1) $\sqrt{2}$ (2) 4 (3) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ (4) $2\sqrt{5}$

035

선분 PH의 길이는 점 $\mathrm{P}(2,\ 2)$와 직선 $4x-2y+1=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\dfrac{|4\times2-2\times2+1|}{\sqrt{4^2+(-2)^2}}=\dfrac{5}{2\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

답 ①

036

점 $(\sqrt{3},\ 1)$과 직선 $y=\sqrt{3}x+n$, 즉 $\sqrt{3}x-y+n=0$ 사이의 거리가 3이므로

$\dfrac{|\sqrt{3}\times\sqrt{3}-1+n|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=3$, $\dfrac{|2+n|}{2}=3$

$|2+n|=6$에서 $2+n=\pm6$

$\therefore n=-8$ 또는 $n=4$

이때 n은 양수이므로 $n=4$

답 ④

037

두 점 $(-2,\ 1)$, $(1,\ 4)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-1=\dfrac{4-1}{1+2}(x+2)$ $\quad\therefore x-y+3=0$

따라서 점 $(2,\ -1)$과 직선 $x-y+3=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|2-(-1)+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$

답 ③

038

직선 $y=-\dfrac{1}{3}x+5$에 수직인 직선의 기울기는 3이다. ⋯⋯ ❶

구하는 직선의 방정식을 $y=3x+k$ (k는 상수)라고 하면 원점과 직선 $y=3x+k$, 즉 $3x-y+k=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$이므로

$\frac{|k|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$, $|k|=5\sqrt{2}$ $\quad\therefore k=\pm5\sqrt{2}$

$\therefore y=3x\pm5\sqrt{2}$ ❷

이때 제4사분면을 지나지 않는 직선은 $y=3x+5\sqrt{2}$이다.

❸

답 $y=3x+5\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ 직선의 기울기를 구할 수 있다.	20 %
❷ 직선의 방정식을 구할 수 있다.	50 %
❸ 제4사분면을 지나지 않는 직선의 방정식을 구할 수 있다.	30 %

039

구하는 두 직선 사이의 거리는 직선 $2x-y+10=0$ 위의 점 $(0, 10)$과 직선 $2x-y-8=0$ 사이의 거리와 같다.

따라서 구하는 거리는

$\frac{|2\times0-10-8|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{18}{\sqrt{5}}=\frac{18\sqrt{5}}{5}$

답 $\frac{18\sqrt{5}}{5}$

040

$\frac{1}{1}=\frac{-2}{-2}\neq\frac{6}{-4}$이므로 두 직선은 서로 평행하다.

두 직선이 서로 평행하므로 선분 AB의 길이의 최솟값은 평행한 두 직선 사이의 거리와 같다.

직선 $x-2y+6=0$ 위의 점 $(0, 3)$과 직선 $x-2y-4=0$ 사이의 거리는

$\frac{|0-2\times3-4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$

따라서 선분 AB의 길이의 최솟값은 $2\sqrt{5}$이다.

답 ②

실력을 높이는 연습 문제

본문 028쪽

01

선분 AB를 $2:3$으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{2\times1+3\times(-4)}{2+3}, \frac{2\times1+3\times6}{2+3}\right)$

$\therefore (-2, 4)$

따라서 점 $(-2, 4)$를 지나고 기울기가 -1인 직선의 방정식은

$y-4=-(x+2)$ $\quad\therefore y=-x+2$

답 ③

02

주어진 직선의 기울기는 $\tan 45^\circ=1$이므로 점 $(-1, -6)$을 지나고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$y+6=x+1$ $\quad\therefore y=x-5$

즉, $m-3=1$, $-n-4=-5$이므로 $m=4$, $n=1$

$\therefore m-n=4-1=3$

답 ③

03

두 점 $(1, -2)$, $(4, 4)$를 지나는 직선의 방정식은

$y+2=\frac{4+2}{4-1}(x-1)$ $\quad\therefore y=2x-4$

두 점 $(-2, a)$, $(b, 6)$이 직선 $y=2x-4$ 위의 점이므로

$a=-4-4$, $6=2b-4$ $\quad\therefore a=-8, b=5$

$\therefore a-b=-8-5=-13$

답 ②

04

$f(x)=x^2+px+p=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+p-\frac{p^2}{4}$이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프에서 꼭짓점의 좌표는 $A\left(-\frac{p}{2}, p-\frac{p^2}{4}\right)$, y축과 만나는 점의 좌표는 $B(0, p)$이다.

따라서 두 점 A, B를 지나는 직선 l의 기울기는

$\frac{p-\left(p-\frac{p^2}{4}\right)}{0-\left(-\frac{p}{2}\right)}=\frac{p}{2}$

또, 직선 l의 y절편은 p이므로 직선 l의 방정식은

$y=\frac{p}{2}x+p$

x절편은 y좌표가 0인 점의 x좌표이므로

$0=\frac{p}{2}x+p$, $\frac{p}{2}x=-p$ $\quad\therefore x=-2$ ($\because p\neq0$)

따라서 직선 l의 x절편은 -2이다.

답 ②

05

x절편과 y절편의 절댓값이 같고 부호가 반대이므로 x절편을 a $(a\neq0)$라고 하면 y절편은 $-a$이다.

따라서 주어진 직선의 방정식은

$\frac{x}{a}+\frac{y}{-a}=1$ $\quad\therefore y=x-a$

이 직선이 점 $(-2, 5)$를 지나므로

$5=-2-a$ $\quad\therefore a=-7$

$\therefore y=x+7$

답 $y=x+7$

06

문제 접근하기

x축 위의 점 P의 좌표를 $(a, 0)$, y축 위의 점 Q의 좌표를 $(0, b)$로 놓고 정사각형의 두 대각선의 중점이 일치함을 이용하여 두 점 P, Q의 좌표를 먼저 구한다.

x축 위의 점 P의 좌표를 $(a, 0)$, y축 위의 점 Q의 좌표를 $(0, b)$로 놓으면 정사각형 AQPB의 두 대각선 AP와 BQ의 중점은 일치한다.

두 대각선 AP와 BQ의 중점의 좌표는 각각

$\left(\frac{3+a}{2}, \frac{4+0}{2}\right)$, $\left(\frac{4+0}{2}, \frac{1+b}{2}\right)$, 즉 $\left(\frac{3+a}{2}, 2\right)$, $\left(2, \frac{1+b}{2}\right)$

이므로

$\frac{3+a}{2}=2$, $\frac{1+b}{2}=2$ $\quad\therefore a=1, b=3$

$\therefore$ P$(1, 0)$, Q$(0, 3)$

이때 정사각형 AQPB의 넓이를 이등분하는 직선은 두 대각선 AP, BQ의 교점을 지나고 이 교점은 선분 AP의 중점이므로 교점의 좌표는 선분 BQ의 중점

$\left(\frac{3+1}{2}, \frac{4+0}{2}\right)$ $\quad\therefore (2, 2)$

따라서 두 점 $(2, 2)$, $(-2, 8)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-2=\frac{8-2}{-2-2}(x-2)$ $\quad\therefore y=-\frac{3}{2}x+5$

답 ③

07

세 점 A, B, C가 모두 직선 l 위에 있으므로 직선 AB와 직선 AC의 기울기가 같아야 한다.

즉, $\frac{a-2-0}{1+1}=\frac{1-0}{-a-2+1}$이므로 $\frac{a-2}{2}=\frac{1}{-a-1}$

$-(a-2)(a+1)=2$, $a^2-a=0$

$a(a-1)=0$ $\quad\therefore a=1$ ($\because a\neq0$)

두 점 A$(-1, 0)$, B$(1, -1)$을 지나는 직선 l의 방정식은

$y=\frac{-1-0}{1+1}(x+1)$ $\quad\therefore y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

따라서 직선 l의 y절편은 $-\frac{1}{2}$이다.

답 ②

08

직선 $ax+by+c=0$, 즉 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$의 기울기가 음수이고 y절편이 양수이므로

$-\frac{a}{b}<0$, $-\frac{c}{b}>0$ $\quad\therefore \frac{a}{b}>0$, $\frac{c}{b}<0$

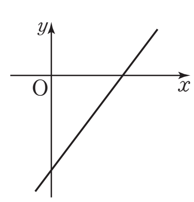
$\therefore a>0, b>0, c<0$ 또는 $a<0, b<0, c>0$

따라서 직선 $cx+ay+b=0$, 즉

$y=-\frac{c}{a}x-\frac{b}{a}$의 기울기 $-\frac{c}{a}$는 양수이고

y절편 $-\frac{b}{a}$는 음수이므로 직선

$cx+ay+b=0$의 개형은 오른쪽 그림과 같고 제2사분면을 지나지 않는다.



답 ②

09

직선 $ax+y+1=0$이 직선 $bx-2y+1=0$에 수직이므로

$a\times b+1\times(-2)=0$ $\quad\therefore ab=2$

직선 $ax+y+1=0$이 직선 $(b-3)x-y+1=0$에 평행하므로

$\frac{a}{b-3}=\frac{1}{-1}\neq\frac{1}{1}$, $-a=b-3$ $\quad\therefore a+b=3$

$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=3^2-2\times2=5$

답 5

10

두 직선이 서로 평행하거나 일치하려면

$\frac{1}{k-2}=\frac{k+1}{4}$에서 $(k+1)(k-2)=4$

$k^2-k-6=0$, $(k+2)(k-3)=0$

$\therefore k=-2$ 또는 $k=3$

(i) $k=-2$일 때

두 직선 $x-y-2=0$, $-4x+4y+8=0$에서

$\frac{1}{-4}=\frac{-1}{4}=\frac{-2}{8}$이므로 두 직선은 일치한다.

(ii) $k=3$일 때

두 직선 $x+4y-2=0$, $x+4y-12=0$에서

$\frac{1}{1}=\frac{4}{4}\neq\frac{-2}{-12}$이므로 두 직선은 서로 평행하다.

(i), (ii)에서 $a=3$, $b=-2$

두 직선이 서로 수직이려면

$1\times(k-2)+(k+1)\times4=0$

$5k+2=0$ $\quad\therefore k=-\frac{2}{5}$

$\therefore c=-\frac{2}{5}$

$\therefore a-b-c=3-(-2)-\left(-\frac{2}{5}\right)=\frac{27}{5}$

답 $\frac{27}{5}$

11

직선 AP의 기울기는 $\frac{4-2}{4-0}=\frac{1}{2}$

직선 BP의 기울기는 $\frac{4-2}{4-n}=\frac{2}{4-n}$

두 직선 AP와 BP가 서로 수직이므로 (직선 AP의 기울기)×(직선 BP의 기울기)=−1

$\frac{1}{2}\times\frac{2}{4-n}=-1$

$4-n=-1$ $\quad\therefore n=5$

세 점 A$(0, 2)$, B$(5, 2)$, P$(4, 4)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABP의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{0+5+4}{3}, \frac{2+2+4}{3}\right)$, 즉 $\left(3, \frac{8}{3}\right)$

따라서 $a=3$, $b=\frac{8}{3}$이므로

$a+b=3+\frac{8}{3}=\frac{17}{3}$

답 ②

12

두 점 $(1, 2)$, $(4, 3)$을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{3-2}{4-1}=\frac{1}{3}$

점 $(-2, -1)$을 지나고 기울기가 $\frac{1}{3}$인 직선의 방정식은

$y+1=\frac{1}{3}(x+2)$ $\quad\therefore y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$

따라서 $a=\frac{1}{3}$, $b=-\frac{1}{3}$이므로

$ab=\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{9}$

답 ②

13

직선 $2x+3y-6=0$이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라고 하면 $\mathrm{A}(3,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 2)$이다.

직선 AB의 기울기는 $\frac{2-0}{0-3}=-\frac{2}{3}$이므로 선분 AB의 수직이등분선의 기울기는 $\frac{3}{2}$이다.

선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{3+0}{2},\ \frac{0+2}{2}\right)$, 즉 $\left(\frac{3}{2},\ 1\right)$

따라서 기울기가 $\frac{3}{2}$이고 점 $\left(\frac{3}{2},\ 1\right)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-1=\frac{3}{2}\left(x-\frac{3}{2}\right)\qquad \therefore\ y=\frac{3}{2}x-\frac{5}{4}$

직선 $y=\frac{3}{2}x-\frac{5}{4}$가 점 $\left(a,\ \frac{1}{4}\right)$을 지나므로

$\frac{1}{4}=\frac{3}{2}a-\frac{5}{4},\ \frac{3}{2}a=\frac{3}{2}\qquad \therefore\ a=1$

답 1

14

직선 AC의 기울기는 $\frac{1+3}{3+1}=1$

선분 AC의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-1+3}{2},\ \frac{-3+1}{2}\right)$, 즉 $(1,\ -1)$

따라서 선분 AC의 수직이등분선은 기울기가 -1이고 점 $(1,\ -1)$을 지나는 직선이므로

$y+1=-(x-1)\qquad \therefore\ y=-x$ .... ㉠

직선 BC의 기울기는 $\frac{1-2}{3-2}=-1$

선분 BC의 중점의 좌표는

$\left(\frac{2+3}{2},\ \frac{2+1}{2}\right)$, 즉 $\left(\frac{5}{2},\ \frac{3}{2}\right)$

따라서 선분 BC의 수직이등분선은 기울기가 1이고 점 $\left(\frac{5}{2},\ \frac{3}{2}\right)$을 지나는 직선이므로

$y-\frac{3}{2}=x-\frac{5}{2}\qquad \therefore\ y=x-1$ .... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=\frac{1}{2},\ y=-\frac{1}{2}$

따라서 구하는 점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$이다.

답 ③

참고

선분 AB의 수직이등분선의 방정식을 구해 보면 $y=-\frac{3}{5}x-\frac{1}{5}$이고, 이 직선은 점 $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$을 지난다. 또, 삼각형 ABC의 세 변의 수직이등분선의 교점은 삼각형 ABC의 외심이다.

15

문제 접근하기

세 직선이 삼각형을 이루지 않는 경우는 세 직선이 모두 평행한 경우와 세 직선 중에서 두 직선만 평행한 경우, 세 직선이 한 점에서 만나는 경우가 있으므로 각 경우에 대하여 생각한다.

$x-y=0$ .... ㉠

$x+y-2=0$ .... ㉡

$ax-5y+15=0$ .... ㉢

이때 직선 ㉠과 ㉡은 서로 평행하지 않다.

(i) 두 직선 ㉡, ㉢이 서로 평행한 경우

$\frac{1}{a}=\frac{1}{-5}\neq\frac{-2}{15}\qquad \therefore\ a=-5$

(ii) 두 직선 ㉠, ㉢이 서로 평행한 경우

$\frac{1}{a}=\frac{-1}{-5}\neq\frac{0}{15}\qquad \therefore\ a=5$

(iii) 세 직선이 한 점에서 만나는 경우

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=1,\ y=1$이므로 직선 ㉢이 점 $(1,\ 1)$을 지나야 한다.

즉, $a-5+15=0$에서 $a=-10$

(i)~(iii)에서 모든 상수 a의 값의 곱은

$-5\times5\times(-10)=250$

답 250

16

$(k-1)x+k(y-1)=1$을 k에 대하여 정리하면

$(x+y-1)k-x-1=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$x+y-1=0,\ -x-1=0\qquad \therefore\ x=-1,\ y=2$

따라서 주어진 직선은 k의 값에 관계없이 점 $\mathrm{P}(-1,\ 2)$를 지난다.

이때 점 $\mathrm{P}(-1,\ 2)$를 지나고 직선 $y=3x+1$에 평행한 직선의 방정식은

기울기가 3이다.

$y-2=3(x+1)\qquad \therefore\ y=3x+5$

답 ⑤

17

점 $(a,\ b)$가 직선 $3x-y=1$ 위에 있으므로

$3a-b=1\qquad \therefore\ b=3a-1$

이것을 $ax+2by=-4$에 대입하면

$ax+2(3a-1)y=-4$

$\therefore\ (x+6y)a-2y+4=0$

이 식이 a의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$x+6y=0,\ -2y+4=0\qquad \therefore\ x=-12,\ y=2$

따라서 직선 $ax+2by=-4$는 항상 점 $(-12,\ 2)$를 지난다.

답 ①

18

문제 접근하기

직선 $y=kx+k+2$가 k의 값에 관계없이 지나는 점의 좌표를 구하고, 이 점을 지나는 직선이 직선 $y=-x+4$와 제1사분면에서 만나는 경우를 생각한다.

$y=kx+k+2$를 k에 대하여 정리하면

$k(x+1)-y+2=0$ $x+1=0,\ -y+2=0$

이 직선은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(-1,\ 2)$를 지난다.

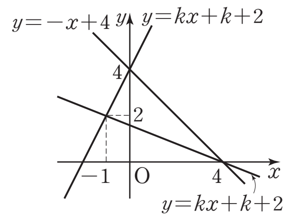
(ⅰ) 직선 $y=kx+k+2$가 점 $(4,\ 0)$을 지날 때

$0=5k+2$에서 $k=-\frac{2}{5}$

(ⅱ) 직선 $y=kx+k+2$가 점 $(0,\ 4)$를 지날 때

$4=k+2$에서 $k=2$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $-\frac{2}{5}<k<2$



답 $-\frac{2}{5}<k<2$

참고

직선 $y=kx+k+2$의 기울기는 k이고 두 직선 $y=-x+4$, $y=kx+k+2$가 제1사분면에서 만나려면 직선 $y=kx+k+2$의 기울기가 (ⅰ)일 때보다 크고 (ⅱ)일 때보다 작아야 하므로 $-\frac{2}{5}<k<2$이어야 한다.

19

두 직선 $2x-y-3=0$, $3x+2y+a=0$의 교점을 지나는 직선 l의 방정식을

$2x-y-3+k(3x+2y+a)=0$ (k는 실수)

으로 놓으면

$(3k+2)x+(2k-1)y+ak-3=0$ ⋯⋯ ㉠

직선 ㉠과 직선 $3x-8y-4=0$이 서로 수직이므로

$(3k+2)\times3+(2k-1)\times(-8)=0$

$-7k+14=0$ $\quad\therefore k=2$

$k=2$를 ㉠에 대입하면 $8x+3y+2a-3=0$

이 직선이 점 $(b,\ 0)$을 지나므로

$8b+2a-3=0$ $\quad\therefore 2a+8b=3$

답 3

20

$(k+1)x+(1-k)y-4=0$을 k에 대하여 정리하면

$(x-y)k+x+y-4=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$x-y=0$, $x+y-4=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=2$ $\quad\therefore \mathrm{A}(2,\ 2)$

점 $\mathrm{A}(2,\ 2)$와 직선 $3x-y+m=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{10}$이므로

$\frac{|3\times2-2+m|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}$, $\frac{|m+4|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$

$|m+4|=10$, $m+4=\pm10$ $\quad\therefore m=6$ 또는 $m=-14$

따라서 모든 상수 m의 값의 합은

$6+(-14)=-8$

답 ③

21

$3x-2y-1=0$, $x+y-2=0$을 연립하여 풀면

$x=1$, $y=1$

이므로 두 직선 $3x-2y-1=0$, $x+y-2=0$의 교점의 좌표는

$(1,\ 1)$

따라서 점 $(1,\ 1)$과 직선 $3x-2y-5=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3\times1-2\times1-5|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\frac{4}{\sqrt{13}}=\frac{4\sqrt{13}}{13}$

답 ④

| 다른 풀이 | $\frac{2}{3}=\frac{-2}{-2}\neq\frac{-1}{-2}$이므로 서로 평행하다.

두 직선 $3x-2y-1=0$과 $3x-2y-5=0$이 서로 평행하므로 구하는 거리는 이 두 직선 사이의 거리와 같다.

직선 $3x-2y-1=0$ 위의 점 $(1,\ 1)$과 직선 $3x-2y-5=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3\times1-2\times1-5|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\frac{4}{\sqrt{13}}=\frac{4\sqrt{13}}{13}$

22

두 점 $(6,\ 0)$, $(0,\ 3)$을 지나는 직선 l의 방정식은

$\frac{x}{6}+\frac{y}{3}=1$ $\quad\therefore x+2y-6=0$

정사각형 ABCD의 넓이가 $\frac{81}{5}$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=\frac{9}{\sqrt{5}}=\frac{9\sqrt{5}}{5}$

$\overline{\mathrm{AB}}$는 점 $(a,\ 6)$과 직선 $x+2y-6=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\frac{|a+2\times6-6|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{9\sqrt{5}}{5}$, $\frac{|a+6|}{\sqrt{5}}=\frac{9\sqrt{5}}{5}$

$|a+6|=9$, $a+6=\pm9$ $\quad\therefore a=3$ 또는 $a=-15$

이때 $a>0$이므로 $a=3$

답 ⑤

23

두 직선 $ax-4y+3=0$, $3x+4y+b=0$이 서로 평행하므로

$\frac{a}{3}=\frac{-4}{4}\neq\frac{3}{b}$ $\quad\therefore a=-3$, $b\neq-3$

직선 $ax-4y+3=0$, 즉 $-3x-4y+3=0$ 위의 점 $(1,\ 0)$과 직선 $3x+4y+b=0$ 사이의 거리가 1이므로

$\frac{|3\times1+4\times0+b|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$, $|b+3|=5$, $b+3=\pm5$

$\therefore b=2$ 또는 $b=-8$

이때 $b>0$이므로 $b=2$

$\therefore a+b=-3+2=-1$

답 -1

24

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{(2+4)^2+(4+5)^2}=3\sqrt{13}$

직선 BC의 방정식은

$y+5=\frac{4+5}{2+4}(x+4)$ $\quad\therefore 3x-2y+2=0$

삼각형 ABC의 한 변 BC를 밑변으로 하면 높이는 점 A와 직선 BC 사이의 거리와 같다.

점 $\mathrm{A}(0,\ -2)$와 직선 $3x-2y+2=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3\times0-2\times(-2)+2|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\frac{6}{\sqrt{13}}=\frac{6\sqrt{13}}{13}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times3\sqrt{13}\times\frac{6\sqrt{13}}{13}=9$

답 ③

참고

세 꼭짓점의 좌표가 주어진 삼각형의 넓이 구하기

세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이는 다음 순서로 구한다.

① $\overline{\mathrm{BC}}$의 길이와 직선 BC의 방정식을 구한다.

② 점 A와 직선 BC 사이의 거리 h를 구한다.

③ 삼각형 ABC의 넓이 $\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times h$를 구한다.

03 원의 방정식

기본을 다지는 유형

본문 033쪽

001

(1) $x^2+y^2=2^2$ $\therefore x^2+y^2=4$

(2) $(x+1)^2+(y-2)^2=9^2$

$\therefore (x+1)^2+(y-2)^2=81$

(3) 원의 반지름의 길이를 r라고 하면 중심이 점 $(2, -3)$이므로 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y+3)^2=r^2$

이 원이 점 $(-1, 0)$을 지나므로

$(-1-2)^2+(0+3)^2=r^2$

$\therefore r^2=18$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y+3)^2=18$

(4) 원의 반지름의 길이를 r라고 하면 중심이 점 $(-5, 1)$이므로 원의 방정식은

$(x+5)^2+(y-1)^2=r^2$

이 원이 점 $(3, -4)$를 지나므로

$(3+5)^2+(-4-1)^2=r^2$

$\therefore r^2=89$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x+5)^2+(y-1)^2=89$

답 (1) $x^2+y^2=4$ (2) $(x+1)^2+(y-2)^2=81$
(3) $(x-2)^2+(y+3)^2=18$ (4) $(x+5)^2+(y-1)^2=89$

참고

중심의 좌표와 한 점이 주어진 원의 방정식

중심이 점 (a, b)이고 점 (x_1, y_1)을 지나는 원의 방정식은 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$으로 놓고 $(x_1-a)^2+(y_1-b)^2=r^2$임을 이용하여 구한다.

002

직선 $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$이 x축과 만나는 점의 좌표는 $(3, 0)$, y축과 만나는 점의 좌표는 $(0, 2)$이다.

원의 중심이 점 $(3, 0)$이므로 $a=3$, $b=0$

중심이 점 $(3, 0)$이고 반지름의 길이가 r이므로 원의 방정식은

$(x-3)^2+y^2=r^2$

이 원이 점 $(0, 2)$를 지나므로

$(0-3)^2+2^2=r^2$ $\therefore r^2=13$

$\therefore a-b+r^2=3-0+13=16$

답 16

003

원 $(x-1)^2+(y+6)^2=3$의 중심의 좌표는 $(1, -6)$이므로 이 원과 중심이 같은 원의 반지름의 길이를 r라고 하면 원의 방정식은

$(x-1)^2+(y+6)^2=r^2$

이 원이 점 $(2, -6)$을 지나므로

$(2-1)^2+(-6+6)^2=r^2$ $\therefore r^2=1$

따라서 원 $(x-1)^2+(y+6)^2=1$이 점 $(a, -7)$을 지나므로

$(a-1)^2+(-7+6)^2=1$

$(a-1)^2=0$ $\therefore a=1$

답 ⑤

004

구하는 원의 반지름의 길이를 r라고 하면 중심이 점 $(1, -1)$이므로

$(x-1)^2+(y+1)^2=r^2$

$x^2+y^2-4x+6y+10=0$에서

$(x-2)^2+(y+3)^2=3$

이므로 이 원의 중심은 점 $(2, -3)$이다.

원 $(x-1)^2+(y+1)^2=r^2$이 점 $(2, -3)$을 지나므로

$(2-1)^2+(-3+1)^2=r^2$ $\therefore r^2=5$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-1)^2+(y+1)^2=5$

답 ①

005

선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\times4+2\times1}{1+2}, \frac{1\times2+2\times5}{1+2}\right)$, 즉 $(2, 4)$ ❶

원의 반지름의 길이를 r라고 하면 중심이 점 $(2, 4)$이므로

$(x-2)^2+(y-4)^2=r^2$ ❷

이 원이 점 B$(4, 2)$를 지나므로

$(4-2)^2+(2-4)^2=r^2$ $\therefore r^2=8$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y-4)^2=8$ ❸

답 $(x-2)^2+(y-4)^2=8$

채점 기준	비율
❶ 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❷ 원의 방정식을 세울 수 있다.	20 %
❸ 원의 방정식을 구할 수 있다.	40 %

006

원의 중심의 좌표를 $(0, a)$, 반지름의 길이를 r라고 하면 원의 방정식은

$x^2+(y-a)^2=r^2$

이 원이 두 점 $(-2, -1)$, $(3, 4)$를 지나므로

$(-2)^2+(-1-a)^2=r^2$, $3^2+(4-a)^2=r^2$

$a^2+2a+5=r^2$, $a^2-8a+25=r^2$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $r^2=13$

따라서 주어진 원의 방정식은

$x^2+(y-2)^2=13$

ㄱ. 중심의 좌표는 $(0, 2)$이다. (참)

ㄴ. $(-3)^2+(0-2)^2=13$이므로 주어진 원은 점 $(-3, 0)$을 지난다. (참)

ㄷ. 원의 넓이는 13π이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

참고

(1) 중심이 x축 위에 있는 원의 방정식
➡ $(x-a)^2+y^2=r^2$

(2) 중심이 y축 위에 있는 원의 방정식
➡ $x^2+(y-b)^2=r^2$

(3) 중심이 $y=f(x)$의 그래프 위에 있는 원의 방정식
➡ $(x-a)^2+\{y-f(a)\}^2=r^2$

007

원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$의 중심 (a, b)가 직선 $y=x-2$ 위에 있으므로 $b=a-2$

즉, 원의 중심의 좌표가 $(a, a-2)$이므로 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-a+2)^2=r^2$

이 원이 두 점 $(6, 1)$, $(3, -2)$를 지나므로

$(6-a)^2+(1-a+2)^2=r^2$, $(3-a)^2+(-2-a+2)^2=r^2$

$2a^2-18a+45=r^2$, $2a^2-6a+9=r^2$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $r^2=9$

$\therefore (x-3)^2+(y-1)^2=3^2$

따라서 $b=1$, $r=3$이므로

$a+b+r=3+1+3=7$

답 7

008

선분 AB의 중점이 원의 중심이므로 원의 중심의 좌표는

$\left(\frac{2+6}{2}, \frac{-2+6}{2}\right)$, 즉 $(4, 2)$

또, 선분 AB가 원의 지름이므로 원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\sqrt{(6-2)^2+(6+2)^2}$

$=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

따라서 $a=4$, $b=2$, $r^2=(2\sqrt{5})^2=20$이므로

$a+b+r^2=4+2+20=26$

답 26

참고

두 점을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 방정식

두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원은

(원의 중심)$=$($\overline{AB}$의 중점), (반지름의 길이)$=\frac{1}{2}\overline{AB}$

임을 이용하여 원의 방정식을 구한다.

009

두 점 $(-2, -1)$, $(4, 5)$를 이은 선분의 중점이 원의 중심이므로 원의 중심의 좌표는

$\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{-1+5}{2}\right)$, 즉 $(1, 2)$

또, 두 점 $(-2, -1)$, $(4, 5)$를 이은 선분이 원의 지름이므로 원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\sqrt{(4+2)^2+(5+1)^2}=\frac{1}{2}\times 6\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

따라서 주어진 원의 방정식은

$(x-1)^2+(y-2)^2=18$

④ $(4-1)^2+(-1-2)^2=18$이므로 점 $(4, -1)$은 원 위의 점이다.

답 ④

010

(1) x축에 접하는 원의 반지름의 길이는

$|(\text{중심의 } y\text{좌표})|=|-1|=1$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y+1)^2=1$

(2) y축에 접하는 원의 반지름의 길이는

$|(\text{중심의 } x\text{좌표})|=|-6|=6$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x+6)^2+(y-3)^2=36$

(3) x축과 y축에 동시에 접하는 원의 반지름의 길이는

$|(\text{중심의 } x\text{좌표})|=|(\text{중심의 } y\text{좌표})|=|-4|=4$

따라서 구하는 원의 방정식은

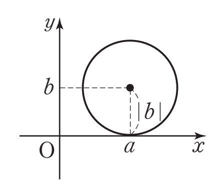
$(x+4)^2+(y+4)^2=16$

답 (1) $(x-2)^2+(y+1)^2=1$
(2) $(x+6)^2+(y-3)^2=36$
(3) $(x+4)^2+(y+4)^2=16$

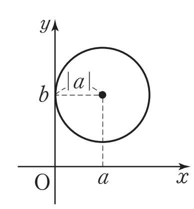
참고

좌표축에 접하는 원의 방정식

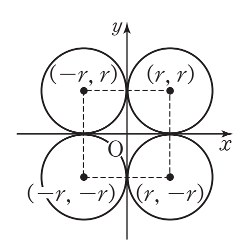
(1) x축에 접하는 원의 방정식
중심이 점 (a, b)이고 x축에 접하는 원
➡ (반지름의 길이)$=|$(중심의 y좌표)$|$
$=|b|$
➡ $(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$



(2) y축에 접하는 원의 방정식
중심이 점 (a, b)이고 y축에 접하는 원
➡ (반지름의 길이)$=|$(중심의 x좌표)$|$
$=|a|$
➡ $(x-a)^2+(y-b)^2=a^2$



(3) x축과 y축에 동시에 접하는 원의 방정식
x축과 y축에 동시에 접하고 반지름의 길이가 r인 원
➡ (반지름의 길이)$=|$(중심의 x좌표)$|$
$=|$(중심의 y좌표)$|$
➡ $(x\pm r)^2+(y\pm r)^2=r^2$



011

중심의 좌표가 $(a, -2)$이고 원이 y축에 접하므로 원의 반지름의 길이는

$|(\text{중심의 } x\text{좌표})|=|a|$

따라서 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y+2)^2=a^2$

이 원이 점 $(-1, -5)$를 지나므로

$(-1-a)^2+(-5+2)^2=a^2$

$2a=-10$ $\quad\therefore a=-5$

답 -5

012

중심이 직선 $y=x-3$ 위에 있으므로 원의 중심의 좌표를 $(a,\ a-3)$이라고 하자.
원이 x축에 접하므로 원의 반지름의 길이는
$|(\text{중심의 } y\text{좌표})|=|a-3|$
따라서 원의 방정식은
$(x-a)^2+(y-a+3)^2=(a-3)^2$ ❶
이 원이 점 $(3,\ 1)$을 지나므로
$(3-a)^2+(1-a+3)^2=(a-3)^2$
$(4-a)^2=0 \quad \therefore a=4$ ❷
따라서 원의 반지름의 길이는 $|a-3|=|4-3|=1$이므로 원의 둘레의 길이는
$2\pi\times1=2\pi$ ❸

답 2π

채점 기준	비율
❶ 원의 방정식을 세울 수 있다.	40 %
❷ 원의 중심의 x좌표를 구할 수 있다.	30 %
❸ 원의 둘레의 길이를 구할 수 있다.	30 %

013

점 $(-1,\ 2)$를 지나고 x축과 y축에 동시에 접하려면 원의 중심이 제2사분면 위에 있어야 하므로 반지름의 길이를 r라고 하면 중심의 좌표는 $(-r,\ r)$이다.
$r>0$
따라서 원의 방정식은
$(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$
이 원이 점 $(-1,\ 2)$를 지나므로
$(-1+r)^2+(2-r)^2=r^2,\ r^2-6r+5=0$
$(r-1)(r-5)=0 \quad \therefore r=1$ 또는 $r=5$
따라서 두 원의 중심의 좌표는 $(-1,\ 1)$, $(-5,\ 5)$이므로 두 원의 중심 사이의 거리는
$\sqrt{(-5+1)^2+(5-1)^2}=4\sqrt{2}$

답 $4\sqrt{2}$

014

$x^2+y^2+6kx-2y+18=0$에서
$(x+3k)^2+(y-1)^2=9k^2-17$
이 원이 x축에 접하므로 원의 반지름의 길이는
$|(\text{중심의 } y\text{좌표})|=|1|=1$
즉, $\sqrt{9k^2-17}=1$이므로
$9k^2-17=1,\ k^2=2 \quad \therefore k=\pm\sqrt{2}$ ㉠
이때 원의 중심이 제1사분면 위에 있으므로
$-3k>0 \quad \therefore k<0$ ㉡
㉠, ㉡에서 $k=-\sqrt{2}$

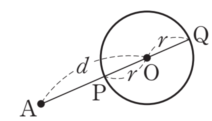
답 ①

015

점 $(3,\ -7)$과 원의 중심인 점 $(0,\ 0)$ 사이의 거리는
$\sqrt{3^2+(-7)^2}=\sqrt{58}$
이때 원의 반지름의 길이는 r이고 점 $(3,\ -7)$에서 원 $x^2+y^2=r^2$에 이르는 거리의 최댓값이 $3+\sqrt{58}$이므로
$r+\sqrt{58}=3+\sqrt{58}$
$\therefore r=3$

답 3

참고
원 밖의 점과 원 위의 점 사이의 거리의 최대・최소
원 밖의 한 점 A와 원의 중심 O 사이의 거리를 d, 원의 반지름의 길이를 r라고 할 때, 점 A에서 원에 이르는 거리의 최댓값과 최솟값은
$(\text{최댓값})=\overline{AO}+\overline{OQ}=d+r$
$(\text{최솟값})=\overline{AO}-\overline{PO}=d-r$



016

$\sqrt{(a-6)^2+(b+8)^2}$의 값은 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 $P(a,\ b)$와 점 $(6,\ -8)$ 사이의 거리와 같다.
점 $(6,\ -8)$과 원의 중심인 점 $(0,\ 0)$ 사이의 거리는
$\sqrt{6^2+(-8)^2}=10$
이때 원의 반지름의 길이가 1이므로 $\sqrt{(a-6)^2+(b+8)^2}$의 최댓값은 $10+1=11$

답 11

017

$x^2+y^2=3$에서 $x^2+y^2-3=0$
$(x-2)^2+(y-3)^2=6$에서 $x^2+y^2-4x-6y+7=0$
두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$x^2+y^2-3-(x^2+y^2-4x-6y+7)=0$
$4x+6y-10=0 \quad \therefore 2x+3y-5=0$
따라서 점 $(-4,\ 0)$과 직선 $2x+3y-5=0$ 사이의 거리는
$\dfrac{|2\times(-4)+3\times0-5|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\dfrac{13}{\sqrt{13}}=\sqrt{13}$

답 ③

018

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$x^2+y^2-2x+2y+a-(x^2+y^2+ax+8y-1)=0$
$\therefore (-a-2)x-6y+a+1=0$ ❶
이 직선이 점 $\left(-2,\ \dfrac{4}{3}\right)$를 지나므로
$(-a-2)\times(-2)-6\times\dfrac{4}{3}+a+1=0$
$3a-3=0 \quad \therefore a=1$ ❷

답 1

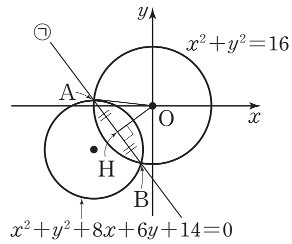
채점 기준	비율
❶ 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있다.	50 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	50 %

019

$x^2+y^2=16$에서 $x^2+y^2-16=0$
두 원의 공통인 현의 방정식은
$x^2+y^2-16-(x^2+y^2+8x+6y+14)=0$

$8x+6y+30=0 \qquad \therefore 4x+3y+15=0$ .... ㉠

오른쪽 그림과 같이 두 원의 교점을 A, B라 하고 원 $x^2+y^2=16$의 중심 O$(0,\ 0)$에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라고 하면 점 O와 직선 ㉠ 사이의 거리는



$\overline{\mathrm{OH}}=\dfrac{|15|}{\sqrt{4^2+3^2}}=3$

삼각형 OAH에서

$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{OH}}^2}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$

→ 변 OA의 길이는 원 $x^2+y^2=16$의 반지름의 길이이다.

따라서 공통인 현의 길이는

$\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AH}}=2\sqrt{7}$

답 $2\sqrt{7}$

020

$(x-1)^2+(y-3)^2=9$에서

$x^2+y^2-2x-6y+1=0$

$(x-3)^2+(y-2)^2=16$에서

$x^2+y^2-6x-4y-3=0$

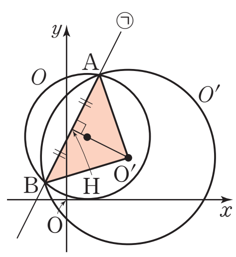
두 원 O, O'의 공통인 현의 방정식은

$x^2+y^2-2x-6y+1-(x^2+y^2-6x-4y-3)=0$

$4x-2y+4=0 \qquad \therefore 2x-y+2=0$ .... ㉠

.... ❶

오른쪽 그림과 같이 점 O′$(3,\ 2)$에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라고 하면 점 O′과 직선 ㉠ 사이의 거리는



$\overline{\mathrm{O'H}}=\dfrac{|2\times3-2+2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{6}{\sqrt{5}}=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$

삼각형 O′AH에서

$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{O'A}}^2-\overline{\mathrm{O'H}}^2}=\sqrt{4^2-\left(\dfrac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2}$

$=\dfrac{2\sqrt{55}}{5}$

→ 변 O′A의 길이는 원 $(x-3)^2+(y-2)^2=16$의 반지름의 길이이다.

즉, 공통인 현의 길이는

$\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AH}}=2\times\dfrac{2\sqrt{55}}{5}=\dfrac{4\sqrt{55}}{5}$ .... ❷

따라서 삼각형 O′AB의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{O'H}}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4\sqrt{55}}{5}\times\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$

$=\dfrac{12\sqrt{11}}{5}$ .... ❸

답 $\dfrac{12\sqrt{11}}{5}$

채점 기준	비율
❶ 두 원의 공통인 현의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❷ 삼각형 O′AB의 높이와 밑변의 길이를 구할 수 있다.	50 %
❸ 삼각형 O′AB의 넓이를 구할 수 있다.	20 %

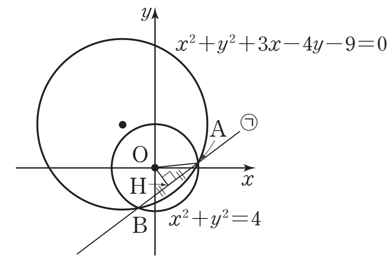
021

$x^2+y^2=4$에서 $x^2+y^2-4=0$

두 원의 공통인 현의 방정식은

$x^2+y^2-4-(x^2+y^2+3x-4y-9)=0$

$\therefore 3x-4y-5=0$ .... ㉠



위의 그림과 같이 두 원의 교점을 A, B라 하고 원 $x^2+y^2=4$의 중심 O$(0,\ 0)$에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라고 하면 점 O와 직선 ㉠ 사이의 거리는

$\overline{\mathrm{OH}}=\dfrac{|-5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=1$

삼각형 OAH에서

$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{OH}}^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$

→ 변 OA의 길이는 원 $x^2+y^2=4$의 반지름의 길이이다.

즉, 두 원 $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2+3x-4y-9=0$의 두 교점을 지나는 원 중에서 넓이가 최소인 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{3}$이다.

→ 두 교점을 이은 선분 AB를 지름으로 하는 원

따라서 구하는 원의 넓이는

$\pi\times(\sqrt{3})^2=3\pi$

답 ③

022

(1) 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $x-y+2=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$

이때 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$이므로 주어진 원과 직선은 한 점에서 만난다. (접한다.)

(2) 원의 중심 $(-9,\ 2)$와 직선 $x-3y-7=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|-9-3\times2-7|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\dfrac{22}{\sqrt{10}}=\dfrac{11\sqrt{10}}{5}$

이때 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{15}$이고 $\dfrac{11\sqrt{10}}{5}>\sqrt{15}$이므로 주어진 원과 직선은 만나지 않는다.

→ $\sqrt{\dfrac{242}{5}}$ → $\sqrt{\dfrac{75}{5}}$

(3) $x^2+y^2-6x-2y+6=0$에서

$(x-3)^2+(y-1)^2=4$

원의 중심 $(3,\ 1)$과 직선 $2x+y-3=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|2\times3+1-3|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{5}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

이때 원의 반지름의 길이는 2이고 $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}<2$이므로 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

답 (1) 한 점에서 만난다. (접한다.) (2) 만나지 않는다. (3) 서로 다른 두 점에서 만난다.

023

(1) $y=3x-5$를 $x^2+y^2=10$에 대입하면

$x^2+(3x-5)^2=10 \qquad \therefore 2x^2-6x+3=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\dfrac{D}{4}=(-3)^2-2\times3=3>0$

따라서 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만나므로 교점의 개수는 2이다.

(2) $y=-2x+1$을 $(x-1)^2+(y-7)^2=1$에 대입하면

$(x-1)^2+(-2x+1-7)^2=1$

$(x-1)^2+(-2x-6)^2=1 \qquad \therefore 5x^2+22x+36=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=11^2-5\times36=-59<0$

따라서 원과 직선은 만나지 않으므로 교점의 개수는 0이다.

(3) $x+y-4=0$에서 $y=-x+4$

$y=-x+4$를 $x^2+y^2-4y+2=0$에 대입하면

$x^2+(-x+4)^2-4(-x+4)+2=0$

$2x^2-4x+2=0 \qquad \therefore x^2-2x+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\times1=0$

따라서 원과 직선은 접하므로 교점의 개수는 1이다.

답 (1) 2 (2) 0 (3) 1

024

원의 중심 $(2, 1)$과 직선 $4x+3y+2=0$ 사이의 거리는

$\frac{|4\times2+3\times1+2|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{13}{5}$

원의 반지름의 길이가 r이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$r>\frac{13}{5}$

따라서 양의 정수 r의 최솟값은 3이다.

답 ③

참고

원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만날 때

(1) 원의 중심과 직선 사이의 거리를 이용

원의 중심과 직선 사이의 거리를 d, 원의 반지름의 길이를 r라고 하면

➡ $d<r$

(2) 이차방정식의 판별식을 이용

원과 직선의 방정식에서 한 문자를 소거하여 얻은 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

➡ $D>0$

025

원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $y=\sqrt{3}x+k$, 즉 $\sqrt{3}x-y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|k|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{2}$

원의 반지름의 길이가 2이므로 직선이 원과 만나지 않으려면

$\frac{|k|}{2}>2, \ |k|>4 \qquad \therefore k<-4$ 또는 $k>4$

답 $k<-4$ 또는 $k>4$

| 다른 풀이 |

$y=\sqrt{3}x+k$를 $x^2+y^2=4$에 대입하면

$x^2+(\sqrt{3}x+k)^2=4 \qquad \therefore 4x^2+2\sqrt{3}kx+k^2-4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(\sqrt{3}k)^2-4(k^2-4)<0$

$k^2-16>0, \ (k+4)(k-4)>0 \qquad \therefore k<-4$ 또는 $k>4$

참고

원과 직선이 만나지 않을 때

(1) 원의 중심과 직선 사이의 거리를 이용

원의 중심과 직선 사이의 거리를 d, 원의 반지름의 길이를 r라고 하면

➡ $d>r$

(2) 이차방정식의 판별식을 이용

원과 직선의 방정식에서 한 문자를 소거하여 얻은 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

➡ $D<0$

026

원의 중심 $(-1, 4)$와 직선 $2x-y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|2\times(-1)-4+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|-6+k|}{\sqrt{5}}$ ❶

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$이므로 원과 직선이 접하려면

$\frac{|-6+k|}{\sqrt{5}}=\sqrt{10}, \ |-6+k|=5\sqrt{2}$

$-6+k=\pm5\sqrt{2} \qquad \therefore k=6\pm5\sqrt{2}$ ❷

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$(6-5\sqrt{2})+(6+5\sqrt{2})=12$ ❸

답 12

채점 기준	비율
❶ 원의 중심과 직선 사이의 거리를 k로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 모든 실수 k의 값의 합을 구할 수 있다.	20 %

참고

원과 직선이 접할 때

(1) 원의 중심과 직선 사이의 거리를 이용

원의 중심과 직선 사이의 거리를 d, 원의 반지름의 길이를 r라고 하면

➡ $d=r$

(2) 이차방정식의 판별식을 이용

원과 직선의 방정식에서 한 문자를 소거하여 얻은 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

➡ $D=0$

027

원의 중심 $(6, 0)$과 직선 $y=mx-m$, 즉 $mx-y-m=0$ 사이의 거리는

$\frac{|6m-m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|5m|}{\sqrt{m^2+1}}$

원의 반지름의 길이가 3이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$\frac{|5m|}{\sqrt{m^2+1}}>3, \ |5m|>3\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면

$25m^2>9m^2+9, \ 16m^2-9>0$

$(4m+3)(4m-3)>0 \qquad \therefore m<-\frac{3}{4}$ 또는 $m>\frac{3}{4}$

따라서 m의 값이 될 수 없는 것은 ②이다.

답 ②

| 다른 풀이 |

$y=mx-m$을 $(x-6)^2+y^2=9$에 대입하면

$(x-6)^2+(mx-m)^2=9$

$\therefore (m^2+1)x^2-2(m^2+6)x+m^2+27=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=\{-(m^2+6)\}^2-(m^2+1)(m^2+27)<0$

$16m^2-9>0$, $(4m+3)(4m-3)>0$

$\therefore m<-\frac{3}{4}$ 또는 $m>\frac{3}{4}$

028

두 점 $(-3, 0)$, $(1, 0)$을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심의 좌표는

$\left(\frac{-3+1}{2}, 0\right)$, 즉 $(-1, 0)$

또, 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}|1-(-3)|=2$

원의 중심 $(-1, 0)$과 직선 $kx+y-2=0$ 사이의 거리는

$\frac{|k\times(-1)-2|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{|-k-2|}{\sqrt{k^2+1}}$

원의 반지름의 길이가 2이므로 원과 직선이 오직 한 점에서 만나려면

$\frac{|-k-2|}{\sqrt{k^2+1}}=2$, $|-k-2|=2\sqrt{k^2+1}$

양변을 제곱하면

$k^2+4k+4=4k^2+4$, $3k^2-4k=0$

$k(3k-4)=0 \qquad \therefore k=0$ 또는 $k=\frac{4}{3}$

이때 k는 양수이므로 $k=\frac{4}{3}$

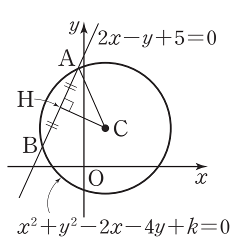
답 ④

029

$x^2+y^2-2x-4y+k=0$에서

$(x-1)^2+(y-2)^2=5-k$

오른쪽 그림과 같이 주어진 원의 중심을 C$(1, 2)$라 하고 점 C에서 직선 $2x-y+5=0$에 내린 수선의 발을 H라고 하면



$\overline{\text{CH}}=\frac{|2\times1-2+5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$

이때 $\overline{\text{AB}}=4$이므로

$\overline{\text{AH}}=\frac{1}{2}\overline{\text{AB}}=\frac{1}{2}\times4=2$

삼각형 AHC에서 $\overline{\text{AC}}=\sqrt{2^2+(\sqrt{5})^2}=3$

$\overline{\text{AC}}$는 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=5-k$의 반지름의 길이이다.

즉, $5-k=3^2$이므로

$k=-4$

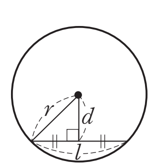
답 ①

참고

현의 길이

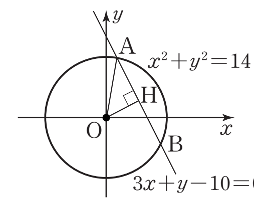
반지름의 길이가 r인 원의 중심으로부터 d만큼 떨어진 현의 길이를 l이라고 하면

$l=2\sqrt{r^2-d^2}$



030

오른쪽 그림과 같이 원 $x^2+y^2=14$와 직선 $3x+y-10=0$의 두 교점을 A, B라고 하면 두 점 A, B를 지나는 원 중에서 넓이가 최소인 것은 선분 AB를 지름으로 하는 원이다.



원 $x^2+y^2=14$의 중심 O$(0, 0)$에서 직선 $3x+y-10=0$에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$\overline{\text{OH}}=\frac{|-10|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\sqrt{10}$

삼각형 AOH에서

$\overline{\text{AH}}=\sqrt{\overline{\text{OA}}^2-\overline{\text{OH}}^2}=\sqrt{(\sqrt{14})^2-(\sqrt{10})^2}=2$

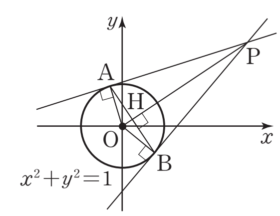
$\overline{\text{OA}}$는 원 $x^2+y^2=14$의 반지름의 길이이다.

따라서 구하는 넓이가 최소인 원의 반지름의 길이는 2이다.

답 2

031

오른쪽 그림에서 원의 중심 O와 점 P 사이의 거리는



$\overline{\text{PO}}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$

삼각형 AOP에서 $\overline{\text{AO}}=1$이므로

$\overline{\text{AP}}=\sqrt{(\sqrt{13})^2-1^2}=2\sqrt{3}$

선분 AB와 선분 PO의 교점을 H라 고 하면 삼각형 AOP에서 $\overline{\text{AO}}\times\overline{\text{AP}}=\overline{\text{PO}}\times\overline{\text{AH}}$이므로

삼각형 AOP의 넓이에서 $\frac{1}{2}\times\overline{\text{AO}}\times\overline{\text{AP}}=\frac{1}{2}\times\overline{\text{PO}}\times\overline{\text{AH}}$

$1\times2\sqrt{3}=\sqrt{13}\times\overline{\text{AH}}$

$\therefore \overline{\text{AH}}=\frac{2\sqrt{39}}{13}$

$\therefore \overline{\text{AB}}=2\overline{\text{AH}}=2\times\frac{2\sqrt{39}}{13}=\frac{4\sqrt{39}}{13}$

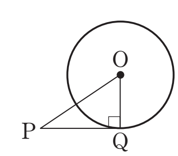
답 $\frac{4\sqrt{39}}{13}$

참고

접선의 길이

원 밖의 점 P에서 원에 그은 접선의 접점을 Q라고 하면 직각삼각형 OPQ에서

$\overline{\text{PQ}}=\sqrt{\overline{\text{OP}}^2-\overline{\text{OQ}}^2}$



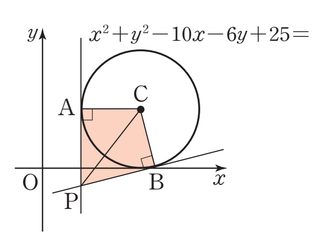
032

$x^2+y^2-10x-6y+25=0$에서

$(x-5)^2+(y-3)^2=9$

$\therefore$ C$(5, 3)$

오른쪽 그림에서



$\overline{\text{PC}}=\sqrt{(5-2)^2+(3+1)^2}$

$=5$ ······ ❶

삼각형 APC에서 $\overline{\text{AC}}=3$이므로

$\overline{\text{AP}}=\sqrt{5^2-3^2}=4$ ······ ❷

따라서 사각형 APBC의 넓이는

$2\triangle\text{APC}=2\times\left(\frac{1}{2}\times4\times3\right)=12$ ······ ❸

답 12

채점 기준	비율
❶ 선분 PC의 길이를 구할 수 있다.	30 %
❷ 선분 AP의 길이를 구할 수 있다.	30 %
❸ 사각형 APBC의 넓이를 구할 수 있다.	40 %

033

$x^2+y^2-4x+2y-4=0$에서 $(x-2)^2+(y+1)^2=9$

원의 중심 $(2,\ -1)$과 직선 $3x-4y+k=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|3\times2-4\times(-1)+k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{|10+k|}{5}$

원의 반지름의 길이는 3이고 원 위의 점에서 직선에 이르는 거리의 최댓값이 8이므로

$\dfrac{|10+k|}{5}+3=8,\ \dfrac{|10+k|}{5}=5$

$|10+k|=25,\ 10+k=\pm25$

$\therefore\ k=15$ 또는 $k=-35$

이때 $k>0$이므로 $k=15$

답 15

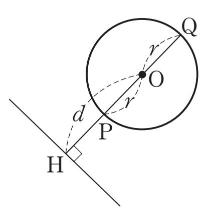
참고

원 위의 점과 직선 사이의 거리의 최대 · 최소

원의 중심과 직선 사이의 거리를 d, 원의 반지름의 길이를 r라고 할 때, 원 위의 점과 직선 사이의 거리의 최댓값과 최솟값은

(최댓값)$=\overline{\mathrm{OH}}+\overline{\mathrm{OQ}}=d+r$

(최솟값)$=\overline{\mathrm{OH}}-\overline{\mathrm{PO}}=d-r$



034

$x^2+y^2-2x+8y+13=0$에서 $(x-1)^2+(y+4)^2=4$

원의 중심 $(1,\ -4)$와 직선 $x+y+13=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|1-4+13|}{\sqrt{1^2+1^2}}=5\sqrt{2}$

원의 반지름의 길이는 2이므로 점 P와 직선 $x+y+13=0$ 사이의 거리를 d라고 하면

$5\sqrt{2}-2\le d\le5\sqrt{2}+2$

이때 $7<5\sqrt{2}<8$이므로 d가 될 수 있는 정수는 6, 7, 8, 9이고, 각각의 거리에 해당하는 점 P가 2개씩 있으므로 구하는 점 P의 개수는 8이다.

답 8

035

(1) $y=2x\pm3\sqrt{2^2+1}$ $\quad\therefore\ y=2x\pm3\sqrt{5}$

(2) $y=-x\pm\sqrt{5}\times\sqrt{(-1)^2+1}$ $\quad\therefore\ y=-x\pm\sqrt{10}$

(3) 직선 $y=5x-1$에 평행한 직선의 기울기는 5이므로

$y=5x\pm1\times\sqrt{5^2+1}$ $\quad\therefore\ y=5x\pm\sqrt{26}$

(4) 직선 $y=\dfrac{1}{6}x+2$에 수직인 직선의 기울기는 -6이므로

$y=-6x\pm2\sqrt{(-6)^2+1}$ $\quad\therefore\ y=-6x\pm2\sqrt{37}$

답 (1) $y=2x\pm3\sqrt{5}$ (2) $y=-x\pm\sqrt{10}$
(3) $y=5x\pm\sqrt{26}$ (4) $y=-6x\pm2\sqrt{37}$

036

직선 $y=4x+3$에 평행한 직선의 기울기는 4이므로 원 $x^2+y^2=17$에 접하는 직선의 방정식은

$y=4x\pm\sqrt{17}\times\sqrt{4^2+1}$ $\quad\therefore\ y=4x\pm17$

따라서 이 두 직선의 y절편은 각각 17, -17이므로

P$(0,\ 17)$, Q$(0,\ -17)$ 또는 P$(0,\ -17)$, Q$(0,\ 17)$

따라서 선분 PQ의 길이는

$\overline{\mathrm{PQ}}=|17-(-17)|=34$

답 ⑤

037

기울기가 2인 접선의 방정식을 $y=2x+k$로 놓으면 원의 중심 $(-3,\ 1)$과 직선 $y=2x+k$, 즉 $2x-y+k=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 2와 같으므로

$\dfrac{|2\times(-3)-1+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=2,\ \dfrac{|-7+k|}{\sqrt{5}}=2$

$|-7+k|=2\sqrt{5},\ -7+k=\pm2\sqrt{5}$

$\therefore\ k=7\pm2\sqrt{5}$

이때 k는 직선의 y절편이므로 구하는 y절편의 곱은

$(7+2\sqrt{5})(7-2\sqrt{5})=29$

답 ⑤

참고

원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식

접선의 방정식을

$y=mx+n$ .... ㉠

으로 놓은 후 다음 방법을 이용하여 구한다.

[방법 1] 원의 중심 $(a,\ b)$에서 접선 ㉠까지의 거리 d가 원의 반지름의 길이 r와 같음을 이용한다.

[방법 2] 접선의 방정식 ㉠과 원의 방정식 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$을 연립하여 얻은 이차방정식의 판별식을 D라고 할 때, $D=0$임을 이용한다.

038

$x^2+y^2-10x+6y+32=0$에서

$(x-5)^2+(y+3)^2=2$

원에 접하는 접선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 45°이므로 기울기는 $\tan45^\circ=1$이다.

접선의 방정식을 $y=x+k$로 놓으면 원의 중심 $(5,\ -3)$과 직선 $y=x+k$, 즉 $x-y+k=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 $\sqrt{2}$와 같으므로

$\dfrac{|5-(-3)+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2},\ \dfrac{|8+k|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

$|8+k|=2,\ 8+k=\pm2$

$\therefore\ k=-6$ 또는 $k=-10$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$x-y-6=0$ 또는 $x-y-10=0$

답 ①, ③

039

(1) $-2x+y=5$ $\quad\therefore\ y=2x+5$

(2) $-3x+3\sqrt{2}y=27$ $\quad\therefore\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$

(3) $(1+2)(x+2)+(5-4)(y-4)=10$

$3x+6+y-4=10 \qquad \therefore y=-3x+8$

(4) $(-1-3)(x-3)+(-4+1)(y+1)=25$

$-4x+12-3y-3=25 \qquad \therefore y=-\frac{4}{3}x-\frac{16}{3}$

답 (1) $y=2x+5$ (2) $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{9\sqrt{2}}{2}$ (3) $y=-3x+8$ (4) $y=-\frac{4}{3}x-\frac{16}{3}$

040

점 $(-2, k)$가 원 $x^2+y^2=16$ 위의 점이므로

$(-2)^2+k^2=16,\ k^2=12 \qquad \therefore k=\pm 2\sqrt{3}$

이때 k는 양수이므로 $k=2\sqrt{3}$

원 $x^2+y^2=16$ 위의 점 $(-2, 2\sqrt{3})$에서의 접선의 방정식은

$-2x+2\sqrt{3}y=16 \qquad \therefore y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{8\sqrt{3}}{3}$

따라서 구하는 y절편은 $\frac{8\sqrt{3}}{3}$이다.

답 ⑤

041

원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 중에서 제1사분면에 있는 점 P의 좌표를 $P(x_1, y_1)\ (x_1>0, y_1>0)$이라고 하자.

원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 $P(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=1$

이 직선이 점 $(0, 3)$을 지나므로

$3y_1=1 \qquad \therefore y_1=\frac{1}{3}$

점 $P\left(x_1, \frac{1}{3}\right)$이 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로

$x_1^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2=1,\ x_1^2=\frac{8}{9}$

$\therefore x_1=\frac{2\sqrt{2}}{3}\ (\because x_1>0)$

답 ⑤

042

원 $(x-5)^2+(y-7)^2=8$ 위의 점 $(3, 5)$에서의 접선의 방정식은

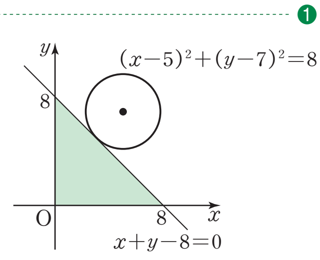
$(3-5)(x-5)+(5-7)(y-7)=8$

$-2x+10-2y+14=8,\ -2x-2y+16=0$

$\therefore x+y-8=0$ ······ ❶

이 접선이 x축, y축과 만나는 점의 좌표는 각각 $(8, 0)$, $(0, 8)$이다.

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



$\frac{1}{2}\times 8\times 8=32$ ······ ❷

답 32

채점 기준	비율
❶ 접선의 방정식을 구할 수 있다.	50 %
❷ 접선과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있다.	50 %

| 다른 풀이 |

원의 중심 $(5, 7)$과 점 $(3, 5)$를 지나는 직선의 기울기는 점 (3, 5)에서의 접선과 수직인 직선이다.

$\frac{5-7}{3-5}=1$

즉, 점 $(3, 5)$에서의 접선의 기울기는 -1이므로 접선의 방정식은

$y-5=-(x-3)$ 기울기가 -1이고 점 (3, 5)를 지나는 직선이다.

$\therefore y=-x+8$

이 접선이 x축, y축과 만나는 점의 좌표는 각각 $(8, 0)$, $(0, 8)$이므로 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\times 8\times 8=32$

043

(1) 접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라고 하면 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=9$

이 직선이 점 $(1, -3)$을 지나므로

$x_1-3y_1=9$ ······ ㉠

점 (x_1, y_1)이 원 $x^2+y^2=9$ 위의 점이므로

$x_1^2+y_1^2=9$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x_1=0,\ y_1=-3$ 또는 $x_1=\frac{9}{5},\ y_1=-\frac{12}{5}$

따라서 접선의 방정식은

$-3y=9$ 또는 $\frac{9}{5}x-\frac{12}{5}y=9$

$\therefore y=-3$ 또는 $3x-4y-15=0$

(2) 접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라고 하면 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=10$

이 직선이 점 $(-4, 2)$를 지나므로

$-4x_1+2y_1=10 \qquad \therefore 2x_1-y_1=-5$ ······ ㉠

점 (x_1, y_1)이 원 $x^2+y^2=10$ 위의 점이므로

$x_1^2+y_1^2=10$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x_1=-3,\ y_1=-1$ 또는 $x_1=-1,\ y_1=3$

따라서 접선의 방정식은

$-3x-y=10$ 또는 $-x+3y=10$

$\therefore 3x+y+10=0$ 또는 $x-3y+10=0$

답 (1) $y=-3,\ 3x-4y-15=0$ (2) $3x+y+10=0,\ x-3y+10=0$

044

접선의 기울기를 m이라고 하면 접선의 방정식은

$y=mx+3$ 기울기가 m이고 점 (0, 3)을 지나는 직선이다.

원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $y=mx+3$, 즉 $mx-y+3=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 1과 같으므로

$\frac{|3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1,\ \frac{3}{\sqrt{m^2+1}}=1,\ 3=\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면

$9=m^2+1 \qquad \therefore m=\pm 2\sqrt{2}$

(i) $m=2\sqrt{2}$일 때

접선의 방정식은 $y=2\sqrt{2}x+3$이고 $y=0$을 대입하면

$x=-\frac{3\sqrt{2}}{4}$

(ii) $m=-2\sqrt{2}$일 때

접선의 방정식은 $y=-2\sqrt{2}x+3$이고 $y=0$을 대입하면

$x=\frac{3\sqrt{2}}{4}$

(i), (ii)에서

$k=-\frac{3\sqrt{2}}{4}$ 또는 $k=\frac{3\sqrt{2}}{4}$ $\rightarrow k=\pm\frac{3\sqrt{2}}{4}$

$\therefore 16k^2=16\times\left(\pm\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2=18$

답 18

045

접선의 기울기를 m이라고 하면 접선의 방정식은

$y-2=m(x-6)$ → 기울기가 m이고 점 (6, 2)를 지나는 직선이다.

$\therefore mx-y+2-6m=0$

원의 중심 $(-3, 2)$와 직선 $mx-y+2-6m=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 3과 같으므로

$\frac{|-3m-2+2-6m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=3$

$\frac{|-9m|}{\sqrt{m^2+1}}=3$, $|-9m|=3\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면

$81m^2=9m^2+9$, $8m^2=1$ $\quad\therefore m=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$

따라서 접선의 방정식은

$\frac{\sqrt{2}}{4}x-y+2-\frac{3\sqrt{2}}{2}=0$ 또는 $-\frac{\sqrt{2}}{4}x-y+2+\frac{3\sqrt{2}}{2}=0$

양변에 $2\sqrt{2}$를 곱하여 정리하면

$x-2\sqrt{2}y+4\sqrt{2}-6=0$ 또는 $x+2\sqrt{2}y-4\sqrt{2}-6=0$

이 중에서 제2사분면을 지나지 않는 직선의 방정식은

$x-2\sqrt{2}y+4\sqrt{2}-6=0$

답 $x-2\sqrt{2}y+4\sqrt{2}-6=0$

실력을 높이는 연습 문제

본문 044쪽

01

$y=x^2-4x+a=(x-2)^2+a-4$

이므로 꼭짓점 A의 좌표는 $(2, a-4)$이다.

$x^2+y^2+bx+4y-17=0$에서

$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+(y+2)^2=\frac{b^2}{4}+21$

이므로 원의 중심의 좌표는 $\left(-\frac{b}{2}, -2\right)$이다.

점 A와 원의 중심이 일치하므로

$2=-\frac{b}{2}$, $a-4=-2$에서 $a=2$, $b=-4$

$\therefore a+b=2+(-4)=-2$

답 ②

02

점 (a, b)가 직선 $x-2y+1=0$ 위에 있으므로

$a-2b+1=0$ $\quad\therefore a=2b-1$ ㉠

즉, 원의 중심의 좌표가 $(2b-1, b)$이므로 원의 반지름의 길이를 r라고 하면 원의 방정식은

$(x-2b+1)^2+(y-b)^2=r^2$

이 원이 두 점 (2, 3), (4, 1)을 지나므로

$(2-2b+1)^2+(3-b)^2=r^2$에서 $5b^2-18b+18=r^2$ ㉡

$(4-2b+1)^2+(1-b)^2=r^2$에서 $5b^2-22b+26=r^2$ ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $b=2$, $r^2=2$

$b=2$를 ㉠에 대입하면 $a=3$

$\therefore b-a=2-3=-1$

답 ②

03

삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는

$\left(\frac{3+(-3)+(-6)}{3}, \frac{-6+12+9}{3}\right)$, 즉 $(-2, 5)$

선분 GC의 중점이 원의 중심이므로 원의 중심의 좌표는

$\left(\frac{-2+(-6)}{2}, \frac{5+9}{2}\right)$, 즉 $(-4, 7)$

또, 선분 GC가 원의 지름이므로 원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{GC}=\frac{1}{2}\sqrt{(-6+2)^2+(9-5)^2}=\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x+4)^2+(y-7)^2=8$

답 $(x+4)^2+(y-7)^2=8$

04

원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ (A, B, C는 상수)이라고 하면 이 원이 세 점 (0, 1), (−1, 0), (2, 2)를 지나므로 원의 방정식에

$x=0$, $y=1$을 대입하면 $1+B+C=0$에서

$B=-C-1$ ㉠

$x=-1$, $y=0$을 대입하면 $1-A+C=0$에서

$A=C+1$ ㉡

$x=2$, $y=2$를 대입하면 $4+4+2A+2B+C=0$에서

$2A+2B+C=-8$ ㉢

㉠, ㉡을 ㉢에 대입하면

$2(C+1)+2(-C-1)+C=-8$ $\quad\therefore C=-8$

$C=-8$을 ㉠에 대입하면 $B=7$

$C=-8$을 ㉡에 대입하면 $A=-7$

원의 방정식은 $x^2+y^2-7x+7y-8=0$이므로

$\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y+\frac{7}{2}\right)^2=\frac{65}{2}$

즉, 원의 중심의 좌표는 $\left(\frac{7}{2}, -\frac{7}{2}\right)$, 반지름의 길이는 $\sqrt{\frac{65}{2}}$이다.

따라서 $a=\frac{7}{2}$, $b=-\frac{7}{2}$, $c^2=\frac{65}{2}$이므로

$c^2-a+b=\frac{65}{2}-\frac{7}{2}-\frac{7}{2}=\frac{51}{2}$

답 ②

05

원의 중심의 좌표를 (a, b)라고 하면 x축에 접하는 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$

이 원이 두 점 (2, 2), (3, 3)을 지나므로

$(2-a)^2+(2-b)^2=b^2$에서

$a^2-4a-4b+8=0$ ······ ㉠

$(3-a)^2+(3-b)^2=b^2$에서

$a^2-6a-6b+18=0$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2\sqrt{3}$, $b=5-2\sqrt{3}$ 또는 $a=-2\sqrt{3}$, $b=5+2\sqrt{3}$

이때 원의 반지름의 길이는 $|b|$이므로 두 원의 반지름의 길이의 합은

$(5-2\sqrt{3})+(5+2\sqrt{3})=10$

답 10

06

구하는 원의 반지름의 길이를 r $(r>0)$라고 하면 x축과 y축에 동시에 접하는 원의 중심이 제2사분면 위에 있으므로 원의 중심의 좌표는 $(-r, r)$이다.

점 $(-r, r)$가 곡선 $y=x^2-x-1$ 위에 있으므로

$r=(-r)^2-(-r)-1$

$r^2=1 \qquad \therefore r=1$ $(\because r>0)$

중심이 점 $(-1, 1)$이고 반지름의 길이가 1인 원의 방정식은

$(x+1)^2+(y-1)^2=1$

$\therefore x^2+y^2+2x-2y+1=0$

따라서 $a=2$, $b=-2$, $c=1$이므로

$a+b+c=2+(-2)+1=1$

답 1

07

$x^2+y^2-6x-6y-9=0$에서

$(x-3)^2+(y-3)^2=27$

점 A$(-3, 5)$와 원의 중심 $(3, 3)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(3+3)^2+(3-5)^2}=2\sqrt{10}$

이때 원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{3}$이므로 선분 AP의 길이의

최댓값은 $2\sqrt{10}+3\sqrt{3}$

최솟값은 $2\sqrt{10}-3\sqrt{3}$

따라서 선분 AP의 길이의 최댓값과 최솟값의 곱은

$(2\sqrt{10}+3\sqrt{3})(2\sqrt{10}-3\sqrt{3})=13$

답 ③

08

$x^2+y^2-8x+12=0$에서

$(x-4)^2+y^2=4$

점 A$(1, 4)$와 원의 중심 $(4, 0)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(4-1)^2+(0-4)^2}=5$

이때 원의 반지름의 길이가 2이므로

$5-2\le\overline{AP}\le5+2 \qquad \therefore 3\le\overline{AP}\le7$

(i) $\overline{AP}=4, 5, 6$인 점 P는 각각 2개이다.

(ii) $\overline{AP}=3, 7$인 점 P는 각각 1개이다.

(i), (ii)에서 구하는 점 P의 개수는

$3\times2+2\times1=8$

답 ④

09

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-2x+y-(x^2+y^2-x-y-2)=0$

$-x+2y+2=0 \qquad \therefore y=\frac{1}{2}x-1$

이 직선과 평행하고 점 $(6, -8)$을 지나는 직선의 방정식은

$y+8=\frac{1}{2}(x-6) \qquad \therefore y=\frac{1}{2}x-11$

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=11$이므로 $ab=\frac{1}{2}\times11=\frac{11}{2}$

답 ②

10

원 $x^2+y^2+ax+6y-a=0$이 원 $x^2+y^2+2x+2y-6=0$의 둘레의 길이를 이등분하므로 두 원의 교점을 지나는 직선이 원 $x^2+y^2+2x+2y-6=0$의 중심을 지나야 한다.

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2+ax+6y-a-(x^2+y^2+2x+2y-6)=0$

$\therefore (a-2)x+4y-a+6=0$ ······ ㉠

$x^2+y^2+2x+2y-6=0$에서

$(x+1)^2+(y+1)^2=8$ ······ ㉡

따라서 직선 ㉠이 원 ㉡의 중심 $(-1, -1)$을 지나야 하므로

$-(a-2)-4-a+6=0$, $-2a+4=0$

$\therefore a=2$

답 ④

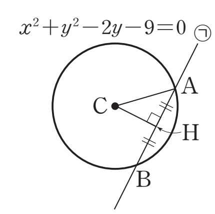
11

두 원의 공통인 현의 방정식은

$x^2+y^2-2y-9-(x^2+y^2-x+k)=0$

$\therefore x-2y-k-9=0$ ······ ㉠

두 원의 교점을 A, B라 하고 원 $x^2+y^2-2y-9=0$, 즉 $x^2+(y-1)^2=10$의 중심을 C라고 하자.



점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라고 하면 직선 ㉠과 점 C$(0, 1)$ 사이의 거리는

$\overline{CH}=\frac{|0-2\times1-k-9|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|k+11|}{\sqrt{5}}$

공통인 현의 길이가 $2\sqrt{5}$이므로

$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}=\sqrt{5}$

삼각형 ACH에서

$\overline{CH}=\sqrt{\overline{CA}^2-\overline{AH}^2}=\sqrt{(\sqrt{10})^2-(\sqrt{5})^2}=\sqrt{5}$

즉, $\frac{|k+11|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$이므로 $|k+11|=5$

$k+11=\pm5 \qquad \therefore k=-6$ 또는 $k=-16$

따라서 모든 상수 k의 값의 합은

$-6+(-16)=-22$

답 ①

12

$(x+1)^2+(y-2)^2=5$에서 $x^2+y^2+2x-4y=0$

$x^2+(y-k)^2=10$에서 $x^2+y^2-2ky+k^2-10=0$

두 원의 교점 P, Q를 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2+2x-4y-(x^2+y^2-2ky+k^2-10)=0$

$2x+2(k-2)y-k^2+10=0$ ⋯⋯⋯ ㉠

두 원의 공통인 현인 선분 PQ의 길이가 최대가 되는 경우는 공통인 현이 작은 원의 중심을 지날 때이므로 직선 ㉠이 점 $(-1,\ 2)$를 지나야 한다. 즉,

공통인 현이 작은 원의 지름이다.

$-2+4k-8-k^2+10=0$

$k^2-4k=0,\ k(k-4)=0$

$\therefore\ k=4\ (\because\ k>0)$

답 4

13

원의 중심 $(a,\ 0)$과 직선 $x-y+1=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|a+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{|a+1|}{\sqrt{2}}$

원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{2}$이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$\dfrac{|a+1|}{\sqrt{2}}>3\sqrt{2},\ |a+1|>6$

$a+1<-6$ 또는 $a+1>6$ $\quad\therefore\ a<-7$ 또는 $a>5$

따라서 자연수 a의 최솟값은 6이다.

답 ④

14

원의 반지름의 길이를 r라고 하면 원의 넓이가 $\dfrac{5}{2}\pi$이므로

$\pi r^2=\dfrac{5}{2}\pi$에서 $r^2=\dfrac{5}{2}$ $\quad\therefore\ r=\dfrac{\sqrt{10}}{2}\ (\because\ r>0)$

원의 중심 $(4,\ -1)$과 직선 $2x-4y+k=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이와 같으므로

$\dfrac{|2\times4-4\times(-1)+k|}{\sqrt{2^2+(-4)^2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{2},\ \dfrac{|12+k|}{2\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

$|12+k|=5\sqrt{2},\ 12+k=\pm5\sqrt{2}$

$\therefore\ k=-12\pm5\sqrt{2}$

따라서 모든 상수 k의 값의 합은

$(-12+5\sqrt{2})+(-12-5\sqrt{2})=-24$

답 ③

15

문제 접근하기

(원의 중심과 직선 $x+2y-3=0$ 사이의 거리)

$=$(원의 중심과 직선 $x+2y-5=0$ 사이의 거리)

$=$(원의 반지름의 길이)

임을 이용한다.

원의 중심이 직선 $y=x+1$ 위에 있으므로 원의 중심의 좌표를 $(a,\ a+1)$이라고 하자.

원의 중심 $(a,\ a+1)$과 직선 $x+2y-3=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|a+2(a+1)-3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{|3a-1|}{\sqrt{5}}$

원의 중심 $(a,\ a+1)$과 직선 $x+2y-5=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|a+2(a+1)-5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{|3a-3|}{\sqrt{5}}$

원이 두 직선 $x+2y-3=0,\ x+2y-5=0$에 접하므로

$\dfrac{|3a-1|}{\sqrt{5}}=\dfrac{|3a-3|}{\sqrt{5}},\ |3a-1|=|3a-3|$

$\therefore\ 3a-1=\pm(3a-3)$

(i) $3a-1=3a-3$일 때

$-1=-3$이므로 등식이 성립하지 않는다.

(ii) $3a-1=-(3a-3)$일 때

$6a=4 \quad\therefore\ a=\dfrac{2}{3}$

(i), (ii)에서 $a=\dfrac{2}{3}$

$a=\dfrac{2}{3}$를 $\dfrac{|3a-1|}{\sqrt{5}}$에 대입하면

$\dfrac{\left|3\times\dfrac{2}{3}-1\right|}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

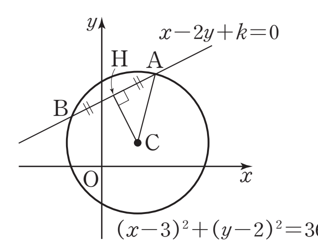
따라서 구하는 원의 반지름의 길이가 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$이므로 원의 넓이는

$\pi\times\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)^2=\dfrac{\pi}{5}$

답 ②

16

오른쪽 그림과 같이 주어진 원의 중심을 C(3, 2)라 하고 점 C에서 직선 $x-2y+k=0$에 내린 수선의 발을 H라고 하면



$\overline{\mathrm{CH}}=\dfrac{|3-2\times2+k|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}$

$=\dfrac{|-1+k|}{\sqrt{5}}$

$\overline{\mathrm{AB}}=8$이므로

$\overline{\mathrm{AH}}=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{1}{2}\times8=4$

삼각형 AHC에서 $\overline{\mathrm{CA}}=6$이므로

$\overline{\mathrm{CH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{CA}}^2-\overline{\mathrm{AH}}^2}=\sqrt{6^2-4^2}=2\sqrt{5}$

즉, $\dfrac{|-1+k|}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$이므로

$|-1+k|=10,\ -1+k=\pm10$

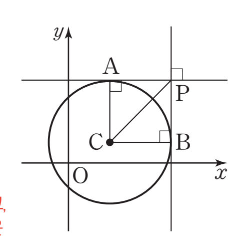
$\therefore\ k=11$ 또는 $k=-9$

이때 $k>0$이므로 $k=11$

답 ③

17

원의 중심을 C라고 하면 C(2, 1)이므로



$\overline{\mathrm{PC}}=\sqrt{(2-5)^2+(1-4)^2}=3\sqrt{2}$

두 접점을 A, B라고 하면 두 접선이 서로 수직이고, $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}$이므로 사각형 ACBP는 정사각형이다.

네 변의 길이가 같고, 네 각의 크기가 같은 사각형은 정사각형이다.

즉, 삼각형 PCB에서

$r^2+r^2=(3\sqrt{2})^2$

$2r^2=18,\ r^2=9$

$\therefore\ r=\pm3$

이때 $r>0$이므로 $r=3$

답 ③

18

문제 접근하기

정삼각형이 되는 삼각형 ABC의 넓이가 최소일 때와 최대일 때의 두 삼각형의 닮음비를 구하고 두 삼각형의 닮음비가 $a:b$일 때 넓이의 비는 $a^2:b^2$임을 이용한다.

정삼각형 ABC의 한 변 BC를 밑변으로 생각하면 원 위의 점 A와 직선 BC 사이의 거리가 높이가 된다.
따라서 정삼각형 ABC는 점 A와 직선 BC 사이의 거리가 최소일 때 넓이가 최소이고, 점 A와 직선 BC 사이의 거리가 최대일 때 넓이가 최대이다.
원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $y=2x-6$, 즉 $2x-y-6=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-6|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$$

정삼각형 ABC의 높이의 최솟값, 최댓값과 같다.

원의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$이므로 점 A와 직선 $y=2x-6$ 사이의 거리의 최솟값은 $\frac{6\sqrt{5}}{5}-\sqrt{5}=\frac{\sqrt{5}}{5}$, 최댓값은 $\frac{6\sqrt{5}}{5}+\sqrt{5}=\frac{11\sqrt{5}}{5}$이다.
따라서 정삼각형 ABC의 넓이가 최소일 때와 최대일 때 두 삼각형의 닮음비는

$$\frac{\sqrt{5}}{5}:\frac{11\sqrt{5}}{5}=1:11$$

이므로 정삼각형 ABC의 넓이의 최솟값과 최댓값의 비는
$1^2:11^2=1:121$

답 ④

풍쌤 개념 CHECK

닮은 도형의 넓이의 비_中 수학 2
닮은 도형의 넓이의 비는 닮음비의 제곱과 같다.
즉, 닮음비가 $m:n$이면 넓이의 비는 $m^2:n^2$이다.

19

직선 $x-y=0$, 즉 $y=x$에 수직인 직선의 기울기는 -1이므로 원 $x^2+y^2=8$에 접하고 기울기가 -1인 직선의 방정식은
$y=-x\pm2\sqrt{2}\times\sqrt{(-1)^2+1}$ $\quad\therefore y=-x\pm4$
따라서 두 직선의 y절편은 각각 $4,\ -4$이므로
$\mathrm{P}(0,\ 4),\ \mathrm{Q}(0,\ -4)$ 또는 $\mathrm{P}(0,\ -4),\ \mathrm{Q}(0,\ 4)$
$\therefore \overline{\mathrm{PQ}}=|4-(-4)|=8$

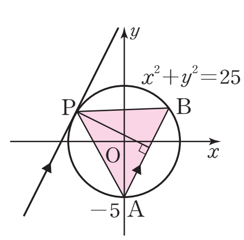
답 ②

20

문제 접근하기

점 P와 직선 AB 사이의 거리가 최대일 때 삼각형 PAB의 넓이가 최대가 되므로 점 P에서의 원의 접선의 방정식을 구한다.

점 P와 직선 AB 사이의 거리가 최대일 때 삼각형 PAB의 넓이가 최대가 되고, 이때 점 P에서의 접선은 직선 AB와 평행하다.



직선 AB의 기울기는 $\frac{3+5}{4-0}=2$이므로
기울기가 2인 원 $x^2+y^2=25$의 접선의 방정식은
$y=2x\pm5\sqrt{2^2+1}$
$\therefore y=2x\pm5\sqrt{5}$
점 $\mathrm{A}(0,\ -5)$와 직선 $y=2x+5\sqrt{5}$, 즉 $2x-y+5\sqrt{5}=0$ 사이의 거리는

점 A에서 직선 $y=2x-5\sqrt{5}$ 사이의 거리보다 직선 $y=2x+5\sqrt{5}$ 사이의 거리가 더 멀다.

$$\frac{|5+5\sqrt{5}|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}+5$$

한편,
$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(4-0)^2+(3+5)^2}=4\sqrt{5}$
이므로 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2}\times4\sqrt{5}\times(\sqrt{5}+5)=10+10\sqrt{5}$$

답 $10+10\sqrt{5}$

21

원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $(a,\ 4\sqrt{3})$에서의 접선의 방정식은
$ax+4\sqrt{3}y=r^2$
$\therefore ax+4\sqrt{3}y-r^2=0$
두 직선 $ax+4\sqrt{3}y-r^2=0$과 $x-\sqrt{3}y+b=0$이 일치하므로

$$\frac{1}{a}=\frac{-\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}=\frac{b}{-r^2}$$

$\frac{1}{a}=\frac{-\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}$에서 $a=-4$
$\frac{1}{a}=\frac{b}{-r^2}$에서 $\frac{1}{-4}=\frac{b}{-r^2}$, $4b=r^2$ $\quad\therefore b=\frac{r^2}{4}$ .... ㉠
한편, 점 $(-4,\ 4\sqrt{3})$은 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점이므로
$(-4)^2+(4\sqrt{3})^2=r^2$
$r^2=64$ $\quad\therefore r=8\ (\because r>0)$
$r=8$을 ㉠에 대입하면
$b=\frac{64}{4}=16$
$\therefore a+b+r=-4+16+8=20$

답 ④

22

점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 원 $x^2+y^2=2$ 위의 점이므로
$a^2+b^2=2$ .... ㉠
원 $x^2+y^2=2$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은
$ax+by=2$ $\quad\therefore ax+by-2=0$ .... ㉡
$x^2+y^2-10y+24=0$에서
$x^2+(y-5)^2=1$ .... ㉢
직선 ㉡이 원 ㉢과 서로 다른 두 점에서 만나려면 원 ㉢의 중심 $(0,\ 5)$와 직선 ㉡ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 1보다 작아야 하므로

$$\frac{|5b-2|}{\sqrt{a^2+b^2}}<1,\ |5b-2|<\sqrt{a^2+b^2}$$

$|5b-2|<\sqrt{2}\ (\because ㉠)$
$-\sqrt{2}<5b-2<\sqrt{2},\ 2-\sqrt{2}<5b<2+\sqrt{2}$
$\therefore \frac{2-\sqrt{2}}{5}<b<\frac{2+\sqrt{2}}{5}$

답 $\frac{2-\sqrt{2}}{5}<b<\frac{2+\sqrt{2}}{5}$

23

접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라고 하면 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=4$

이 직선이 점 $(0, 4)$를 지나므로

$4y_1=4 \quad \therefore y_1=1$

점 $(x_1, 1)$이 원 $x^2+y^2=4$ 위에 있으므로

$x_1^2+1^2=4,\ x_1^2=3 \quad \therefore x_1=\pm\sqrt{3}$

따라서 접선의 방정식은

$\sqrt{3}x+y=4$ 또는 $-\sqrt{3}x+y=4$

두 직선의 x절편은 각각 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$, $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$이고, y절편은 모두 4이므로 두 직선 l_1, l_2와 x축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\left\{\frac{4\sqrt{3}}{3}-\left(-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)\right\}\times4=\frac{16\sqrt{3}}{3}$$

답 $\frac{16\sqrt{3}}{3}$

24

직선 l이 원 O'의 넓이를 이등분하므로 직선 l은 원 O'의 중심 $(-2, 0)$을 지난다.

즉, $-2a+b=0$이므로 $b=2a$ ⋯⋯ ㉠

따라서 직선 l의 방정식은 $ax-y+2a=0$

원 O의 중심 $(0, 0)$과 직선 l 사이의 거리는

$$\frac{|2a|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=\frac{|2a|}{\sqrt{a^2+1}}$$

원 O의 반지름의 길이가 1이고 직선 l과 접하므로

$$\frac{|2a|}{\sqrt{a^2+1}}=1,\ |2a|=\sqrt{a^2+1}$$

양변을 제곱하면

$4a^2=a^2+1,\ 3a^2=1 \quad \therefore a=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

$a=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$을 ㉠에 대입하면 $b=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (복호동순)

$\therefore a^2+b^2=\frac{1}{3}+\frac{4}{3}=\frac{5}{3}$

답 ④

04 도형의 이동

기본을 다지는 유형

본문 049쪽

001

(1) $(0-1,\ 0+2) \quad \therefore (-1, 2)$

(2) $(3-1,\ 2+2) \quad \therefore (2, 4)$

(3) $(-2-1,\ 5+2) \quad \therefore (-3, 7)$

(4) $(1-1,\ -4+2) \quad \therefore (0, -2)$

답 (1) $(-1, 2)$ (2) $(2, 4)$ (3) $(-3, 7)$ (4) $(0, -2)$

참고

점의 평행이동

점 (x, y)를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점의 좌표

➡ x 대신 $x+m$, y 대신 $y+n$을 대입한다.

➡ $(x+m, y+n)$

002

점 $(2, -1)$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(2+a,\ -1+5)$, 즉 $(2+a,\ 4)$

따라서 $2+a=4$, $b=4$이므로 $a=2$, $b=4$

$\therefore a+b=2+4=6$

답 6

003

점 (a, b)가 평행이동 $(x, y) \longrightarrow (x-3, y+4)$에 의하여 옮겨지는 점의 좌표는

$(a-3,\ b+4)$

따라서 $a-3=0$, $b+4=-5$이므로

$a=3,\ b=-9$

$\therefore a-b=3-(-9)=12$

답 ③

004

점 $(3, -1)$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점이 $(-2, 1)$이라고 하면

$3+a=-2,\ -1+b=1 \quad \therefore a=-5,\ b=2$

따라서 점 $(6, 4)$를 x축의 방향으로 -5만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(6-5,\ 4+2)$, 즉 $(1, 6)$

답 ①

005

점 $\mathrm{P}(a, b)$가 직선 $y=3x$ 위에 있으므로

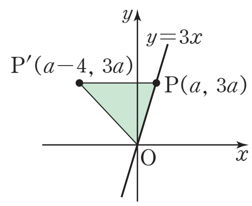
$b=3a$

따라서 점 P의 좌표는

$\mathrm{P}(a, 3a)$ ⋯⋯ ❶

점 $P(a,\ 3a)$를 x축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 점 P'의 좌표는

$P'(a-4,\ 3a)$ ······ ❷



삼각형 OPP'의 넓이는 6이므로

$\frac{1}{2}\times4\times3a=6$ 　점 $P(a, 3a)$가 제1 사분면 위의 점이므로 $a>0, 3a>0$

$\therefore a=1$ ······ ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ 점 P의 좌표를 a를 사용하여 나타낼 수 있다.	30 %
❷ 점 P′의 좌표를 a를 사용하여 나타낼 수 있다.	30 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	40 %

006

직선 $2x+y+9=0$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$2(x+1)+(y-5)+9=0$ 　　$\therefore 2x+y+6=0$

$\therefore a=6$

답 ②

007

점 $(2,\ 1)$이 평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x+m,\ y+n)$에 의하여 점 $(-2,\ 7)$로 옮겨지므로

$2+m=-2,\ 1+n=7$

$\therefore m=-4,\ n=6$ 　평행이동 $(x, y) \longrightarrow (x-4, y+6)$

직선 $x+ay+b=0$을 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 6만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$(x+4)+a(y-6)+b=0$ 　　$\therefore x+ay-6a+b+4=0$

따라서 $a=-5,\ -6a+b+4=10$이므로

$a=-5,\ b=-24$

$\therefore m+n+a+b=-4+6+(-5)+(-24)=-27$

답 -27

참고

도형의 평행이동 – 직선

직선 $ax+by+c=0$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 직선의 방정식

➡ x 대신 $x-m$, y 대신 $y-n$을 대입한다.

➡ $a(x-m)+b(y-n)+c=0$

008

원 $x^2+(y+4)^2=10$을 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x+4)^2+(y-2+4)^2=10,\ (x+4)^2+(y+2)^2=10$

$\therefore x^2+y^2+8x+4y+10=0$

따라서 $a=8,\ b=4,\ c=10$이므로

$a+b+c=8+4+10=22$

답 ⑤

| 다른 풀이 |

원 $x^2+(y+4)^2=10$을 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 원은 반지름의 길이는 그대로이고 원의 중심 $(0,\ -4)$만 평행이동한 원과 같다.

점 $(0,\ -4)$를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면

$(0-4,\ -4+2)$, 즉 $(-4,\ -2)$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x+4)^2+(y+2)^2=10$ 　　$\therefore x^2+y^2+8x+4y+10=0$

따라서 $a=8,\ b=4,\ c=10$이므로

$a+b+c=8+4+10=22$

참고

도형의 평행이동 – 원

(1) 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 원의 방정식

➡ x 대신 $x-m$, y 대신 $y-n$을 대입한다.

➡ $(x-m-a)^2+(y-n-b)^2=r^2$

(2) 원의 평행이동은 원의 중심의 평행이동으로 생각할 수 있다. 이때 원의 반지름의 길이는 변하지 않는다.

009

원 $x^2+(y-3)^2=16$을 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-3)^2=16$

이 원이 직선 $4x-3y+1=0$과 접하므로 원의 중심 $(a,\ 3)$과 직선 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 4와 같다.

즉, $\dfrac{|4a-3\times3+1|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=4$이므로 $\dfrac{|4a-8|}{5}=4$

$|4a-8|=20,\ 4a-8=\pm20$

$4a=28$ 또는 $4a=-12$

$\therefore a=7$ 또는 $a=-3$

이때 $a<0$이므로 $a=-3$

답 -3

010

포물선 $y=x^2+ax+b$가 평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x+1,\ y-9)$에 의하여 옮겨지는 포물선의 방정식은

$y+9=(x-1)^2+a(x-1)+b$

$\therefore y=x^2+(a-2)x-a+b-8$

따라서 $a-2=0,\ -a+b-8=0$이므로

$a=2,\ b=10$

$\therefore ab=2\times10=20$

답 20

011

포물선 $y=3x^2+6x+10$, 즉 $y=3(x+1)^2+7$의 꼭짓점의 좌표는 $(-1,\ 7)$이다. ······ ❶

점 $(-1,\ 7)$을 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 $p+2$만큼 평행이동하면

$(-1+p,\ 7+p+2)$, 즉 $(-1+p,\ 9+p)$ ······ ❷

이 점이 x축 위에 있으므로 y좌표가 0이다.

즉, $9+p=0$이므로

$p=-9$ ······ ❸

답 -9

채점 기준	비율
❶ 포물선 $y=3x^2+6x+10$의 꼭짓점의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❷ 포물선의 꼭짓점을 평행이동한 점의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❸ p의 값을 구할 수 있다.	30 %

참고
포물선의 평행이동은 포물선의 꼭짓점의 평행이동으로 생각할 수 있다.

012

(1) 점 $(5,\ -7)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(5,\ 7)$이다.
(2) 점 $(5,\ -7)$을 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-5,\ -7)$이다.
(3) 점 $(5,\ -7)$을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-5,\ 7)$이다.
(4) 점 $(5,\ -7)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-7,\ 5)$이다.
(5) 점 $(5,\ -7)$을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(7,\ -5)$이다.

답 (1) $(5,\ 7)$ (2) $(-5,\ -7)$ (3) $(-5,\ 7)$ (4) $(-7,\ 5)$ (5) $(7,\ -5)$

참고
점의 대칭이동
점 $(x,\ y)$를 대칭이동한 점의 좌표
(1) x축에 대한 대칭이동
➡ y좌표의 부호를 바꾼다.
➡ $(x,\ -y)$
(2) y축에 대한 대칭이동
➡ x좌표의 부호를 바꾼다.
➡ $(-x,\ y)$
(3) 원점에 대한 대칭이동
➡ x좌표, y좌표의 부호를 모두 바꾼다.
➡ $(-x,\ -y)$
(4) 직선 $y=x$에 대한 대칭이동
➡ x좌표와 y좌표를 서로 바꾼다.
➡ $(y,\ x)$
(5) 직선 $y=-x$에 대한 대칭이동
➡ x좌표와 y좌표를 서로 바꾸고 부호도 모두 바꾼다.
➡ $(-y,\ -x)$

013

점 $(-4,\ 5)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는
$(4,\ 5)$
점 $(4,\ 5)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는
$(-4,\ -5)$
따라서 $a=-4$, $b=-5$이므로
$b-a=-5-(-4)=-1$

답 ②

014

점 $(2,\ -3)$을 원점에 대하여 대칭이동한 점 P의 좌표는
$(-2,\ 3)$
점 $(2,\ -3)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표는
$(-3,\ 2)$
따라서 두 점 P, Q를 지나는 직선의 방정식은
$y-3=\dfrac{2-3}{-3-(-2)}(x+2)$ $\quad\therefore y=x+5$

답 $y=x+5$

015

점 $\mathrm{P}(-9,\ -6)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표는
$(-6,\ -9)$
점 $\mathrm{Q}(-6,\ -9)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점 R의 좌표는
$(-6,\ 9)$
따라서 삼각형 PQR의 무게중심의 좌표는
$\left(\dfrac{-9+(-6)+(-6)}{3},\ \dfrac{-6+(-9)+9}{3}\right)$, 즉 $(-7,\ -2)$

답 ①

016

점 $(a,\ b)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는
$(a,\ -b)$
이 점이 제1사분면 위의 점이므로 $a>0$, $-b>0$
$\therefore a>0,\ b<0$ ❶
점 $(a-b,\ ab)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는
$(-a+b,\ -ab)$
이 점을 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는
$(-a+b,\ ab)$ ❷
이때 $a>0$, $b<0$이므로 $-a+b<0$, $ab<0$
따라서 점 $(-a+b,\ ab)$는 제3사분면 위에 있다. ❸

답 제3사분면

채점 기준	비율
❶ a, b의 부호를 구할 수 있다.	40 %
❷ 점 $(a-b,\ ab)$를 원점에 대하여 대칭이동한 후 다시 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❸ ❷에서 구한 점이 있는 사분면을 구할 수 있다.	30 %

017

직선 $3x-2y+a=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
$3\times(-x)-2\times(-y)+a=0$ $\quad\therefore 3x-2y-a=0$
이 직선이 점 $(3,\ 2)$를 지나므로
$9-4-a=0$ $\quad\therefore a=5$

답 ⑤

018

직선 $y=ax-\dfrac{5}{2}$를 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
$y=a\times(-x)-\dfrac{5}{2}$ $\quad\therefore y=-ax-\dfrac{5}{2}$ ㉠

직선 $y=ax-\frac{5}{2}$를 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-y=a\times(-x)-\frac{5}{2}$ $\quad\therefore y=ax+\frac{5}{2}$ ······ ㉡

두 직선 ㉠과 ㉡이 서로 수직이므로

$-a\times a=-1,\ a^2=1$ $\quad\therefore a=1\ (\because a>0)$

답 ①

019

$x^2+y^2-6ax-4y+2=0$에서

$(x-3a)^2+(y-2)^2=9a^2+2$

이 원을 y축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-x-3a)^2+(y-2)^2=9a^2+2$

$\therefore (x+3a)^2+(y-2)^2=9a^2+2$

이 원의 중심 $(-3a,\ 2)$가 직선 $y=-\frac{1}{3}x+1$ 위에 있으므로

$2=a+1$ $\quad\therefore a=1$

답 ①

020

$x^2+y^2-2x+4y-8=0$에서

$(x-1)^2+(y+2)^2=13$

이 원을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(y-1)^2+(x+2)^2=13$

$\therefore (x+2)^2+(y-1)^2=13$

이 원이 y축과 만나는 점의 y좌표는 x좌표는 0이다.

$(0+2)^2+(y-1)^2=13$에서

$(y-1)^2=9$

$y-1=-3$ 또는 $y-1=3$

$\therefore y=-2$ 또는 $y=4$

따라서 대칭이동한 원이 y축과 만나는 두 점 사이의 거리는

$|4-(-2)|=6$

답 6

021

포물선 $y=x^2-4x+k+5$를 x축에 대하여 대칭이동한 포물선을 나타내는 함수는

$-y=x^2-4x+k+5$

$\therefore y=-x^2+4x-k-5$

$\quad=-(x-2)^2-k-1$

이 함수는 $x=2$일 때 최댓값 $-k-1$을 가지므로

$-k-1=4$ $\quad\therefore k=-5$

답 -5

022

포물선 $y=x^2+ax+b$를 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$-y=(-x)^2+a\times(-x)+b$

$\therefore y=-x^2+ax-b=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}-b$

이 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $\left(\frac{a}{2},\ \frac{a^2}{4}-b\right)$이므로

$\frac{a}{2}=-1,\ \frac{a^2}{4}-b=2$ $\quad\therefore a=-2,\ b=-1$

$\therefore a+b=-2+(-1)=-3$

답 ①

023

포물선 $y=x^2+3x+k$를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y+4=(x-1)^2+3(x-1)+k$

$\therefore y=x^2+x+k-6$

이 포물선을 x축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$-y=x^2+x+k-6$ $\quad\therefore y=-x^2-x-k+6$

이 포물선이 포물선 $y=-x^2-x+16$과 일치하므로

$-k+6=16$ $\quad\therefore k=-10$

답 -10

024

직선 $y=x-2$를 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-y=-x-2$ $\quad\therefore y=x+2$ ······ ❶

직선 $y=x+2$를 y축의 방향으로 m만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y-m=x+2$ $\quad\therefore y=x+m+2$ ······ ❷

이 직선이 원의 넓이를 이등분하려면 원의 중심 $(-3,\ 1)$을 지나야 하므로

$1=-3+m+2$ $\quad\therefore m=2$ ······ ❸

답 2

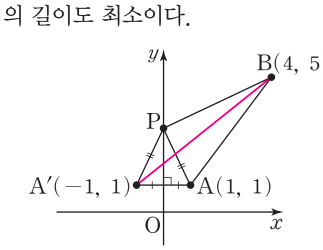
채점 기준	비율
❶ 직선 $y=x-2$를 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❷ 직선 $y=x+2$를 y축의 방향으로 m만큼 평행이동한 직선의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❸ m의 값을 구할 수 있다.	40 %

025

삼각형 ABP에서 변 AB의 길이는 일정하므로 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 값이 최소일 때, 삼각형 ABP의 둘레의 길이도 최소이다.

오른쪽 그림과 같이 점 A(1, 1)을 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라고 하면

A′(−1, 1)



이때 $\overline{AP}=\overline{A'P}$이므로

$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}\geq\overline{A'B}$

따라서 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은 선분 A′B의 길이와 같으므로

$\overline{A'B}=\sqrt{(4+1)^2+(5-1)^2}=\sqrt{41}$

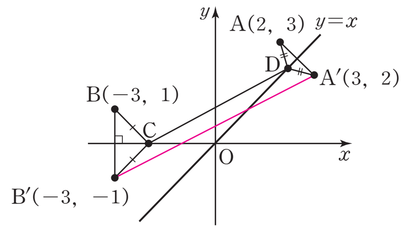
또, $\overline{AB}=\sqrt{(4-1)^2+(5-1)^2}=5$이므로 삼각형 ABP의 둘레의 길이의 최솟값은 $5+\sqrt{41}$이다.

답 $5+\sqrt{41}$

참고
점 B를 y축에 대하여 대칭이동하여 계산해도 결과는 같다.

026

점 A(2, 3)을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A′,
점 B(−3, 1)을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라고 하면
A′(3, 2), B′(−3, −1)



이때 $\overline{\text{AD}}=\overline{\text{A'D}}$, $\overline{\text{BC}}=\overline{\text{B'C}}$이므로

$\overline{\text{AD}}+\overline{\text{CD}}+\overline{\text{BC}}=\overline{\text{A'D}}+\overline{\text{CD}}+\overline{\text{B'C}}$
$\geq\overline{\text{A'B'}}$

따라서 $\overline{\text{AD}}+\overline{\text{CD}}+\overline{\text{BC}}$의 최솟값은 선분 A′B′의 길이와 같으므로

$\overline{\text{A'B'}}=\sqrt{(-3-3)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

답 ④

실력을 높이는 연습 문제

본문 055쪽

01

점 $(-4, 6)$이 평행이동 $(x, y) \longrightarrow (x-2, y+1)$에 의하여 옮겨지는 점의 좌표는

$(-4-2, 6+1)$, 즉 $(-6, 7)$

이 점이 직선 $y=mx-11$ 위의 점이므로

$7=-6m-11$, $6m=-18$ $\quad\therefore m=-3$

답 ②

02

직선 $y=4x+1$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y-k=4(x-1)+1$ $\quad\therefore y=4x-3+k$

$y=0$을 대입하면

$0=4x-3+k$ $\quad\therefore x=\dfrac{3-k}{4}$

$x=0$을 대입하면 $y=-3+k$

즉, 평행이동한 직선의 x절편은 $\dfrac{3-k}{4}$, y절편은 $-3+k$이고, 이 직선과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 8이므로

$\dfrac{1}{2}\times\left|\dfrac{3-k}{4}\right|\times|-3+k|=8$, $(k-3)^2=64$

$k-3=\pm8$ $\quad\therefore k=11$ 또는 $k=-5$

이때 k는 양수이므로 $k=11$

답 11

03

원 $(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -8만큼 평행이동한 원 C의 방정식은

$(x-3-a)^2+(y+8-b)^2=b^2$

원 C가 x축과 y축에 동시에 접하므로

$|a+3|=|b|$, $|b-8|=|b|$

a, b가 양수이므로 $a+3=b$, $|b-8|=b$

$|b-8|=b$에서 $b-8=\pm b$

(i) $b-8=b$일 때

이를 만족시키는 양수 b의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $b-8=-b$일 때

$2b=8$에서 $b=4$

(i), (ii)에서 $b=4$

$b=4$를 $a+3=b$에 대입하면 $a=1$

$\therefore a+b=1+4=5$

답 ①

04

원점을 점 (3, 5)로 옮기는 평행이동은

$(x, y) \longrightarrow (x+3, y+5)$

이 평행이동에 의하여 포물선 $y=x^2+4x-8$을 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-5=(x-3)^2+4(x-3)-8$

$\therefore y=x^2-2x-6=(x-1)^2-7$

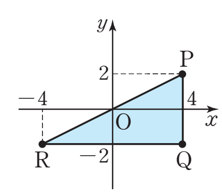
이때 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(1, -7)$이므로

$m=1$, $n=-7$

$\therefore m+n=1+(-7)=-6$

답 −6

05



점 P(4, 2)를 x축에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표는

$(4, -2)$

점 P(4, 2)를 원점에 대하여 대칭이동한 점 R의 좌표는

$(-4, -2)$

따라서 삼각형 PQR의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\{4-(-4)\}\times\{2-(-2)\}=\dfrac{1}{2}\times8\times4=16$

답 ③

06

$\text{P}(3, 4) \xrightarrow{(가)} (-3, 4) \xrightarrow{(나)} (-3, -4) \xrightarrow{(다)} (3, 4)$

즉, 점 P를 (가) ⟶ (나) ⟶ (다)의 순서로 대칭이동하면 자기 자신으로 돌아온다.

$100=3\times33+1$에서 점 P를 99번 대칭이동한 후의 점의 좌표가 $(3, 4)$이므로 100번 대칭이동한 후의 점의 좌표는 $(-3, 4)$이다.

따라서 $a=-3$, $b=4$이므로

$a-b=-3-4=-7$

답 −7

07

직선 $5x+3y+1=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$5\times(-x)+3\times(-y)+1=0$

$\therefore\ 5x+3y-1=0$

이 직선을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$5y+3x-1=0\qquad\therefore\ 3x+5y-1=0$

답 ④

08

$x^2+y^2+6x-8y+24=0$에서

$(x+3)^2+(y-4)^2=1$

이 원을 y축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-x+3)^2+(y-4)^2=1$

$\therefore\ (x-3)^2+(y-4)^2=1$

이 원이 직선 $y=mx$에 접하므로 원의 중심 $(3,\ 4)$와 직선 $y=mx$, 즉 $mx-y=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 1과 같다.

즉, $\dfrac{|3m-4|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$이므로

$\dfrac{|3m-4|}{\sqrt{m^2+1}}=1,\ |3m-4|=\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면

$9m^2-24m+16=m^2+1$

$\therefore\ \underline{8m^2-24m+15=0}$

판별식을 D라고 하면 $\dfrac{D}{4}=12^2-8\times15=24>0$ 이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 상수 m의 값의 합은

$-\dfrac{-24}{8}=3$

답 ⑤

09

포물선 $y=x^2-2ax+4$를 y축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$y=(-x)^2-2a\times(-x)+4$

$\quad=x^2+2ax+4$

$\quad=(x+a)^2-a^2+4$

이 포물선의 꼭짓점 $(-a,\ -a^2+4)$가 직선 $y=x-8$ 위에 있으므로

$-a^2+4=-a-8,\ a^2-a-12=0$

$(a+3)(a-4)=0$

$\therefore\ a=-3$ 또는 $a=4$

이때 $a>0$이므로 $a=4$

답 ①

10

점 $\mathrm{A}(-3,\ 4)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 B의 좌표는

$(4,\ -3)$

점 $\mathrm{B}(4,\ -3)$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 점 C의 좌표는

$(4+2,\ -3+k)$, 즉 $(6,\ -3+k)$

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로

(직선 AB의 기울기)$=$(직선 BC의 기울기)

$\dfrac{-3-4}{4+3}=\dfrac{-3+k+3}{6-4}$

$-1=\dfrac{k}{2}\qquad\therefore\ k=-2$

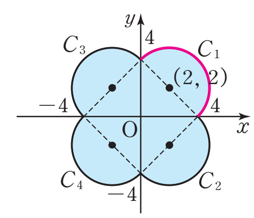
답 ④

11

문제 접근하기

도형 C_1을 그리고 x축, y축, 원점에 대하여 각각 대칭이동한 도형 C_2, C_3, C_4를 그린다.

원 $(x-2)^2+(y-2)^2=8$에서 도형 C_1은 오른쪽 그림의 빨간색 곡선과 같고, 이것을 각각 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동한 C_2, C_3, C_4는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 네 도형 C_1, C_2, C_3, C_4로 둘러싸인 부분의 넓이는

(합동인 직각이등변삼각형 4개의 넓이)$+$(합동인 반원 4개의 넓이)

$=4\times\left(\dfrac{1}{2}\times4\times4\right)+4\times\left\{\dfrac{1}{2}\times\pi\times(2\sqrt{2})^2\right\}$

$=32+16\pi$

답 $32+16\pi$

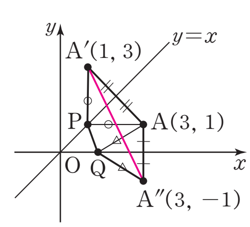
12

문제 접근하기

삼각형 APQ의 둘레의 길이의 최솟값은 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QA}}$의 최솟값이므로 점 A를 직선 $y=x$, x축에 대하여 각각 대칭이동한 점을 이용한다.

다음 그림과 같이 점 $\mathrm{A}(3,\ 1)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A', x축에 대하여 대칭이동한 점을 A''이라고 하면

$\mathrm{A}'(1,\ 3)$, $\mathrm{A}''(3,\ -1)$



이때 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{A'P}}$, $\overline{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{A''Q}}$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QA}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QA''}}\geq\overline{\mathrm{A'A''}}$

따라서 삼각형 APQ의 둘레의 길이의 최솟값은 선분 $\mathrm{A'A''}$의 길이와 같으므로

$\overline{\mathrm{A'A''}}=\sqrt{(3-1)^2+(-1-3)^2}=2\sqrt{5}$

답 ④

05 집합

기본을 다지는 유형

본문 060쪽

001

(1) '잘하는'의 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 알 수 없으므로 집합이 아니다.

(2) 집합이고, 원소는 6, 12, 18, 24, 30이다.

(3) 집합이고, 원소는 -8, 8이다.

(4) '가까운'의 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 알 수 없으므로 집합이 아니다.

답 **집합인 것:** (2), (3)
원소: (2) 6, 12, 18, 24, 30 (3) -8, 8

002

④ '높은'의 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 알 수 없으므로 집합이 아니다.

따라서 집합이 아닌 것은 ④이다.

답 ④

003

$x^2-x-2\le 0$에서

$(x+1)(x-2)\le 0$ $\quad\therefore -1\le x\le 2$

즉, 집합 A의 원소는 -1, 0, 1, 2이므로

ㄱ. $-2\notin A$ (거짓) ㄴ. $-1\in A$ (거짓)

ㄷ. $1\in A$ (참) ㄹ. $2\in A$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ, ㄹ이다.

답 ⑤

004

① $\frac{1}{3}$은 정수가 아니므로 $\frac{1}{3}\notin Z$

② $\sqrt{25}=5$에서 $\sqrt{25}$는 유리수이므로 $\sqrt{25}\in Q$

③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$은 실수이므로 $\frac{\sqrt{3}}{3}\in R$

④ $\sqrt{5}-1$은 무리수이므로 $\sqrt{5}-1\notin Q$

⑤ $i^2=-1$에서 i^2은 실수이므로 $i^2\in R$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

005

① $2000=4\times 500$이므로 $2000\notin A$

② $2027=4\times 506+3$이므로 $2027\in A$

③ $2043=4\times 510+3$이므로 $2043\in A$

④ $2069=4\times 517+1$이므로 $2069\notin A$

⑤ $2091=4\times 522+3$이므로 $2091\in A$

따라서 옳은 것은 ②이다.

답 ②

006

⑤ $\{21, 22, 23, \cdots\}$ ➡ $\{x\,|\,x$는 20보다 큰 정수$\}$

$\{x\,|\,x$는 20 이상의 정수$\}$ ➡ $\{20, 21, 22, \cdots\}$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

007

ㄱ. 8의 양의 약수는 1, 2, 4, 8이고 이 중에서 1보다 큰 수는 2, 4, 8이므로 $A=\{2, 4, 8\}$

ㄴ. 10보다 작은 짝수는 2, 4, 6, 8이므로

$A=\{2, 4, 6, 8\}$

ㄷ. $(x-2)(x-4)(x-8)=0$에서

$x=2$ 또는 $x=4$ 또는 $x=8$ $\quad\therefore A=\{2, 4, 8\}$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

008

오른쪽 표를 이용하여 $a+b$의 값을 모두 구하면

0, 1, 2, 3, 4

$\therefore X=\{0, 1, 2, 3, 4\}$

a \ b	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	3
2	2	3	4

답 ③

009

$a\in A$이므로 $2^a=2$, 4

$b\in A$이므로 $3^b=3$, 9 ❶

오른쪽 표를 이용하여 $2^a\times 3^b$의 값을 모두 구하면 6, 12, 18, 36

$\therefore X=\{6, 12, 18, 36\}$ ❷

2^a \ 3^b	3	9
2	6	18
4	12	36

따라서 집합 X의 모든 원소의 합은

$6+12+18+36=72$ ❸

답 72

채점 기준	비율
❶ 2^a, 3^b의 값을 모두 구할 수 있다.	40 %
❷ 집합 X를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ 집합 X의 모든 원소의 합을 구할 수 있다.	20 %

010

$i^1=i$, $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$, $i^5=i$, $\cdots$이므로 i^n (n은 자연수)은 i, -1, $-i$, 1이 이 순서대로 반복되어 나타난다.

$\therefore A=\{i, -1, -i, 1\}$

$i^2=-1$, $(-1)^2=1$, $(-i)^2=-1$, $1^2=1$이므로

$z_1^2=-1$, 1이고 $z_2^2=-1$, 1이다.

오른쪽 표를 이용하여 $z_1^2-z_2^2$의 값을 모두 구하면 -2, 0, 2

$\therefore B=\{-2, 0, 2\}$

z_1^2 \ z_2^2	-1	1
-1	0	-2
1	2	0

따라서 집합 B의 원소인 것은 ③이다.

답 ③

011

① 5보다 작은 7의 양의 배수는 없으므로 공집합이다.
② -1과 0 사이에는 무수히 많은 유리수가 있으므로 무한집합이다.
③ 1보다 작은 자연수는 없으므로 공집합이다.
④ 이차방정식 $x^2-2x+5=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\times5=-4<0$

즉, 이차방정식 $x^2-2x+5=0$은 실근을 갖지 않으므로 주어진 집합은 공집합이다.
⑤ 2보다 크고 4보다 작은 짝수는 없으므로 공집합이다.
따라서 공집합이 아닌 것은 ②이다.

답 ②

풍쌤 개념 CHECK

이차방정식의 근의 판별_高 공통수학 1
계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 판별식을 $D=b^2-4ac$라고 할 때,
(1) $D>0$이면 서로 다른 두 실근을 갖는다.
(2) $D=0$이면 중근(서로 같은 두 실근)을 갖는다.
실근을 갖는다.
(3) $D<0$이면 서로 다른 두 허근을 갖는다.

012

ㄱ. $n(\{0\})=1$ (거짓)
ㄴ. $n(\{3,\ 4\})=2$, $n(\{4\})=1$이므로
$n(\{3,\ 4\})-n(\{4\})=2-1=1$ (거짓)
ㄷ. $20=2^2\times5$이므로 $A=\{2,\ 5\}$ $\quad\therefore n(A)=2$ (참)
따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

답 ③

013

$x^2=9$에서 $x^2-9=0$, $(x+3)(x-3)=0$
즉, $x=-3$ 또는 $x=3$이므로 $A=\{-3,\ 3\}$
$|x|\le3$에서 $-3\le x\le3$이므로 $B=\{-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$
$x^3-9x=0$에서 $x(x+3)(x-3)=0$
즉, $x=-3$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$이므로 $C=\{-3,\ 0,\ 3\}$
$\therefore A\subset C\subset B$

답 ②

014

$(x-5)(x-a)=0$에서 $x=5$ 또는 $x=a$
(i) $a=5$일 때
$A=\{5\}$이므로 $A\subset B$를 만족시킨다.
(ii) $a\neq5$일 때
$A=\{5,\ a\}$이므로 $A\subset B$를 만족시키는 양수 a의 값은 존재하지 않는다.
(i), (ii)에서 $a=5$

답 5

015

$B=\{5,\ 10,\ 15,\ \cdots\}$이고 주어진 벤 다이어그램에서 $A\subset B$이므로 k는 5의 양의 배수이어야 한다. ❶
이때 k는 $5<k<50$인 자연수이므로 자연수 k의 값이 될 수 있는 수는 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45이다. ❷
따라서 주어진 조건을 만족시키는 자연수 k의 개수는 8이다. ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ k의 조건을 구할 수 있다.	40 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ k의 개수를 구할 수 있다.	20 %

016

$C\subset B$에서 $6\in B$이어야 하므로 $a=6$
또, $B\subset A$에서 $3\in A$이어야 하므로 $b=3$
$\therefore a-b=6-3=3$

답 ⑤

참고
$A=\{1,\ 3,\ 5,\ 6\}$, $B=\{1,\ 3,\ 6\}$, $C=\{1,\ 6\}$

017

$A\subset B$에서 $-1\in B$이어야 하므로
$a^2-1=-1$ 또는 $2a-3=-1$
(i) $a^2-1=-1$일 때
$a^2=0 \qquad \therefore a=0$
이때 $A=\{-1,\ 3\}$, $B=\{-3,\ -1,\ 4\}$이므로 $A\not\subset B$
(ii) $2a-3=-1$일 때
$2a=2 \qquad \therefore a=1$
이때 $A=\{-1,\ 4\}$, $B=\{-1,\ 0,\ 4\}$이므로 $A\subset B$
(i), (ii)에서 $a=1$

답 ④

018

① $\varnothing$은 집합 A의 원소이므로 $\{\varnothing\}\subset A$
② 1, $\{1\}$은 집합 A의 원소이므로 $\{1\}\subset A$, $\{1\}\in A$
③ 3은 집합 A의 원소이므로 $\{3\}\subset A$
④ 1, 3은 집합 A의 원소이므로 $\{1,\ 3\}\subset A$
⑤ 1, $\{1\}$은 집합 A의 원소이므로 $\{1,\ \{1\}\}\subset A$
따라서 옳은 것은 ②이다.

답 ②

019

ㄱ. 1은 집합 A의 원소이므로 $1\in A$ (참)
ㄴ. 2는 집합 A의 원소가 아니고 $\{2\}$는 집합 A의 원소이므로
$\{2\}\not\subset A$, $\{2\}\in A$ (거짓)
ㄷ. $\{1,\ 2\}$는 집합 A의 원소이므로
$\{1,\ 2\}\in A$ (참)
ㄹ. $\{1\}$은 집합 A의 원소이지만 2는 집합 A의 원소가 아니므로
$\{2,\ \{1\}\}\not\subset A$ (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ②

020

$A=B$이므로 $4\in A$, $2\in B$

즉, $a=4$, $b=2$이므로

$a\times b=4\times 2=8$

답 ②

021

보기의 각 집합을 원소나열법으로 나타내면 다음과 같다.

ㄱ. $\{1, 3\}$ ㄴ. $\{1, 3\}$

ㄷ. $\{1, 3\}$ ㄹ. $\{1, 3, 5\}$

따라서 집합 A와 서로 같은 집합인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

022

$A\subset B$이고 $B\subset A$이므로 $A=B$

따라서 두 집합 A, B의 원소가 같아야 하고,

$x-1<x+1<x+3$이므로

$x-1=1$, $x+1=3$, $x+3=5$

$\therefore x=2$

답 ③

023

$A=\{1, 3, 5, 15\}$이고 $A=B$이므로

$2a-1=3$, $2b+1=5$ 또는 $2a-1=5$, $2b+1=3$

$\therefore a=2$, $b=2$ 또는 $a=3$, $b=1$

이때 $a>b$이므로 $a=3$, $b=1$

$\therefore a-b=3-1=2$

답 ②

024

$A=B$이므로 $6\in A$

즉, $a^2-a=6$이므로

$a^2-a-6=0$, $(a+2)(a-3)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=3$ ······ ❶

(i) $a=-2$일 때

$A=\{-3, 2, 6\}$, $B=\{-3, 2, 6\}$이므로 $A=B$

(ii) $a=3$일 때

$A=\{-3, 2, 6\}$, $B=\{-3, 6, 7\}$이므로 $A\neq B$ ······ ❷

(i), (ii)에서 $a=-2$ ······ ❸

답 -2

채점 기준	비율
❶ $6\in A$임을 이용하여 a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $a=-2$, $a=3$일 때 각각 $A=B$를 만족시키는지 확인할 수 있다.	40 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20 %

|다른 풀이|

$A=B$이므로 $-3\in B$, $2\in B$

$\therefore 2a+1=-3$, $-a=2$ 또는 $2a+1=2$, $-a=-3$

(i) $2a+1=-3$, $-a=2$일 때

$a=-2$이므로

$A=\{-3, 2, 6\}$, $B=\{-3, 2, 6\}$

$\therefore A=B$

(ii) $2a+1=2$, $-a=-3$일 때

두 식을 모두 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=-2$

025

집합 A의 원소의 개수를 n이라고 하면

$2^n=64=2^6$ $\therefore n=6$

따라서 집합 A의 원소의 개수는 6이다.

답 6

026

$P^2=PP=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-E$

$P^3=P^2P=-EP=-P$

$P^4=P^3P=-PP=-P^2=-(-E)=E$

$P^5=P^4P=EP=P$

$\vdots$

즉, 자연수 n에 대하여 P^n은 P, $-E$, $-P$, E가 이 순서대로 반복되어 나타나므로

$A=\left\{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

따라서 집합 A의 원소의 개수가 4이므로 진부분집합의 개수는

$2^4-1=16-1=15$

답 15

027

$A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

집합 A의 부분집합 중에서 소수 2, 3, 5, 7을 원소로 갖지 않는 집합의 개수는

$2^{10-4}=2^6=64$

답 ⑤

028

$A=\{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24\}$

집합 A의 부분집합 중에서 3, 12는 반드시 원소로 갖고, 15, 18은 원소로 갖지 않는 집합의 개수는

$2^{8-2-2}=2^4=16$

답 16

029

$-4\le 3x-1<14$에서 $-3\le 3x<15$ $\therefore -1\le x<5$

$\therefore A=\{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

집합 A의 부분집합 중에서 1, 4를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수는

$2^{6-2}=2^4=16$ $\therefore a=16$

집합 A의 부분집합 중에서 2를 원소로 갖지 않는 집합의 개수는

$2^{6-1}=2^5=32$ $\therefore b=32$

$\therefore a+b=16+32=48$

답 48

030

$A=\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ ❶

$2\notin X$, $5\in X$, $11\in X$이므로 집합 X는 5, 11은 반드시 원소로 갖고 2는 원소로 갖지 않는다. ❷

따라서 집합 A의 부분집합 중에서 5, 11은 반드시 원소로 갖고, 2는 원소로 갖지 않는 집합 X의 개수는

$2^{6-2-1}=2^3=8$ ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ 집합 A를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ $2\notin X$, $5\in X$, $11\in X$의 의미를 알 수 있다.	30 %
❸ 집합 X의 개수를 구할 수 있다.	50 %

031

집합 A의 부분집합의 개수는 $2^5=32$

홀수 1, 3, 5를 원소로 갖지 않는 집합 A의 부분집합의 개수는

$2^{5-3}=2^2=4$

따라서 집합 A의 부분집합 중에서 홀수인 원소가 한 개 이상 속해 있는 집합의 개수는 $32-4=28$

답 ④

| 다른 풀이 |

(i) 홀수인 원소가 1개 속해 있는 집합

$\{1\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 4\}$, $\{1, 2, 4\}$,

$\{3\}$, $\{2, 3\}$, $\{3, 4\}$, $\{2, 3, 4\}$,

$\{5\}$, $\{2, 5\}$, $\{4, 5\}$, $\{2, 4, 5\}$

$\therefore$ 12개

(ii) 홀수인 원소가 2개 속해 있는 집합

$\{1, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$,

$\{3, 5\}$, $\{2, 3, 5\}$, $\{3, 4, 5\}$, $\{2, 3, 4, 5\}$,

$\{1, 5\}$, $\{1, 2, 5\}$, $\{1, 4, 5\}$, $\{1, 2, 4, 5\}$

$\therefore$ 12개

(iii) 홀수인 원소가 3개 속해 있는 집합

$\{1, 3, 5\}$, $\{1, 2, 3, 5\}$, $\{1, 3, 4, 5\}$, $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

$\therefore$ 4개

(i)~(iii)에서 홀수가 한 개 이상 속해 있는 집합의 개수는

$12+12+4=28$

032

$A=\{1, 5\}$, $B=\{1, 2, 3, 5, 7, 8\}$이므로 $A\subset X\subset B$를 만족시키는 집합 X는 1, 5를 반드시 원소로 갖는 집합 B의 부분집합이다.

따라서 집합 X의 개수는 $2^{6-2}=2^4=16$

답 ④

033

$x^2-6x+8=0$에서 $(x-2)(x-4)=0$ $\quad\therefore x=2$ 또는 $x=4$

$\therefore A=\{2, 4\}$

한편, $B=\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$이므로 $A\subset X\subset B$, $X\neq A$, $X\neq B$를 만족시키는 집합 X의 개수는 2, 4를 반드시 원소로 갖는 집합 B의 부분집합 중에서 집합 A, B를 제외한 개수와 같다.

따라서 집합 X의 개수는

$2^{9-2}-2=2^7-2=128-2=126$

답 ④

034

$A=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $B=\{2, 4, 6, 8, 10\}$,

$C=\{3, 6, 9, 12\}$

(1) $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 12\}$

(2) $B\cap C=\{6\}$

(3) $(A\cup B)\cap C=\{3, 6, 12\}$

(4) $A\cup(B\cap C)=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

답 (1) $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 12\}$ (2) $\{6\}$

(3) $\{3, 6, 12\}$ (4) $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

035

$C=\{1, 2, 4\}$

③ $A\cap B=\{1, 3, 5\}$이므로 $(A\cap B)\cap C=\{1\}$

④ $B\cup C=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$이므로 → $C\subset B$이므로 $B\cup C=B$

$A\cap(B\cup C)=\{1, 3, 5\}$

⑤ $B\cap C=\{1, 2, 4\}$이므로 → $C\subset B$이므로 $B\cap C=C$

$A\cup(B\cap C)=\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

답 ③

036

$A=\{1, 2, 4, 8\}$, $B=\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$이고 주어진 벤 다이어그램에서 색칠한 부분이 나타내는 집합은 $A\cap B$이다.

따라서 구하는 집합은 $\{1, 2, 4\}$

답 ③

037

$A\cap B=\{15, 30, 45, \cdots\}$

$\quad=\{x\,|\,x$는 15의 양의 배수$\}$

$\therefore a=15$

답 ②

참고

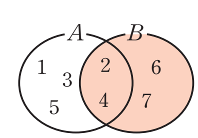
집합 A는 3의 양의 배수의 집합이고 집합 B는 5의 양의 배수의 집합이므로 $A\cap B$는 3과 5의 공배수, 즉 15의 양의 배수의 집합이다.

→ 3과 5의 최소공배수

038

주어진 집합을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

$B=\{2, 4, 6, 7\}$

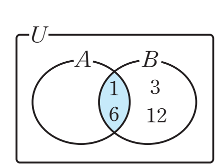


답 $\{2, 4, 6, 7\}$

039

주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

$A\cap B=\{1, 6\}$



답 $\{1, 6\}$

|다른 풀이|

$A\cap B=B-(B-A)$

$=\{1,\ 3,\ 6,\ 12\}-\{3,\ 12\}$

$=\{1,\ 6\}$

040

$U=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18,\ 20\}$이므로

$B^C=\{2,\ 6,\ 10,\ 14,\ 18\}$

$\therefore\ A\cup B^C=\{2,\ 4,\ 6,\ 10,\ 12,\ 14,\ 18\}$

따라서 집합 $A\cup B^C$의 원소의 개수는 7이다.

답 ⑤

041

$B-C=\{c,\ d\}$이므로 $A-(B-C)=\{a,\ b\}$

$\therefore\ n(A-(B-C))=2$

답 2

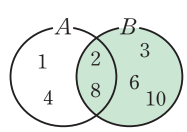
042

$(A-B)\cap(B-A)=\varnothing$이고

$A=\{1, 2, 4, 8\}$이고 2, 8이 집합 $(A-B)\cup(B-A)$의 원소가 아니므로 2, 8은 $A\cap B$의 원소이다.

$(A-B)\cup(B-A)=\{1,\ 3,\ 4,\ 6,\ 10\}$에서 1, 4가 집합 A의 원소이므로 3, 6, 10은 집합 $B-A$의 원소이다.

따라서 주어진 집합을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다. ❶



즉, $B=\{2,\ 3,\ 6,\ 8,\ 10\}$이므로 집합 B의 모든 원소의 합은

$2+3+6+8+10=29$ ❷

답 29

채점 기준	비율
❶ 주어진 집합을 벤 다이어그램으로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ 집합 B의 모든 원소의 합을 구할 수 있다.	50 %

043

$B=(B-A)\cup(A\cap B)$, $(B-A)\cap(A\cap B)=\varnothing$이고

$B-A=\{5,\ 6\}$이므로

$A\cap B=\{1\}$

집합 B의 모든 원소의 합이 12이고 $5+6=11$이므로 $A\cap B=\{1\}$이어야 한다.

$\therefore\ A-B=A-(A\cap B)=\{2,\ 3,\ 4\}$

따라서 집합 $A-B$의 모든 원소의 합은

$2+3+4=9$

답 ⑤

044

① $A\cap B=\{4\}$이므로 두 집합 A, B는 서로소가 아니다.

② $A\cap B=\{x|1<x<2\}$이므로 두 집합 A, B는 서로소가 아니다.

③ $x^2=1$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

$x^2-3x+2=0$에서 $(x-1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=2$

즉, $A=\{-1,\ 1\}$, $B=\{1,\ 2\}$이므로 $A\cap B=\{1\}$

따라서 두 집합 A, B는 서로소가 아니다.

④ $A=\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots\}$, $B=\{1,\ 2,\ 4\}$이므로

$A\cap B=\{2\}$

즉, 두 집합 A, B는 서로소가 아니다.

⑤ $A=\{1,\ 7\}$, $B=\{2,\ 4,\ 6,\ \cdots\}$이므로 $A\cap B=\varnothing$

즉, 두 집합 A, B는 서로소이다.

따라서 두 집합 A, B가 서로소인 것은 ⑤이다.

답 ⑤

045

구하는 집합의 개수는 집합 A의 부분집합 중에서 10, 15를 원소로 갖지 않는 집합의 개수와 같으므로 구하는 집합의 개수는

$2^{5-2}=2^3=8$

답 8

046

$A=\{1,\ 2\}$, $A\cup B=\{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16\}$

두 집합 A, B가 서로소이므로 $A\cap B=\varnothing$

따라서 $B=\{4,\ 8,\ 16\}$이므로 집합 B의 모든 원소의 합은

$4+8+16=28$

답 ⑤

047

$A=\{1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 14,\ 28\}$이므로 집합 B의 원소의 개수를 n이라고 하면

$2^{6-n}=16=2^4$

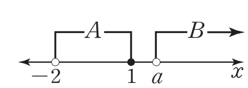
즉, $6-n=4$이므로 $n=2$

따라서 집합 B의 원소의 개수는 2이다.

답 ②

048

두 집합 A, B가 서로소이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$a\geq 1$ ❶

따라서 a의 최솟값은 1이다. ❷

답 1

채점 기준	비율
❶ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	70 %
❷ a의 최솟값을 구할 수 있다.	30 %

049

$A\cap B=\{2,\ 4\}$이므로 $4\in A$, $2\in B$

따라서 $a=4$, $b+2=2$이므로 $a=4$, $b=0$

$\therefore\ a+b=4+0=4$

답 4

050

$A-B=\{6\}$이므로 집합 A의 원소 중 6을 제외한 나머지 원소인 3, 5, $a-b$는 모두 집합 B의 원소이어야 한다.

즉, $5\in B$, $a-b\in B$이므로 $a-b=8$, $2a-1=5$

$\therefore\ a=3$, $b=-5$

$\therefore\ ab=3\times(-5)=-15$

답 ②

051

$A \cup B = \{6,\ 8,\ 10\}$이므로 $10 \in B$

$\therefore\ a=10$ 또는 $a+2=10$

(i) $a=10$일 때

$A=\{6,\ 8\}$, $B=\{10,\ 12\}$이므로 $A \cup B=\{6,\ 8,\ 10,\ 12\}$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a+2=10$, 즉 $a=8$일 때

$A=\{6,\ 8\}$, $B=\{8,\ 10\}$이므로 $A \cup B=\{6,\ 8,\ 10\}$

따라서 주어진 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $a=8$

답 8

052

$A \cap B=\{4\}$이므로 $4 \in A$, $4 \in B$

$4 \in A$에서 $4^2-3\times4+a=0$ $\therefore\ a=-4$

$4 \in B$에서 $4^2+4b+12=0$, $4b=-28$ $\therefore\ b=-7$

$x^2-3x-4=0$에서 $(x+1)(x-4)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=4$ $\therefore\ A=\{-1,\ 4\}$

$x^2-7x+12=0$에서 $(x-3)(x-4)=0$

$\therefore\ x=3$ 또는 $x=4$ $\therefore\ B=\{3,\ 4\}$

ㄱ. $A-B=\{-1\}$ (거짓)

ㄴ. $B-A=\{3\}$ (거짓)

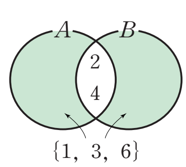
ㄷ. $A \cup B=\{-1,\ 3,\ 4\}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

답 ③

053

$(A-B)\cup(B-A)=\{1,\ 3,\ 6\}$에서 1, 3, 6을 제외한 A, B의 나머지 원소는 $A \cap B$에 속하므로



$2 \in (A \cap B)$, $4 \in (A \cap B)$

즉, $2 \in A$이므로

$a^2-2=2$, $a^2=4$ $\therefore\ a=-2$ 또는 $a=2$

(i) $a=-2$일 때

$A=\{1,\ 2,\ 4\}$, $B=\{-6,\ -5,\ 0,\ 2\}$이므로

$A-B=\{1,\ 4\}$, $B-A=\{-6,\ -5,\ 0\}$

$\therefore\ (A-B)\cup(B-A)=\{-6,\ -5,\ 0,\ 1,\ 4\}$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=2$일 때

$A=\{1,\ 2,\ 4\}$, $B=\{2,\ 3,\ 4,\ 6\}$이므로

$A-B=\{1\}$, $B-A=\{3,\ 6\}$

$\therefore\ (A-B)\cup(B-A)=\{1,\ 3,\ 6\}$

따라서 주어진 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $a=2$

답 ⑤

054

$B-A^C=B\cap(A^C)^C=B\cap A=A\cap B$

따라서 $B-A^C$과 항상 같은 집합은 ③이다.

답 ③

055

$(A\cap U)-B^C=A-B^C=A\cap(B^C)^C$

$=A\cap B$ ❶

$=\{1,\ 5\}$ ❷

따라서 집합 $(A\cap U)-B^C$의 모든 원소의 합은

$1+5=6$ ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ 집합 $(A\cap U)-B^C$을 간단히 할 수 있다.	50 %
❷ 집합 $(A\cap U)-B^C$을 구할 수 있다.	30 %
❸ 집합 $(A\cap U)-B^C$의 모든 원소의 합을 구할 수 있다.	20 %

| 다른 풀이 |

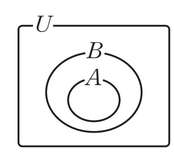
$U=\{1,\ 2,\ 5,\ 10,\ 25,\ 50\}$이므로 $B^C=\{25,\ 50\}$

$\therefore\ (A\cap U)-B^C=A-B^C=\{1,\ 5\}$

따라서 집합 $(A\cap U)-B^C$의 모든 원소의 합은 $1+5=6$

056

$A\subset B$이므로 두 집합 A, B를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



① $A\cap B=A$

② $(A\cup B)\cap A=B\cap A=A$

③ $(A\cap B)\cup A=A\cup A=A$

④ $(A-B)\cup A=\varnothing\cup A=A$

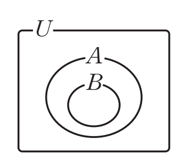
⑤ $(A\cap B)\cup(A\cup B)=A\cup B=B$

따라서 나머지 넷과 다른 하나는 ⑤이다.

답 ⑤

057

$B\subset A$이므로 두 집합 A, B를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



① $B-A=\varnothing$

② $A\cap B=B$이고 모든 집합은 자기 자신의 부분집합이므로

$B\subset(A\cap B)$

③ $A\cup B^C=U$

④ $A^C\subset B^C$이므로 $A^C\cap B^C=A^C$

⑤ $A^C\cup B\neq U$

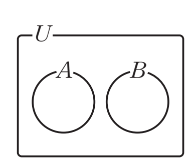
따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

058

① $A-B=A$이므로 $A\cap B=\varnothing$

따라서 두 집합 A, B를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



② $A\not\subset B$, $B\not\subset A$

③ $B-A=B$

④, ⑤ $A\subset B^C$, $B\subset A^C$

따라서 옳지 않은 것은 ②이다.

답 ②

059

$A\cap B=\{c, d, e\}$

$A\cup B=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

따라서 집합 X의 개수는 집합 $A\cup B$의 부분집합 중에서 c, d, e를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같으므로

$2^{8-3}=2^5=32$

답 32

060

$A\cup X=A$이므로 $X\subset A$

$B\cap X=\varnothing$이므로 $X\subset B^C$

즉, 집합 X는 집합 $A\cap B^C=A-B$의 부분집합이다.

이때 집합 $A-B$는 50 이하의 6의 배수 중에서 4의 배수를 제외한 수의 집합이므로

$A-B=\{6, 18, 30, 42\}$

따라서 집합 X의 개수는 $2^4=16$

답 ②

061

$A=\{1, 3, 5, 6, 9, 10\}$, $A-B=\{3, 9, 10\}$이므로

$A\cap B=A-(A-B)=\{1, 5, 6\}$ ······ ❶

$\therefore A^C\cup B^C=(A\cap B)^C$

$=\{2, 3, 4, 7, 8, 9, 10\}$ ······ ❷

답 $\{2, 3, 4, 7, 8, 9, 10\}$

채점 기준	비율
❶ 집합 $A\cap B$를 구할 수 있다.	70 %
❷ 집합 $A^C\cup B^C$을 구할 수 있다.	30 %

062

$(A\cup B)\cap A^C=(A\cap A^C)\cup(B\cap A^C)$

$=\varnothing\cup(B\cap A^C)$

$=B\cap A^C$

$=B-A$

$=\{2, 6, 18\}$

답 ④

063

$(A-B)-(A\cap C^C)$

$=(A\cap B^C)\cap(A\cap C^C)^C$

$=(A\cap B^C)\cap(A^C\cup C)$

$=\{\underline{(A\cap B^C)\cap A^C}\}\cup\{(A\cap B^C)\cap C\}$

$\rightarrow A\cap A^C=\varnothing$이므로 $(A\cap B^C)\cap A^C=\varnothing$

$=\varnothing\cup\{(A\cap C)\cap B^C\}=(A\cap C)-B$

따라서 집합 $(A-B)-(A\cap C^C)$과 항상 같은 집합은 ④이다.

답 ④

064

$(A-B)^C\cap B=(A\cap B^C)^C\cap B$

$=(A^C\cup B)\cap B$

$=(A^C\cap B)\cup(B\cap B)$

$=(B-A)\cup B=B$

따라서 집합 $(A-B)^C\cap B$를 벤 다이어그램으로 바르게 나타낸 것은 ⑤이다.

답 ⑤

065

$A\cap\{(B-A)\cup(A\cap B)\}=\{A\cap(B\cap A^C)\}\cup\{A\cap(A\cap B)\}$

$=\varnothing\cup(A\cap B)=A\cap B$

따라서 $A\cap B=B$이므로 항상 성립하는 것은 ②이다.

답 ②

066

(1) $n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)=16+8-20=4$

(2) $n(A^C)=n(U)-n(A)=25-16=9$

(3) $n(B^C)=n(U)-n(B)=25-8=17$

(4) $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=16-4=12$

(5) $n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)=25-20=5$

(6) $n((A\cap B)^C)=n(U)-n(A\cap B)=25-4=21$

답 (1) 4 (2) 9 (3) 17 (4) 12 (5) 5 (6) 21

067

$B\cup(A-B)=A\cup B$, $B\cap(A-B)=\varnothing$이므로

$n(A\cup B)=n(B)+n(A-B)=35+15=50$

$\therefore n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)$

$=n(U)-n(A\cup B)$

$=60-50=10$

답 ③

068

$n(A\cap B^C)=n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$

한편, $n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$이므로

$n(A\cap B)=n(B)-n(B-A)=12-8=4$

$\therefore n(A\cap B^C)=n(A)-n(A\cap B)$

$=16-4=12$

답 ⑤

069

$A^C\cup B=(A\cap B^C)^C=(A-B)^C$

$A=\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$, $B=\{3, 6, 9, \cdots, 48\}$

$\therefore A-B=\{1, 2, 5, 10\}$

따라서 $n(U)=50$, $n(A-B)=4$이므로

$n(A^C\cup B)=n((A-B)^C)$

$=n(U)-n(A-B)$

$=50-4=46$

답 ④

070

$B\subset A$일 때 $n(A\cap B)$는 최댓값을 가지므로

$M=n(B)=15$ ······ ❶

$A\cup B=U$일 때 $n(A\cap B)$는 최솟값을 갖는다.

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$이므로

$m=22+15-30=7$ ······ ❷

$\therefore M+m=15+7=22$ ❸

답 22

채점 기준	비율
❶ M의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ m의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $M+m$의 값을 구할 수 있다.	20 %

|다른 풀이|

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$=22+15-n(A\cup B)$

$=37-n(A\cup B)$

이때 $A\subset(A\cup B)\subset U$이므로

$n(A)\le n(A\cup B)\le n(U)$

즉, $22\le n(A\cup B)\le 30$이므로

$7\le 37-n(A\cup B)\le 15$

$\therefore 7\le n(A\cap B)\le 15$

따라서 $M=15$, $m=7$이므로

$M+m=22$

참고

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $n(B)<n(A)$일 때

① $n(A\cap B)$가 최대인 경우

➡ $B\subset A$일 때이다.

➡ $n(A\cap B)=n(B)$

② $n(A\cap B)$가 최소인 경우

➡ $n(A\cup B)$가 최대일 때, 즉 $A\cup B=U$일 때이다.

071

제주도를 여행해 본 회원의 집합을 A, 부산을 여행해 본 회원의 집합을 B라고 하면

$n(A)=34$, $n(B)=26$, $n(A\cup B)=50$

제주도만 여행해 본 회원의 집합은 $A-B$이고

$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$

이때

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$=34+26-50=10$

이므로 제주도만 여행해 본 회원의 수는

$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$

$=34-10=24$

답 24

072

A 영화를 본 학생의 집합을 A, B 영화를 본 학생의 집합을 B라고 하면

$n(U)=35$, $n(A)=22$, $n(B)=10$, $n(A\cap B)=5$

$\therefore n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=22+10-5=27$

이때 A, B 두 영화 중 어느 것도 보지 않은 학생의 집합은 $(A\cup B)^C$이므로

$n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$

$=35-27=8$

답 8

실력을 높이는 연습 문제

01

$x^3-x^2-2x=0$에서

$x(x^2-x-2)=0$, $x(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

즉, 집합 A의 원소는 -1, 0, 2이다.

① $-2\not\in A$　③ $0\in A$　④ $1\not\in A$　⑤ $2\in A$

따라서 옳은 것은 ②이다.

답 ②

02

①, ②, ④, ⑤ $\{2, 4, 6, 8\}$

③ $\{2, 4, 6, 8, 10\}$

따라서 나머지 넷과 다른 하나는 ③이다.

답 ③

03

문제 접근하기

$\frac{12}{8-n}$가 자연수이므로 $8-n$은 12의 양의 약수이어야 함을 이용한다.

$\frac{12}{8-n}$가 자연수이므로 $8-n$은 12의 양의 약수이어야 한다.

즉, $8-n=1$, 2, 3, 4, 6, 12이므로

$n=7$, 6, 5, 4, 2 ($\because n$은 자연수)

$8-n=12$이면 $n=-4$이다.
이것은 n이 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(i) $n=2$일 때

$x=\frac{12}{8-2}=\frac{12}{6}=2$

(ii) $n=4$일 때

$x=\frac{12}{8-4}=\frac{12}{4}=3$

(iii) $n=5$일 때

$x=\frac{12}{8-5}=\frac{12}{3}=4$

(iv) $n=6$일 때

$x=\frac{12}{8-6}=\frac{12}{2}=6$

(v) $n=7$일 때

$x=\frac{12}{8-7}=\frac{12}{1}=12$

(i)~(v)에서 $A=\{2, 3, 4, 6, 12\}$

따라서 집합 A의 모든 원소의 합은

$2+3+4+6+12=27$

답 27

04

오른쪽 표를 이용하여 $x+y$의 값을 모두 구하면

x \ y	1	3	5
1	2	4	6
2	3	5	7
3	4	6	8
4	5	7	9
a	$a+1$	$a+3$	$a+5$

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, $a+1$, $a+3$, $a+5$

이때 $n(X)=10$이므로

$a+1=8$ 또는 $a+1=9$

이어야 한다.

즉, $a=7$ 또는 $a=8$이므로 자연수 a의 최댓값은 8이다.

답 8

참고

$2\le a+1\le 7$이면

$4\le a+3\le 9$, $6\le a+5\le 11$

이 되므로 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 중에서 $a+1$, $a+3$, $a+5$와 같은 수가 2개 이상 존재하게 되어 $n(X)=10$을 만족시키지 않는다.

따라서 $a+1=8$ 또는 $a+1=9$이어야 한다.

05

$B=\{1, 3, 9, 27\}$이므로 $A\subset B$이려면

$3a=3$ 또는 $3a=9$ 또는 $3a=27$

이어야 한다.

즉, $a=1$ 또는 $a=3$ 또는 $a=9$이므로 $A\subset B$를 만족시키는 모든 자연수 a의 값의 합은

$1+3+9=13$

답 13

06

① $\varnothing$은 집합 A의 원소이므로 $\varnothing\in A$, $\{\varnothing\}\subset A$

② c는 집합 A의 원소가 아니므로 $c\notin A$

③ a는 집합 A의 원소이고, $\{a\}$는 집합 A의 원소가 아니므로
$a\in A$, $\{a\}\notin A$

④ a, b는 집합 A의 원소이고, $\{a, b\}$는 집합 A의 원소가 아니므로 $\{a, b\}\subset A$, $\{a, b\}\notin A$

⑤ $\{b, c\}$는 집합 A의 원소이고, b는 집합 A의 원소이나 c는 집합 A의 원소가 아니므로
$\{b, c\}\in A$, $\{b, c\}\not\subset A$

따라서 옳은 것은 ①이다.

답 ①

07

$A\subset B$이고 $B\subset A$이므로 $A=B$

따라서 두 집합 A, B의 원소가 같아야 하므로

$a=10$, $a+b=24$

$\therefore b=14$

답 ④

08

문제 접근하기

원소의 합이 16 이상인 부분집합은 원소가 2개 이상임을 이용하여 원소가 2개, 3개, 4개인 경우로 나누어 생각한다.

집합 A의 부분집합 중에서 원소의 합이 16 이상이 되려면 원소가 2개 이상이어야 한다.

(i) 원소가 2개일 때
$\{7, 9\}$의 1개

(ii) 원소가 3개일 때
$\{3, 5, 9\}$, $\{3, 7, 9\}$, $\{5, 7, 9\}$의 3개

(iii) 원소가 4개일 때
$\{3, 5, 7, 9\}$의 1개

(i)~(iii)에서 구하는 집합의 개수는

$1+3+1=5$

답 ③

09

$A=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$이므로 가장 큰 원소가 16인 부분집합은 16을 반드시 원소로 갖고 24, 48은 원소로 갖지 않아야 한다.

따라서 원소의 개수가 4이고 가장 큰 원소가 16인 부분집합의 개수는 16, 24, 48을 제외한 7개의 원소 중에서 3개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_7C_3=\dfrac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$

답 35

10

$A=\{a, b, c, d, e, f\}$, $B=\{a, b\}$이므로 $B\subset X\subset A$를 만족시키는 집합 X 중에서 e를 반드시 원소로 갖는 집합은 집합 A의 부분집합 중에서 a, b, e를 반드시 원소로 갖는 집합이다.

따라서 구하는 집합의 개수는

$2^{6-3}=2^3=8$

답 8

11

$U=\{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}$, $A=\{1, 2, 4, 8\}$,

$B=\{4, 5, 10\}$이므로

① $A\cap B=\{4\}$

② $A^C=\{5, 10, 20, 40\}$

④ $B^C=\{1, 2, 8, 20, 40\}$이므로 $B^C-A=\{20, 40\}$

⑤ $A\cup B=\{1, 2, 4, 5, 8, 10\}$

따라서 옳은 것은 ③이다.

답 ③

12

$A-B=\{3, 5\}$이므로 $5\in A$ $\quad\therefore x=5$

따라서 $A=\{2, 3, 5\}$, $B=\{-2, 2, 7\}$이므로

$B-A=\{-2, 7\}$

답 $\{-2, 7\}$

13

$A\cup B=\{1, 3, 4, 5\}$이고 $B=\{1, 4, 2a-3\}$이므로

$2a-3=3$ 또는 $2a-3=5$ $\quad\therefore a=3$ 또는 $a=4$

(i) $a=3$일 때
$A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{1, 3, 4\}$이므로
$A\cup B=\{1, 2, 3, 4\}$
따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=4$일 때
$A=\{1, 3, 4\}$, $B=\{1, 4, 5\}$이므로
$A\cup B=\{1, 3, 4, 5\}$

따라서 주어진 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서

$A=\{1, 3, 4\}$, $B=\{1, 4, 5\}$

이므로 집합 A의 모든 원소의 합은

$1+3+4=8$

답 ⑤

14

문제 접근하기

부등식 $x^2-4x-12\le0$을 풀어 집합 A를 수직선 위에 나타낸 후 주어진 조건을 만족시키도록 집합 B를 수직선 위에 나타내어 본다.

$x^2-4x-12\le0$에서

$(x+2)(x-6)\le0$

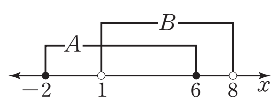
$\therefore -2\le x\le6$

$\therefore A=\{x|-2\le x\le6\}$

$A\cap B=\{x|1<x\le6\}$,

$A\cup B=\{x|-2\le x<8\}$이므로

오른쪽 그림에서



$B=\{x|1<x<8\}$

$\quad=\{x|(x-1)(x-8)<0\}$

$\quad=\{x|x^2-9x+8<0\}$

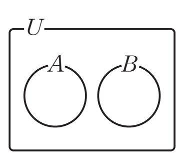
따라서 $a=-9$, $b=8$이므로

$a+b=-9+8=-1$

답 -1

15

두 집합 A, B가 서로소이므로 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $A\subset B^C$ (참)

ㄴ. $A\cap B^C=A$ (거짓)

ㄷ. $A\cup B\ne U$ (거짓)

ㄹ. $A\cup B^C=B^C$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ②

16

문제 접근하기

$(A\cap B^C)\cup(A^C\cap B)=\varnothing$의 좌변을 정리하여 두 집합 A, B 사이의 포함 관계를 파악한다.

$(A\cap B^C)\cup(A^C\cap B)=\varnothing$에서

$A\cap B^C=A-B$,

$A^C\cap B=B\cap A^C=B-A$

이므로

$(A-B)\cup(B-A)=\varnothing$

즉, $A-B=\varnothing$, $B-A=\varnothing$이므로

$A\subset B$, $B\subset A$ $\qquad\therefore A=B$

따라서 $B=\{x|x$는 8의 약수$\}=\{1, 2, 4, 8\}$이므로

$n(B)=4$

답 4

17

$\{3, 4, 5\}\cap A=\varnothing$이므로 집합 A는 전체집합 U의 부분집합 중에서 3, 4, 5를 원소로 갖지 않는 집합이어야 한다.

따라서 집합 A의 개수는

$2^{5-3}=2^2=4$

답 ②

18

$|x|<4$에서 $-4<x<4$

$\therefore U=\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

$(A-B)\cup X=X$이므로 $(A-B)\subset X$

이때 $A-B=\{-1\}$이므로 $\{-1\}\subset X$

또, $B\cup X=X$이므로 $B\subset X$

$\therefore \{0, 1, 2\}\subset X$

따라서 집합 X는 전체집합 U의 부분집합 중에서 -1, 0, 1, 2를 반드시 원소로 갖는 집합이므로 집합 X의 개수는

$2^{7-4}=2^3=8$

답 ③

19

$U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$A\cup X=X$이므로 $A\subset X$

$B-A=\{1, 2, 6, 8\}$이고 $(B-A)\cap X=\{2\}$이므로

$1\notin X$, $2\in X$, $6\notin X$, $8\notin X$

따라서 집합 X는 전체집합 U의 부분집합 중에서 2, 3, 5, 7은 반드시 원소로 갖고 1, 6, 8은 원소로 갖지 않는 집합이므로 집합 X의 개수는

$2^{9-4-3}=2^2=4$

답 4

20

$U=\{1, 2, 3, \cdots, 20\}$, $A=\{4, 8, 12, 16, 20\}$,

$B=\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$

$\therefore (A^C\cup B)^C=A\cap B^C=A-B=\{8, 12, 16\}$

따라서 집합 $(A^C\cup B)^C$의 모든 원소의 합은

$8+12+16=36$

답 36

21

$A\subset(A\cup B)$이므로 $A\cap(A\cup B)=A$

① $(B-A)\subset B$이므로 $(B-A)\cup B=B$

② $A\cap(A-B)^C=A\cap(A\cap B^C)^C$

$\qquad=A\cap(A^C\cup B)$

$\qquad=(A\cap A^C)\cup(A\cap B)$

$\qquad=\varnothing\cup(A\cap B)=A\cap B$

③ $A\cap(B-A)=\varnothing$이므로 $A-(B-A)=A$

④ $B-(A\cap B)=B\cap(A\cap B)^C$

$\qquad=B\cap(A^C\cup B^C)$

$\qquad=(B\cap A^C)\cup(B\cap B^C)$

$\qquad=(B\cap A^C)\cup\varnothing$

$\qquad=B\cap A^C=B-A$

⑤ $(A-B)\cup B=(A\cap B^C)\cup B$

$=(A\cup B)\cap(B^C\cup B)$

$=(A\cup B)\cap U$

$=A\cup B$

따라서 $A\cap(A\cup B)$와 항상 같은 집합은 ③이다.

답 ③

22

① $n(A^C)=n(U)-n(A)$

$=40-18=22$

② $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$이므로

$n(A\cap B)=n(A)-n(A-B)$

$=18-14=4$

③ $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=18+22-4=36$

④ $n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$

$=22-4=18$

⑤ $n(B^C)=n(U)-n(B)=40-22=18$이므로

$n(A\cup B^C)=n(A)+n(B^C)-n(A\cap B^C)$

$=n(A)+n(B^C)-n(A-B)$

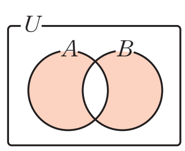
$=18+18-14=22$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

답 ④

23

$(A-B)\cup(B-A)$를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$n((A-B)\cup(B-A))$

$=n(A\cup B)-n(A\cap B)$

이때

$n(A\cup B)=n(U)-n((A\cup B)^C)$

$=n(U)-n(A^C\cap B^C)$

$=48-7=41$

이므로

$n((A-B)\cup(B-A))=n(A\cup B)-n(A\cap B)$

$=41-10=31$

답 ②

24

등 번호가 2의 배수인 선수의 집합을 A, 등 번호가 3의 배수인 선수의 집합을 B라고 하면 등 번호가 6의 배수인 선수의 집합은 $A\cap B$이다.

등 번호가 3의 배수인 선수의 수를 a라고 하면 등 번호가 2의 배수인 선수의 수는 $a+3$이므로

$n(A)=a+3$, $n(B)=a$, $n(A\cap B)=5$, $n(A\cup B)=30$

이때 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이므로

$30=(a+3)+a-5$, $2a=32$

$\therefore a=16$

따라서 등 번호가 3의 배수인 선수의 수는 16이다.

답 16

06 명제

기본을 다지는 유형

본문 081쪽

001

ㄱ. x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.

ㄴ. 참인 명제이다.

ㄷ. 2는 짝수이지만 소수이므로 거짓인 명제이다.

ㄹ. 참, 거짓을 명확하게 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.

따라서 명제인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ③

002

①~④ x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 조건이다.

⑤ 모든 실수 x에 대하여 $x^2\geq 0$이므로 참인 명제이다.

따라서 조건이 아닌 것은 ⑤이다.

답 ⑤

003

조건 '$x<2$ 그리고 $y\geq -1$'의 부정은

$x\geq 2$ 또는 $y<-1$

답 ⑤

004

각 명제의 부정을 구하여 그 참, 거짓을 판별하면 다음과 같다.

① 5는 소수가 아니다. (거짓)

② 정사각형은 직사각형이 아니다. (거짓)

③ 6은 24의 약수가 아니다. (거짓)

④ $3\notin\{4, 5, 6\}$ (참)

⑤ 8의 배수는 4의 배수가 아니다. (거짓)

따라서 명제의 부정이 참인 것은 ④이다.

답 ④

| 다른 풀이 |

명제가 거짓이면 그 부정은 참이므로 명제가 거짓인 것을 찾는다.

①, ②, ③, ⑤는 참인 명제이고 ④는 거짓인 명제이므로 그 부정이 참인 것은 ④이다.

005

$U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면

$P=\{2, 4, 6, 8\}$

$x^2-8x+12=0$에서 $(x-2)(x-6)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=6$ $\quad\therefore Q=\{2, 6\}$

(1) $\sim p$의 진리집합은 $P^C=\{1, 3, 5, 7, 9\}$

(2) $\sim q$의 진리집합은 $Q^C=\{1, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$

(3) p 그리고 q의 진리집합은 $P\cap Q=\{2, 6\}$

(4) $\sim p$ 또는 q의 진리집합은 $P^C \cup Q=\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9\}$

답 (1) $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ (2) $\{1, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$
(3) $\{2, 6\}$ (4) $\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9\}$

006

실수 x에 대한 조건
'x는 음이 아닌 실수이다.', 즉 'x는 0 또는 양의 실수이다.'
의 진리집합은 $\{x | x \geq 0\}$

답 ④

007

조건 '$-3<x\leq 1$'은 '$\underbrace{x>-3}_{\sim q}$ 그리고 $\underbrace{x\leq 1}_{\sim p}$'이므로
$\sim p$ 그리고 $\sim q$
따라서 이 조건의 진리집합은 $P^C \cap Q^C$

답 ⑤

008

$\sim p$는 'x는 짝수가 아니고 3의 배수가 아니다.', 즉 'x는 홀수이고 3의 배수가 아니다.'이므로 $\sim p$의 진리집합의 원소는 3의 배수가 아닌 홀수이다.
따라서 조건 $\sim p$의 진리집합은 $\{1, 5, 7\}$이므로 구하는 모든 원소의 합은 $1+5+7=13$

답 ③

|다른 풀이|

조건 p의 진리집합을 P라고 하면
$P=\{x | x\text{는 짝수}\} \cup \{x | x\text{는 3의 배수}\}$
$=\{2, 4, 6, 8\} \cup \{3, 6, 9\}$
$=\{2, 3, 4, 6, 8, 9\}$
따라서 조건 $\sim p$의 진리집합은 $P^C=\{1, 5, 7\}$이므로 구하는 모든 원소의 합은 $1+5+7=13$

009

$U=\{-5, -4, -3, \cdots, 5\}$
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하자.
$x^3-4x=0$에서 $x(x^2-4)=0$, $x(x+2)(x-2)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$
$\therefore P=\{-2, 0, 2\}$ ······ ❶
q: $|x+3|>1$에서 $\sim q$: $|x+3|\leq 1$이므로
$-1\leq x+3\leq 1$ $\therefore -4\leq x\leq -2$
$\therefore Q^C=\{-4, -3, -2\}$ ······ ❷
따라서 조건 'p 또는 $\sim q$'의 진리집합은
$P\cup Q^C=\{-4, -3, -2, 0, 2\}$
이므로 구하는 원소의 개수는 5이다. ······ ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ 조건 p의 진리집합을 구할 수 있다.	40 %
❷ 조건 $\sim q$의 진리집합을 구할 수 있다.	40 %
❸ 조건 'p 또는 $\sim q$'의 진리집합의 원소의 개수를 구할 수 있다.	20 %

010

④ [반례] $n=2$이면 n은 소수이지만 짝수이다.
따라서 거짓인 명제는 ④이다.

답 ④

011

ㄱ. $x^2+y^2=0$이면 $x=0$, $y=0$이므로 $x+y=0$이다.
즉, 주어진 명제는 참이다.
ㄴ. [반례] $x=1$, $y=-1$, $z=0$이면 $xz=yz$이지만 $x\neq y$이다.
ㄷ. [반례] $x=\sqrt{2}$이면 x^2은 유리수이지만 x는 무리수이다.
ㄹ. [반례] $x=-1$, $y=1$이면 $x+y=0$이지만 $x\neq 0$, $y\neq 0$이다.
따라서 참인 명제는 ㄱ이다.

답 ㄱ

012

명제 $p \longrightarrow q$가 참이면 $P\subset Q$이고 명제 $p \longrightarrow q$가 거짓이면 $P\not\subset Q$이다.
따라서 명제 $p \longrightarrow q$가 거짓임을 보이는 원소는 집합 P의 원소이면서 집합 Q의 원소가 아니어야 한다. 즉, 구하는 원소는 2이다.
집합 $P-Q$의 원소이어야 한다.

답 ②

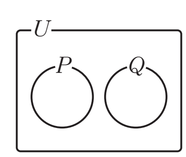
013

① $P\not\subset Q$이므로 $p \longrightarrow q$는 거짓인 명제이다.
② $Q\not\subset P$이므로 $q \longrightarrow p$는 거짓인 명제이다.
③ $R\not\subset Q$이므로 $r \longrightarrow q$는 거짓인 명제이다.
④ $Q^C\not\subset P$이므로 $\sim q \longrightarrow p$는 거짓인 명제이다.
⑤ $Q\subset R^C$이므로 $q \longrightarrow \sim r$는 참인 명제이다.
따라서 항상 참인 명제는 ⑤이다.

답 ⑤

014

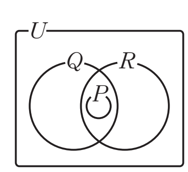
명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이므로
$P\subset Q^C$
즉, 두 집합 P, Q는 오른쪽 그림과 같으므로
$P\cup Q\neq U$
따라서 옳지 않은 것은 ③이다.



답 ③

015

$P\subset (Q\cap R)$이므로 세 집합 P, Q, R는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $P\subset Q$이므로 명제 $p \longrightarrow q$는 참이다.
ㄴ. $Q^C\subset P^C$이므로 명제 $\sim q \longrightarrow \sim p$는 참이다.
ㄷ. $R\not\subset Q^C$이므로 명제 $r \longrightarrow \sim q$는 거짓이다.
ㄹ. $R^C\not\subset P$이므로 명제 $\sim r \longrightarrow p$는 거짓이다.
따라서 참인 명제인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ①

016

$U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $P=\{1, 2, 4, 8\}$이므로

$P^C=\{3, 5, 6, 7, 9, 10\}$

명제 $\sim p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P^C\subset Q$이어야 한다.

즉, 집합 Q는 전체집합 U의 부분집합 중에서 3, 5, 6, 7, 9, 10을 반드시 원소로 갖는 집합이어야 하므로 집합 Q의 개수는

$2^{10-6}=2^4=16$

답 16

017

명제 '$x=-2$이면 $x^2=a$이다.'가 참이 되려면 $x=-2$가 방정식 $x^2=a$의 근이어야 한다.

$\therefore a=(-2)^2=4$

답 ④

018

명제 '$x=k$이면 $x^2-6x-16=0$이다.'가 참이 되려면 $x=k$가 방정식 $x^2-6x-16=0$의 근이어야 한다. ❶

즉, $k^2-6k-16=0$이므로

$(k+2)(k-8)=0 \quad \therefore k=-2$ 또는 $k=8$

이때 k는 양수이므로 $k=8$ ❷

답 8

채점 기준	비율
❶ 주어진 명제가 참이 되기 위한 조건을 구할 수 있다.	40 %
❷ 양수 k의 값을 구할 수 있다.	60 %

019

명제 $p \longrightarrow q$가 거짓이므로 $P\not\subset Q$

즉, $3\notin Q$이므로 $a\neq 3$

명제 $q \longrightarrow r$가 참이므로 $Q\subset R$

즉, $5\in R$이므로 $b=5$

또, $a\in R$이고 $a\neq 3$, $a\neq b$이므로 $a=7$

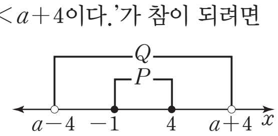
$\therefore a-b=7-5=2$

답 ④

020

$P=\{x\mid -1\leq x\leq 4\}$, $Q=\{x\mid a-4<x<a+4\}$라고 하자.

이때 명제 '$-1\leq x\leq 4$이면 $a-4<x<a+4$이다.'가 참이 되려면 $P\subset Q$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$a-4<-1$, $a+4>4$

$a<3$, $a>0$

$\therefore 0<a<3$

답 $0<a<3$

021

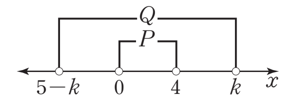
$|x-2|<2$에서 $-2<x-2<2$

$\therefore 0<x<4$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면

$P=\{x\mid 0<x<4\}$, $Q=\{x\mid 5-k<x<k\}$

명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P\subset Q$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$5-k\leq 0$, $k\geq 4$

$k\geq 5$, $k\geq 4 \quad \therefore k\geq 5$

따라서 실수 k의 최솟값은 5이다.

답 ②

022

① $x=2$일 때 $x^2-2x=2^2-2\times 2=0$이므로 참이다.

② [반례] $x=1$이면 $\sqrt{x}=\sqrt{1}=1$은 유리수이다.

③ $x=1$이면 $x^2=1^2=1$이므로 $x^2\leq x$이다.
즉, 주어진 명제는 참이다.

④ $6\times 1=6$, $6\times 2=12$, $6\times 3=18$, $6\times 4=24$, $6\times 5=30$이므로 모든 x에 대하여 $6x\leq 30$이다.
즉, 주어진 명제는 참이다.

⑤ $x=5$이면 $x^2=5^2=25>20$이므로 참이다.

따라서 거짓인 명제는 ②이다.

답 ②

참고

(1) 모든 x에 대하여 p이다.
➡ 전체집합의 모든 원소 x가 p를 만족시키면 참이다.
➡ 전체집합의 원소 중에서 p를 만족시키지 않는 x가 하나라도 존재하면 거짓이다.

(2) 어떤 x에 대하여 p이다.
➡ 전체집합의 원소 중에서 p를 만족시키는 원소 x가 하나라도 존재하면 참이다.
➡ 전체집합의 원소 중에서 p를 만족시키는 원소 x가 하나도 존재하지 않으면 거짓이다.

023

주어진 명제가 거짓이려면 주어진 명제의 부정

'모든 실수 x에 대하여 $x^2+8x+2k-1>0$이다.'

가 참이어야 한다.

즉, 이차방정식 $x^2+8x+2k-1=0$의 판별식을 D라고 할 때, $D<0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=4^2-(2k-1)<0$에서 $k>\frac{17}{2}$

따라서 정수 k의 최솟값은 9이다.

답 9

풍쌤 개념 CHECK

이차부등식이 항상 성립할 조건_高 공통수학1

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 $D=b^2-4ac$라고 할 때

(1) 모든 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c>0$이 성립하려면
$a>0$, $D<0$

(2) 모든 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c\geq 0$이 성립하려면
$a>0$, $D\leq 0$

(3) 모든 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c<0$이 성립하려면
$a<0$, $D<0$

(4) 모든 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c\leq 0$이 성립하려면
$a<0$, $D\leq 0$

024

명제 $p \longrightarrow q$의 대우는 $\sim q \longrightarrow \sim p$이므로 주어진 명제의 대우는 '$x \neq 0$이고 $y \neq 0$이면 $xy \neq 0$이다.'

답 ④

025

주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.
주어진 명제의 대우는
'$x=3$이면 $x^2-ax+9=0$이다.'
이 명제가 참이므로 $x=3$은 방정식 $x^2-ax+9=0$의 근이다.
즉, $3^2-3a+9=0$이므로 $3a=18$ $\quad \therefore a=6$

답 ②

026

각 명제의 역을 구하여 그 참, 거짓을 판별하면 다음과 같다.
ㄱ. $x=2$이면 $x^3=8$이다. (참)
ㄴ. $x^2+y^2=0$이면 $x=0$, $y=0$이다. (참)
ㄷ. x가 무리수이면 x는 무한소수이다. (참) 무리수는 순환하지 않는 무한소수이다.
ㄹ. $x>0$이면 $x>2$이다. (거짓)
[반례] $x=1$이면 $x>0$이지만 $x<2$이다.
따라서 역이 참인 명제는 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

풍쌤 개념 CHECK

소수의 분류_中 수학 3

- 소수
  - 유한소수 — 유리수
  - 무한소수
    - 순환소수 — 유리수
    - 순환하지 않는 무한소수 — 무리수

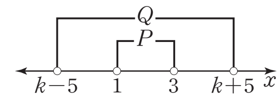
027

주어진 명제가 참이므로 그 대우
'$\underbrace{x \le a\text{이고 } y \le 5}_{\text{조건 } p}$이면 $\underbrace{x+y \le 9}_{\text{조건 } q}$이다.' ······ ㉠
도 참이다.
$x \le a$, $y \le 5$이면 $\underbrace{x+y \le a+5}_{\text{조건 } p}$이므로 $\underbrace{\text{㉠이 참}}_{p \longrightarrow q}$이 되려면
$a+5 \le 9$ $\quad \therefore a \le 4$
따라서 실수 a의 최댓값은 4이다.
$p \longrightarrow q$이므로 $a+5 \le 9$이다.

답 4

028

주어진 명제가 참이므로 그 대우
'$|x-2|<1$이면 $|x-k|<5$이다.'
도 참이다.
이때 p: $|x-2|<1$, q: $|x-k|<5$라 하고, 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면 명제 $p \longrightarrow q$가 참이므로 $P \subset Q$이어야 한다. ······ ❶
$|x-2|<1$에서 $-1<x-2<1$
$\therefore 1<x<3$
$|x-k|<5$에서 $-5<x-k<5$
$\therefore k-5<x<k+5$
즉, $P=\{x \mid 1<x<3\}$,
$Q=\{x \mid k-5<x<k+5\}$이고
$P \subset Q$이므로 오른쪽 그림에서



$k-5 \le 1$, $k+5 \ge 3$
$k \le 6$, $k \ge -2$ $\quad \therefore -2 \le k \le 6$ ······ ❷
따라서 정수 k는 $-2, -1, 0, 1, \cdots, 6$의 9개이다. ······ ❸

답 9

채점 기준	비율
❶ 주어진 명제의 대우를 구하고 그 대우가 참이 되기 위한 조건을 구할 수 있다.	30 %
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ 정수 k의 개수를 구할 수 있다.	20 %

029

두 명제 $p \longrightarrow \sim r$, $q \longrightarrow r$가 참이므로 그 대우 $r \longrightarrow \sim p$, $\sim r \longrightarrow \sim q$도 참이다.
이때 두 명제 $p \longrightarrow \sim r$, $\sim r \longrightarrow \sim q$가 모두 참이므로 $p \longrightarrow \sim q$도 참이고, 두 명제 $q \longrightarrow r$, $r \longrightarrow \sim p$가 모두 참이므로 $q \longrightarrow \sim p$도 참이다.
따라서 항상 참인 명제는 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

030

명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참일 때 명제 $p \longrightarrow \sim r$가 참이 되려면 명제 $\sim q \longrightarrow \sim r$도 참이어야 한다.
또, 명제 $\sim q \longrightarrow \sim r$가 참이면 그 대우 $r \longrightarrow q$도 참이므로 ㈎에 들어갈 수 있는 명제는 ④이다.

답 ④

031

세 조건 p, q, r를
p: 노래를 좋아한다.
q: 영화를 좋아한다.
r: 자연을 좋아한다.
라고 하면 명제 ㈎, ㈏는 각각
$p \longrightarrow q$, $\sim p \longrightarrow \sim r$
이다.
이때 각 보기의 문장을 조건 p, q, r를 이용하여 나타내면 다음과 같다.
① $p \longrightarrow r$ ② $q \longrightarrow r$ ③ $r \longrightarrow q$
④ $\sim p \longrightarrow \sim q$ ⑤ $\sim r \longrightarrow \sim p$
두 명제 $p \longrightarrow q$, $\sim p \longrightarrow \sim r$가 모두 참이므로 그 대우
$\sim q \longrightarrow \sim p$, $r \longrightarrow p$도 참이다.
또, $r \longrightarrow p$, $p \longrightarrow q$가 참이므로 $r \longrightarrow q$와 그 대우
$\sim q \longrightarrow \sim r$도 참이다.
따라서 항상 참인 명제는 ③이다.

답 ③

참고

031과 같이 문장으로 주어진 명제는 주어진 문장에서 조건 p, q를 찾아 $p \longrightarrow q$의 꼴로 나타낸 후 명제가 참일 때 그 대우도 참임과 삼단논법을 이용하면 참인 명제를 쉽게 찾을 수 있다.

032

네 조건 p, q, r, s를

p: 10대, 20대에게 선호도가 높다.

q: 판매량이 많다.

r: 가격이 싸다.

s: 기능이 많다.

라고 하면 명제 ㈎, ㈏, ㈐는 각각

$p \longrightarrow q$, $r \longrightarrow q$, $s \longrightarrow p$

이다.

이때 각 보기의 문장을 조건 p, q, r, s를 이용하여 나타내면 다음과 같다.

① $s \longrightarrow \sim r$ ② $\sim r \longrightarrow \sim q$ ③ $\sim q \longrightarrow \sim s$

④ $p \longrightarrow s$ ⑤ $p \longrightarrow \sim r$

세 명제 $p \longrightarrow q$, $r \longrightarrow q$, $s \longrightarrow p$가 모두 참이므로 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$, $\sim q \longrightarrow \sim r$, $\sim p \longrightarrow \sim s$도 참이다.

또, 두 명제 $s \longrightarrow p$, $p \longrightarrow q$가 모두 참이므로 $s \longrightarrow q$와 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim s$도 참이다.

따라서 항상 참인 명제는 ③이다.

답 ③

033

(1) $p \longrightarrow q$: $|x|<1$, 즉 $-1<x<1$이면 $x<1$ (참)

$q \longrightarrow p$: [반례] $x=-2$이면 $x<1$이지만 $|x|>1$

따라서 $p \Longrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

(2) $p \longrightarrow q$: [반례] $x=-2$, $y=-1$이면 $x^2>y^2$이지만 $x<y<0$

$q \longrightarrow p$: $x>y>0$이면 $x^2>y^2$ (참)

따라서 $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

(3) $p \Longrightarrow q$이고 $q \Longrightarrow p$, 즉 $p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

답 (1) **충분조건** (2) **필요조건** (3) **필요충분조건**

034

p는 q이기 위한 충분조건이므로

$p \Longrightarrow q$ $\therefore P \subset Q$ ·········· ㉠

q는 r이기 위한 충분조건이므로

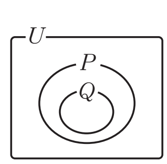
$q \Longrightarrow r$ $\therefore Q \subset R$ ·········· ㉡

㉠, ㉡에서 $P \subset Q \subset R$

답 ①

035

p가 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아니므로 $Q \subset P$, $P \neq Q$



③ $P-Q \neq \varnothing$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

답 ③

036

$A \cap (B-A)^C = A \cap (B \cap A^C)^C$

$= A \cap (B^C \cup A)$

$= (A \cap B^C) \cup (A \cap A)$

$= (A-B) \cup A$

$= A$ ($\because$ $(A-B) \subset A$)

따라서 $A \cap (B-A)^C = A \cap B$, 즉 $A = A \cap B$가 성립하기 위한 필요충분조건은 $A \subset B$이다.

답 ①

037

p는 $\sim q$이기 위한 충분조건이므로

$p \Longrightarrow \sim q$

q는 r이기 위한 필요조건이므로

$r \Longrightarrow q$

각 명제가 참이면 그 대우도 참이므로

$q \Longrightarrow \sim p$, $\sim q \Longrightarrow \sim r$

$p \Longrightarrow \sim q$, $\sim q \Longrightarrow \sim r$이므로

$p \Longrightarrow \sim r$

$r \Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow \sim p$이므로

$r \Longrightarrow \sim p$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ④

038

p는 $\sim r$이기 위한 충분조건이므로

$p \Longrightarrow \sim r$

p는 q이기 위한 필요조건이므로

$q \Longrightarrow p$

즉, $q \Longrightarrow p$, $p \Longrightarrow \sim r$이므로

$q \Longrightarrow \sim r$

또, 각 명제가 참이면 그 대우도 참이므로

$r \Longrightarrow \sim p$, $\sim p \Longrightarrow \sim q$, $r \Longrightarrow \sim q$

따라서 참인 명제는 ㄴ, ㄷ이다.

답 ③

039

p는 r이기 위한 필요조건이므로

$r \Longrightarrow p$

q는 r이기 위한 충분조건이므로

$q \Longrightarrow r$

즉, $q \Longrightarrow r$, $r \Longrightarrow p$이므로

$q \Longrightarrow p$

또, 각 명제가 참이면 그 대우도 참이므로

$\sim p \Longrightarrow \sim r$, $\sim r \Longrightarrow \sim q$, $\sim p \Longrightarrow \sim q$

따라서 참인 명제는 ㄴ, ㄹ이다.

답 ④

040

$x=-1$이 $x^2+ax+b=0$이기 위한 필요충분조건이려면 $x=-1$은 방정식 $x^2+ax+b=0$의 중근이어야 한다.

즉, $(x+1)^2=x^2+ax+b$이므로

$x^2+2x+1=x^2+ax+b$

따라서 $a=2$, $b=1$이므로

$ab=2\times1=2$

답 2

041

p는 q이기 위한 충분조건이므로

$p \Longrightarrow q$

이때 그 대우도 참이므로

$\sim q \Longrightarrow \sim p$

즉, $x=-4$이면 $x^2-ax+4=0$이므로

$(-4)^2-a\times(-4)+4=0$

$4a=-20 \qquad \therefore a=-5$

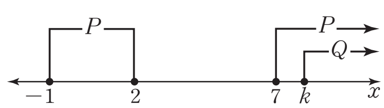
답 ①

042

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면 p가 q이기 위한 필요조건이므로

$Q\subset P$

$P=\{x\,|\,-1\le x\le 2$ 또는 $x\ge7\}$, $Q=\{x\,|\,x\ge k\}$이므로 다음 그림에서



$k\ge7$

따라서 실수 k의 최솟값은 7이다.

답 ④

043

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면 p가 q이기 위한 충분조건이므로

$P\subset Q$

$x^2-6x+9\le0$에서 $(x-3)^2\le0 \qquad \therefore x=3$

$|x-a|\le2$에서 $-2\le x-a\le2$

$\therefore a-2\le x\le a+2$

즉, $P=\{3\}$, $Q=\{x\,|\,a-2\le x\le a+2\}$이므로

$a-2\le3\le a+2$

$a-2\le3$에서 $a\le5$ ······ ㉠

$3\le a+2$에서 $a\ge1$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $1\le a\le5$

따라서 실수 a의 최댓값은 5, 최솟값은 1이므로 구하는 합은

$5+1=6$

답 ①

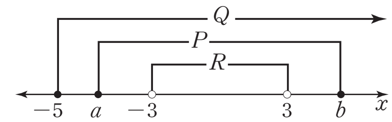
044

세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라고 하면 p가 q이기 위한 충분조건이고 r이기 위한 필요조건이므로

$P\subset Q$, $R\subset P$

$\therefore R\subset P\subset Q$ ······ ❶

$P=\{x\,|\,a\le x\le b\}$, $Q=\{x\,|\,x\ge-5\}$, $R=\{x\,|\,-3<x<3\}$이므로 다음 그림에서



$-5\le a\le-3$, $b\ge3$ ······ ❷

따라서 a의 최댓값은 -3, b의 최솟값은 3이므로 구하는 합은

$-3+3=0$ ······ ❸

답 0

채점 기준	비율
❶ 세 조건 p, q, r의 진리집합 사이의 포함 관계를 구할 수 있다.	40 %
❷ a, b의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ a의 최댓값과 b의 최솟값의 합을 구할 수 있다.	20 %

045

(1) 주어진 명제의 대우는

'n이 3의 배수가 아니면 n^2도 3의 배수가 아니다.'

(2) n이 3의 배수가 아니므로

$n=3k-1$ 또는 $n=3k-2$ (k는 자연수)

로 나타낼 수 있다.

(ⅰ) $n=3k-1$일 때

$n^2=(3k-1)^2=9k^2-6k+1=3(3k^2-2k)+1$

즉, n^2은 3의 배수가 아니다.

(ⅱ) $n=3k-2$일 때

$n^2=(3k-2)^2=9k^2-12k+4=3(3k^2-4k+1)+1$

즉, n^2은 3의 배수가 아니다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 n^2은 3의 배수가 아니다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

답 풀이 참조

046

$\sqrt{2}$를 (가) 유리수 라고 가정하면

$\sqrt{2}=\dfrac{n}{m}$ (m, n은 서로소인 자연수) ······ ㉠

으로 놓을 수 있다.

㉠의 양변을 제곱하면

$2=\dfrac{n^2}{m^2} \qquad \therefore n^2=2m^2$ ······ ㉡

이때 n^2이 (나) 짝수 이므로 n도 (나) 짝수 이다.

(짝수)^2=(짝수), (홀수)^2=(홀수)이므로 n^2이 짝수이면 n도 짝수이다.

$n=2k$ (k는 자연수)로 놓고 ㉡에 대입하면

$4k^2=2m^2 \qquad \therefore m^2=2k^2$

이때 m^2이 (나) 짝수 이므로 m도 (나) 짝수 이다.

즉, m, n이 모두 (나) 짝수 이므로 m, n이 (다) 서로소 라는 가정에 모순이다.

따라서 $\sqrt{2}$는 무리수이다.

$\therefore$ (가): 유리수, (나): 짝수, (다): 서로소

답 (가): 유리수 (나): 짝수 (다): 서로소

047

주어진 명제의 결론을 부정하여 a, b, c가 모두 $\boxed{\text{(가) 홀수}}$라고 가정하면 홀수의 제곱은 홀수이므로 a^2, b^2, c^2도 모두 $\boxed{\text{(가) 홀수}}$이다.
이때 (홀수)+(홀수)=(짝수)이므로 a^2+b^2은 $\boxed{\text{(나) 짝수}}$이고, c^2은 $\boxed{\text{(다) 홀수}}$이므로 $a^2+b^2\neq c^2$이 되어 모순이다.
따라서 $a^2+b^2=c^2$이면 a, b, c 중 적어도 하나는 짝수이다.
∴ (가): 홀수, (나): 짝수, (다): 홀수

답 ③

048

$(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2$
$=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2-(a^2x^2+2abxy+b^2y^2)$
$=a^2y^2-2abxy+b^2x^2$
$=(\boxed{\text{(가) } ay-bx})^2\ge 0$
$\therefore (a^2+b^2)(x^2+y^2)\ge(ax+by)^2$
이때 등호는 $ay-bx=0$, 즉 $\boxed{\text{(나) } ay=bx}$일 때 성립한다.
∴ (가): $ay-bx$, (나): $ay=bx$

답 (가): $ay-bx$ (나): $ay=bx$

049

$|a|+|b|\ge 0$, $|a-b|\ge 0$이므로
$\boxed{\text{(가) } (|a|+|b|)^2\ge|a-b|^2}$
이 성립함을 증명하면 된다.
이때
$(|a|+|b|)^2-|a-b|^2=|a|^2+2|a||b|+|b|^2-(a-b)^2$
$=a^2+2|ab|+b^2-(a^2-2ab+b^2)$
$=\boxed{\text{(나) } 2(|ab|+ab)}\ge 0$

$\to |ab|\ge -ab$이므로 $2(|ab|+ab)\ge 0$

이므로
$(|a|+|b|)^2\ge|a-b|^2$
$\therefore |a|+|b|\ge|a-b|$
여기서 등호는 $|ab|=-ab$, 즉 $\boxed{\text{(다) } ab\le 0}$일 때 성립한다.
∴ (가): $(|a|+|b|)^2\ge|a-b|^2$, (나): $2(|ab|+ab)$, (다): $ab\le 0$

답 (가): $(|a|+|b|)^2\ge|a-b|^2$ (나): $2(|ab|+ab)$ (다): $ab\le 0$

050

$a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)$
$=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$
$=\dfrac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$
$=\dfrac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\}$
$=\dfrac{1}{2}\{\boxed{\text{(가) } (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}\}$
이때 $(a-b)^2\ge 0$, $(\boxed{\text{(나) } b-c})^2\ge 0$, $(c-a)^2\ge 0$이므로
$a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)\ge 0$
$\therefore a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$
여기서 등호는 $a-b=0$, $b-c=0$, $c-a=0$, 즉 $\boxed{\text{(다) } a=b=c}$일 때 성립한다.
∴ (가): $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$, (나): $b-c$, (다): $a=b=c$

답 (가): $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$ (나): $b-c$ (다): $a=b=c$

051

$x>0$, $\dfrac{9}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$x+\dfrac{9}{x}\ge 2\sqrt{x\times\dfrac{9}{x}}=2\times3=6$ (단, 등호는 $x=3$일 때 성립한다.)

$\to x=\dfrac{9}{x}$에서 $x^2=9$
$\therefore x=3\ (\because x>0)$

따라서 $x+\dfrac{9}{x}$의 최솟값은 6이다.

답 ①

052

$4a>0$, $5b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$4a+5b\ge 2\sqrt{4a\times5b}=2\sqrt{20ab}$
$=2\times20=40\ (\because ab=20)$
이때 등호는 $4a=5b$일 때 성립한다.
따라서 $4a+5b$의 최솟값은 40이다.

답 40

참고
$4a+5b\ge 2\sqrt{20ab}$에서 등호는 $4a=5b$일 때 성립한다.
이때 $ab=20$이므로 등호는 $a=5$, $b=4$일 때 성립한다.

053

$3x>0$, $2y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$3x+2y\ge 2\sqrt{3x\times2y}$
$=2\sqrt{6xy}$ (단, 등호는 $3x=2y$일 때 성립한다.) ❶
이때 $3x+2y=18$이므로
$2\sqrt{6xy}\le 18$, $\sqrt{6xy}\le 9$
양변을 제곱하면 $6xy\le 81$
$\therefore xy\le\dfrac{27}{2}$ ❷
따라서 xy의 최댓값은 $\dfrac{27}{2}$이다. ❸

답 $\dfrac{27}{2}$

채점 기준	비율
❶ 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 부등식을 세울 수 있다.	40 %
❷ xy의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ xy의 최댓값을 구할 수 있다.	20 %

참고
$3x+2y\ge 2\sqrt{6xy}$에서 등호는 $3x=2y$일 때 성립한다.
이때 $3x+2y=18$이므로 등호는 $x=3$, $y=\dfrac{9}{2}$일 때 성립한다.

054

$x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$2x+5y+\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{y}=2x+\dfrac{2}{x}+5y+\dfrac{5}{y}$
$\ge 2\sqrt{2x\times\dfrac{2}{x}}+2\sqrt{5y\times\dfrac{5}{y}}$
$=2\times2+2\times5=14$
(단, 등호는 $x=1$, $y=1$일 때 성립한다.)
따라서 $2x+5y+\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{y}$의 최솟값은 14이다.

답 ⑤

055

$(2a+b)\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)=4+\frac{2a}{b}+\frac{2b}{a}+1$

$=2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+5$

이때 $\frac{a}{b}>0$, $\frac{b}{a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+5\geq 2\times 2\sqrt{\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}}+5$

$=4+5=9$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{a}{b}=\frac{b}{a}\text{, 즉 } a=b\text{일 때 성립한다.}\right)$

따라서 $(2a+b)\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)$의 최솟값은 9이다.

답 ③

056

$(\sqrt{5x}+\sqrt{3y})^2=5x+2\sqrt{5x}\sqrt{3y}+3y$

$=5x+3y+2\sqrt{5x\times 3y}$

$=15+2\sqrt{5x\times 3y}$ ($\because$ $5x+3y=15$) ……… ㉠

$5x>0$, $3y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$5x+3y\geq 2\sqrt{5x\times 3y}$ (단, 등호는 $5x=3y$일 때 성립한다.)

이때 $5x+3y=15$이므로

$2\sqrt{5x\times 3y}\leq 15$

따라서 ㉠에서

$(\sqrt{5x}+\sqrt{3y})^2=15+2\sqrt{5x\times 3y}$

$\leq 15+15=30$

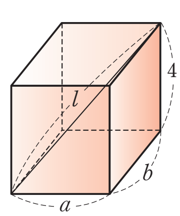
$\left(\text{단, 등호는 } x=\frac{3}{2},\ y=\frac{5}{2}\text{일 때 성립한다.}\right)$

$\therefore$ $0\leq\sqrt{5x}+\sqrt{3y}\leq\sqrt{30}$

즉, 구하는 최댓값은 $\sqrt{30}$이다.

답 ③

057



오른쪽 그림과 같이 직육면체의 밑면의 가로, 세로의 길이를 각각 a, b라 하고 높이를 4라고 하면 부피가 96이므로

$4ab=96$ $\quad\therefore$ $ab=24$

이 직육면체의 대각선의 길이를 l이라고 하면

$l=\sqrt{a^2+b^2+4^2}$ $\quad\therefore$ $l^2=a^2+b^2+16$

이때 $a^2>0$, $b^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a^2+b^2+16\geq 2\sqrt{a^2\times b^2}+16$

$=2ab+16$ ($\because$ $a>0$, $b>0$)

$=2\times 24+16=64$ ($\because$ $ab=24$)

(단, 등호는 $a=b=2\sqrt{6}$일 때 성립한다.)

따라서 $l=\sqrt{a^2+b^2+16}\geq\sqrt{64}=8$이므로 구하는 대각선의 길이의 최솟값은 8이다.

답 8

참고

산술평균과 기하평균의 관계를 도형에 활용할 때에는 변하는 값을 각각 a, b로 놓고 주어진 값 또는 구하는 값을 $a+b$, ab로 나타낸다. 이때 a, b가 양수 조건을 만족하는지 확인한다.

058

직선 OP의 기울기는 $\frac{b}{a}$이므로 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$를 지나고 직선 OP에 수직인 직선의 방정식은

$y-b=-\frac{a}{b}(x-a)$ $\quad\therefore$ $y=-\frac{a}{b}x+b+\frac{a^2}{b}$

$\therefore$ $\mathrm{Q}\left(0,\ b+\frac{a^2}{b}\right)$

삼각형 OQR의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{a}\times\left(b+\frac{a^2}{b}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)$

$a>0$, $b>0$에서 $\frac{b}{a}>0$, $\frac{a}{b}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\geq\frac{1}{2}\times 2\sqrt{\frac{b}{a}\times\frac{a}{b}}$

$=1$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립한다.)

따라서 삼각형 OQR의 넓이의 최솟값은 1이다.

답 ②

059

x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(4^2+3^2)(x^2+y^2)\geq(4x+3y)^2$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{x}{4}=\frac{y}{3}\text{일 때 성립한다.}\right)$

이때 $4x+3y=10$이므로

$25(x^2+y^2)\geq 10^2$ $\quad\therefore$ $x^2+y^2\geq 4$

따라서 x^2+y^2의 최솟값은 4이다.

답 ④

060

$x^2+y^2=4$이므로

$x^2+4x+y^2+2y=4x+2y+4$ ……… ㉠

x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(4^2+2^2)(x^2+y^2)\geq(4x+2y)^2$

$(4x+2y)^2\leq(4^2+2^2)(x^2+y^2)$

$=20\times 4=80$ ($\because$ $x^2+y^2=4$)

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{x}{4}=\frac{y}{2}\text{일 때 성립한다.}\right)$

$\therefore$ $-4\sqrt{5}\leq 4x+2y\leq 4\sqrt{5}$

이때 $4-4\sqrt{5}\leq 4x+2y+4\leq 4+4\sqrt{5}$이므로 ㉠에 의하여

$4-4\sqrt{5}\leq x^2+4x+y^2+2y\leq 4+4\sqrt{5}$

따라서 x^2+4x+y^2+2y의 최댓값은 $4+4\sqrt{5}$, 최솟값은 $4-4\sqrt{5}$이므로 구하는 곱은

$(4+4\sqrt{5})(4-4\sqrt{5})=4^2-(4\sqrt{5})^2=16-80=-64$

답 ②

061

x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(1^2+2^2)(x^2+y^2)\geq(x+2y)^2$ $\left(\text{단, 등호는 } x=\frac{y}{2}\text{일 때 성립한다.}\right)$

❶

$x^2+y^2=a$이므로

$(x+2y)^2\leq(1^2+2^2)(x^2+y^2)=5a$

$\therefore -\sqrt{5a} \le x+2y \le \sqrt{5a}$ ❷

따라서 $x+2y$의 최댓값은 $\sqrt{5a}$, 최솟값은 $-\sqrt{5a}$이고 최댓값과 최솟값의 차가 10이므로

$\sqrt{5a}-(-\sqrt{5a})=10$, $2\sqrt{5a}=10$, $\sqrt{5a}=5$

양변을 제곱하면

$5a=25$ $\quad\therefore a=5$ ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ 코시-슈바르츠 부등식을 이용하여 부등식을 세울 수 있다.	30 %
❷ $x+2y$의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	40 %

062

x, y, z가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(2^2+3^2+5^2)(x^2+y^2+z^2) \ge (2x+3y+5z)^2$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{5}\text{일 때 성립한다.}\right)$

이때 $x^2+y^2+z^2=38$이므로

$(2x+3y+5z)^2 \le (2^2+3^2+5^2)(x^2+y^2+z^2)$

$=38\times 38=38^2$

$\therefore -38 \le 2x+3y+5z \le 38$

따라서 $M=38$, $m=-38$이므로

$M-m=38-(-38)=76$

답 ③

실력을 높이는 연습 문제

본문 095쪽

01

① x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 조건이다. 즉, 명제가 아니다.

② 오각형의 대각선의 개수는 $\frac{5\times(5-3)}{2}=5$이므로 참인 명제이다.

③ 2는 짝수이지만 소수이다. 즉, 거짓인 명제이다.

④ 직사각형의 두 대변은 각각 평행하므로 평행사변형이다. 즉, 참인 명제이다.

⑤ 참인 명제이다.

따라서 명제가 아닌 것은 ①이다.

답 ①

풍쌤 개념 CHECK

(1) **n각형의 대각선의 개수**_中 수학 1

$\frac{n(n-3)}{2}$

(2) **여러 가지 사각형의 대각선의 성질**_中 수학 2

① 평행사변형: 두 대각선이 서로를 이등분한다.

② 직사각형: 두 대각선의 길이가 같고 서로를 이등분한다.

③ 마름모: 두 대각선이 서로를 수직이등분한다.

④ 정사각형: 두 대각선의 길이가 같고 서로를 수직이등분한다.

⑤ 등변사다리꼴: 두 대각선의 길이가 같다.

02

조건 '$x\in A$ 또는 $x\in B$'의 부정은

$x\notin A$ 그리고 $x\notin B$

답 ③

03

문제 접근하기

실수 x, y, z에 대하여 $xyz=0$이면 $x=0$ 또는 $y=0$ 또는 $z=0$임을 이용하여 주어진 조건을 변형한 후 그 부정을 구한다.

$(a-b)(b-c)(c-a)=0$이면

$a-b=0$ 또는 $b-c=0$ 또는 $c-a=0$

$\therefore a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$

따라서 주어진 조건의 부정은

$a\ne b$이고 $b\ne c$이고 $c\ne a$

답 $a\ne b$이고 $b\ne c$이고 $c\ne a$

04

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면

$P=\{1, 2, 3, 4, 6\}$, $Q=\{1, 2, 3, 6, 9\}$

이므로 조건 'p 그리고 q'의 진리집합은

$P\cap Q=\{1, 2, 3, 6\}$

12와 18의 공약수, 즉 6의 약수의 집합이다.

답 $\{1, 2, 3, 6\}$

05

조건 '$\sim(p$ 또는 $\sim q)$'는 $\sim p$ 그리고 q

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면

조건 $\sim p$: $x\le 10$의 진리집합은 $P^C=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$

조건 q의 진리집합은 $Q=\{4, 8, 12, 16, 20\}$

따라서 조건 '$\sim(p$ 또는 $\sim q)$'의 진리집합은

$P^C\cap Q=\{4, 8\}$

이므로 구하는 모든 원소의 합은

$4+8=12$

답 ②

06

명제 'p이면 $\sim q$이다.'가 거짓임을 보이는 원소는 집합 P에는 속하고 Q^C에는 속하지 않으므로 구하는 집합은

$P\cap(Q^C)^C=P\cap Q$

답 ①

07

① $P\not\subset Q$이므로 $p \longrightarrow q$는 거짓이다.

② $Q\not\subset R$이므로 $q \longrightarrow r$는 거짓이다.

③ $R\not\subset P^C$이므로 $r \longrightarrow \sim p$는 거짓이다.

④ $Q\not\subset(P\cup R)$이므로 $q \longrightarrow (p$ 또는 $r)$는 거짓이다.

⑤ $(P\cap R)\subset Q$이므로 $(p$이고 $r) \longrightarrow q$는 참이다.

따라서 항상 참인 명제는 ⑤이다.

답 ⑤

08

$P\cap Q=Q$이므로 $Q\subset P$ .... ㉠

$P-R=\varnothing$이므로 $P\subset R$ .... ㉡

㉠, ㉡에서 $Q\subset P\subset R$

따라서 $q \longrightarrow p$, $p \longrightarrow r$, $q \longrightarrow r$가 참이고 그 대우 $\sim p \longrightarrow \sim q$, $\sim r \longrightarrow \sim p$, $\sim r \longrightarrow \sim q$도 참이므로 항상 참인 명제는 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

09

문제 접근하기

명제 $p \longrightarrow q$와 명제 $p \longrightarrow \sim q$가 모두 거짓이 되려면 $P\not\subset Q$, $P\not\subset Q^C$이어야 하므로 P, Q, Q^C을 구하여 조건을 만족시키도록 P와 Q^C을 수직선 위에 나타낸다.

$|x-k|\le 2$에서 $-2\le x-k\le 2$

$\therefore k-2\le x\le k+2$

$x^2-4x-5\le 0$에서 $(x+1)(x-5)\le 0$

$\therefore -1\le x\le 5$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면

$P=\{x\,|\,k-2\le x\le k+2\}$

$Q=\{x\,|\,-1\le x\le 5\}$

$Q^C=\{x\,|\,x<-1$ 또는 $x>5\}$

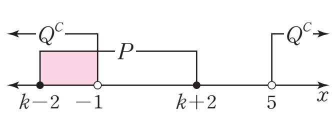
명제 $p \longrightarrow q$와 명제 $p \longrightarrow \sim q$가 모두 거짓이므로

$P\not\subset Q$이고 $P\not\subset Q^C$

이때 $k-2\ge -1$이고 $k+2\le 5$, 즉 $1\le k\le 3$이면 $P\subset Q$이므로 $P\not\subset Q$이려면 $k<1$ 또는 $k>3$이어야 한다.

(i) $k<1$일 때

$P\not\subset Q^C$을 만족시키는 두 집합 P, Q^C을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.

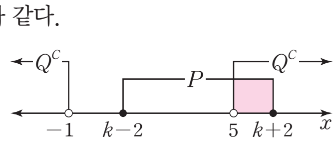


즉, $k+2\ge -1$이어야 하므로 $k\ge -3$

이때 $k<1$이므로 $-3\le k<1$

(ii) $k>3$일 때

$P\not\subset Q^C$을 만족시키는 두 집합 P, Q^C을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



즉, $k-2\le 5$이어야 하므로 $k\le 7$

이때 $k>3$이므로 $3<k\le 7$

(i), (ii)에서 $-3\le k<1$ 또는 $3<k\le 7$

따라서 구하는 모든 정수 k의 값의 합은

$-3+(-2)+(-1)+0+4+5+6+7=16$

답 ②

10

① [반례] $x=1$이면 $3x=3$

② 전체집합 U의 모든 원소 x에 대하여 $x^2>0$ (거짓)

③ [반례] $x=10$이면 $4x^2=400>200$

④ $x=1$, 2, 4, 5, 10은 20의 약수이다. (참)

⑤ [반례] $x=1$이면 $x=\frac{1}{x}$

따라서 참인 명제는 ④이다.

답 ④

11

$f(x)=x^2-8x+n$이라고 하면

$f(x)=x^2-8x+n=(x-4)^2+n-16$

함수 $f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(4,\ n-16)$이므로

$2\le x\le 5$에서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 $n-12$를 갖는다.

이때 주어진 명제가 참이 되려면 $2\le x\le 5$에서 $f(x)\ge 0$인 실수 x가 적어도 하나 존재해야 하므로

최댓값이 0 이상이어야 한다.

$f(2)=n-12\ge 0$ $\qquad\therefore n\ge 12$

따라서 자연수 n의 최솟값은 12이다.

답 ①

참고

$2\le x\le 5$에서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 $n-12$를 $x=4$일 때 최솟값 $n-16$을 갖는다.

12

ㄱ. $x=y$이면 $x+z=y+z$이다. (참)

역: $x+z=y+z$이면 $x=y$이다. (참)

ㄴ. $|x|=1$이면 $x=1$이다. (거짓)

[반례] $x=-1$이면 $|x|=1$이지만 $x\ne 1$이다.

역: $x=1$이면 $|x|=1$이다. (참)

ㄷ. $x=0$ 또는 $y=0$이면 $xy=0$이다. (참)

역: $xy=0$이면 $x=0$ 또는 $y=0$이다. (참)

따라서 명제와 그 역이 모두 참인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

13

주어진 명제가 참이므로 그 대우

'$x-a=0$이면 $x^2-3x-10=0$이다.'

도 참이다.

즉, $x=a$가 방정식 $x^2-3x-10=0$의 근이므로

$a^2-3a-10=0$, $(a+2)(a-5)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=5$

따라서 모든 상수 a의 값의 합은

$-2+5=3$

답 ①

14

각 명제의 대우를 구하여 그 참, 거짓을 판별하면 다음과 같다.

ㄱ. $x\le 3$이면 $x^2\le 9$이다. (거짓)

[반례] $x=-4$이면 $x\le 3$이지만 $x^2>9$이다.

ㄴ. $x\le 0$ 또는 $y\le 2$이면 $x+y\le 2$이다. (거짓)

[반례] $x=-1$, $y=4$이면 $x\le 0$ 또는 $y\le 2$를 만족시키지만 $x+y>2$이다.

ㄷ. $x\neq-1$이고 $y\neq2$이면 $(x+1)(y-2)\neq0$이다. (참)
따라서 대우가 참인 것은 ㄷ이다.

답 ③

|다른 풀이|
대우가 참이면 그 명제도 참이므로 명제가 참인 것을 찾는다.
ㄱ. [반례] $x=-4$이면 $x^2>9$이지만 $x<3$이다.
ㄴ. [반례] $x=-1$, $y=4$이면 $x+y>2$이지만 $x<0$이다.
ㄷ. 참인 명제이다.

15

명제 $\sim p \longrightarrow \sim q$의 역 $\sim q \longrightarrow \sim p$가 참이므로 그 대우 $p \longrightarrow q$도 참이다.
즉, $P\subset Q$이므로
$P-Q=\varnothing$, $P\cap Q=P$, $Q^C\subset P^C$
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

답 ④

16

두 명제 $p \longrightarrow \sim q$, $\sim p \longrightarrow r$가 모두 참이므로 그 대우 $q \longrightarrow \sim p$, $\sim r \longrightarrow p$도 참이다.
두 명제 $q \longrightarrow \sim p$, $\sim p \longrightarrow r$가 모두 참이므로 $q \longrightarrow r$와 그 대우 $\sim r \longrightarrow \sim q$도 참이다.
따라서 반드시 참이라고 할 수 없는 것은 ④이다.

답 ④

17

문제 접근하기

세 사람 중에서 한 사람의 말만이 참이므로 현진, 영수, 진희가 각각 참말을 했을 경우로 나누어 p가 참이면 $\sim p$는 거짓이고, p가 거짓이면 $\sim p$는 참이 됨을 이용하여 항상 참인 문장을 찾는다.

(i) 현진이의 말만 참인 경우
영수와 진희의 말은 거짓이므로 다음은 참이다.
영수는 등산을 갔었다.
진희는 등산을 가지 않았다.
(ii) 영수의 말만 참인 경우
현진이와 진희의 말은 거짓이므로 다음은 참이다.
영수는 등산을 가지 않았다.
진희는 등산을 가지 않았다.
(iii) 진희의 말만 참인 경우
현진이와 영수의 말은 거짓이므로 다음은 참이다.
영수는 등산을 가지 않았다.
영수는 등산을 갔었다.
그런데 위의 두 문장은 서로 모순이므로 진희의 말은 참이 될 수 없다.
(i)~(iii)에서 참인 말을 한 사람은 현진 또는 영수이고, 이때 항상 참인 문장은
'진희는 등산을 가지 않았다.'
이다.

답 ⑤

18

① $p \longrightarrow q$: $xy\neq0$이면 $x\neq0$, $y\neq0$이므로 $x^2+y^2\neq0$ (참)
$q \longrightarrow p$: [반례] $x=0$, $y=1$이면 $x^2+y^2\neq0$이지만 $xy=0$
따라서 $p \Longrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.
② $p \Longrightarrow q$이고 $q \Longrightarrow p$, 즉 $p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.
③ $p \longrightarrow q$: [반례] $x=-2$, $y=-1$이면 $x^2+y^2>0$이지만 $x<0$, $y<0$
$q \longrightarrow p$: $x>0$, $y>0$이면 $x^2+y^2>0$ (참)
따라서 $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.
④ $p \longrightarrow q$: $x^2+y^2=0$이면 $x=0$, $y=0$이므로 $x+y=0$ (참)
$q \longrightarrow p$: [반례] $x=-1$, $y=1$이면 $x+y=0$이지만 $x^2+y^2\neq0$
따라서 $p \Longrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.
⑤ $p \longrightarrow q$: $x=y=0$이면 $x^2-2xy+y^2=0$ (참)
$q \longrightarrow p$: [반례] $x=y=1$이면 $x^2-2xy+y^2=0$이지만 $x\neq0$, $y\neq0$
따라서 $p \Longrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.
따라서 p가 q이기 위한 필요충분조건인 것은 ②이다.

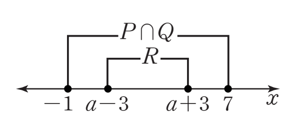
답 ②

19

문제 접근하기

세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R로 놓으면 r가 'p이고 q'이기 위한 충분조건이므로 $R\subset(P\cap Q)$이어야 함을 이용한다.

세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라고 하자.
$|x|\le7$에서 $-7\le x\le7$
$|x-a|\le3$에서 $-3\le x-a\le3$
$\therefore a-3\le x\le a+3$
$\therefore P=\{x\mid-7\le x\le7\}$, $Q=\{x\mid x\ge-1\}$,
$R=\{x\mid a-3\le x\le a+3\}$
r가 'p이고 q'이기 위한 충분조건이므로
$R\subset(P\cap Q)$
이때
$P\cap Q=\{x\mid-1\le x\le7\}$
이므로 오른쪽 그림에서



$a-3\ge-1$, $a+3\le7$
$a\ge2$, $a\le4$
$\therefore 2\le a\le4$
따라서 a의 최댓값은 4, 최솟값은 2이므로 구하는 합은
$4+2=6$

답 6

20

주어진 명제의 대우는
'a, b가 모두 $\boxed{\text{(가) 홀수}}$이면 ab는 $\boxed{\text{(나) 홀수}}$이다.'
a, b가 모두 $\boxed{\text{(가) 홀수}}$이므로
$a=2m-1$, $b=2n-1$ (m, n은 자연수)
로 나타낼 수 있다. 즉,

$ab=(2m-1)(2n-1)$

$\quad=4mn-2m-2n+1$

$\quad=2(\boxed{\text{(다) } 2mn-m-n})+1$

이므로 ab는 $\boxed{\text{(나) 홀수}}$이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

$\therefore$ (가): 홀수, (나): 홀수, (다): $2mn-m-n$

답 (가): **홀수** (나): **홀수** (다): $2mn-m-n$

21

$a>b>0$이므로

$X>0,\ Y>0$

$\therefore X^2-Y^2=(\sqrt{a-b})^2-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$

$=a-b-(a-2\sqrt{ab}+b)$

$=2\sqrt{ab}-2b$ $\quad \sqrt{b}>0,\ \sqrt{a}-\sqrt{b}>0$

$=2\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})>0$

즉, $X^2>Y^2$이고 $X>0,\ Y>0$이므로

$X>Y$

답 ①

22

두 직선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 기울기가 각각 $\frac{a}{2}$, $\frac{1}{b}$이고 두 직선이 서로 평행하므로

$\frac{a}{2}=\frac{1}{b} \qquad \therefore ab=2$ ·········· ㉠

$\therefore (a+1)(b+2)=ab+2a+b+2$

$=4+2a+b$ ($\because$ ㉠)

이때 $a>0,\ b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2a+b\ge 2\sqrt{2ab}=4$ ($\because$ ㉠)

(단, 등호는 $a=1,\ b=2$일 때 성립한다.)

등호는 $2a=b$일 때 성립하므로 ㉠에 대입하면 $a=1,\ b=2$

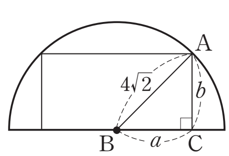
$\therefore (a+1)(b+2)=4+2a+b$

$\ge 4+4=8$

따라서 $(a+1)(b+2)$의 최솟값은 8이다.

답 8

23



직사각형의 가로의 길이를 $2a$, 세로의 길이를 b라고 하면 반원의 반지름의 길이가 $4\sqrt{2}$이므로 오른쪽 그림의 직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의하여

$a^2+b^2=(4\sqrt{2})^2=32$

이때 직사각형의 넓이는 $2ab$이고, $a^2>0,\ b^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a^2+b^2\ge 2\sqrt{a^2b^2}=2ab$ $\quad a>0,\ b>0$이므로 $\sqrt{a^2b^2}=ab$

즉, $2ab\le 32$이므로 넓이의 최댓값은 32이다.

이때 등호가 성립하는 경우는 $a^2=b^2$일 때이므로

$a^2+b^2=32$에서

$a=b=4$ ($\because a>0,\ b>0$)

따라서 구하는 직사각형의 둘레의 길이는

$2(2a+b)=2(2\times4+4)=24$

답 24

24

a, b가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^2\right\}(a^2+b^2)\ge\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{5}\right)^2$

(단, 등호는 $3a=5b$일 때 성립한다.)

이때 $\frac{a}{3}+\frac{b}{5}=\sqrt{34}$이므로

$\frac{34}{225}(a^2+b^2)\ge 34$

$\therefore a^2+b^2\ge 225$

따라서 a^2+b^2의 최솟값은 225이다.

답 225

참고

$a^2+b^2\ge225$에서 등호는 $3a=5b$일 때 성립한다.

이때 $\frac{a}{3}+\frac{b}{5}=\sqrt{34}$이므로 등호는 $a=\frac{75\sqrt{34}}{34}$, $b=\frac{45\sqrt{34}}{34}$일 때 성립한다.

07 함수

기본을 다지는 유형

본문 102쪽

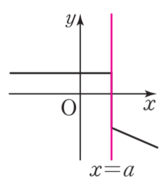
001

ㄱ. X의 원소 -1에 대응하는 Y의 원소가 2, 4로 2개이므로 함수가 아니다.
ㄴ. X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 함수이다.
ㄷ. X의 원소 1에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.
ㄹ. X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 함수이다.
따라서 함수인 것은 ㄴ, ㄹ이다.

답 ④

002

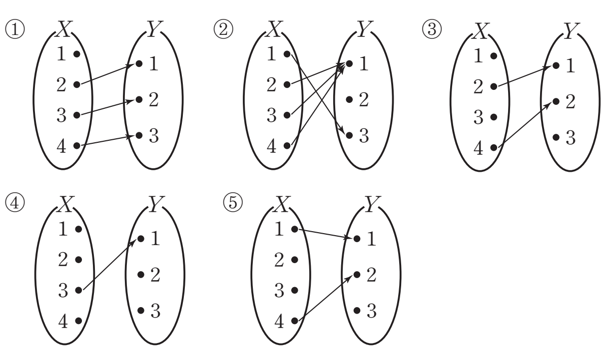
④ 오른쪽 그림과 같이 실수 a에 대하여 직선 $x=a$와 주어진 그래프가 여러 점에서 만나는 경우가 생기므로 함수의 그래프가 아니다.
따라서 함수의 그래프가 아닌 것은 ④이다.



답 ④

003

각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 함수인 것은 ②이다.

답 ②

004

$f(-2)=2$이므로 $-3\times(-2)+k=2$ $\qquad\therefore k=-4$
따라서 $f(x)=-3x-4$이므로
$f(2)=-3\times2-4=-10$

답 ①

005

$\dfrac{3-x}{2}=-3$에서 $3-x=-6$ $\qquad\therefore x=9$ ······ ❶

$x=9$를 $f\left(\dfrac{3-x}{2}\right)=4x-3$에 대입하면

$f(-3)=4\times9-3=33$ ······ ❷

답 33

채점 기준	비율
❶ $\dfrac{3-x}{2}=-3$을 만족시키는 x의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ $f(-3)$의 값을 구할 수 있다.	50 %

|다른 풀이|

$\dfrac{3-x}{2}=t$로 놓으면 $3-x=2t$ $\qquad\therefore x=3-2t$

$x=3-2t$를 $f\left(\dfrac{3-x}{2}\right)=4x-3$에 대입하면

$f(t)=4(3-2t)-3=9-8t$
$\therefore f(-3)=9-8\times(-3)=33$

006

$f(1)=4$, $f(2)=4$, $f(3)=6$이므로 함수 f의 치역은 $\{4, 6\}$
따라서 치역의 모든 원소의 합은
$4+6=10$

답 10

007

$y=-5$일 때, $3x-2=-5$, $3x=-3$ $\qquad\therefore x=-1$
$y=1$일 때, $3x-2=1$, $3x=3$ $\qquad\therefore x=1$
$y=4$일 때, $3x-2=4$, $3x=6$ $\qquad\therefore x=2$
따라서 구하는 정의역은 $\{-1, 1, 2\}$

답 ③

008

$f(1)=6-1=5$, $f(2)=\dfrac{2}{2}-1=0$, $f(3)=6-3=3$,

$f(4)=\dfrac{4}{2}-1=1$, $f(5)=6-5=1$, $f(6)=\dfrac{6}{2}-1=2$,

$f(7)=6-7=-1$, $f(8)=\dfrac{8}{2}-1=3$, $f(9)=6-9=-3$,

$f(10)=\dfrac{10}{2}-1=4$

따라서 구하는 치역은 $\{-3, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

답 $\{-3, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

009

$-\dfrac{1}{2}x^2+2x=-6$에서 $x^2-4x=12$, $x^2-4x-12=0$

$(x+2)(x-6)=0$ $\qquad\therefore x=-2$ 또는 $x=6$

$-\dfrac{1}{2}x^2+2x=0$에서 $x^2-4x=0$, $x(x-4)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=4$

$-\dfrac{1}{2}x^2+2x=2$에서 $x^2-4x=-4$, $x^2-4x+4=0$

$(x-2)^2=0$ $\qquad\therefore x=2$

따라서 정의역이 $\{-2, 0, 2, 4, 6\}$이므로
$a=4$, $b=6$ ($\because a<b$)
$\therefore b-a=6-4=2$

답 ②

010

$f(x)=ax+b$로 놓으면 $a<0$이므로 일차함수 f는 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소한다.

$\therefore f(1)=6,\ f(4)=-3$ ❶

즉, $a+b=6,\ 4a+b=-3$이므로 두 식을 연립하여 풀면

$a=-3,\ b=9$ ❷

$\therefore ab=-3\times 9=-27$ ❸

답 -27

채점 기준	비율
❶ $f(1),\ f(4)$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ $a,\ b$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

011

ㄱ. $f(-1)=g(-1)=0,\ f(0)=g(0)=1,\ f(1)=g(1)=0$
　$\therefore f=g$

ㄴ. $f(-1)=g(-1)=-1,\ f(0)=g(0)=0,\ f(1)=g(1)=1$
　$\therefore f=g$

ㄷ. $f(-1)=g(-1)=-3,\ f(0)=g(0)=-1,\ f(1)=g(1)=1$
　$\therefore f=g$

따라서 $f=g$인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

참고

두 함수 $f,\ g$가 서로 같다는 것은 두 함수 $f,\ g$의 함수식이 같다는 것이 아니라 정의역의 각 원소에 대하여 두 함수의 함숫값이 같다는 뜻이다.

012

$f(-1)=g(-1)$에서

$1-a+2=-1+b$　　$\therefore a+b=4$ ······ ㉠

$f(1)=g(1)$에서

$1+a+2=1+b$　　$\therefore a-b=-2$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=3$

따라서 $f(x)=x^2+x+2$이므로

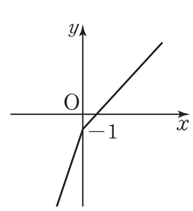
$f(-1)=(-1)^2-1+2=2,\ f(1)=1^2+1+2=4$

즉, 함수 f의 치역은 $\{2,\ 4\}$

답 $\{2,\ 4\}$

013

함수 f가 일대일함수가 되려면 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, $x\geq 0$에서 함수 $y=ax-1$은 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가해야 하므로

$a>0$

답 $a>0$

014

함수 f가 일대일함수이고 $f(1)=1$이므로 $f(2),\ f(3)$의 값은 각각 0, 2, 3 중에서 하나이어야 하고 $f(2)\neq f(3)$이어야 한다.

따라서 $f(2)+f(3)$의 값은

$f(2)=0,\ f(3)=2$ 또는 $f(2)=2,\ f(3)=0$

일 때 최솟값 2를 갖는다.

답 ②

참고

$f(2)+f(3)$의 값은 $f(2)=2,\ f(3)=3$ 또는 $f(2)=3,\ f(3)=2$일 때 최댓값 5를 갖는다.

015

ㄱ. 치역과 공역이 실수 전체의 집합으로 같고, 실수 a에 대하여 직선 $y=a$와 그래프가 오직 한 점에서 만나므로 일대일대응을 나타내는 그래프이다.

ㄴ. 치역이 $\{y\,|\,y>0\}$으로 공역과 다르므로 일대일대응을 나타내는 그래프가 아니다.

ㄷ. 치역과 공역이 실수 전체의 집합으로 같고, 실수 a에 대하여 직선 $y=a$와 그래프가 오직 한 점에서 만나므로 일대일대응을 나타내는 그래프이다.

ㄹ. 실수 a에 대하여 직선 $y=a$와 그래프가 2개 또는 3개의 점에서 만나기도 하므로 일대일대응을 나타내는 그래프가 아니다.

따라서 일대일대응을 나타내는 그래프인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

016

$f(x)=x^2-2x+k=(x-1)^2+k-1$이므로 $x\geq 1$에서 함수 f는 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가한다. ❶

따라서 함수 f가 일대일대응이 되려면

$f(1)=2$

이어야 한다. ❷

즉, $f(1)=1-2+k=2$이므로 $k=3$ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ $x\geq 1$에서 함수 f가 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하는 함수임을 알 수 있다.	40 %
❷ 함수 f가 일대일대응이 될 조건을 구할 수 있다.	40 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	20 %

017

Y의 원소에서 7을 제외한 5, 6, 8 중 차가 3인 두 수를 찾는다.

함수 f가 일대일대응이고 $f(1)=7,\ f(2)-f(3)=3$이므로

$f(2)=8,\ f(3)=5$

따라서 $f(4)=6$이므로 $f(3)+f(4)=5+6=11$

답 ①

018

함수 f가 상수함수이고 $f(10)=2$이므로

$f(1)=f(3)=f(5)=f(7)=f(9)=f(11)=2$

$\therefore f(1)+f(3)+f(5)+f(7)+f(9)+f(11)=6\times 2=12$

답 12

019

함수 f가 항등함수이므로 $f(2)=2,\ f(5)=5$

$\therefore g(2)=f(2)=2$

이때 함수 g가 상수함수이므로 $g(7)=g(2)=2$

$\therefore f(5)+g(7)=5+2=7$

답 ③

020

$f(0)=2$이고 함수 f가 상수함수이므로 $f(x)=2$

$f(2)=4+2a+b=2$이므로

$2a+b=-2$ ⋯⋯⋯ ㉠

$f(4)=16+4a+b=2$이므로

$4a+b=-14$ ⋯⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-6$, $b=10$

$\therefore a+b=-6+10=4$

답 ④

021

함수 g가 항등함수이므로 $g(1)=1$, $g(2)=2$, $g(3)=3$

$\therefore f(3)=h(1)=g(2)=2$

함수 h가 상수함수이므로 $h(1)=h(2)=h(3)=2$ ⋯⋯⋯ ❶

$f(2)+f(3)=f(1)$에서

$f(2)+2=f(1)$

$f(3)=2$이므로 X의 원소에서 2를 제외한 1, 3 중 $f(2)+2=f(1)$을 만족시키도록 $f(1)$, $f(2)$의 값을 찾는다.

함수 f가 일대일대응이므로

$f(1)=3$, $f(2)=1$ ⋯⋯⋯ ❷

$\therefore f(1)+g(3)+h(2)=3+3+2=8$ ⋯⋯⋯ ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ 함수 g, h의 모든 함숫값과 $f(3)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $f(1)$, $f(2)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $f(1)+g(3)+h(2)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

022

함수 f가 항등함수이므로 $f(x)=x$이어야 한다.

즉, $x^3-3x=x$이어야 하므로

$x^3-4x=0$, $x(x^2-4)=0$, $x(x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

따라서 집합 $\{-2, 0, 2\}$의 부분집합 중에서 공집합을 제외한 집합을 X로 정하면 함수 f는 항등함수가 되므로 집합 X의 개수는

$2^3-1=8-1=7$

답 ④

023

X에서 X로의 함수의 개수는 $3^3=27$

X에서 X로의 일대일대응의 개수는 ${}_3\mathrm{P}_3=3\times2\times1=6$

X에서 X로의 상수함수의 개수는 3

따라서 $p=27$, $q=6$, $r=3$이므로

$p+q-r=27+6-3=30$

답 ④

024

$f(2)=c$이고 함수 f는 일대일대응이므로 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는 집합 $\{1, 4, 8\}$에서 $\{a, b, d\}$로의 일대일대응의 개수와 같다.

따라서 구하는 함수 f의 개수는

${}_3\mathrm{P}_3=3\times2\times1=6$

답 ④

025

$f(0)f(2)\neq0$이므로 $f(0)\neq0$, $f(2)\neq0$

$f(-2)$의 값이 될 수 있는 것은 -2, 0, 2의 3개

$f(0)$의 값이 될 수 있는 것은 -2, 2의 2개

$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 -2, 2의 2개

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$3\times2\times2=12$

답 12

026

조건 (가)에 의하여 함수 f는 일대일함수이다.

조건 (나)에 의하여 함숫값 $f(x)$는 $-3\le f(x)\le1$이다. ⋯⋯⋯ ❶

따라서 함수 f는 집합 $\{1, 2, 3\}$에서 집합 $\{-3, -2, -1, 0, 1\}$로의 일대일함수이다. ⋯⋯⋯ ❷

즉, 구하는 함수 f의 개수는

${}_5\mathrm{P}_3=5\times4\times3=60$ ⋯⋯⋯ ❸

답 60

채점 기준	비율
❶ 조건 (가), (나)의 의미를 이해할 수 있다.	30 %
❷ 함수 f가 어떤 함수인지 알 수 있다.	40 %
❸ 함수 f의 개수를 구할 수 있다.	30 %

027

$x+f(x)\ge4$이므로

(i) $x=1$일 때

$1+f(1)\ge4$에서 $f(1)\ge3$

즉, $f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 3, 4의 2개이다.

(ii) $x=2$일 때

$2+f(2)\ge4$에서 $f(2)\ge2$

즉, $f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 2, 3, 4의 3개이다.

(iii) $x=3$일 때

$3+f(3)\ge4$에서 $f(3)\ge1$

즉, $f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4의 4개이다.

(iv) $x=4$일 때

$4+f(4)\ge4$에서 $f(4)\ge0$

즉, $f(4)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4의 4개이다.

(i)~(iv)에서 함수 f의 개수는

$2\times3\times4\times4=96$

답 96

028

$(g\circ f)(3)=g(f(3))=g(4)=3$
$(f\circ g)(3)=f(g(3))=f(1)=5$
$\therefore (g\circ f)(3)-(f\circ g)(3)=3-5=-2$

답 ③

029

$(f\circ g)(-1)=f(g(-1))=f(-2)=-8$
$(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(4)=13$
$\therefore (f\circ g)(-1)+(g\circ f)(2)=-8+13=5$

답 ⑤

030

$(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(4)=16$
$(f\circ f)(\sqrt{3})=f(f(\sqrt{3}))=f(2)=8$
$\therefore (f\circ f)(1)-(f\circ f)(\sqrt{3})=16-8=8$

답 ⑤

031

$f\left(\frac{2}{3}\right)=5\times\frac{2}{3}-3=\frac{1}{3}$이고 함수의 합성에서 결합법칙이 성립하므로

$$(h\circ(g\circ f))\left(\frac{2}{3}\right)=((h\circ g)\circ f)\left(\frac{2}{3}\right)=(h\circ g)\left(f\left(\frac{2}{3}\right)\right)$$
$$=(h\circ g)\left(\frac{1}{3}\right)=6\times\frac{1}{3}+5=7$$

답 ③

032

$f(1)=2$, $(g\circ f)(1)=3$이므로
$(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(2)=3$
$g(3)=2$, $(f\circ g)(3)=3$이므로
$(f\circ g)(3)=f(g(3))=f(2)=3$ ······ ❶
함수 f가 일대일대응이고 $f(1)=2$, $f(2)=3$이므로
$f(3)=1$
함수 g가 일대일대응이고 $g(2)=3$, $g(3)=2$이므로
$g(1)=1$ ······ ❷
$\therefore f(3)+g(1)=1+1=2$ ······ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ $f(2)$, $g(2)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $f(3)$, $g(1)$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $f(3)+g(1)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

033

$(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(3)=3a+2$
즉, $3a+2=8$이므로 $3a=6$ $\quad\therefore a=2$
따라서 $g(x)=2x+2$이므로
$g(5)=2\times5+2=12$

답 ④

034

$f(2)=4-4+a=a$이므로
$(f\circ f)(2)=f(f(2))=f(a)=a^2-2a+a=a^2-a$
$f(4)=16-8+a=a+8$이므로
$(f\circ f)(4)=f(f(4))=f(a+8)$
$\qquad=(a+8)^2-2(a+8)+a=a^2+15a+48$
이때 $(f\circ f)(2)=(f\circ f)(4)$이므로
$a^2-a=a^2+15a+48$
$16a=-48$ $\quad\therefore a=-3$
따라서 $f(x)=x^2-2x-3$이므로
$f(6)=36-12-3=21$

답 ①

035

$(f\circ(g\circ h))(a)=((f\circ g)\circ h)(a)=(f\circ g)(h(a))$
$\qquad=(f\circ g)(-2a+1)=3(-2a+1)-1$
$\qquad=-6a+2$
즉, $-6a+2=14$이므로
$6a=-12$ $\quad\therefore a=-2$

답 ①

036

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2x+b)$
$\qquad=a(2x+b)-2=2ax+ab-2$
모든 실수 x에 대하여 $(f\circ g)(x)=x$, 즉 $2ax+ab-2=x$가 성립하므로
$2ax+ab-2=x$는 x에 대한 항등식
$2a=1$, $ab-2=0$ $\quad\therefore a=\frac{1}{2}$, $b=4$
$\therefore 2(a+b)=2\left(\frac{1}{2}+4\right)=9$

답 9

풍쌤 개념 CHECK

항등식의 성질_高 공통수학 1
(1) $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식이면 $a=b=c=0$이다.
(2) $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식이면 $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$이다.
(3) $ax+by+c=0$이 x, y에 대한 항등식이면 $a=b=c=0$이다.

037

$f(3)=7$이므로 $3a-2=7$, $3a=9$ $\quad\therefore a=3$
즉, $f(x)=3x-2$, $g(x)=bx+3$이므로
$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(bx+3)$
$\qquad=3(bx+3)-2=3bx+7$
$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(3x-2)$
$\qquad=b(3x-2)+3=3bx-2b+3$
이때 $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$이므로
$3bx+7=3bx-2b+3$
$7=-2b+3$, $2b=-4$ $\quad\therefore b=-2$
$\therefore a-b=3-(-2)=5$

답 ⑤

038

$(g \circ h)(x)=g(h(x))=2h(x)-5$

$(g \circ h)(x)=f(x)$에서

$2h(x)-5=4x^2+1$

$2h(x)=4x^2+6$

$\therefore h(x)=2x^2+3$

답 $h(x)=2x^2+3$

039

$(f \circ f)(x)=f(f(x))=f(2x+a)$

$\qquad =2(2x+a)+a=4x+3a$

$(f \circ f)(x)$가 $x-3$으로 나누어떨어지므로

$(f \circ f)(3)=0$

즉, $4\times3+3a=0$이므로

$3a=-12 \qquad \therefore a=-4$

따라서 $f(x)=2x-4$, $(f \circ f)(x)=4x-12$이므로

$f(1)+(f \circ f)(2)=-2+(-4)=-6$

답 ③

풍쌤 개념 CHECK

인수 정리_高 공통수학 1

다항식 $P(x)$에 대하여

(1) $P(a)=0$이면 $P(x)$는 일차식 $x-a$로 나누어떨어진다.

(2) $P(x)$가 일차식 $x-a$로 나누어떨어지면 $P(a)=0$이다.

040

$(f \circ g)(x)=f(g(x))=f(x-3)$

$\qquad =(x-3)^2-6(x-3)+a$

$\qquad =x^2-12x+27+a$

$\qquad =(x-6)^2+a-9$

모든 실수 x에 대하여 $(f \circ g)(x)\geq0$, 즉 $(x-6)^2+a-9\geq0$이어야 하므로

$a-9\geq0 \qquad \therefore a\geq9$

따라서 실수 a의 최솟값은 9이다.

답 9

041

$f(x)=-x+2$이므로

$f^2(x)=f(f(x))=f(-x+2)=-(-x+2)+2=x$

$f^3(x)=f(f^2(x))=f(x)=-x+2$

$\vdots$

$\therefore f^n(x)=\begin{cases} -x+2 & (n\text{은 홀수}) \\ x & (n\text{은 짝수}) \end{cases}$

$\therefore f^{20}(3)+f^{21}(5)=3+(-5+2)=0$

답 ③

042

$f(x)=2x$이므로

$f^2(x)=f(f(x))=f(2x)=2\times2x=2^2x$

$f^3(x)=f(f^2(x))=f(2^2x)=2\times2^2x=2^3x$

$\vdots$

$\therefore f^{10}(x)=2^{10}x$ ······ ❶

$f^{10}(a)=2048$에서

$2^{10}a=2048$, $2^{10}a=2^{11}$

$\therefore a=2$ ······ ❷

답 2

채점 기준	비율
❶ $f^{10}(x)$를 구할 수 있다.	70 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30 %

043

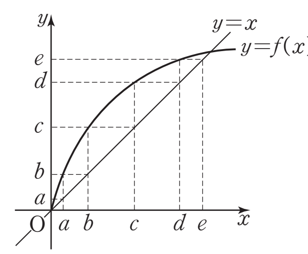
주어진 그래프에서 $f(0)=-1$, $f(-1)=3$이므로

$(f \circ f)(0)=f(f(0))=f(-1)=3$

답 ⑤

044

직선 $y=x$를 이용하여 y축과 점선이 만나는 점의 y좌표를 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$(f \circ f \circ f)(b)=f(f(f(b)))$

$\qquad =f(f(c))$

$\qquad =f(d)$

$\qquad =e$

답 ⑤

참고

직선 $y=x$ 위의 점은 x좌표와 y좌표가 같음을 이용하여 y축과 점선이 만나는 점의 y좌표를 구할 수 있다.

045

$(f \circ f)(a)=6$에서

$f(f(a))=6$

주어진 그래프에서 $f(2)=6$이므로

$f(a)=2$

또, 주어진 그래프에서 $f(4)=2$이므로

$a=4$

답 ④

046

주어진 그림에서 $f(3)=1$

$f^{-1}(3)=k$라고 하면 $f(k)=3$

주어진 그림에서 $f(7)=3$이므로 $k=7$

$\therefore f^{-1}(3)=7$

$\therefore f(3)+f^{-1}(3)=1+7=8$

답 ③

047

$f^{-1}(7)=2$이므로 $f(2)=7$

즉, $5\times2+a=7$이므로 $a=-3$

따라서 $f(x)=5x-3$이므로

$f(5)=5\times5-3=22$

답 ③

048

$g^{-1}(3)=-1$이므로 $g(-1)=3$

즉, $-4+k=3$이므로 $k=7$

$\therefore f(x)=7x-3,\ g(x)=4x+7$

$f^{-1}(4)=a$라고 하면 $f(a)=4$이므로

$7a-3=4,\ 7a=7 \qquad \therefore a=1$

$\therefore f^{-1}(4)=1$

$\therefore f^{-1}(4)+g(-2)=1+(-1)=0$

답 0

049

$\frac{3x-1}{4}=t$로 놓으면 $3x-1=4t \qquad \therefore x=\frac{4t+1}{3}$

$\therefore f(t)=12\times\frac{4t+1}{3}-3=16t+1$

$f^{-1}(33)=k$라고 하면 $f(k)=33$이므로

$16k+1=33,\ 16k=32 \qquad \therefore k=2$

$\therefore f^{-1}(33)=2$

답 ⑤

050

$x\geq0$일 때 $f(x)=-2x+1\leq1$

$x<0$일 때 $f(x)=x^2+1>1$ ······ ❶

$f^{-1}(10)=a$라고 하면 $f(a)=10>1$이므로

$a<0$

즉, $a^2+1=10$이므로

$a^2=9 \qquad \therefore a=-3\ (\because a<0) \qquad \therefore f^{-1}(10)=-3$

$f^{-1}(-3)=b$라고 하면 $f(b)=-3<1$이므로 $b>0$

즉, $-2b+1=-3$이므로

$2b=4 \qquad \therefore b=2 \qquad \therefore f^{-1}(-3)=2$ ······ ❷

$\therefore f^{-1}(10)+f^{-1}(-3)=-3+2=-1$ ······ ❸

답 -1

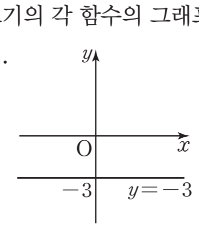
채점 기준	비율
❶ $x\geq0$, $x<0$일 때 $f(x)$의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❷ $f^{-1}(10)$, $f^{-1}(-3)$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $f^{-1}(10)+f^{-1}(-3)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

051

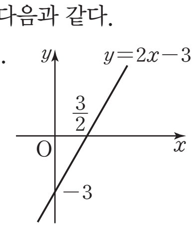
역함수가 존재하려면 그 함수는 일대일대응이어야 한다.

보기의 각 함수의 그래프를 그리면 다음과 같다.

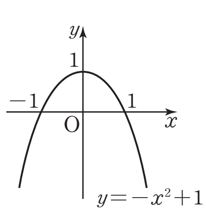
ㄱ.



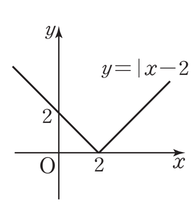
ㄴ.



ㄷ.



ㄹ.



따라서 일대일대응인 함수의 그래프는 ㄴ이므로 역함수가 존재하는 것은 ㄴ이다.

답 ②

052

$f(x)=x^2-4x+4=(x-2)^2$

함수 f의 역함수가 존재하려면 f가 일대일대응이어야 하므로

$a\geq2,\ f(a)=a$

이어야 한다.

$f(a)=a$에서 $a^2-4a+4=a$

$a^2-5a+4=0,\ (a-1)(a-4)=0$

$\therefore a=4\ (\because a\geq2)$

답 4

053

(1) $y=\frac{1}{3}x-4$에서

$\frac{1}{3}x=y+4 \qquad \therefore x=3y+12$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=3x+12$

(2) 함수 $y=-x-3$의 정의역이 $\{x|x\leq2\}$이므로 치역은 $\{y|y\geq-5\}$이다.

역함수의 정의역은 $\{x|x\geq-5\}$, 치역은 $\{y|y\leq2\}$이다.

$y=-x-3$에서

$x=-y-3$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=-x-3\ (x\geq-5)$

답 (1) $y=3x+12$ (2) $y=-x-3\ (x\geq-5)$

참고

(1)과 같이 역함수의 정의역이 실수 전체의 집합이면 별도로 언급하지 않아도 된다. 그러나 (2)와 같이 역함수의 정의역이 실수 전체의 집합이 아닐 경우에는 반드시 정의역을 써주어야 한다.

054

$y=ax+b$로 놓으면

$ax=y-b \qquad \therefore x=\frac{1}{a}y-\frac{b}{a}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$

따라서 $f^{-1}(x)=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$이므로

$\frac{1}{a}=\frac{2}{3},\ -\frac{b}{a}=-1 \qquad \therefore a=\frac{3}{2},\ b=\frac{3}{2}$

$\therefore ab=\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{9}{4}$

답 ③

055

$h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x+1)$

$\quad=-3(2x+1)+2=-6x-1$

$y=-6x-1$로 놓으면

$6x=-y-1 \qquad \therefore x=-\frac{1}{6}y-\frac{1}{6}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=-\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}$

$\therefore h^{-1}(x)=-\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}$

답 ③

056

ㄱ. $y=x-2$로 놓으면 $x=y+2$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=x+2$

즉, $f^{-1}(x)=x+2$이므로 $f\neq f^{-1}$

ㄴ. $y=-x+5$로 놓으면 $x=-y+5$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=-x+5$

즉, $f^{-1}(x)=-x+5$이므로 $f=f^{-1}$

ㄷ. $y=2x$로 놓으면 $x=\frac{1}{2}y$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{2}x$

즉, $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x$이므로 $f\neq f^{-1}$

ㄹ. $y=\frac{1}{x}$로 놓으면 $x=\frac{1}{y}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{x}$

즉, $f^{-1}(x)=\frac{1}{x}$이므로 $f=f^{-1}$

따라서 $f=f^{-1}$를 만족시키는 함수인 것은 ㄴ, ㄹ이다.

답 ④

|다른 풀이|

$f=f^{-1}$이므로 $(f\circ f)(x)=x$

각 보기의 함수에 대하여 $(f\circ f)(x)$를 구하면 다음과 같다.

ㄱ. $(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(x-2)=(x-2)-2=x-4$

ㄴ. $(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(-x+5)=-(-x+5)+5=x$

ㄷ. $(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(2x)=2(2x)=4x$

ㄹ. $(f\circ f)(x)=f(f(x))=f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\frac{1}{x}}=x$

따라서 $(f\circ f)(x)=x$, 즉 $f=f^{-1}$를 만족시키는 함수인 것은 ㄴ, ㄹ이다.

057

$y=\frac{1}{2}x+1$로 놓으면

$\frac{1}{2}x=y-1 \qquad \therefore x=2y-2$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=2x-2$

$\therefore f^{-1}(x)=2x-2$ .... ❶

$(g\circ f^{-1})(x)=4x+3$에서 $g(f^{-1}(x))=4x+3$

$\therefore g(2x-2)=4x+3$

$2x-2=t$로 놓으면

$2x=t+2 \qquad \therefore x=\frac{1}{2}t+1$

$\therefore g(t)=4\left(\frac{1}{2}t+1\right)+3=2t+7$

$\therefore g(x)=2x+7$ .... ❷

답 $g(x)=2x+7$

채점 기준	비율
❶ $f^{-1}(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ $g(x)$를 구할 수 있다.	60 %

058

주어진 그림에서 $g(4)=6$이므로

$(f^{-1}\circ g)(4)=f^{-1}(g(4))=f^{-1}(6)$

$f^{-1}(6)=a$라고 하면 $f(a)=6$

주어진 그림에서 $f(2)=6$이므로 $a=2$

$\therefore (f^{-1}\circ g)(4)=2$

답 ②

059

$(f^{-1}\circ g)(-4)=f^{-1}(g(-4))=f^{-1}(-2)$

$f^{-1}(-2)=a$라고 하면 $f(a)=-2$

즉, $2a-3=-2$이므로

$2a=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$

$\therefore (f^{-1}\circ g)(-4)=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

|다른 풀이|

$y=2x-3$으로 놓으면

$2x=y+3 \qquad \therefore x=\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

$\therefore (f^{-1}\circ g)(-4)=f^{-1}(g(-4))=f^{-1}(-2)$

$=-1+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$

060

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f\left(\frac{1}{4}x-1\right)$

$=8\left(\frac{1}{4}x-1\right)+a=2x+a-8$

이때 $(f\circ g)(x)=2x+3$이므로

$a-8=3 \qquad \therefore a=11$

따라서 $f(x)=8x+11$이므로 $f^{-1}(-5)=k$라고 하면

$f(k)=-5$

즉, $8k+11=-5$이므로

$8k=-16 \qquad \therefore k=-2$

$\therefore f^{-1}(-5)=-2$

$\therefore (g\circ f^{-1})(-5)=g(f^{-1}(-5))=g(-2)$

$=-\frac{1}{2}-1=-\frac{3}{2}$

답 ②

061

$f^{-1}(4)=1$이므로 $f(1)=4$

즉, $a+1=4$이므로 $a=3$ $\quad\therefore f(x)=3x+1$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(3x+1)$

$\qquad\qquad =b(3x+1)+3=3bx+b+3$

이때 $(g\circ f)(x)=3x+c$이므로

$3b=3,\ b+3=c$ $\quad\therefore b=1,\ c=4$

$\therefore g(x)=x+3,\ (g\circ f)(x)=3x+4$

$g^{-1}(f(-2))=k$라고 하면

$g(k)=f(-2)=-6+1=-5$

즉, $k+3=-5$이므로 $k=-8$

$\therefore g^{-1}(f(-2))=-8$

답 ②

062

$g^{-1}(48)=a$라고 하면 $g(a)=48$

$a<20$일 때 $g(a)=3a=48$ $\quad\therefore a=16$

$a\geq 20$일 때 $g(a)=2a+20=48$을 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다. $a\geq 20$일 때 $g(a)\geq 60$

$\therefore g^{-1}(48)=16$

$\therefore f(g^{-1}(48))=f(16)=64+16=80$ ······ ❶

$f^{-1}(g(48))=b$라고 하면

$f(b)=g(48)=96+20=116$

즉, $4b+16=116$이므로 $4b=100$ $\quad\therefore b=25$

$\therefore f^{-1}(g(48))=25$ ······ ❷

$\therefore f(g^{-1}(48))+f^{-1}(g(48))=80+25=105$ ······ ❸

답 105

채점 기준	비율
❶ $f(g^{-1}(48))$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $f^{-1}(g(48))$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $f(g^{-1}(48))+f^{-1}(g(48))$의 값을 구할 수 있다.	20 %

063

$(f^{-1}\circ f\circ f^{-1})(a)=f^{-1}((f\circ f^{-1})(a))=f^{-1}(a)$이므로

$(f^{-1}\circ f\circ f^{-1})(a)=3$에서 $f^{-1}(a)=3$

따라서 $f(3)=a$이므로

$a=3^3+1=28$

답 28

064

$(f\circ(f\circ g)^{-1}\circ f)(14)=(f\circ g^{-1}\circ f^{-1}\circ f)(14)$

$\qquad =(f\circ g^{-1})(14)$

$\qquad =f(g^{-1}(14))$

$g^{-1}(14)=k$라고 하면 $g(k)=14$

즉, $3k+5=14$이므로 $3k=9$ $\quad\therefore k=3$

$\therefore g^{-1}(14)=3$

$\therefore (f\circ(f\circ g)^{-1}\circ f)(14)=f(g^{-1}(14))$

$\qquad =f(3)=3+4=7$

답 ③

065

함수 $f\circ g^{-1}$의 역함수는 $(f\circ g^{-1})^{-1}=g\circ f^{-1}$

$y=4x-1$로 놓으면

$4x=y+1$ $\quad\therefore x=\frac{1}{4}y+\frac{1}{4}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}$

$\therefore h(x)=(g\circ f^{-1})(x)=g(f^{-1}(x))$

$\qquad =g\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\right)=8\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\right)+4$

$\qquad =2x+6$

답 ②

|다른 풀이|

$y=8x+4$로 놓으면

$8x=y-4$ $\quad\therefore x=\frac{1}{8}y-\frac{1}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{8}x-\frac{1}{2}$

$\therefore g^{-1}(x)=\frac{1}{8}x-\frac{1}{2}$

$\therefore (f\circ g^{-1})(x)=f(g^{-1}(x))=f\left(\frac{1}{8}x-\frac{1}{2}\right)$

$\qquad =4\left(\frac{1}{8}x-\frac{1}{2}\right)-1=\frac{1}{2}x-3$

$y=\frac{1}{2}x-3$으로 놓으면

$\frac{1}{2}x=y+3$ $\quad\therefore x=2y+6$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=2x+6$

$\therefore h(x)=2x+6$

066

$(f\circ(f\circ g)^{-1}\circ f)(-3)=(f\circ g^{-1}\circ f^{-1}\circ f)(-3)$

$\qquad =(f\circ g^{-1})(-3)$

$\qquad =f(g^{-1}(-3))$

$g^{-1}(-3)=k$라고 하면 $g(k)=-3$

즉, $k-2=-3$이므로 $k=-1$

$\therefore (f\circ(f\circ g)^{-1}\circ f)(-3)=f(g^{-1}(-3))$

$\qquad =f(-1)=-1+1=0$

$-1<0$이므로 $f(x)=x+1$에 $x=-1$ 대입

답 0

067

$(h\circ f\circ g)(x)=h((f\circ g)(x))=h(x)$이므로

$(f\circ g)(x)=x$

이때 함수 $f(x)$는 일대일대응이므로 함수 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이다.

따라서 $g(6)=k$라고 하면 $f(k)=6$

즉, $5k+1=6$이므로 $5k=5$ $\quad\therefore k=1$

$\therefore g(6)=1$

답 ④

068

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 그래프의 교점의 좌표는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 좌표와 같다.

교점의 x좌표가 -2이므로 교점의 좌표는

$(-2,\ -2)$

따라서 함수 $f(x)=4x+k$의 그래프가 점 $(-2,\ -2)$를 지나므로

$-8+k=-2 \qquad \therefore k=6$

답 6

069

함수 $f(x)=ax+b$의 그래프가 점 $(3,\ -6)$을 지나므로

$3a+b=-6$ ······ ㉠

역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프도 점 $(3,\ -6)$을 지나므로 함수 $f(x)=ax+b$의 그래프는 점 $(-6,\ 3)$을 지난다.

$\therefore -6a+b=3$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1,\ b=-3$

따라서 $f(x)=-x-3$이므로

$f(-1)=1-3=-2$

답 ②

070

함수 $f(x)=ax+b$의 그래프가 점 $(-2,\ 3)$을 지나므로

$-2a+b=3$ ······ ㉠

역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 점 $(4,\ -1)$을 지나므로 함수 $f(x)=ax+b$의 그래프는 점 $(-1,\ 4)$를 지난다.

$\therefore -a+b=4$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=5$

$\therefore a+b=1+5=6$

답 ③

071

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 그래프의 교점의 좌표는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 좌표와 같다.

$x^2-8x=x$에서

$x^2-9x=0,\ x(x-9)=0$

$\therefore x=9\ (\because x\ge 4)$

따라서 교점의 좌표는 $(9,\ 9)$이므로

$a=9,\ b=9$

$\therefore a+b=9+9=18$

답 18

072

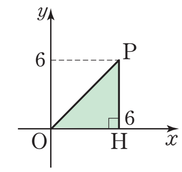
함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 그래프의 교점의 좌표는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 좌표와 같다.

$2x-6=x$에서 $x=6$

$\therefore \mathrm{P}(6,\ 6),\ \mathrm{H}(6,\ 0)$

따라서 삼각형 OPH의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 6\times 6=18$



답 ③

073

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(-1,\ 3)$을 지나므로 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 점 $(3,\ -1)$을 지난다.

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 일치하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $(-1,\ 3)$, $(3,\ -1)$을 지난다. ······ ❶

$f(x)=ax+b\ (a\ne 0,\ a,\ b$는 상수$)$라고 하면

$-a+b=3,\ 3a+b=-1$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-1,\ b=2$

이므로 $f(x)=-x+2$ ······ ❷

$\therefore f(5)=-5+2=-3$ ······ ❸

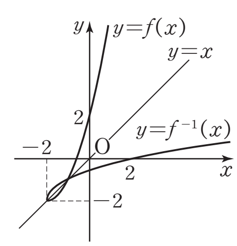
답 -3

채점 기준	비율
❶ 함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $(-1,\ 3)$, $(3,\ -1)$을 지남을 알 수 있다.	40 %
❷ 함수 $f(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ $f(5)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

074

$f(x)=x^2+4x+2=(x+2)^2-2\ (x\ge -2)$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 두 교점 P, Q는 직선 $y=x$ 위에 있다.



$x^2+4x+2=x$에서

$x^2+3x+2=0,\ (x+1)(x+2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=-2$

따라서 두 점 P, Q의 좌표는 $(-1,\ -1)$, $(-2,\ -2)$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{\{-2-(-1)\}^2+\{-2-(-1)\}^2}=\sqrt{2}$

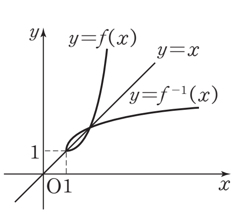
P$(-1,\ -1)$, Q$(-2,\ -2)$ 또는 P$(-2,\ -2)$, Q$(-1,\ -1)$

답 ②

075

방정식 $f(x)=f^{-1}(x)$의 근은 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 x좌표와 같다.

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 직선 $y=x$ 위에 있으므로 방정식



$f(x)=f^{-1}(x)$의 근은 방정식 $f(x)=x$의 근과 같다.

$f(x)=x\ (x\ge 1)$에서 $x^2-2x+2=x$

$x^2-3x+2=0,\ (x-1)(x-2)=0$

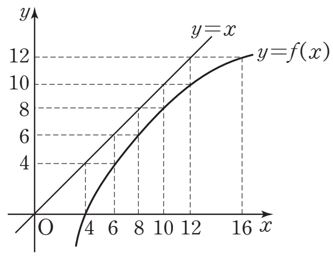
$\therefore x=1$ 또는 $x=2$

따라서 방정식 $f(x)=f^{-1}(x)$의 모든 근의 합은
$1+2=3$

답 ③

076

직선 $y=x$를 이용하여 y축과 점선이 만나는 점의 y좌표를 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

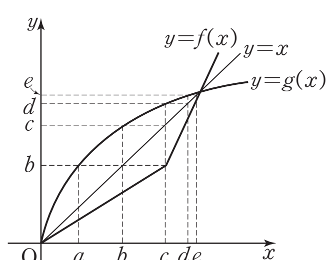


$f^{-1}(8)=a$라고 하면
$f(a)=8$
오른쪽 그래프에서
$f(10)=8$이므로 $a=10$
$\therefore\ f^{-1}(8)=10$
$(f^{-1}\circ f^{-1})(10)=f^{-1}(f^{-1}(10))$에서 $f^{-1}(10)=b$라고 하면
$f(b)=10$
위의 그래프에서 $f(12)=10$이므로 $b=12$
$\therefore\ f^{-1}(10)=12$
$f^{-1}(12)=c$라고 하면 $f(c)=12$
위의 그래프에서 $f(16)=12$이므로 $c=16$
$\therefore\ f^{-1}(12)=16$
즉, $(f^{-1}\circ f^{-1})(10)=f^{-1}(f^{-1}(10))=f^{-1}(12)=16$이므로
$f^{-1}(8)+(f^{-1}\circ f^{-1})(10)=10+16=26$

답 ⑤

077

직선 $y=x$를 이용하여 y축과 점선이 만나는 점의 y좌표를 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



오른쪽 그래프에서
$f(c)=b$이므로
$g^{-1}(f(c))=g^{-1}(b)$
$g^{-1}(b)=k$라고 하면
$g(k)=b$
위의 그래프에서 $g(a)=b$이므로 $k=a$
$\therefore\ g^{-1}(b)=a$
$\therefore\ g^{-1}(f(c))=g^{-1}(b)=a$

답 ①

실력을 높이는 연습 문제

본문 119쪽

01

$-1\le x\le 2$에서 각 함수의 y의 값의 범위를 구하면 다음과 같다.
① $-1\le x\le 2$에서 $1\le x+2\le 4$
$\quad\therefore\ 1\le y\le 4$
② $-1\le x\le 2$에서 $0\le x^2\le 4$, $-4\le -x^2\le 0$
$\quad -1\le -x^2+3\le 3 \qquad \therefore\ -1\le y\le 3$
③ $-1\le x\le 2$에서 $-2\le x-1\le 1$, $0\le |x-1|\le 2$
$\quad 4\le |x-1|+4\le 6 \qquad \therefore\ 4\le y\le 6$
④ $-1\le x\le 2$에서 $-3\le x-2\le 0$, $0\le (x-2)^2\le 9$
$\quad -5\le (x-2)^2-5\le 4 \qquad \therefore\ -5\le y\le 4$
⑤ $-1\le x\le 2$에서 $-1\le x^3\le 8$, $-3\le x^3-2\le 6$
$\quad\therefore\ -3\le y\le 6$
따라서 치역이 집합 Y의 부분집합인 것은 ②뿐이므로 X에서 Y로의 함수인 것은 ②이다.

답 ②

02

$2n-1=2025$에서
$2n=2026 \qquad \therefore\ n=1013$
$\therefore\ f(2025)=\dfrac{1013+1}{2}=507$
$2026=2\times 1013$이고 $2n-1=1013$에서
$2n=1014 \qquad \therefore\ n=507$
$\therefore\ f(2026)=f(1013)=\dfrac{507+1}{2}=254$
$\therefore\ f(2025)+f(2026)=507+254=761$

답 761

| 다른 풀이 |

$f(2n-1)=\dfrac{n+1}{2}$에서 $2n-1=t$라고 하면
$2n=t+1 \qquad \therefore\ n=\dfrac{t+1}{2}$
$\therefore\ f(t)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{t+1}{2}+1\right)=\dfrac{t+3}{4}$ (t는 홀수)

$$\begin{aligned}\therefore\ f(2025)+f(\overset{2026=2\times 1013}{\underline{2026}})&=\frac{2025+3}{4}+f(1013)\\&=507+\frac{1013+3}{4}\\&=507+254=761\end{aligned}$$

03

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에서 집합 $Y=\{0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8\}$로의 함수 f가 $f(x)=(2x^2$의 일의 자리의 숫자$)$이므로
$f(1)=2$, $f(2)=8$, $f(3)=8$, $f(4)=2$, $f(5)=0$
$f(1)=f(4)=2$이므로 $a=1$ 또는 $a=4$
$f(2)=f(3)=8$이므로 $b=2$ 또는 $b=3$
a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(1,\ 2)$, $(1,\ 3)$, $(4,\ 2)$, $(4,\ 3)$이므로
$a+b$의 값은 각각 $3,\ 4,\ 6,\ 7$
따라서 $a+b$의 최댓값은 7이다.

답 ③

04

$f(-1)=-a+5$, $f(1)=a+5$, $f(2)=2a+5$ $(a\ne 0)$이므로
함수 $f(x)$의 치역은
$\{-a+5,\ a+5,\ 2a+5\}$
치역의 모든 원소의 합이 11이므로
$(-a+5)+(a+5)+(2a+5)=11$

$2a+15=11 \qquad \therefore a=-2$

답 -2

참고

$a=0$이면 함수 $f(x)$의 치역은 $\{5\}$이므로 치역의 모든 원소의 합이 11임을 만족시키지 않는다.

05

문제 접근하기

$a>0$일 때와 $a<0$일 때로 나누어 치역이 공역의 부분집합이어야 함을 이용하여 a의 값의 범위를 구한다.

(i) $a>0$일 때

함수 $f(x)$의 치역은 $\{y \mid f(1) \le y \le f(3)\}$, 즉 $\{y \mid a+1 \le y \le 3a+1\}$이므로

$a+1 \ge 2,\ 3a+1 \le 5 \qquad \therefore 1 \le a \le \frac{4}{3}$

(ii) $a<0$일 때

함수 $f(x)$의 치역은 $\{y \mid f(3) \le y \le f(1)\}$, 즉 $\{y \mid 3a+1 \le y \le a+1\}$이므로

$3a+1 \ge 2,\ a+1 \le 5 \qquad \therefore \frac{1}{3} \le a \le 4$

그런데 $a<0$이어야 하므로 성립하지 않는다.

(i), (ii)에서 $1 \le a \le \frac{4}{3}$

답 ②

06

두 함수 f와 g가 서로 같으므로

$f(1)=g(1),\ f(2)=g(2),\ f(3)=g(3)$

$f(1)=g(1)$에서 $a+b=2$

$f(2)=g(2)$에서 $b=1$

$f(3)=g(3)$에서 $a+b=2$

$\therefore a=1,\ b=1$

$\therefore 4a-b=4\times1-1=3$

답 3

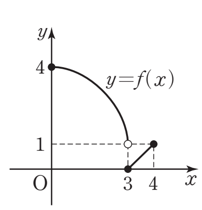
07

문제 접근하기

주어진 함수가 일대일대응이 되도록 $y=ax^2+b$의 그래프를 그려 그래프의 모양을 파악한다.

집합 $\{x \mid 3 \le x \le 4\}$에서 정의된 함수 $y=x-3$의 치역이 $\{y \mid 0 \le y \le 1\}$이므로 함수 $f(x)$가 일대일대응이 되려면 집합 $\{x \mid 0 \le x < 3\}$에서 정의된 함수 $y=ax^2+b$의 치역이 $\{y \mid 1 < y \le 4\}$가 되어야 한다.

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로 함수 $y=ax^2+b$의 그래프가 두 점 $(0, 4)$, $(3, 1)$을 지나야 한다.



즉, $4=b,\ 1=9a+b$이므로

$a=-\frac{1}{3},\ b=4$

따라서 $f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{3}x^2+4 & (0 \le x < 3) \\ x-3 & (3 \le x \le 4) \end{cases}$이므로

$f(1)=-\frac{1}{3}+4=\frac{11}{3}$

답 ⑤

08

$1 \le n \le 2$인 자연수 n에 대하여 $f(n)f(n+1)$의 값이 항상 짝수이므로 $f(1)f(2)$, $f(2)f(3)$의 값은 모두 짝수이다.

집합 X의 원소 중에서 짝수는 2의 한 개이고 함수 f가 일대일대응이므로 함숫값이 짝수인 것도 한 개이어야 한다.

이때 $f(1)f(2)$의 값이 짝수이려면 $f(1)$과 $f(2)$의 값 중에서 적어도 하나는 짝수이어야 한다.

또, $f(2)f(3)$의 값이 짝수이려면 $f(2)$와 $f(3)$의 값 중에서 적어도 하나는 짝수이어야 한다.

따라서 $f(2)=2$이므로

$f(1)=1,\ f(3)=3$ 또는 $f(1)=3,\ f(3)=1$

$\therefore f(1)+f(3)=4$

답 4

09

함수 $f(x)$가 항등함수이므로 정의역의 모든 원소 x에 대하여 $f(x)=x$가 성립해야 한다. 즉,

$f(-2)=-2,\ f(-1)=-1,\ f(1)=1,\ f(2)=2$

이어야 한다.

$x \ge 1$이면 $f(x)=x$이므로 $f(1)=1,\ f(2)=2$는 항상 성립한다.

$f(-2)=-2$에서

$4a-2b+2=-2$

$\therefore 2a-b=-2 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$f(-1)=-1$에서

$a-b+2=-1$

$\therefore a-b=-3 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=4$

$\therefore a+b=1+4=5$

답 ③

10

집합 Y의 원소의 개수를 n이라고 하면 X에서 Y로의 일대일함수 f의 개수가 120이므로

${}_nP_3=120,\ n(n-1)(n-2)=6\times5\times4$

$\therefore n=6$

따라서 집합 Y의 원소의 개수는 6이다.

답 ④

11

$f(x+4)=f(x)$이므로

$f(18)=f(14)=f(10)=f(6)=f(2)$

$=-2^2+6\times2-4=4$

$\therefore (f \circ f)(18)=f(f(18))=f(4)$

$=-2\times4+11=3$

답 ③

12

$(f\circ g)(a)=f(g(a))=f(3a-4)$

$\quad\quad=(3a-4)^2+1$

이므로

$(3a-4)^2+1=65$, $(3a-4)^2=64$

$3a-4=\pm8$

$3a-4=-8$에서 $a=-\dfrac{4}{3}$

$3a-4=8$에서 $a=4$

이때 a는 양수이므로

$a=4$

답 4

13

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(ax+b)$

$\quad\quad=2(ax+b)+5=2ax+2b+5$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x+5)$

$\quad\quad=a(2x+5)+b=2ax+5a+b$

$(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$이므로

$2ax+2b+5=2ax+5a+b$

$2b+5=5a+b$

$\therefore b=5a-5$

$g(x)=ax+b$에 $b=5a-5$를 대입하면

$g(x)=ax+5a-5=a(x+5)-5$

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 a의 값에 관계없이 점 $(-5, -5)$를 지난다.

답 ⑤

14

$f^1(160)=f(160)=\dfrac{160}{2}=80$

$f^2(160)=(f\circ f)(160)=f(f(160))$

$\quad\quad=f(80)=\dfrac{80}{2}=40$

$f^3(160)=(f\circ f^2)(160)=f(f^2(160))$

$\quad\quad=f(40)=\dfrac{40}{2}=20$

$f^4(160)=(f\circ f^3)(160)=f(f^3(160))$

$\quad\quad=f(20)=\dfrac{20}{2}=10$

$f^5(160)=(f\circ f^4)(160)=f(f^4(160))$

$\quad\quad=f(10)=\dfrac{10}{2}=5$

$f^6(160)=(f\circ f^5)(160)=f(f^5(160))$

$\quad\quad=f(5)=\dfrac{5+3}{2}=4$

$f^7(160)=(f\circ f^6)(160)=f(f^6(160))$

$\quad\quad=f(4)=\dfrac{4}{2}=2$

$f^8(160)=(f\circ f^7)(160)=f(f^7(160))$

$\quad\quad=f(2)=\dfrac{2}{2}=1$

따라서 자연수 n의 최솟값은 8이다.

답 8

15

$g^{-1}(3)=a$라고 하면 $g(a)=3$

주어진 그림에서 $g(5)=3$이므로 $a=5$

$\therefore g^{-1}(3)=5$

한편, $(g\circ f)(4)=g(f(4))=g(7)=2$이므로

$g^{-1}(3)+(g\circ f)(4)=5+2=7$

답 ②

16

$f(-2)=4$이므로 $-2a+b=4$ ········· ㉠

$f^{-1}(14)=3$에서 $f(3)=14$이므로

$3a+b=14$ ········· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=8$

$\therefore a+b=2+8=10$

답 10

17

$(f\circ g^{-1})(a)=f(g^{-1}(a))=5g^{-1}(a)-4$

이때 $(f\circ g^{-1})(a)=6$이므로

$5g^{-1}(a)-4=6$

$\therefore g^{-1}(a)=2$

따라서 $g(2)=a$이므로

$a=g(2)=-6+4=-2$

답 ①

| 다른 풀이 |

$y=-3x+4$로 놓으면

$3x=-y+4 \qquad \therefore x=-\dfrac{1}{3}y+\dfrac{4}{3}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{4}{3}$

$\therefore g^{-1}(x)=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{4}{3}$

$\therefore (f\circ g^{-1})(a)=f(g^{-1}(a))=f\left(-\dfrac{1}{3}a+\dfrac{4}{3}\right)$

$\quad\quad=5\left(-\dfrac{1}{3}a+\dfrac{4}{3}\right)-4=-\dfrac{5}{3}a+\dfrac{8}{3}$

$(f\circ g^{-1})(a)=6$에서 $-\dfrac{5}{3}a+\dfrac{8}{3}=6$

$-5a+8=18 \qquad \therefore a=-2$

18

함수 f의 역함수가 존재하므로 f는 일대일대응이다.

$f(1)+2f(3)=12$에서

$f(1)=2$, $f(3)=5$ 또는 $f(1)=f(3)=4$

$2f(3)$과 12가 짝수이므로 $f(1)$도 짝수이다. $\therefore f(1)=2$ 또는 $f(1)=4$

이때 함수 f가 일대일대응이므로

$f(1)=2$, $f(3)=5$

$f^{-1}(1)=a$, $f^{-1}(3)=b$라고 하면

$f(a)=1$, $f(b)=3$이고, $a-b=2$

함수 f는 일대일대응이므로

$a=4$, $b=2$

즉, $f(1)=2$, $f(2)=3$, $f(3)=5$, $f(4)=1$이므로
$f(5)=4$
$\therefore f^{-1}(4)=5$
$\therefore f(4)+f^{-1}(4)=1+5=6$

답 ②

19

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하므로 함수 $f(x)$는 일대일대응이다.
따라서 경계인 $x=5$에서의 함숫값이 같아야 하므로
$5+7=3\times5-a \qquad \therefore a=3$

$$\therefore f(x)=\begin{cases} x+7 & (x\geq5) \\ 3x-3 & (x<5) \end{cases}$$

$x\geq5$일 때, $f(x)=x+7\geq12$
$x<5$일 때, $f(x)=3x-3<12$
$f^{-1}(16)=p$라고 하면 $f(p)=16$
$16>12$이므로
$p+7=16 \qquad \therefore p=9$
$f^{-1}(9)=q$라고 하면 $f(q)=9$
$9<12$이므로
$3q-3=9 \qquad \therefore q=4$
따라서 $f^{-1}(16)=9$, $f^{-1}(9)=4$이므로

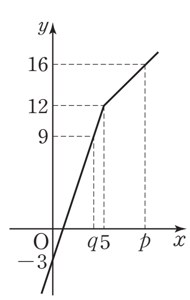
$$\begin{aligned}(f\circ f)^{-1}(16)&=(f^{-1}\circ f^{-1})(16)\\&=f^{-1}(f^{-1}(16))\\&=f^{-1}(9)=4\end{aligned}$$

답 4

| 다른 풀이 |

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하므로 함수 $f(x)$는 일대일대응이다.
따라서 경계인 $x=5$에서의 함숫값이 같아야 하므로
$5+7=3\times5-a \qquad \therefore a=3$

$$\therefore f(x)=\begin{cases} x+7 & (x\geq5) \\ 3x-3 & (x<5) \end{cases}$$



함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 $f^{-1}(16)=p$라고 하면
$f(p)=p+7=16 \qquad \therefore p=9$
$f^{-1}(9)=q$라고 하면
$f(q)=3q-3=9 \qquad \therefore q=4$

$$\begin{aligned}\therefore (f\circ f)^{-1}(16)&=f^{-1}(f^{-1}(16))\\&=f^{-1}(p)\\&=f^{-1}(9)\\&=q=4\end{aligned}$$

20

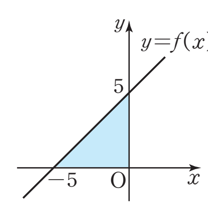
주어진 함수 $y=f(x)$의 그래프에서
$f(1)=3$, $f(2)=1$, $f(3)=2$, $f(4)=5$, $f(5)=4$
주어진 함수 $y=(f\circ g)(x)$의 그래프에서
$(f\circ g)(1)=1$이므로 $f(g(1))=1$
$\therefore g(1)=2$ ($\because f(2)=1$)
$(f\circ g)(2)=5$이므로 $f(g(2))=5$
$\therefore g(2)=4$ ($\because f(4)=5$)
$(f\circ g)(3)=2$이므로 $f(g(3))=2$
$\therefore g(3)=3$ ($\because f(3)=2$)
$(f\circ g)(4)=4$이므로 $f(g(4))=4$
$\therefore g(4)=5$ ($\because f(5)=4$)
$(f\circ g)(5)=3$이므로 $f(g(5))=3$
$\therefore g(5)=1$ ($\because f(1)=3$)
$(g\circ f)^{-1}(2)=(f^{-1}\circ g^{-1})(2)=f^{-1}(g^{-1}(2))$이므로
$g^{-1}(2)=a$라고 하면
$g(a)=2 \qquad \therefore a=1$ ($\because g(1)=2$)
$f^{-1}(1)=b$라고 하면
$f(b)=1 \qquad \therefore b=2$ ($\because f(2)=1$)

$$\begin{aligned}\therefore g(3)+(g\circ f)^{-1}(2)&=g(3)+f^{-1}(g^{-1}(2))\\&=3+f^{-1}(1)\\&=3+2=5\end{aligned}$$

답 5

21

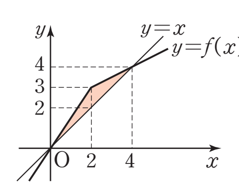
$f(x)=ax+b$ ($a\neq0$, a, b는 상수)로 놓으면
$f(4)=9$이므로 $4a+b=9$ ⋯⋯ ㉠
함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $(7, 2)$를 지나므로
$g(7)=2$에서 $f(2)=7$
$\therefore 2a+b=7$ ⋯⋯ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=5$
$\therefore f(x)=x+5$
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 넓이는
$\frac{1}{2}\times5\times5=\frac{25}{2}$



답 ②

22

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 두 함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이의 2배이다.



따라서 구하는 넓이는
$2\left(\frac{1}{2}\times1\times2+\frac{1}{2}\times1\times2\right)=2(1+1)=4$

답 4

참고
함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 좌표를 구하면 다음과 같다.
(i) $x<2$일 때
$\frac{3}{2}x=x$에서 $x=0$
(ii) $x\geq2$일 때
$\frac{1}{2}x+2=x$에서 $\frac{1}{2}x=2 \qquad \therefore x=4$
(i), (ii)에서 두 교점의 좌표는 $(0, 0)$, $(4, 4)$

23

문제 접근하기

$h(x)=g(2x)$, $k(x)=2x$로 놓고 $h(x)$를 $g(x)$와 $k(x)$의 합성함수로 나타낸 후 역함수의 성질을 이용하여 함수 $g(2x)$의 역함수를 구한다.

$g(x)=f^{-1}(x)$이므로

$h(x)=g(2x)$, $k(x)=2x$로 놓으면

$h(x)=g(2x)=g(k(x))$

$\quad=(g\circ k)(x)=(f^{-1}\circ k)(x)$

따라서 함수 $g(2x)$의 역함수는

$h^{-1}(x)=(f^{-1}\circ k)^{-1}(x)$

$\quad=(k^{-1}\circ f)(x)=k^{-1}(f(x))$

$y=2x$로 놓으면 $x=\frac{1}{2}y$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{2}x$

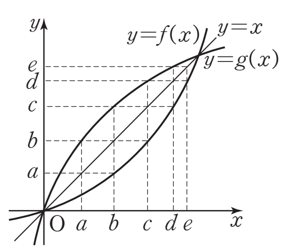
$\therefore k^{-1}(x)=\frac{1}{2}x$

따라서 함수 $g(2x)$의 역함수는

$h^{-1}(x)=k^{-1}(f(x))=\frac{1}{2}f(x)$

답 ⑤

24



직선 $y=x$를 이용하여 y축과 점선이 만나는 점의 y좌표를 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

$f^{-1}(d)=p$라고 하면

$f(p)=d$

오른쪽 그래프에서

$f(e)=d$이므로 $p=e$

$\therefore f^{-1}(d)=e$

$g^{-1}(e)=q$라고 하면

$g(q)=e$

위의 그래프에서 $g(d)=e$이므로 $q=d$

$\therefore g^{-1}(e)=d$

$\therefore (f\circ g^{-1}\circ f^{-1})(d)=f(g^{-1}(f^{-1}(d)))$

$\quad=f(g^{-1}(e))$

$\quad=f(d)=c$

답 ③

08 유리식과 유리함수

기본을 다지는 유형

본문 125쪽

001

(1) $\frac{3}{x+1}+\frac{2}{x-4}=\frac{3(x-4)+2(x+1)}{(x+1)(x-4)}=\frac{5x-10}{(x+1)(x-4)}$

(2) $\frac{1}{x+3}-\frac{x-2}{x^2+2x-3}=\frac{1}{x+3}-\frac{x-2}{(x-1)(x+3)}$

$=\frac{(x-1)-(x-2)}{(x-1)(x+3)}$

$=\frac{1}{(x-1)(x+3)}$

(3) $\frac{3x-6}{x^2+x}\times\frac{x+1}{x^2-4}=\frac{3(x-2)}{x(x+1)}\times\frac{x+1}{(x+2)(x-2)}=\frac{3}{x(x+2)}$

(4) $\frac{x+4}{x^2-5x+4}\div\frac{x^2+2x-8}{x-4}$

$=\frac{x+4}{(x-1)(x-4)}\times\frac{x-4}{(x-2)(x+4)}$

$=\frac{1}{(x-1)(x-2)}$

답 (1) $\frac{5x-10}{(x+1)(x-4)}$ (2) $\frac{1}{(x-1)(x+3)}$ (3) $\frac{3}{x(x+2)}$ (4) $\frac{1}{(x-1)(x-2)}$

002

$\frac{1}{(x-y)(x-z)}+\frac{1}{(y-z)(y-x)}+\frac{1}{(z-x)(z-y)}$

$=\frac{-1}{(x-y)(z-x)}+\frac{-1}{(y-z)(x-y)}+\frac{-1}{(z-x)(y-z)}$

$=\frac{-(y-z)-(z-x)-(x-y)}{(x-y)(y-z)(z-x)}$

$=\frac{-y+z-z+x-x+y}{(x-y)(y-z)(z-x)}=0$

답 ③

003

$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}$

$=\frac{x-1-(x+1)}{(x+1)(x-1)}+\frac{x-2-(x+2)}{(x+2)(x-2)}$

$=\frac{-2}{x^2-1}+\frac{-4}{x^2-4}=\frac{-2(x^2-4)-4(x^2-1)}{(x^2-1)(x^2-4)}$

$=\frac{-2x^2+8-4x^2+4}{(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)}$

$=\frac{-6x^2+12}{(x+1)(x+2)(x-1)(x-2)}$ ❶

따라서 $a=-6$, $b=12$이므로

$a+b=-6+12=6$ ❷

답 6

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 간단히 할 수 있다.	80 %
❷ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

004

$$\frac{3x^2-5x-2}{x^2-1}\times\frac{x^2+2x-3}{3x^2+x}\div\frac{x^2+x-6}{2x^2+2x}$$
$$=\frac{(3x+1)(x-2)}{(x+1)(x-1)}\times\frac{(x-1)(x+3)}{x(3x+1)}\times\frac{2x(x+1)}{(x-2)(x+3)}$$
$$=2$$

답 ②

005

주어진 등식의 우변을 계산하면

$$\frac{a}{x+1}+\frac{bx+1}{x^2-x+1}=\frac{a(x^2-x+1)+(bx+1)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$$
$$=\frac{(a+b)x^2+(-a+b+1)x+a+1}{x^3+1}$$

따라서 $\frac{5x^2+4}{x^3+1}=\frac{(a+b)x^2+(-a+b+1)x+a+1}{x^3+1}$이 x에 대한 항등식이므로

$a+b=5$, $-a+b+1=0$, $a+1=4$

$\therefore a=3$, $b=2$

$\therefore a^2-2b=9-4=5$

답 ③

006

주어진 등식의 우변을 계산하면

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}=\frac{a(x-1)^2+bx(x-1)+cx}{x(x-1)^2}$$
$$=\frac{ax^2-2ax+a+bx^2-bx+cx}{x(x-1)^2}$$
$$=\frac{(a+b)x^2-(2a+b-c)x+a}{x(x-1)^2}$$

따라서 $\frac{x+4}{x(x-1)^2}=\frac{(a+b)x^2-(2a+b-c)x+a}{x(x-1)^2}$가 x에 대한 항등식이므로

$a+b=0$, $2a+b-c=-1$, $a=4$

$\therefore a=4$, $b=-4$, $c=5$

$\therefore ab+c=4\times(-4)+5=-11$

답 -11

007

(1) $$\frac{x+1}{x-4}-\frac{x+5}{x+3}=\frac{(x-4)+5}{x-4}-\frac{(x+3)+2}{x+3}$$
$$=\left(1+\frac{5}{x-4}\right)-\left(1+\frac{2}{x+3}\right)$$
$$=\frac{5}{x-4}-\frac{2}{x+3}$$
$$=\frac{5(x+3)-2(x-4)}{(x-4)(x+3)}$$
$$=\frac{3x+23}{(x-4)(x+3)}$$

(2) $$\frac{x}{x-1}-\frac{x^2+2x-3}{x^2+x-2}=\frac{x}{x-1}-\frac{(x+3)(x-1)}{(x+2)(x-1)}$$
$$=\frac{(x-1)+1}{x-1}-\frac{(x+2)+1}{x+2}$$
$$=\left(1+\frac{1}{x-1}\right)-\left(1+\frac{1}{x+2}\right)$$
$$=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}$$
$$=\frac{(x+2)-(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$
$$=\frac{3}{(x-1)(x+2)}$$

답 (1) $\frac{3x+23}{(x-4)(x+3)}$ (2) $\frac{3}{(x-1)(x+2)}$

008

$$\frac{2x^2+4x+1}{x^2+2x}-\frac{4x^2-2x+2}{2x^2-x}=\frac{2(x^2+2x)+1}{x^2+2x}-\frac{2(2x^2-x)+2}{2x^2-x}$$
$$=\left(2+\frac{1}{x^2+2x}\right)-\left(2+\frac{2}{2x^2-x}\right)$$
$$=\frac{1}{x(x+2)}-\frac{2}{x(2x-1)}$$
$$=\frac{(2x-1)-2(x+2)}{x(x+2)(2x-1)}$$
$$=-\frac{5}{x(x+2)(2x-1)}$$

답 $-\frac{5}{x(x+2)(2x-1)}$

009

$$\frac{x^2-x+2}{x-1}-\frac{x^2+x+2}{x+1}=\frac{x(x-1)+2}{x-1}-\frac{x(x+1)+2}{x+1}$$
$$=\left(x+\frac{2}{x-1}\right)-\left(x+\frac{2}{x+1}\right)$$
$$=\frac{2}{x-1}-\frac{2}{x+1}$$
$$=\frac{2(x+1)-2(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{4}{x^2-1}$$

$\therefore k=4$

답 ④

010

주어진 등식의 좌변을 계산하면

$$\frac{x^2-2x-2}{x-3}+\frac{2x+3}{x+2}$$
$$=\frac{(x+1)(x-3)+1}{x-3}+\frac{2(x+2)-1}{x+2}$$
$$=\left(x+1+\frac{1}{x-3}\right)+\left(2-\frac{1}{x+2}\right)$$
$$=x+3+\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+2}$$
$$=x+3+\frac{(x+2)-(x-3)}{(x+2)(x-3)}$$
$$=x+3+\frac{5}{(x+2)(x-3)}$$

따라서 $x+3+\dfrac{5}{(x+2)(x-3)}=x+a+\dfrac{b}{(x+2)(x-3)}$가 x에 대한 항등식이므로

$a=3$, $b=5$

$\therefore\ a+b=3+5=8$

답 8

011

(1) $\dfrac{1}{x(x+1)}+\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}$

$=\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\right)+\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}\right)+\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+3}\right)$

$=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+3}$

$=\dfrac{3}{x(x+3)}$

(2) $\dfrac{2}{(x-1)(x+1)}+\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{3}{(x+2)(x+5)}$

$=\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}\right)+\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}\right)+\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+5}\right)$

$=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+5}$

$=\dfrac{6}{(x-1)(x+5)}$

(3) $\dfrac{1}{x(x+2)}+\dfrac{1}{(x+2)(x+4)}+\dfrac{1}{(x+4)(x+6)}$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+2}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+4}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x+4}-\dfrac{1}{x+6}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+6}\right)$

$=\dfrac{3}{x(x+6)}$

답 (1) $\dfrac{3}{x(x+3)}$ (2) $\dfrac{6}{(x-1)(x+5)}$ (3) $\dfrac{3}{x(x+6)}$

012

주어진 등식의 좌변을 계산하면

$\dfrac{1}{x^2-4}+\dfrac{1}{x^2+8x+12}+\dfrac{1}{x^2+16x+60}$

$=\dfrac{1}{(x-2)(x+2)}+\dfrac{1}{(x+2)(x+6)}+\dfrac{1}{(x+6)(x+10)}$

$=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+2}\right)+\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+6}\right)$

$\quad+\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x+6}-\dfrac{1}{x+10}\right)$

$=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+10}\right)$

$=\dfrac{3}{(x-2)(x+10)}$

따라서 $\dfrac{3}{(x-2)(x+10)}=\dfrac{b}{(x-2)(x+a)}$가 x에 대한 항등식이므로 $a=10$, $b=3$

$\therefore\ ab=10\times3=30$

답 ③

013

$\dfrac{1}{2\times4}+\dfrac{1}{4\times6}+\dfrac{1}{6\times8}+\cdots+\dfrac{1}{24\times26}$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{6}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{8}\right)+\cdots+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{24}-\dfrac{1}{26}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{26}\right)$

$=\dfrac{3}{13}$

답 $\dfrac{3}{13}$

014

$f(n)=n^2+n=n(n+1)$이므로

$\dfrac{1}{f(n)}=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$ ……… ❶

$\therefore\ \dfrac{1}{f(1)}+\dfrac{1}{f(2)}+\dfrac{1}{f(3)}+\cdots+\dfrac{1}{f(20)}$

$=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{20}-\dfrac{1}{21}\right)$

$=1-\dfrac{1}{21}$

$=\dfrac{20}{21}$ ……… ❷

따라서 $a=21$, $b=20$이므로

$a+b=21+20=41$ ……… ❸

답 41

채점 기준	비율
❶ $\dfrac{1}{f(n)}$을 부분분수로 변형할 수 있다.	30 %
❷ $\dfrac{1}{f(1)}+\dfrac{1}{f(2)}+\dfrac{1}{f(3)}+\cdots+\dfrac{1}{f(20)}$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

015

$\dfrac{\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+2}}{\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x+2}}=\dfrac{\dfrac{(x+2)-(x-2)}{(x-2)(x+2)}}{\dfrac{(x+2)+(x-2)}{(x-2)(x+2)}}$

$=\dfrac{4}{2x}=\dfrac{2}{x}$

답 $\dfrac{2}{x}$

016

먼저 주어진 식을 간단히 한 후 $x=2026$을 대입하면

$\dfrac{1+\dfrac{2}{x}}{1-\dfrac{4}{x^2}}=\dfrac{\dfrac{x+2}{x}}{\dfrac{x^2-4}{x^2}}=\dfrac{\dfrac{x+2}{x}}{\dfrac{(x+2)(x-2)}{x^2}}$

$=\dfrac{x}{x-2}$

$=\dfrac{2026}{2026-2}$

$=\dfrac{1013}{1012}$

답 ①

017

$$\frac{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x-1}}}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{x+1}}}=\frac{1+\frac{1}{\frac{(x-1)+1}{x-1}}}{1-\frac{1}{\frac{(x+1)-1}{x+1}}}=\frac{1+\frac{x-1}{x}}{1-\frac{x+1}{x}}$$

$$=\frac{\frac{x+(x-1)}{x}}{\frac{x-(x+1)}{x}}=\frac{\frac{2x-1}{x}}{-\frac{1}{x}}=1-2x$$

답 ②

018

$x=1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}=1+\dfrac{x}{x+1}$

$=\dfrac{(x+1)+x}{x+1}=\dfrac{2x+1}{x+1}$

즉, $x=\dfrac{2x+1}{x+1}$이므로 양변에 $x+1$을 곱하면

$x(x+1)=2x+1$, $x^2+x=2x+1$

$\therefore x^2-x=1$

답 ④

019

$\dfrac{50}{23}=\dfrac{2\times23+4}{23}=2+\dfrac{4}{23}$

$=2+\dfrac{1}{\dfrac{23}{4}}=2+\dfrac{1}{\dfrac{5\times4+3}{4}}$

$=2+\dfrac{1}{5+\dfrac{3}{4}}=2+\dfrac{1}{5+\dfrac{1}{\dfrac{4}{3}}}$

$=2+\dfrac{1}{5+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3}}}$ ❶

따라서 $a=2$, $b=5$, $c=1$, $d=3$이므로

$ab-cd=2\times5-1\times3=7$ ❷

답 7

채점 기준	비율
❶ $\frac{50}{23}$을 번분수식으로 나타낼 수 있다.	60 %
❷ $ab-cd$의 값을 구할 수 있다.	40 %

020

(1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2\times x\times\dfrac{1}{x}$

$=3^2-2=7$

(2) $x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\times x\times\dfrac{1}{x}\times\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

$=3^3-3\times3=18$

(3) $x^4+\dfrac{1}{x^4}=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)^2-2\times x^2\times\dfrac{1}{x^2}$

$=7^2-2=47$

(4) $x^5+\dfrac{1}{x^5}=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

$=7\times18-3=123$

답 (1) 7 (2) 18 (3) 47 (4) 123

021

$x^2-\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$이므로

$\dfrac{15}{4}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\times\dfrac{3}{2}\qquad\therefore x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{2}$

$\therefore x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\times x\times\dfrac{1}{x}\times\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

$=\left(\dfrac{5}{2}\right)^3-3\times\dfrac{5}{2}=\dfrac{65}{8}$

답 ⑤

022

$x\neq0$이므로 $x^2-2x-1=0$의 양변을 x로 나누면

$x=0$을 $x^2-2x-1=0$에 대입하면 $-1\neq0$이므로 $x\neq0$

$x-2-\dfrac{1}{x}=0\qquad\therefore x-\dfrac{1}{x}=2$

위의 식의 양변을 제곱하면

$x^2-2+\dfrac{1}{x^2}=4\qquad\therefore x^2+\dfrac{1}{x^2}=6$

$\therefore 2x^2+3x-1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}=2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)-1$

$=2\times6+3\times2-1$

$=17$

답 ③

023

$x^2+\dfrac{1}{x^2}=14$이므로

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=x^2+2+\dfrac{1}{x^2}=14+2=16$

이때 $x>0$이므로 $x+\dfrac{1}{x}=4$

$\therefore x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\times x\times\dfrac{1}{x}\times\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

$=4^3-3\times4=52$

답 52

024

$a+b+c=0$이므로

$b+c=-a$, $c+a=-b$, $a+b=-c$

$\therefore \dfrac{a}{2}\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)+\dfrac{b}{2}\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right)+\dfrac{c}{2}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$

$=\dfrac{a}{2b}+\dfrac{a}{2c}+\dfrac{b}{2c}+\dfrac{b}{2a}+\dfrac{c}{2a}+\dfrac{c}{2b}$

$=\dfrac{c+a}{2b}+\dfrac{a+b}{2c}+\dfrac{b+c}{2a}$

$=\dfrac{-b}{2b}+\dfrac{-c}{2c}+\dfrac{-a}{2a}$

$=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{3}{2}$

답 $-\dfrac{3}{2}$

| 다른 풀이 |

$$\frac{a}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{b}{2}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+\frac{c}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$
$$=\frac{a}{2}\times\frac{b+c}{bc}+\frac{b}{2}\times\frac{c+a}{ca}+\frac{c}{2}\times\frac{a+b}{ab}$$
$$=\frac{a}{2}\times\frac{-a}{bc}+\frac{b}{2}\times\frac{-b}{ca}+\frac{c}{2}\times\frac{-c}{ab}$$
$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\right)=-\frac{a^3+b^3+c^3}{2abc}$$

한편,

$$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$$
$$=3abc\ (\because a+b+c=0)$$

이므로

$$\frac{a}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{b}{2}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+\frac{c}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=-\frac{a^3+b^3+c^3}{2abc}$$
$$=-\frac{3abc}{2abc}=-\frac{3}{2}$$

025

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$에서 $\frac{xy+yz+zx}{xyz}=0$

$\therefore xy+yz+zx=0\ (\because xyz\neq0)$ ········ ㉠

······························ ❶

$$\therefore \frac{2x}{(x+y)(x+z)}+\frac{2y}{(y+z)(y+x)}+\frac{2z}{(z+x)(z+y)}$$
$$=\frac{2x(y+z)+2y(z+x)+2z(x+y)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$
$$=\frac{4(xy+yz+zx)}{(x+y)(y+z)(z+x)}=0\ (\because ㉠)$$ ········ ❷

답 0

채점 기준	비율
❶ $xy+yz+zx$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	60 %

026

$a:b:c=2:3:4$이므로

$a=2k,\ b=3k,\ c=4k\ (k\neq0)$

로 놓으면

$$\frac{-3a+2b-c}{a-b+c}=\frac{-3\times2k+2\times3k-4k}{2k-3k+4k}$$
$$=\frac{-4k}{3k}=-\frac{4}{3}$$

답 ②

027

$\frac{x+2y}{4x+5y}=\frac{1}{3}$에서

$3x+6y=4x+5y\qquad \therefore x=y$

$$\therefore \frac{x^2-3xy+3y^2}{x^2+y^2}=\frac{y^2-3\times y\times y+3y^2}{y^2+y^2}$$
$$=\frac{y^2}{2y^2}=\frac{1}{2}$$

답 ③

028

$3a=2b,\ 3b=4c$에서

$a=\frac{2}{3}b,\ c=\frac{3}{4}b$

$$\therefore \frac{2a-b-2c}{a+b+c}=\frac{2\times\frac{2}{3}b-b-2\times\frac{3}{4}b}{\frac{2}{3}b+b+\frac{3}{4}b}$$
$$=\frac{-\frac{7}{6}b}{\frac{29}{12}b}=-\frac{14}{29}$$

답 $-\frac{14}{29}$

029

$(x+y):(y+z):(z+x)=4:3:5$이므로

$x+y=4k,\ y+z=3k,\ z+x=5k\ (k\neq0)$ ········ ㉠

로 놓고 세 식을 변끼리 더하면

$2(x+y+z)=12k\qquad \therefore x+y+z=6k$ ········ ㉡

㉠, ㉡에서

$x=3k,\ y=k,\ z=2k$ ······························ ❶

$$\therefore \frac{xy-yz+zx}{x^2+y^2+z^2}=\frac{3k\times k-k\times2k+2k\times3k}{(3k)^2+k^2+(2k)^2}$$
$$=\frac{7k^2}{14k^2}=\frac{1}{2}$$ ······························ ❷

답 $\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ $x,\ y,\ z$를 한 문자로 나타낼 수 있다.	60 %
❷ $\frac{xy-yz+zx}{x^2+y^2+z^2}$의 값을 구할 수 있다.	40 %

030

$$\begin{cases}3x+y-2z=0 & \cdots\cdots ㉠\\ x-2y+z=0 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$

㉠$+2\times$㉡을 하면

$5x-3y=0\qquad \therefore y=\frac{5}{3}x$

$2\times$㉠$+$㉡을 하면

$7x-3z=0\qquad \therefore z=\frac{7}{3}x$

$$\therefore \frac{x+y}{x+z}=\frac{x+\frac{5}{3}x}{x+\frac{7}{3}x}=\frac{\frac{8}{3}x}{\frac{10}{3}x}=\frac{4}{5}$$

답 ④

031

$\frac{5x-y}{2}=\frac{2y-z}{3}=\frac{3z-x}{5}=k\ (k\neq0)$로 놓으면

$5x-y=2k$ ········ ㉠

$2y-z=3k$ ········ ㉡

$3z-x=5k$ ········ ㉢

$2\times$㉠$+3\times$㉡$+$㉢을 하면

$9x+4y=18k$

이때 $\dfrac{9x+4y}{a}=k$이므로

$a=\dfrac{9x+4y}{k}=\dfrac{18k}{k}=18$

답 ④

032

$\dfrac{x+y}{2z}=\dfrac{y+2z}{x}=\dfrac{2z+x}{y}=k\ (k\neq 0)$로 놓으면

$x+y=2kz,\ y+2z=kx,\ 2z+x=ky$ ······ ㉠

위의 세 식을 변끼리 더하면

$2(x+y+2z)=k(x+y+2z)$

이때 $x+y+2z\neq 0$이므로 위의 식의 양변을 $x+y+2z$로 나누면

$k=2$

$k=2$를 ㉠에 대입하면

$x+y=4z$ ······ ㉡

$y+2z=2x$ ······ ㉢

$2z+x=2y$ ······ ㉣

㉡−㉢을 하면

$x-2z=4z-2x,\ 3x=6z \qquad \therefore x=2z$

㉡−㉣을 하면

$y-2z=4z-2y,\ 3y=6z \qquad \therefore y=2z$

$\therefore \dfrac{x^3+y^3+z^3}{xyz}=\dfrac{(2z)^3+(2z)^3+z^3}{2z\times 2z\times z}=\dfrac{17z^3}{4z^3}=\dfrac{17}{4}$

답 ①

033

ㄱ. $y=\dfrac{2x+1}{5}$은 다항함수이다.

ㄴ. $y=\dfrac{1}{3x+5}$은 다항함수가 아닌 유리함수이다.

ㄷ. $y=3x^2-1$은 다항함수이다.

ㄹ. $y=\dfrac{x-1}{x^2-1}$은 다항함수가 아닌 유리함수이다.

(1) 다항함수는 ㄱ, ㄷ이다.

(2) 다항함수가 아닌 유리함수는 ㄴ, ㄹ이다.

답 (1) ㄱ, ㄷ (2) ㄴ, ㄹ

034

(1) $3x-2=0$에서 $x=\dfrac{2}{3}$

따라서 주어진 유리함수의 정의역은

$\left\{x \,\middle|\, x\neq\dfrac{2}{3}\text{인 실수}\right\}$

(2) $x^2-1=0$에서 $x=\pm 1$

따라서 주어진 유리함수의 정의역은

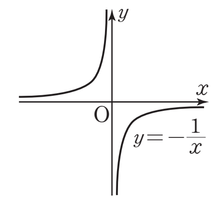
$\{x\,|\,x\neq\pm 1\text{인 실수}\}$

(3) 모든 실수 x에 대하여 $x^2+3>0$이므로 주어진 유리함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\text{는 실수}\}$

답 (1) $\left\{x \,\middle|\, x\neq\dfrac{2}{3}\text{인 실수}\right\}$ (2) $\{x\,|\,x\neq\pm 1\text{인 실수}\}$ (3) $\{x\,|\,x\text{는 실수}\}$

035

(1) 함수 $y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

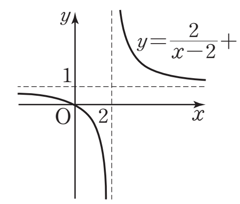


정의역은 $\{x\,|\,x\neq 0\text{인 실수}\}$

치역은 $\{y\,|\,y\neq 0\text{인 실수}\}$

점근선의 방정식은 $x=0,\ y=0$

(2) 함수 $y=\dfrac{2}{x-2}+1$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

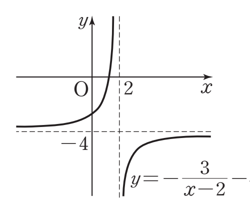


따라서 정의역은 $\{x\,|\,x\neq 2\text{인 실수}\}$

치역은 $\{y\,|\,y\neq 1\text{인 실수}\}$

점근선의 방정식은 $x=2,\ y=1$

(3) 함수 $y=-\dfrac{3}{x-2}-4$의 그래프는 함수 $y=-\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이므로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 정의역은 $\{x\,|\,x\neq 2\text{인 실수}\}$

치역은 $\{y\,|\,y\neq -4\text{인 실수}\}$

점근선의 방정식은 $x=2,\ y=-4$

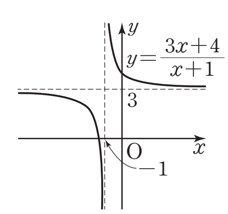
답 풀이 참조

036

(1) $y=\dfrac{3x+4}{x+1}=\dfrac{3(x+1)+1}{x+1}=\dfrac{1}{x+1}+3$

이므로 함수 $y=\dfrac{3x+4}{x+1}$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

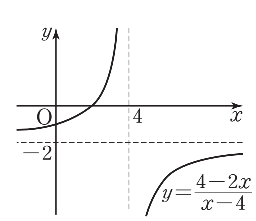
따라서 함수 $y=\dfrac{3x+4}{x+1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 점근선의 방정식은 $x=-1,\ y=3$이다.



(2) $y=\dfrac{4-2x}{x-4}=\dfrac{-2(x-4)-4}{x-4}=-\dfrac{4}{x-4}-2$

이므로 함수 $y=\dfrac{4-2x}{x-4}$의 그래프는 함수 $y=-\dfrac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수 $y=\dfrac{4-2x}{x-4}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 점근선의 방정식은 $x=4,\ y=-2$이다.



답 풀이 참조

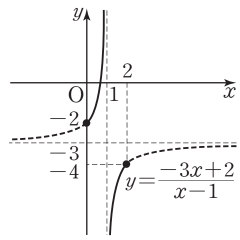
037

$y=\dfrac{-3x+2}{x-1}=\dfrac{-3(x-1)-1}{x-1}=-\dfrac{1}{x-1}-3$

이므로 함수 $y=\dfrac{-3x+2}{x-1}$의 그래프는 함수 $y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 주어진 정의역에서 함수 $y=\dfrac{-3x+2}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 치역은

$\{y|y\le-4$ 또는 $y\ge-2\}$

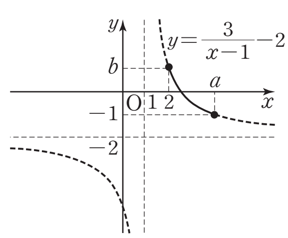


답 ⑤

038

함수 $y=\dfrac{3}{x-1}-2$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $2\le x\le a$에서 함수 $y=\dfrac{3}{x-1}-2$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 오른쪽 그림과 같이 $x=2$일 때 $y=b$이고 $x=a$일 때 $y=-1$이어야 한다.



즉, $\dfrac{3}{2-1}-2=b$, $\dfrac{3}{a-1}-2=-1$

이므로

$a=4$, $b=1$ $\qquad\therefore a+b=4+1=5$

답 ①

039

함수 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\dfrac{2}{x-a}+b=\dfrac{2+b(x-a)}{x-a}=\dfrac{bx-ab+2}{x-a}$

이것이 $y=\dfrac{3x-1}{x-1}$과 일치해야 하므로

$a=1$, $b=3$ $\qquad\therefore a+b=1+3=4$

답 ②

|다른 풀이|

$y=\dfrac{3x-1}{x-1}=\dfrac{3(x-1)+2}{x-1}=\dfrac{2}{x-1}+3$

따라서 함수 $y=\dfrac{3x-1}{x-1}$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로

$a=1$, $b=3$ $\qquad\therefore a+b=1+3=4$

참고

함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-q=f(x-p)$

x 대신 $x-p$ 대입, y 대신 $y-q$ 대입

040

함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\dfrac{k}{x+1}+4$

이 함수의 그래프가 점 $(-2, 6)$을 지나므로

$6=\dfrac{k}{-2+1}+4$ $\qquad\therefore k=-2$

답 -2

041

① $y=\dfrac{3x-5}{x-1}=\dfrac{3(x-1)-2}{x-1}=-\dfrac{2}{x-1}+3$

즉, 함수 $y=\dfrac{3x-5}{x-1}$의 그래프는 함수 $y=-\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

② $y=\dfrac{5-x}{x-2}=\dfrac{-(x-2)+3}{x-2}=\dfrac{3}{x-2}-1$

즉, 함수 $y=\dfrac{5-x}{x-2}$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

③ $y=\dfrac{10-3x}{x-3}=\dfrac{-3(x-3)+1}{x-3}=\dfrac{1}{x-3}-3$

즉, 함수 $y=\dfrac{10-3x}{x-3}$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

④ $y=\dfrac{x+6}{x+4}=\dfrac{(x+4)+2}{x+4}=\dfrac{2}{x+4}+1$

즉, 함수 $y=\dfrac{x+6}{x+4}$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

⑤ $y=-\dfrac{x+4}{x+5}=\dfrac{-(x+5)+1}{x+5}=\dfrac{1}{x+5}-1$

즉, 함수 $y=-\dfrac{x+4}{x+5}$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -5만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 평행이동에 의하여 함수 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프와 겹쳐지는 것은 ②이다.

답 ②

참고

두 함수 $y=\dfrac{a}{x-p}+q$, $y=\dfrac{b}{x-m}+n$의 그래프가 평행이동에 의하여 겹쳐지려면 $a=b$이어야 한다.

042

함수 $y=\dfrac{5}{x+2}-1$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\dfrac{5}{x-a+2}+b-1$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

한편,

$y=\dfrac{5x-25}{x-6}=\dfrac{5(x-6)+5}{x-6}=\dfrac{5}{x-6}+5$

이고 이것이 ㉠과 일치해야 하므로

$-a+2=-6$, $b-1=5$ $\quad\therefore a=8$, $b=6$

$\therefore a+b=8+6=14$

답 14

043

함수 $y=\frac{bx+3}{x+a}=\frac{b(x+a)-ab+3}{x+a}=\frac{3-ab}{x+a}+b$의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\frac{3-ab}{x-5+a}+b-2$

이것이 $y=-\frac{7}{x}$과 일치해야 하므로

$3-ab=-7$, $-5+a=0$, $b-2=0$ $\quad\therefore a=5$, $b=2$

$\therefore a+b=5+2=7$

답 ③

044

$y=\frac{1}{2x-6}+m=\frac{1}{2(x-3)}+m$이므로 이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=3$, $y=m$

따라서 $m=-4$, $n=3$이므로

$mn=-4\times3=-12$

답 ③

045

$y=\frac{x+b}{x-a}=\frac{(x-a)+a+b}{x-a}=\frac{a+b}{x-a}+1$이므로 이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=a$, $y=1$

이때 주어진 함수의 그래프의 한 점근선이 직선 $x=4$이므로

$a=4$ ······ ❶

또, 함수 $y=\frac{x+b}{x-a}$, 즉 $y=\frac{x+b}{x-4}$의 그래프가 점 $(3, 5)$를 지나므로

$\frac{3+b}{3-4}=5$ $\quad\therefore b=-8$ ······ ❷

$\therefore a+b=4+(-8)=-4$ ······ ❸

답 -4

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

046

$f(x)=\frac{ax-1}{x+b}=\frac{a(x+b)-ab-1}{x+b}=-\frac{ab+1}{x+b}+a$이므로 이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-b$, $y=a$

따라서 $a=3$, $b=-1$이므로

$f(x)=\frac{3x-1}{x-1}$

$\therefore f(3)=\frac{3\times3-1}{3-1}=4$

답 4

047

$y=\frac{ax}{3x+1}=\frac{\frac{a}{3}x}{x+\frac{1}{3}}=\frac{\frac{a}{3}\left(x+\frac{1}{3}\right)-\frac{a}{9}}{x+\frac{1}{3}}=-\frac{\frac{a}{9}}{x+\frac{1}{3}}+\frac{a}{3}$이므로

이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-\frac{1}{3}$, $y=\frac{a}{3}$

따라서 두 점근선의 교점의 좌표는 $\left(-\frac{1}{3}, \frac{a}{3}\right)$이므로

$-\frac{1}{3}=b$, $\frac{a}{3}=\frac{1}{3}$ $\quad\therefore a=1$, $b=-\frac{1}{3}$

$\therefore a+b=1+\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}$

답 ②

048

유리함수 $f(x)=\frac{3}{x-2a}+a+2$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=2a$, $y=a+2$

따라서 두 점근선의 교점의 좌표는 $(2a, a+2)$이고, 직선 $y=x$가 이 점을 지나므로

$a+2=2a$ $\quad\therefore a=2$

답 ⑤

049

$y=\frac{6-3x}{x+3}=\frac{-3(x+3)+15}{x+3}=\frac{15}{x+3}-3$이므로 이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-3$, $y=-3$ ······ ㉠

$$y=\frac{bx-2}{3x+a}=\frac{\frac{b}{3}x-\frac{2}{3}}{x+\frac{a}{3}}$$

$$=\frac{\frac{b}{3}\left(x+\frac{a}{3}\right)-\frac{ab}{9}-\frac{2}{3}}{x+\frac{a}{3}}$$

$$=-\frac{\frac{ab}{9}+\frac{2}{3}}{x+\frac{a}{3}}+\frac{b}{3}$$

이므로 이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-\frac{a}{3}$, $y=\frac{b}{3}$ ······ ㉡

㉠, ㉡이 서로 일치해야 하므로

$-\frac{a}{3}=-3$, $\frac{b}{3}=-3$ $\quad\therefore a=9$, $b=-9$

$\therefore a-b=9-(-9)=18$

답 18

050

주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=4$, $y=-2$이므로 함수의 식을

$y=\frac{k}{x-4}-2$ (k는 상수)

로 놓을 수 있다.

이때 이 함수의 그래프가 점 $(1, -3)$을 지나므로

$-3=\frac{k}{1-4}-2$, $\frac{k}{-3}=-1$ $\quad\therefore k=3$

즉, 주어진 함수의 식은

$y=\frac{3}{x-4}-2=\frac{3-2(x-4)}{x-4}=\frac{-2x+11}{x-4}$

이므로 $a=-4$, $b=-2$, $c=11$

$\therefore a+b+c=-4+(-2)+11=5$

답 ⑤

| 다른 풀이 |

$y=\frac{bx+c}{x+a}=\frac{b(x+a)-ab+c}{x+a}=\frac{c-ab}{x+a}+b$이므로 이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-a$, $y=b$ $\quad\therefore a=-4$, $b=-2$

이때 함수 $y=\frac{bx+c}{x+a}$, 즉 $y=\frac{-2x+c}{x-4}$의 그래프가 점 $(1, -3)$을 지나므로

$-3=\frac{-2+c}{1-4}$, $-2+c=9$ $\quad\therefore c=11$

$\therefore a+b+c=-4+(-2)+11=5$

051

$y=\frac{k}{x-2}+1$에서 $y=0$일 때

$0=\frac{k}{x-2}+1$, $x-2=-k$ $\quad\therefore x=2-k$

$\therefore \mathrm{A}(2-k, 0)$

$y=\frac{k}{x-2}+1$에서 $x=0$일 때

$y=-\frac{k}{2}+1$

$\therefore \mathrm{B}\left(0, -\frac{k}{2}+1\right)$

곡선 $y=\frac{k}{x-2}+1$의 점근선의 방정식은 $x=2$, $y=1$이므로

$\mathrm{C}(2, 1)$

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로

$\frac{1-0}{2-(2-k)}=\frac{1-\left(-\frac{k}{2}+1\right)}{2-0}$ 두 직선 AC, BC의 기울기가 서로 같다.

$\frac{1}{k}=\frac{k}{4}$, $k^2=4$ $\quad\therefore k=-2$ ($\because k<0$)

답 ④

052

$y=\frac{3x-2}{-x+2}=\frac{-3x+2}{x-2}=\frac{-3(x-2)-4}{x-2}=-\frac{4}{x-2}-3$이므로

이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=2$, $y=-3$

따라서 함수 $y=\frac{3x-2}{-x+2}$의 그래프는 점 $(2, -3)$에 대하여 대칭이다.

즉, $a=2$, $b=-3$이므로

$ab=2\times(-3)=-6$

답 -6

053

$y=\frac{4x+3}{x-1}=\frac{4(x-1)+7}{x-1}=\frac{7}{x-1}+4$이므로 이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=1$, $y=4$

이때 주어진 함수의 그래프가 직선 $y=x+k$에 대하여 대칭이므로 직선 $y=x+k$는 두 점근선의 교점 $(1, 4)$를 지난다.

즉, $4=1+k$이므로 $k=3$

답 ③

054

점 $(1, 3)$에 대하여 대칭인 유리함수의 식을

$y=\frac{k}{x-1}+3$ (k는 0이 아닌 상수)

으로 놓을 수 있다. ❶

이 함수의 그래프가 점 $(0, -1)$을 지나므로

$-1=\frac{k}{0-1}+3$, $-k=-4$

$\therefore k=4$ ❷

즉, 주어진 함수의 식은

$y=\frac{4}{x-1}+3=\frac{4+3(x-1)}{x-1}=\frac{3x+1}{x-1}$

이므로

$a=-1$, $b=3$, $c=1$ ❸

$\therefore a+b+c=-1+3+1=3$ ❹

답 3

채점 기준	비율
❶ 점 $(1, 3)$에 대하여 대칭인 유리함수의 식을 $y=\frac{k}{x-1}+3$으로 놓을 수 있다.	30 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ a, b, c의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	10 %

| 다른 풀이 |

$y=\frac{bx+c}{x+a}=\frac{b(x+a)-ab+c}{x+a}=\frac{c-ab}{x+a}+b$이므로 이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-a$, $y=b$

이때 이 함수의 그래프가 점 $(1, 3)$에 대하여 대칭이므로

$-a=1$, $b=3$ $\quad\therefore a=-1$, $b=3$

또, 함수 $y=\frac{bx+c}{x+a}$, 즉 $y=\frac{3x+c}{x-1}$의 그래프가 점 $(0, -1)$을 지나므로

$-1=\frac{c}{-1}$ $\quad\therefore c=1$

$\therefore a+b+c=-1+3+1=3$

055

주어진 함수의 그래프가 두 직선 $y=x+3$, $y=-x-1$에 대하여 대칭이므로 이 두 직선의 교점은 주어진 함수의 그래프의 두 점근선의 교점과 같다.
두 식 $y=x+3$, $y=-x-1$을 연립하여 풀면
$x=-2$, $y=1$
따라서 주어진 함수의 그래프의 두 점근선의 방정식은
$x=-2$, $y=1$
$y=\dfrac{bx+3}{x-a}=\dfrac{b(x-a)+ab+3}{x-a}=\dfrac{ab+3}{x-a}+b$이므로 이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은
$x=a$, $y=b$
따라서 $a=-2$, $b=1$이므로
$a+b=-2+1=-1$

답 ②

056

함수 $y=f(x)$의 그래프는 곡선 $y=-\dfrac{2}{x}$를 평행이동한 것이므로
$f(x)=-\dfrac{2}{x-a}+b$ (a, b는 상수)
로 놓을 수 있다.
함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식이
$x=a$, $y=b$
이고 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 직선 $y=x$는 두 점근선의 교점 (a, b)를 지난다.
$\therefore b=a$
한편, 함수 $f(x)$의 정의역이 $\{x|x\neq-2$인 모든 실수$\}$이므로
$a=-2$
즉, $a=b=-2$이므로
$f(x)=-\dfrac{2}{x+2}-2$
$\therefore f(4)=-\dfrac{2}{4+2}-2=-\dfrac{1}{3}-2=-\dfrac{7}{3}$

답 ②

057

주어진 그래프에서 점근선의 방정식은
$x=2$, $y=3$
함수 $y=\dfrac{k}{x+a}+b$의 그래프의 점근선의 방정식은
$x=-a$, $y=b$ $\quad\therefore a=-2$, $b=3$
함수 $y=\dfrac{k}{x+a}+b$, 즉 $y=\dfrac{k}{x-2}+3$의 그래프가 점 $(0, 2)$를 지나므로
$2=\dfrac{k}{0-2}+3$, $-\dfrac{k}{2}=-1$ $\quad\therefore k=2$
$\therefore ab+k=-2\times3+2=-4$

답 ②

058

주어진 함수의 그래프에서 점근선의 방정식이
$x=-3$, $y=-1$
이므로 함수의 식을
$f(x)=\dfrac{k}{x+3}-1$ (k는 0이 아닌 상수)
로 놓을 수 있다. ❶
이 함수의 그래프가 점 $(-2, 0)$을 지나므로
$0=\dfrac{k}{-2+3}-1$
$\therefore k=1$ ❷
따라서 구하는 함수의 식은
$f(x)=\dfrac{1}{x+3}-1=\dfrac{1-(x+3)}{x+3}$
$=\dfrac{-x-2}{x+3}=-\dfrac{x+2}{x+3}$ ❸

답 $f(x)=-\dfrac{x+2}{x+3}$

채점 기준	비율
❶ $f(x)=\dfrac{k}{x+3}-1$로 놓을 수 있다.	40 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $f(x)$를 구할 수 있다.	20 %

059

주어진 함수의 그래프에서 점근선의 방정식이
$x=-1$, $y=1$
이므로 함수의 식을
$y=\dfrac{k}{x+1}+1$ (k는 0이 아닌 상수)
로 놓을 수 있다.
이 함수의 그래프가 점 $(2, 0)$을 지나므로
$0=\dfrac{k}{2+1}+1$, $\dfrac{k}{3}=-1$
$\therefore k=-3$
따라서 함수의 식은
$y=\dfrac{-3}{x+1}+1=\dfrac{-3+(x+1)}{x+1}=\dfrac{x-2}{x+1}$
이므로 $a=-1$, $b=1$, $c=2$
$\therefore a+b+c=-1+1+2=2$

답 ⑤

060

$y=\dfrac{bx+c}{x+a}=\dfrac{b(x+a)-ab+c}{x+a}=\dfrac{-ab+c}{x+a}+b$이므로 이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은
$x=-a$, $y=b$
이때 주어진 그래프에 의하여
$-a<0$, $b>0$
$\therefore a>0$, $b>0$
주어진 그래프가 y축과 원점 아래에서 만나므로 $x=0$일 때 y좌표가 0보다 작아야 한다.
$y=\dfrac{bx+c}{x+a}$에 $x=0$을 대입하면 $y=\dfrac{c}{a}$
즉, $\dfrac{c}{a}<0$, $a>0$이므로 $c<0$

답 ③

061

함수 $y=\frac{k}{x}$ (k는 0이 아닌 상수)의 그래프는

$k>0$이면 제1사분면과 제3사분면 위에 있고,

$k<0$이면 제2사분면과 제4사분면 위에 있다.

따라서 그 그래프가 제1사분면과 제3사분면을 지나는 것은 ㄴ, ㄹ이다.

답 ④

062

② 정의역과 치역은 모두 0을 제외한 실수 전체의 집합이다.

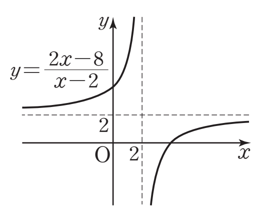
따라서 옳지 않은 것은 ②이다.

답 ②

063

$y=\frac{2x-8}{x-2}=\frac{2(x-2)-4}{x-2}=-\frac{4}{x-2}+2$

따라서 함수 $y=\frac{2x-8}{x-2}$의 그래프는 함수 $y=-\frac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것으로 오른쪽 그림과 같다.



즉, 함수 $y=\frac{2x-8}{x-2}$의 그래프가 지나지 않는 사분면은 제3사분면이다.

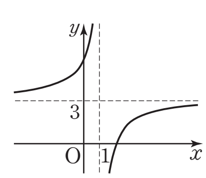
답 제3사분면

064

함수 $y=\frac{k}{x-1}+3$의 그래프의 점근선의 방정식은

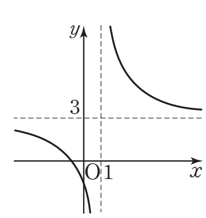
$x=1$, $y=3$

$k<0$이면 함수 $y=\frac{k}{x-1}+3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 제3사분면을 지나지 않는다.



따라서 $k>0$이어야 한다.

이때 함수 $y=\frac{k}{x-1}+3$의 그래프가 모든 사분면을 지나야 하므로 오른쪽 그림과 같이 그래프가 y축과 원점 아래에서 만나야 한다.



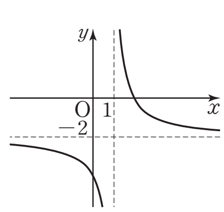
즉, $x=0$일 때의 y의 값이 0보다 작아야 하므로

$\frac{k}{0-1}+3<0 \qquad \therefore k>3$

답 ⑤

065

ㄱ. 함수 $y=\frac{2}{x-1}-2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 제1, 3, 4사분면을 지난다. (참)



ㄴ. 함수 $y=\frac{2}{x-1}-2$의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=1$, $y=-2$이므로

그 그래프는 두 직선 $y=(x-1)-2$, $y=-(x-1)-2$, 즉 $y=x-3$, $y=-x-1$에 대하여 대칭이다. (참)

ㄷ. 정의역은 $\{x \mid x\neq 1$인 실수$\}$이다. (거짓)

ㄹ. 함수 $y=\frac{2}{x-1}-2$의 그래프는 함수 $y=\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ①

참고

함수 $y=\frac{2}{x}$의 그래프가 두 직선 $y=x$, $y=-x$에 대하여 대칭이므로 함수 $y=\frac{2}{x-1}-2$의 그래프는 두 직선 $y=x$, $y=-x$를 각각 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 두 직선 $y=x-3$, $y=-x-1$에 대하여 대칭이다.

066

$y=\frac{bx+4}{x+a}=\frac{b(x+a)-ab+4}{x+a}=\frac{4-ab}{x+a}+b$

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\{x \mid x\neq -a$인 실수$\}$, 치역은 $\{y \mid y\neq b$인 실수$\}$이다.

즉, $-a=3$, $b=-5$이므로

$a=-3$, $b=-5$

$\therefore ab=-3\times(-5)=15$

답 15

067

두 함수 $y=\frac{a}{x}$, $y=\frac{b}{x}$의 그래프가 제1사분면 위에 있으므로

$a>0$, $b>0$

이때 함수 $y=\frac{a}{x}$의 그래프가 함수 $y=\frac{b}{x}$의 그래프보다 원점으로부터 멀리 떨어져 있으므로

$|a|>|b| \qquad \therefore a>b>0$ ……… ㉠

두 함수 $y=\frac{c}{x}$, $y=\frac{d}{x}$의 그래프가 제2사분면 위에 있으므로

$c<0$, $d<0$

이때 함수 $y=\frac{c}{x}$의 그래프가 함수 $y=\frac{d}{x}$의 그래프보다 원점으로부터 멀리 떨어져 있으므로

$|c|>|d| \qquad \therefore c<d<0$ 음수는 절댓값이 클수록 작아진다. ……… ㉡

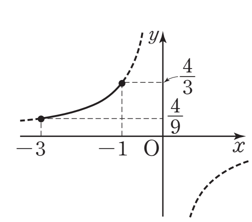
㉠, ㉡에 의하여

$c<d<b<a$

답 $c<d<b<a$

068

$-3\leq x\leq -1$에서 함수 $y=-\frac{4}{3x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=-1$일 때 최댓값 $\frac{4}{3}$,

$x=-3$일 때 최솟값 $\frac{4}{9}$

를 갖는다.

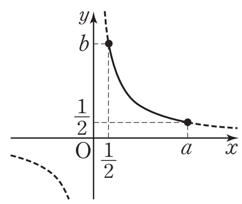
즉, $M=\frac{4}{3}$, $m=\frac{4}{9}$이므로

$$\frac{M}{m}=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{9}}=3$$

답 ③

069

$\frac{1}{2}\le x\le a$에서 최댓값이 b, 최솟값이 $\frac{1}{2}$이므로 함수 $y=\frac{3}{2x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 즉,



$x=\frac{1}{2}$일 때 최댓값 b,

$x=a$일 때 최솟값 $\frac{1}{2}$

을 갖는다.

따라서 함수 $y=\frac{3}{2x}$의 그래프가 두 점 $\left(\frac{1}{2}, b\right)$, $\left(a, \frac{1}{2}\right)$을 지나므로

$b=\frac{3}{2\times\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{2}=\frac{3}{2a}$ $\quad\therefore a=3, b=3$

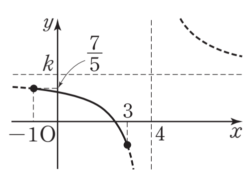
$\therefore a+b=3+3=6$

답 ③

070

함수 $y=\frac{3}{x-4}+k$의 그래프는 함수 $y=\frac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.

$-1\le x\le 3$에서 함수 $y=\frac{3}{x-4}+k$의 최댓값이 $\frac{7}{5}$이려면 그 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다. ❶



즉, 함수의 그래프가 점 $\left(-1, \frac{7}{5}\right)$을 지나므로

$\frac{7}{5}=\frac{3}{-1-4}+k$ $\quad\therefore k=2$ ❷

또, 함수 $y=\frac{3}{x-4}+k$, 즉 $y=\frac{3}{x-4}+2$가 $x=3$에서 최솟값을 가지므로 최솟값은

$\frac{3}{3-4}+2=-1$ ❸

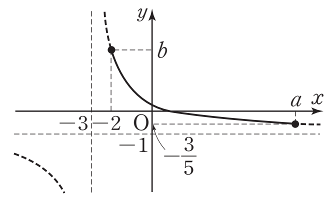
답 $k=2$, **최솟값:** -1

채점 기준	비율
❶ 조건을 만족시키는 그래프를 그릴 수 있다.	40 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 최솟값을 구할 수 있다.	30 %

071

$y=\frac{-x+1}{x+3}=\frac{-(x+3)+4}{x+3}=\frac{4}{x+3}-1$

따라서 함수 $y=\frac{-x+1}{x+3}$의 그래프는 함수 $y=\frac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.



정의역이 $\{x|-2\le x\le a\}$일 때, 함수 $y=\frac{-x+1}{x+3}$의 그래프는 위의 그림과 같으므로

$x=-2$에서 최댓값 b, $x=a$에서 최솟값 $-\frac{3}{5}$

을 갖는다.

따라서 함수 $y=\frac{-x+1}{x+3}$의 그래프가 두 점 $(-2, b)$, $\left(a, -\frac{3}{5}\right)$을 지나므로

$b=\frac{-(-2)+1}{-2+3}$, $-\frac{3}{5}=\frac{-a+1}{a+3}$ $\quad\therefore a=7, b=3$

$\therefore a-b=7-3=4$

답 ④

072

(1) $y=\frac{x-1}{x+2}$에서

$y(x+2)=x-1$, $(y-1)x=-2y-1$

$\therefore x=\frac{-2y-1}{y-1}$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=\frac{-2x-1}{x-1}$

(2) $y=\frac{2x+3}{x-3}$에서

$y(x-3)=2x+3$, $(y-2)x=3y+3$

$\therefore x=\frac{3y+3}{y-2}$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=\frac{3x+3}{x-2}$

답 (1) $y=\frac{-2x-1}{x-1}$ (2) $y=\frac{3x+3}{x-2}$

073

$y=\frac{ax-1}{2x+1}$로 놓으면

$y(2x+1)=ax-1$, $(2y-a)x=-y-1$

$\therefore x=\frac{-y-1}{2y-a}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{-x-1}{2x-a}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{-x-1}{2x-a}$ ❶

$f=f^{-1}$이므로

$\frac{ax-1}{2x+1}=\frac{-x-1}{2x-a}$

$\therefore\ a=-1$ ❷

답 -1

채점 기준	비율
❶ 함수 $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$를 구할 수 있다.	70 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30 %

|다른 풀이|

$f=f^{-1}$이므로

$(f\circ f)(x)=x$

이때

$$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f\left(\frac{ax-1}{2x+1}\right)=\frac{a\times\frac{ax-1}{2x+1}-1}{2\times\frac{ax-1}{2x+1}+1}=\frac{a(ax-1)-(2x+1)}{2(ax-1)+(2x+1)}=\frac{(a^2-2)x-a-1}{(2a+2)x-1}$$

이므로

$\dfrac{(a^2-2)x-a-1}{(2a+2)x-1}=x$

$\therefore\ (a^2-2)x-a-1=(2a+2)x^2-x$

이것이 x에 대한 항등식이므로

$2a+2=0,\ a^2-2=-1,\ -a-1=0$

$\therefore\ a=-1$

074

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 모두 점 $(-1,\ 3)$을 지나므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $(-1,\ 3)$, $(3,\ -1)$을 지난다.

즉, $3=\dfrac{-a+b}{-1+4}$, $-1=\dfrac{3a+b}{3+4}$이므로

$-a+b=9,\ 3a+b=-7$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-4,\ b=5$

$\therefore\ a+b=-4+5=1$

답 ④

075

$f(x)=\dfrac{2x+5}{x+3}=\dfrac{2(x+3)-1}{x+3}=-\dfrac{1}{x+3}+2$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식이

$x=-3,\ y=2$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(-3,\ 2)$에 대하여 대칭이다.

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 점 $(2,\ -3)$에 대하여 대칭이다.

즉, $p=2,\ q=-3$이므로

$p-q=2-(-3)=5$

답 ⑤

실력을 높이는 연습 문제

본문 142쪽

01

$$\frac{a^2-9b^2}{a^2-6ab+9b^2}\times\frac{a-3b}{a^2+3ab}=\frac{(a+3b)(a-3b)}{(a-3b)^2}\times\frac{a-3b}{a(a+3b)}=\frac{1}{a}$$

답 $\dfrac{1}{a}$

02

주어진 식의 양변에 $(x+2)^{11}$을 곱하여 정리하면

$x^{10}+1=a_1(x+2)^{10}+a_2(x+2)^9+\cdots+a_{10}(x+2)$

이 식이 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=-1$을 대입하면

$(-1)^{10}+1=a_1(-1+2)^{10}+a_2(-1+2)^9+\cdots+a_{10}(-1+2)$

$\therefore\ a_1+a_2+\cdots+a_{10}=2$

답 ②

풍쌤 개념 CHECK

미정계수법_高 공통수학 1

항등식의 뜻과 성질을 이용하여 등식에서 미지의 계수를 정하는 방법을 미정계수법이라고 한다.

(1) 계수 비교법: 등식의 양변의 동류항의 계수를 비교하여 미지의 계수를 정하는 방법

(2) 수치 대입법: 등식의 양변의 문자에 적당한 수를 대입하여 미지의 계수를 정하는 방법

03

$$\frac{x-1}{x-2}-\frac{x}{x-1}-\frac{x+1}{x}+\frac{x+2}{x+1}$$

$$=\frac{(x-2)+1}{x-2}-\frac{(x-1)+1}{x-1}-\frac{x+1}{x}+\frac{(x+1)+1}{x+1}$$

$$=\left(1+\frac{1}{x-2}\right)-\left(1+\frac{1}{x-1}\right)-\left(1+\frac{1}{x}\right)+\left(1+\frac{1}{x+1}\right)$$

$$=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}$$

$$=\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}\right)$$

$$=\frac{2}{x(x-2)}-\frac{2}{(x-1)(x+1)}=\frac{2(x-1)(x+1)-2x(x-2)}{x(x-1)(x-2)(x+1)}$$

$$=\frac{4x-2}{x(x-1)(x-2)(x+1)}$$

따라서 $a=4,\ b=-2$이므로

$a+b=4+(-2)=2$

답 ①

|다른 풀이|

$$\frac{x-1}{x-2}-\frac{x}{x-1}-\frac{x+1}{x}+\frac{x+2}{x+1}$$

$$=\left(\frac{x-1}{x-2}-\frac{x+1}{x}\right)+\left(\frac{x+2}{x+1}-\frac{x}{x-1}\right)$$

$$=\frac{x(x-1)-(x+1)(x-2)}{x(x-2)}+\frac{(x+2)(x-1)-x(x+1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\frac{2}{x(x-2)}-\frac{2}{(x+1)(x-1)}=\frac{2(x-1)(x+1)-2x(x-2)}{x(x-1)(x-2)(x+1)}$$

$$=\frac{4x-2}{x(x-1)(x-2)(x+1)}$$

04

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\cdots+\frac{1}{483}$$
$$=\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{21\times23}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{21}-\frac{1}{23}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{23}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{22}{23}=\frac{11}{23}$$

답 ③

05

$$\frac{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}}{\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+5}}=\frac{\frac{(n+3)-(n+1)}{(n+1)(n+3)}}{\frac{(n+5)-(n+3)}{(n+3)(n+5)}}=\frac{n+5}{n+1}$$

$\frac{n+5}{n+1}=k$ (k는 자연수)로 놓으면

$n+5=k(n+1)$, $(k-1)n=5-k$ $k=1$이면 $0\times n=4$이므로 모순이다. $\therefore k\neq1$

$k-1\neq0$이므로 양변을 $k-1$로 나누면

$$n=\frac{5-k}{k-1}=\frac{-(k-1)+4}{k-1}=-1+\frac{4}{k-1}$$

n이 정수이려면 $k-1$이 4의 약수이어야 하고, $k-1>0$이므로

$k-1=1,\ 2,\ 4$

$\therefore k=2,\ 3,\ 5$

따라서 정수 n은 3, 1, 0의 3개이다.

답 3

06

$x\neq0$이므로 $x^2+4x+1=0$의 양변을 x로 나누면

$x+4+\frac{1}{x}=0$ $\quad\therefore x+\frac{1}{x}=-4$

$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4$이므로

$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=(-4)^2-4=12$

이때 $-1<x<0$이므로

$x-\frac{1}{x}=\frac{x^2-1}{x}>0$

$\therefore x-\frac{1}{x}=2\sqrt{3}$

또, $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=(-4)^2-2=14$이므로

$$x^4-\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)$$
$$=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)$$
$$=14\times(-4)\times2\sqrt{3}=-112\sqrt{3}$$

답 $-112\sqrt{3}$

07

$\frac{4}{a}+\frac{3}{b}+\frac{5}{c}=0$이므로 $\frac{5ab+4bc+3ca}{abc}=0$

$\therefore 5ab+4bc+3ca=0$ ($\because abc\neq0$) ……… ㉠

$$\therefore \frac{2a}{(a+b)(a+c)}+\frac{3b}{(b+c)(b+a)}+\frac{c}{(c+a)(c+b)}$$
$$=\frac{2a(b+c)+3b(c+a)+c(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$
$$=\frac{5ab+4bc+3ca}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$
$=0$ ($\because$ ㉠)

답 0

08

ㄱ. $3x+2=0$에서 $x=-\frac{2}{3}$

따라서 주어진 유리함수의 정의역은

$\left\{x \middle| x\neq-\frac{2}{3}\text{인 실수}\right\}$

ㄴ. $x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$이므로 주어진 유리함수의 정의역은 실수 전체의 집합이다.

ㄷ. $x^2-9=0$에서 $x=\pm3$

따라서 주어진 유리함수의 정의역은

$\{x\,|\,x\neq\pm3\text{인 실수}\}$

ㄹ. 모든 실수 x에 대하여 $x^2+1>0$이므로 주어진 유리함수의 정의역은 실수 전체의 집합이다.

따라서 정의역이 실수 전체의 집합인 것은 ㄴ, ㄹ이다.

답 ④

09

함수 $y=\frac{5}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\frac{5}{x-3}+2$

이 함수의 그래프가 점 $(a,\ 3)$을 지나므로

$3=\frac{5}{a-3}+2$, $\frac{5}{a-3}=1$

$a-3=5$ $\quad\therefore a=8$

답 ⑤

10

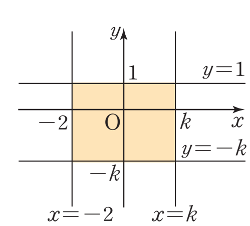
$y=-\frac{kx}{x+2}=\frac{-k(x+2)+2k}{x+2}=\frac{2k}{x+2}-k$이므로 이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-2$, $y=-k$

$y=\frac{x+3}{x-k}=\frac{(x-k)+k+3}{x-k}=\frac{k+3}{x-k}+1$이므로 이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=k$, $y=1$

k가 양수이므로 두 함수의 그래프의 점근선으로 둘러싸인 부분은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같다.



이 부분의 넓이가 12이므로

$\{k-(-2)\}\{1-(-k)\}=12$

$(k+2)(k+1)=12$

$k^2+3k-10=0$

$(k+5)(k-2)=0$

$\therefore k=2\ (\because k>0)$

답 2

11

곡선 $y=g(x)$는 유리함수 $f(x)=\dfrac{3x+k}{x+4}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로

$$g(x)=\frac{3(x+2)+k}{(x+2)+4}+3=\frac{3x+6+k}{x+6}+3$$

$$=\frac{3(x+6)+k-12}{x+6}+3=\frac{k-12}{x+6}+6$$

따라서 곡선 $y=g(x)$의 점근선의 방정식은

$x=-6,\ y=6$

이므로 두 점근선의 교점의 좌표는 $(-6,\ 6)$이다.

점 $(-6,\ 6)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$6=\dfrac{3\times(-6)+k}{-6+4},\ -18+k=-12 \qquad \therefore k=6$

답 ⑤

12

문제 접근하기

함수 $y=\left|f(x+a)+\dfrac{a}{2}\right|$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이려면 함수 $y=f(x+a)+\dfrac{a}{2}$의 그래프의 점근선이 x축, y축이어야 함을 이용한다.

함수 $y=\left|f(x+a)+\dfrac{a}{2}\right|$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로 함수 $y=f(x+a)+\dfrac{a}{2}$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=0,\ y=0$이어야 한다.

$f(x)=\dfrac{a}{x-6}+b$이므로

$f(x+a)+\dfrac{a}{2}=\dfrac{a}{x+a-6}+b+\dfrac{a}{2}$

따라서 함수 $y=f(x+a)+\dfrac{a}{2}$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=6-a,\ y=b+\dfrac{a}{2}$

이므로

$6-a=0,\ b+\dfrac{a}{2}=0 \qquad \therefore a=6,\ b=-3$

즉, $f(x)=\dfrac{6}{x-6}-3$이므로

$f(b)=f(-3)=\dfrac{6}{-3-6}-3=-\dfrac{11}{3}$

답 ④

13

함수 $y=\dfrac{a}{x-b}+c$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=b,\ y=c$

주어진 그래프에 의하여 $b<0,\ c<0$

함수 $y=\dfrac{a}{x-b}+c$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{a}{x}$의 그래프를 평행이동한 것이고 함수 $y=\dfrac{a}{x-b}+c$의 그래프에서 함수 $y=\dfrac{a}{x}$의 그래프가 제1사분면과 제3사분면 위에 그려짐을 알 수 있다.

$\therefore a>0$

$a>0,\ b<0$이므로 $a-b>0$

또, 주어진 그래프가 원점을 지나므로

$0=\dfrac{a}{0-b}+c,\ \dfrac{a}{b}=c \qquad \therefore a=bc$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

답 ④

14

문제 접근하기

주어진 함수의 식을 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$의 꼴로 변형하여 그래프의 점근선의 방정식을 구한 후 그래프가 제4사분면을 지나도록 하는 조건을 찾는다.

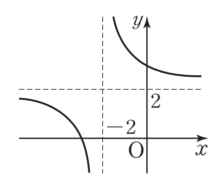
$$y=\frac{2x+n-8}{x+2}=\frac{2(x+2)+n-12}{x+2}=\frac{n-12}{x+2}+2$$

이므로 이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-2,\ y=2$

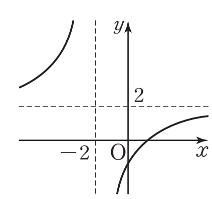
$n-12>0$, 즉 $n>12$이면 함수

$y=\dfrac{2x+n-8}{x+2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 제4사분면을 지나지 않는다.



따라서 $n<12$이어야 한다.

이때 함수 $y=\dfrac{2x+n-8}{x+2}$의 그래프가 제4사분면을 지나야 하므로 오른쪽 그림과 같이 그래프가 y축과 원점 아래에서 만나야 한다.



즉, $x=0$일 때의 y의 값이 0보다 작아야 하므로

$\dfrac{0+n-8}{0+2}<0 \qquad \therefore n<8$

따라서 조건을 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합은

$1+2+3+4+5+6+7=28$

답 28

15

$$f(x)=\frac{x+c}{ax+b}=\frac{\frac{1}{a}x+\frac{c}{a}}{x+\frac{b}{a}}=\frac{\frac{1}{a}\left(x+\frac{b}{a}\right)-\frac{b}{a^2}+\frac{c}{a}}{x+\frac{b}{a}}$$

$$=\frac{-\frac{b}{a^2}+\frac{c}{a}}{x+\frac{b}{a}}+\frac{1}{a}$$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-\dfrac{b}{a},\ y=\dfrac{1}{a}$

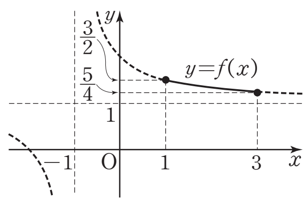
이므로 그 그래프는 점 $\left(-\dfrac{b}{a},\ \dfrac{1}{a}\right)$에 대하여 대칭이다.

즉, $-\frac{b}{a}=-1$, $\frac{1}{a}=1$이므로 $a=1$, $b=1$

함수 $f(x)=\frac{x+c}{ax+b}$, 즉 $f(x)=\frac{x+c}{x+1}$의 그래프가 점 $(0,\ 2)$를 지나므로

$2=\frac{0+c}{0+1}$ $\quad\therefore c=2$

$\therefore f(x)=\frac{x+2}{x+1}$



$1\leq x\leq 3$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 위의 그림과 같으므로 $f(x)$는

$x=1$에서 최댓값 $\frac{3}{2}$, $x=3$에서 최솟값 $\frac{5}{4}$

를 갖는다.

따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은

$\frac{3}{2}+\frac{5}{4}=\frac{11}{4}$

답 $\frac{11}{4}$

| 다른 풀이 |

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(-1,\ 1)$에 대하여 대칭이므로 점근선의 방정식은 $x=-1$, $y=1$이다.

따라서

$f(x)=\frac{k}{a(x+1)}+1$ (k는 0이 아닌 상수)

로 놓을 수 있다.

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(0,\ 2)$를 지나므로

$2=\frac{k}{a(0+1)}+1$, $\frac{k}{a}=1$ $\quad\therefore k=a$

$\therefore f(x)=\frac{a}{a(x+1)}+1=\frac{1}{x+1}+1=\frac{x+2}{x+1}$

$\therefore a=1$, $b=1$, $c=2$

16

$y=\frac{2x}{x+3}=\frac{2(x+3)-6}{x+3}=-\frac{6}{x+3}+2$

따라서 함수 $y=\frac{2x}{x+3}$의 그래프는 함수 $y=-\frac{6}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

직선 $y=mx+2$는 m의 값에 관계없이 항상 점 $(0,\ 2)$를 지나므로 다음과 같이 나누어 생각해 보자.

(i) $m=0$일 때

직선 $y=mx+2$, 즉 $y=2$는 함수 $y=\frac{2x}{x+3}$의 그래프의 한 점근선이므로 함수의 그래프와 직선은 만나지 않는다.

(ii) $m\neq 0$일 때

$\frac{2x}{x+3}=mx+2$에서

$2x=(mx+2)(x+3)$ $\qquad\therefore mx^2+3mx+6=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 $D<0$이어야 하므로

$D=(3m)^2-4\times m\times 6<0$

$9m^2-24m<0$, $3m(3m-8)<0$

$\therefore 0<m<\frac{8}{3}$

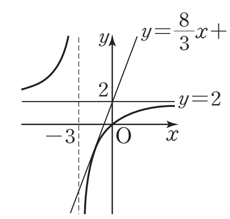
(i), (ii)에서 $0\leq m<\frac{8}{3}$

답 ②

참고

$m=0$일 때와 $m=\frac{8}{3}$일 때의 직선 $y=mx+2$는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수 $y=\frac{2x}{x+3}$의 그래프와 직선 $y=mx+2$가 만나지 않으려면 $0\leq m<\frac{8}{3}$이어야 한다.



17

문제 접근하기

$f^1(5)$, $f^2(5)$, $f^3(5)$, $\cdots$의 값을 차례대로 구한 후 그 규칙성을 파악하여 $f^{2021}(5)$의 값을 구한다.

$f(x)=\frac{x-1}{x}$이므로

$f^1(5)=\frac{5-1}{5}=\frac{4}{5}$

$f^2(5)=(f\circ f)(5)=f(f(5))=f\left(\frac{4}{5}\right)$

$=\frac{\frac{4}{5}-1}{\frac{4}{5}}=-\frac{1}{4}$

$f^3(5)=(f\circ f^2)(5)=f(f^2(5))=f\left(-\frac{1}{4}\right)$

$=\frac{-\frac{1}{4}-1}{-\frac{1}{4}}=5$

$f^4(5)=(f\circ f^3)(5)=f(f^3(5))=f(5)$

$=\frac{5-1}{5}=\frac{4}{5}$

$\vdots$

즉, $f^n(5)$의 값은 $\frac{4}{5}$, $-\frac{1}{4}$, 5가 이 순서대로 반복되고

$1022=3\times 340+2$이므로

$f^{1022}(5)=f^2(5)=-\frac{1}{4}$

답 ②

| 다른 풀이 |

$f(x)=\frac{x-1}{x}$이므로

$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=f\left(\frac{x-1}{x}\right)$

$=\frac{\frac{x-1}{x}-1}{\frac{x-1}{x}}=-\frac{1}{x-1}$

$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))=f\left(-\frac{1}{x-1}\right)$

$=\frac{-\frac{1}{x-1}-1}{-\frac{1}{x-1}}=x$

따라서 $f^{3n}(x)$ (n은 자연수)는 항등함수이므로

$f^{1}(x)=f^{4}(x)=f^{7}(x)=\cdots=\dfrac{x-1}{x}$

$f^{2}(x)=f^{5}(x)=f^{8}(x)=\cdots=-\dfrac{1}{x-1}$

$f^{3}(x)=f^{6}(x)=f^{9}(x)=\cdots=x$

즉, $f^{1022}(x)=f^{3\times340+2}(x)=f^{2}(x)=-\dfrac{1}{x-1}$이므로

$f^{1022}(5)=-\dfrac{1}{5-1}=-\dfrac{1}{4}$

18

$(f\circ g^{-1})^{-1}(4)=(g\circ f^{-1})(4)=g(f^{-1}(4))$

$f^{-1}(4)=k$라고 하면 $f(k)=4$이므로

$\dfrac{k}{k+2}=4$, $k=4k+8$

$\therefore k=-\dfrac{8}{3}$

따라서 $f^{-1}(4)=-\dfrac{8}{3}$이므로

$(f\circ g^{-1})^{-1}(4)=g(f^{-1}(4))=g\left(-\dfrac{8}{3}\right)$

$=\dfrac{3\times\left(-\dfrac{8}{3}\right)-2}{-\dfrac{8}{3}}=\dfrac{15}{4}$

답 $\dfrac{15}{4}$

| 다른 풀이 |

$y=\dfrac{x}{x+2}$로 놓으면

$(x+2)y=x$, $(y-1)x=-2y$

$\therefore x=-\dfrac{2y}{y-1}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=-\dfrac{2x}{x-1}$

$\therefore f^{-1}(x)=-\dfrac{2x}{x-1}$

$\therefore (f\circ g^{-1})^{-1}(4)=(g\circ f^{-1})(4)=g(f^{-1}(4))$

$=g\left(-\dfrac{2\times4}{4-1}\right)=g\left(-\dfrac{8}{3}\right)$

$=\dfrac{3\times\left(-\dfrac{8}{3}\right)-2}{-\dfrac{8}{3}}=\dfrac{15}{4}$

09 무리식과 무리함수

기본을 다지는 유형

본문 147쪽

001

(1) $x+5\geq0$에서 $x\geq-5$

(2) $x-3\geq0$에서 $x\geq3$ ·········· ㉠

$x+2\geq0$에서 $x\geq-2$ ·········· ㉡

㉠, ㉡에서 $x\geq3$

(3) $6+3x\geq0$에서 $3x\geq-6$

$\therefore x\geq-2$ ·········· ㉠

$4-x\geq0$에서 $x\leq4$ ·········· ㉡

㉠, ㉡에서 $-2\leq x\leq4$

(4) $x+3\geq0$에서 $x\geq-3$ ·········· ㉠

$6-x>0$에서 $x<6$ ·········· ㉡

㉠, ㉡에서 $-3\leq x<6$

답 (1) $x\geq-5$ (2) $x\geq3$ (3) $-2\leq x\leq4$ (4) $-3\leq x<6$

002

$3-x\geq0$에서 $x\leq3$ ·········· ㉠

$3x+7>0$에서 $3x>-7$

$\therefore x>-\dfrac{7}{3}$ ·········· ㉡

㉠, ㉡에서

$-\dfrac{7}{3}<x\leq3$

따라서 모든 정수 x의 값의 합은

$-2+(-1)+0+1+2+3=3$

답 3

003

$8-2x\geq0$에서 $2x\leq8$

$\therefore x\leq4$ ·········· ㉠

$x-3\neq0$에서 $x\neq3$ ·········· ㉡

㉠, ㉡에서

$x<3$ 또는 $3<x\leq4$

따라서 자연수 x는 1, 2, 4의 3개이다.

답 ③

004

$x+2\geq0$에서 $x\geq-2$ ·········· ㉠

$1-x\geq0$에서 $x\leq1$ ·········· ㉡

㉠, ㉡에서 $-2\leq x\leq1$ ·········· ❶

$-2\leq x\leq1$에서 $x-3<0$, $x+4>0$이므로

$|x-3|+|x+4|=-(x-3)+x+4=7$ ·········· ❷

답 7

채점 기준	비율
❶ $\sqrt{x+2}-\sqrt{1-x}$의 값이 실수가 되도록 하는 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❷ $\lvert x-3\rvert+\lvert x+4\rvert$를 간단히 할 수 있다.	50 %

005

(1) $(\sqrt{2x+1}-1)(\sqrt{2x+1}+1)=(\sqrt{2x+1})^2-1^2$
$=2x+1-1=2x$

(2) $(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-3})(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3})=(\sqrt{x+3})^2-(\sqrt{x-3})^2$
$=x+3-(x-3)=6$

답 (1) $2x$ (2) 6

006

(1) $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}$
$=\dfrac{x+y-2\sqrt{xy}}{x-y}$

(2) $\dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}=\dfrac{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})^2}{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})}$
$=\dfrac{x+2+x+2\sqrt{x^2+2x}}{(x+2)-x}$
$=\dfrac{2(x+1)+2\sqrt{x^2+2x}}{2}$
$=x+1+\sqrt{x^2+2x}$

답 (1) $\dfrac{x+y-2\sqrt{xy}}{x-y}$ (2) $x+1+\sqrt{x^2+2x}$

007

$-2<a<1$이므로
$a+2>0,\ a-1<0$
$\therefore \sqrt{a^2+4a+4}+\sqrt{a^2-2a+1}=\sqrt{(a+2)^2}+\sqrt{(a-1)^2}$
$=\lvert a+2\rvert+\lvert a-1\rvert$
$=a+2-(a-1)$
$=3$

답 ④

008

$x^2-4=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2-4=a^2+\dfrac{1}{a^2}-2=\left(a-\dfrac{1}{a}\right)^2$ ❶

이때 $a>1$이므로 $0<\dfrac{1}{a}<1$

$\therefore a-\dfrac{1}{a}>0$ ❷

$\therefore \sqrt{x^2-4}-x=\sqrt{\left(a-\dfrac{1}{a}\right)^2}-\left(a+\dfrac{1}{a}\right)$
$=\left\lvert a-\dfrac{1}{a}\right\rvert-\left(a+\dfrac{1}{a}\right)$
$=a-\dfrac{1}{a}-a-\dfrac{1}{a}$
$=-\dfrac{2}{a}$ ❸

답 $-\dfrac{2}{a}$

채점 기준	비율
❶ x^2-4를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $a-\dfrac{1}{a}$의 부호를 구할 수 있다.	30 %
❸ $\sqrt{x^2-4}-x$를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %

009

$\dfrac{1}{a+\sqrt{ab}}+\dfrac{1}{b+\sqrt{ab}}=\dfrac{1}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}+\dfrac{1}{\sqrt{b}(\sqrt{b}+\sqrt{a})}$
$=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$
$=\dfrac{1}{\sqrt{a}\sqrt{b}}$
$=\dfrac{1}{\sqrt{ab}}\ (\because a>0,\ b>0)$

답 ④

010

$\sqrt{x+1}\sqrt{4-y}=-\sqrt{(x+1)(4-y)}$이고 $x\neq-1,\ y\neq4$이므로
$x+1<0,\ 4-y<0$
따라서 $x<-1,\ y>4$이므로
$x-y<0$
$\therefore \sqrt{(x+1)^2}+\lvert 4-y\rvert-\sqrt{(x-y)^2}$
$=\lvert x+1\rvert+\lvert 4-y\rvert-\lvert x-y\rvert$
$=-(x+1)-(4-y)+(x-y)$
$=-5$

답 -5

011

$\dfrac{\sqrt{a-3}}{\sqrt{a-7}}=-\sqrt{\dfrac{a-3}{a-7}}$이므로
$a-3>0,\ a-7<0$ 또는 $a-3=0$
$\therefore \sqrt{(a-3)^2}+\sqrt{(a-7)^2}=\lvert a-3\rvert+\lvert a-7\rvert$
$=a-3-(a-7)$
$=4$

답 ②

012

$\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}+\dfrac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}$
$=\dfrac{(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x})^2}{(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x})}$
$+\dfrac{(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})^2}{(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x})(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}$
$=\dfrac{(2+x)+(2-x)-2\sqrt{4-x^2}}{(2+x)-(2-x)}+\dfrac{(2+x)+(2-x)+2\sqrt{4-x^2}}{(2+x)-(2-x)}$
$=\dfrac{4-2\sqrt{4-x^2}}{2x}+\dfrac{4+2\sqrt{4-x^2}}{2x}$
$=\dfrac{8}{2x}=\dfrac{4}{x}$
$\therefore k=4$

답 ⑤

013

$$\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{(\sqrt{x}+1)-(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{2}{x-1}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{5}-1}=\frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}$$

$$=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

답 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

014

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}=\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})+(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}$$

$$=\frac{2\sqrt{x+1}}{(x+1)-x}=2\sqrt{x+1}$$

$$=2\sqrt{8+1}=2\times3=6$$

답 ②

015

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}$$

$$=\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})}$$

$$=\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}{(x+2)-(x+1)}$$

$=\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}$ ❶

이므로

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(398)$

$=(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+(\sqrt{5}-\sqrt{4})+\cdots+(\sqrt{400}-\sqrt{399})$

$=\sqrt{400}-\sqrt{2}=20-\sqrt{2}$ ❷

따라서 $a=20$, $b=-1$이므로

$a+b=20+(-1)=19$ ❸

답 19

채점 기준	비율
❶ $f(x)$의 분모를 유리화할 수 있다.	40 %
❷ $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(398)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

016

$$x=\frac{1}{\sqrt{5}-2}=\frac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}=\frac{\sqrt{5}+2}{5-4}=\sqrt{5}+2$$

$$\therefore \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}=\frac{(\sqrt{x}+1)^2+(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$=\frac{x+2\sqrt{x}+1+(x-2\sqrt{x}+1)}{x-1}$$

$$=\frac{2(x+1)}{x-1}=\frac{2\{(\sqrt{5}+2)+1\}}{(\sqrt{5}+2)-1}$$

$$=\frac{2(\sqrt{5}+3)}{\sqrt{5}+1}=\frac{2(\sqrt{5}+3)(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}$$

$$=\frac{2(2+2\sqrt{5})}{4}=1+\sqrt{5}$$

답 ④

017

$$x=\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\frac{(2-\sqrt{3})^2}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$$

$$=\frac{4+3-4\sqrt{3}}{4-3}=7-4\sqrt{3}$$

$$y=\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{(2+\sqrt{3})^2}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}$$

$$=\frac{4+3+4\sqrt{3}}{4-3}=7+4\sqrt{3}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})-\sqrt{y}(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}$$

$$=\frac{x+\sqrt{xy}-\sqrt{xy}+y}{x-y}$$

$$=\frac{x+y}{x-y}=\frac{(7-4\sqrt{3})+(7+4\sqrt{3})}{(7-4\sqrt{3})-(7+4\sqrt{3})}$$

$$=\frac{14}{-8\sqrt{3}}=-\frac{7}{4\sqrt{3}}$$

$$=-\frac{7\sqrt{3}}{12}$$

답 ①

018

ㄷ. $y=\sqrt{2}x-1$은 다항함수이다.

따라서 무리함수인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

답 ④

019

(1) $x+3\geq0$에서 $x\geq-3$

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\{x|x\geq-3\}$

(2) $5-2x\geq0$에서 $x\leq\frac{5}{2}$

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\left\{x\middle|x\leq\frac{5}{2}\right\}$

(3) $4x-3\geq0$에서 $x\geq\frac{3}{4}$

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\left\{x\middle|x\geq\frac{3}{4}\right\}$

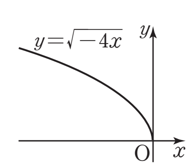
(4) $-3x+6\geq0$에서 $x\leq2$

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\{x|x\leq2\}$

답 (1) $\{x|x\geq-3\}$ (2) $\left\{x\middle|x\leq\frac{5}{2}\right\}$ (3) $\left\{x\middle|x\geq\frac{3}{4}\right\}$ (4) $\{x|x\leq2\}$

020

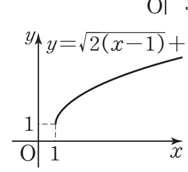
(1) 함수 $y=\sqrt{-4x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



정의역은 $\{x|x\leq0\}$

치역은 $\{y|y\geq0\}$

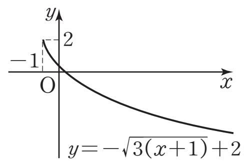
(2) 함수 $y=\sqrt{2(x-1)}+1$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 정의역은 $\{x|x\geq1\}$

치역은 $\{y|y\geq1\}$

(3) 함수 $y=-\sqrt{3(x+1)}+2$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

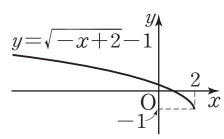


따라서 정의역은 $\{x|x\geq-1\}$
치역은 $\{y|y\leq2\}$

답 풀이 참조

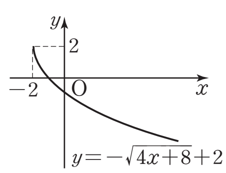
021

(1) $y=\sqrt{-x+2}-1=\sqrt{-(x-2)}-1$
즉, 함수 $y=\sqrt{-x+2}-1$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 정의역은 $\{x|x\leq2\}$
치역은 $\{y|y\geq-1\}$

(2) $y=-\sqrt{4x+8}+2=-\sqrt{4(x+2)}+2$
즉, 함수 $y=-\sqrt{4x+8}+2$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{4x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 정의역은 $\{x|x\geq-2\}$
치역은 $\{y|y\leq2\}$

답 풀이 참조

022

$y=\sqrt{3x+9}-1=\sqrt{3(x+3)}-1$
따라서 함수 $y=\sqrt{3x+9}-1$의 정의역은 $\{x|x\geq-3\}$, 치역은 $\{y|y\geq-1\}$이므로
$p=-3$, $q=-1$
$\therefore \dfrac{p}{q}=\dfrac{-3}{-1}=3$

답 ②

023

함수 $y=-\sqrt{x-a}+a+2$의 그래프가 점 $(a, -a)$를 지나므로
$-a=-\sqrt{a-a}+a+2$, $-2a=2$ $\quad\therefore a=-1$
따라서 주어진 함수는 $y=-\sqrt{x+1}+1$이므로 치역은 $\{y|y\leq1\}$

답 ①

024

$mx+12\geq0$에서
$mx\geq-12$
이 부등식의 해가 $x\geq-3$이므로 $m>0$
$\therefore x\geq-\dfrac{12}{m}$

즉, $-\dfrac{12}{m}=-3$이므로
$m=4$ ········· ❶
함수 $y=-\sqrt{mx+12}+n$, 즉 $y=-\sqrt{4x+12}+n$의 그래프가 점 $(-2, 3)$을 지나므로
$3=-\sqrt{4\times(-2)+12}+n$, $3=-\sqrt{4}+n$
$\therefore n=5$ ········· ❷
$\therefore m+n=4+5=9$ ········· ❸

답 9

채점 기준	비율
❶ m의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ n의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $m+n$의 값을 구할 수 있다.	20 %

025

함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=\sqrt{2(x-1)}+3$
이 함수의 그래프가 점 $(9, a)$를 지나므로
$a=\sqrt{2(9-1)}+3=4+3=7$

답 ③

026

함수 $y=\sqrt{a-3x}-2$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=\sqrt{a-3(x+2)}-2+1=\sqrt{a-6-3x}-1$
이 함수의 그래프가 점 $(-1, 2)$를 지나므로
$2=\sqrt{a-6-3\times(-1)}-1$, $\sqrt{a-3}=3$
양변을 제곱하면
$a-3=9$ $\quad\therefore a=12$

답 12

027

함수 $y=-\sqrt{2x-3}+1$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은
$-y=-\sqrt{-2x-3}+1$
$\therefore y=\sqrt{-2x-3}-1$
이 함수의 그래프가 점 $(-2, a)$를 지나므로
$a=\sqrt{-2\times(-2)-3}-1=1-1=0$

답 ③

참고
함수 $y=f(x)$의 그래프를
(1) x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $-y=f(x)$
y 대신 $-y$ 대입
(2) y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $y=f(-x)$
x 대신 $-x$ 대입
(3) 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $-y=f(-x)$
x 대신 $-x$ 대입, y 대신 $-y$ 대입
(4) 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $x=f(y)$
x 대신 y 대입, y 대신 x 대입

028

함수 $y=\sqrt{3-x}-2$의 그래프를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{3-(x-k)}-2=\sqrt{3+k-x}-2$

이 함수의 그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표는 $\sqrt{3+k}-2$이고 이것이 양수이므로

$\sqrt{3+k}-2>0$, $\sqrt{3+k}>2$

양변을 제곱하면

$3+k>4 \qquad \therefore k>1$

답 $k>1$

029

함수 $y=\sqrt{a(x+2)}-3$의 그래프를 x축의 방향으로 b만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{a(x-b+2)}-3+c=\sqrt{ax-ab+2a}-3+c$

이것이 $y=\sqrt{18-6x}+5$와 일치하므로

$a=-6$, $-ab+2a=18$, $-3+c=5$

$\therefore a=-6$, $b=5$, $c=8$

$\therefore a+b+c=-6+5+8=7$

답 ②

030

함수 $y=-\sqrt{2x+1}$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=-\sqrt{2x+1} \qquad \therefore y=\sqrt{2x+1}$

이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{2(x-3)+1}-2 \qquad \therefore y=\sqrt{2x-5}-2$

답 $y=\sqrt{2x-5}-2$

031

① 함수 $y=\sqrt{2x-1}=\sqrt{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼 평행이동한 것이다.

② 함수 $y=\sqrt{-2x}+3$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

③ 함수 $y=-\sqrt{4-2x}+1=-\sqrt{-2(x-2)}+1$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

④ 함수 $y=\sqrt{4x-8}+2=\sqrt{4(x-2)}+2$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-4x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

⑤ 함수 $y=\sqrt{2x-6}-5=\sqrt{2(x-3)}-5$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이다.

따라서 평행이동 또는 대칭이동에 의하여 함수 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프와 겹쳐지지 않는 것은 ④이다.

답 ④

032

함수 $y=\sqrt{-x+3}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{-(x+1)+3}+3$

$\therefore y=\sqrt{-x+2}+3$ ❶

이 함수의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{-(-x)+2}+3$

$\therefore y=\sqrt{x+2}+3$ ❷

이것이 $y=\sqrt{ax+b}+c$와 일치하므로

$a=1$, $b=2$, $c=3$

$\therefore a+b+c=1+2+3=6$ ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ 평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	40 %
❷ 대칭이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	30 %
❸ $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	30 %

033

주어진 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로

$f(x)=\sqrt{x+2}-1$

$\therefore f(7)=\sqrt{7+2}-1=3-1=2$

답 ②

034

주어진 그래프는 함수 $y=a\sqrt{-x}$ $(a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로

$y=a\sqrt{-(x-4)}+1$ $(a<0)$

로 놓을 수 있다.

이 함수의 그래프가 점 $(0, -3)$을 지나므로

$-3=a\sqrt{4}+1$, $2a=-4 \qquad \therefore a=-2$

즉, 주어진 그래프의 식은

$y=-2\sqrt{-(x-4)}+1=-2\sqrt{-x+4}+1$

이므로 $a=-2$, $b=4$, $c=1$

$\therefore a+b+c=-2+4+1=3$

답 3

035

주어진 그래프는 함수 $y=\sqrt{bx}$ $(b<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼 평행이동한 것이므로

$y=\sqrt{b(x-2)}+\frac{1}{2}$ $(b<0)$

로 놓을 수 있다.

이 함수의 그래프가 점 $\left(0, \frac{5}{2}\right)$를 지나므로

$\frac{5}{2}=\sqrt{-2b}+\frac{1}{2}$, $\sqrt{-2b}=2$

$-2b=4 \qquad \therefore b=-2$

즉, 주어진 그래프의 식은

$y=\sqrt{-2(x-2)}+\frac{1}{2}$

이므로 $a=-2$, $b=-2$, $c=\frac{1}{2}$

$\therefore (a+b)c=\{-2+(-2)\}\times\frac{1}{2}=-2$

답 -2

036

주어진 그래프는 함수 $y=a\sqrt{x}$ $(a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로

$f(x)=a\sqrt{x+1}+3$ $(a<0)$

으로 놓을 수 있다.

이 함수의 그래프가 점 $(0, 1)$을 지나므로

$1=a+3$ $\quad\therefore a=-2$

$\therefore f(x)=-2\sqrt{x+1}+3$

$f(k)=-3$에서

$-2\sqrt{k+1}+3=-3$

$2\sqrt{k+1}=6$, $\sqrt{k+1}=3$

양변을 제곱하면

$k+1=9$ $\quad\therefore k=8$

답 8

037

함수 $y=\sqrt{ax+b}+c=\sqrt{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}+c$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{b}{a}$만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 것이므로 주어진 그래프에서

$a<0$, $-\frac{b}{a}<0$, $c>0$

$-\frac{b}{a}<0$에서 $\frac{b}{a}>0$

$\therefore b<0$ $(\because a<0)$

답 ⑤

038

ㄱ. $a>0$이면 정의역은 $\{x|x\le0\}$, 치역은 $\{y|y\ge0\}$이므로 그래프는 제2사분면을 지난다. (참)

ㄴ. 정의역은 a의 값에 관계없이 항상 $\{x|x\le0\}$이다. (참)

ㄷ. $a<0$이면 정의역은 $\{x|x\le0\}$, 치역은 $\{y|y\le0\}$이다. (거짓)

ㄹ. 그래프는 함수 $y=a\sqrt{x}$의 그래프와 y축에 대하여 대칭이다. (거짓)

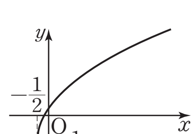
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ①

039

함수 $y=\sqrt{4x+2}-1=\sqrt{4\left(x+\frac{1}{2}\right)}-1$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{4x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

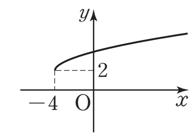
$x=0$일 때 y의 값은 $\sqrt{2}-1>0$이므로 함수 $y=\sqrt{4x+2}-1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 제1사분면, 제2사분면, 제3사분면을 지난다.



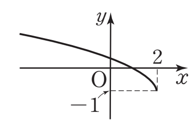
답 제1사분면, 제2사분면, 제3사분면

040

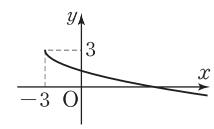
① 함수 $y=\sqrt{x+4}+2$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
따라서 제2사분면을 지난다.



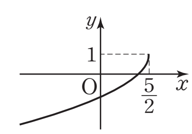
② 함수 $y=\sqrt{2-x}-1=\sqrt{-(x-2)}-1$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
따라서 제2사분면을 지난다.



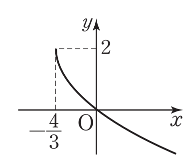
③ 함수 $y=-\sqrt{x+3}+3$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
따라서 제2사분면을 지난다.



④ 함수 $y=-\sqrt{5-2x}+1=-\sqrt{-2\left(x-\frac{5}{2}\right)}+1$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{5}{2}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
따라서 제2사분면을 지나지 않는다.



⑤ 함수 $y=-\sqrt{3x+4}+2=-\sqrt{3\left(x+\frac{4}{3}\right)}+2$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{4}{3}$만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
따라서 제2사분면을 지난다.



따라서 그래프가 제2사분면을 지나지 않는 것은 ④이다.

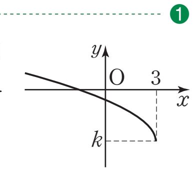
답 ④

041

$y=\sqrt{-2x+6}+k=\sqrt{-2(x-3)}+k$

함수 $y=\sqrt{-2x+6}+k$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다. ❶

따라서 함수 $y=\sqrt{-2x+6}+k$의 그래프가 제3사분면을 지나려면 오른쪽 그림과 같이 y축과 원점 아래에서 만나야 한다.



즉, $x=0$일 때의 y의 값이 0보다 작아야 하므로

$\sqrt{6}+k<0$ $\quad\therefore k<-\sqrt{6}$ ❷

이때 $-\sqrt{6}=-2.\times\times\times$이므로 정수 k의 최댓값은 -3이다. ❸

답 -3

채점 기준	비율
❶ 함수 $y=\sqrt{-2x+6}+k$의 그래프가 함수 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 평행이동한 것임을 알 수 있다.	30 %
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ 정수 k의 최댓값을 구할 수 있다.	20 %

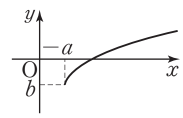
042

주어진 직선은 오른쪽 아래로 향하고 y축과 원점 아래에서 만나므로

$a<0$, $b<0$

함수 $y=\sqrt{x+a}+b$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-a$만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이다.

이때 $a<0$, 즉 $-a>0$이고, $b<0$이므로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같이 제1사분면, 제4사분면을 지난다.



답 제1사분면, 제4사분면

043

두 함수 $y=\sqrt{ax}$, $y=\sqrt{bx}$의 그래프가 제1사분면 위에 있으므로

$a>0$, $b>0$

또, 함수 $y=\sqrt{bx}$의 그래프가 함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프보다 x축으로부터 더 멀리 떨어져 있으므로

$|b|>|a|$ $\quad\therefore b>a>0$ ········ ㉠

두 함수 $y=\sqrt{cx}$, $y=\sqrt{dx}$의 그래프가 제2사분면 위에 있으므로

$c<0$, $d<0$

또, 함수 $y=\sqrt{dx}$의 그래프가 함수 $y=\sqrt{cx}$의 그래프보다 x축으로부터 더 멀리 떨어져 있으므로

$|d|>|c|$ $\quad\therefore d<c<0$ ········ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $d<c<a<b$

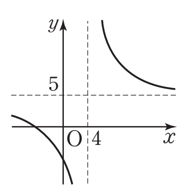
답 ⑤

044

함수 $y=\dfrac{k}{x-4}+5$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.

이때 $k<0$이면 제3사분면을 지나지 않으므로 $k>0$이어야 한다.

또, 함수 $y=\dfrac{k}{x-4}+5$의 그래프가 모든 사분면을 지나야 하므로 오른쪽 그림과 같이 y축과 원점 아래에서 만나야 한다.



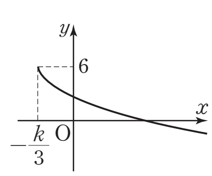
즉, $x=0$일 때 y의 값이 0보다 작아야 하므로

$-\dfrac{k}{4}+5<0$, $\dfrac{k}{4}>5$

$\therefore k>20$ ········ ㉠

함수 $y=-\sqrt{3x+k}+6=-\sqrt{3\left(x+\dfrac{k}{3}\right)}+6$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{k}{3}$만큼, y축의 방향으로 6만큼 평행이동한 것이다.

이때 함수 $y=-\sqrt{3x+k}+6$의 그래프가 제1사분면, 제2사분면, 제4사분면을 지나야 하므로 오른쪽 그림과 같이 y축과 원점 위에서 만나야 한다.



즉, $x=0$일 때의 y의 값이 0보다 커야 하므로

$-\sqrt{k}+6>0$, $\sqrt{k}<6$

양변을 제곱하면 $k<36$ ········ ㉡

㉠, ㉡에서 $20<k<36$

따라서 정수 k는 21, 22, 23, $\cdots$, 35의 15개이다.

답 15

045

$y=\sqrt{-8-4x}+a=\sqrt{-4(x+2)}+a$

함수 $y=\sqrt{-8-4x}+a$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-4x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=\sqrt{-8-4x}+a$는 $x=-2$에서 최솟값 a를 가지므로

$a=-3$, $b=-2$

$\therefore a-b=-3-(-2)=-1$

답 ②

046

$f(x)=-\sqrt{2x+a}+5=-\sqrt{2\left(x+\dfrac{a}{2}\right)}+5$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{a}{2}$만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.

이때 함수 $f(x)$는 $x=-\dfrac{a}{2}$에서 최댓값 5를 가지므로

$-\dfrac{a}{2}=-3$, $b=5$ $\qquad\therefore a=6$, $b=5$

따라서 $f(x)=-\sqrt{2x+6}+5$이므로

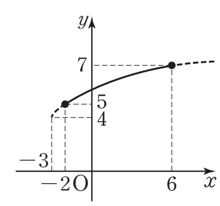
$f(3b)=f(15)=-\sqrt{30+6}+5=-6+5=-1$

답 -1

047

함수 $y=\sqrt{x+3}+4$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

$-2\le x\le 6$에서 함수 $y=\sqrt{x+3}+4$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=-2$에서 최솟값 5를 갖는다.



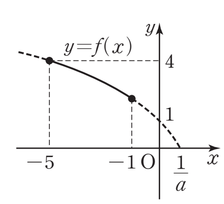
답 ①

048

$f(x)=\sqrt{-ax+1}=\sqrt{-a\left(x-\dfrac{1}{a}\right)}$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{1}{a}$만큼 평행이동한 것이다.

$-5\le x\le -1$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=-5$에서 최댓값 4를 갖는다.



즉, $\sqrt{5a+1}=4$이므로 양변을 제곱하면

$5a+1=16$ $\qquad\therefore a=3$

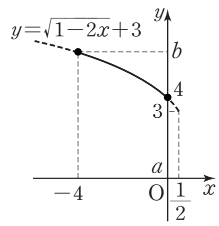
답 3

049

$y=\sqrt{1-2x}+3=\sqrt{-2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)}+3$

함수 $y=\sqrt{1-2x}+3$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

$-4 \le x \le a$에서 함수 $y=\sqrt{1-2x}+3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=-4$에서 최댓값을 갖고 $x=a$에서 최솟값을 갖는다. ········ ❶



즉, $x=-4$에서 최댓값 b를 가지므로

$b=\sqrt{1-2\times(-4)}+3=\sqrt{9}+3$

$=3+3=6$

또, $x=a$에서 최솟값 4를 가지므로

$4=\sqrt{1-2a}+3$, $\sqrt{1-2a}=1$

양변을 제곱하면 $1-2a=1$

$\therefore a=0$ ········ ❷

$\therefore a+b=0+6=6$ ········ ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ $x=-4$에서 최댓값을 갖고 $x=a$에서 최솟값을 가짐을 알 수 있다.	40 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

050

(1) 함수 $y=\sqrt{x+1}$의 치역은 $\{y \mid y \ge 0\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x \mid x \ge 0\}$이다.

$y=\sqrt{x+1}$에서 $y^2=x+1$

$\therefore x=y^2-1$

x와 y를 서로 바꾸면 주어진 함수의 역함수는

$y=x^2-1\ (x \ge 0)$

(2) 함수 $y=-\sqrt{x-4}+3$의 치역은 $\{y \mid y \le 3\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x \mid x \le 3\}$이다.

$y=-\sqrt{x-4}+3$에서 $y-3=-\sqrt{x-4}$

$(y-3)^2=x-4$

$\therefore x=y^2-6y+13$

x와 y를 서로 바꾸면 주어진 함수의 역함수는

$y=x^2-6x+13\ (x \le 3)$

답 (1) $y=x^2-1\ (x \ge 0)$ (2) $y=x^2-6x+13\ (x \le 3)$

051

$f^{-1}(7)=k$라고 하면 $f(k)=7$이므로

$\sqrt{k-2}+2=7$, $\sqrt{k-2}=5$

$k-2=25$ $\therefore k=27$

$\therefore f^{-1}(7)=27$

답 27

052

함수 $y=\sqrt{ax+b}$의 그래프와 그 역함수의 그래프가 모두 점 $(3, 2)$를 지나므로 함수 $y=\sqrt{ax+b}$의 그래프는 두 점 $(3, 2)$, $(2, 3)$을 지난다. ········ ❶

따라서 $2=\sqrt{3a+b}$, $3=\sqrt{2a+b}$이므로

$3a+b=4$, $2a+b=9$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-5$, $b=19$ ········ ❷

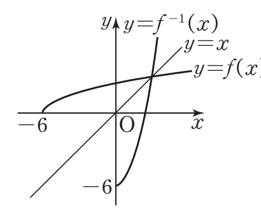
$\therefore a+b=-5+19=14$ ········ ❸

답 14

채점 기준	비율
❶ 함수 $y=\sqrt{ax+b}$의 그래프가 두 점 $(3, 2)$, $(2, 3)$을 지남을 알 수 있다.	40 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

053

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



$\sqrt{x+6}=x$에서 $x+6=x^2$

$x^2-x-6=0$, $(x+2)(x-3)=0$ $\sqrt{x+6} \ge 0$이므로 $x \ge 0$

$\therefore x=3\ (\because x \ge 0)$

따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 $(3, 3)$이므로 $a=3$, $b=3$

$\therefore ab=3\times3=9$

답 ③

실력을 높이는 연습 문제

본문 158쪽

01

$x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$이므로 x^2-x+1은 모든 실수 x에 대하여 양수이다. ········ ㉠

$4-2x \ge 0$에서

$2x \le 4$ $\therefore x \le 2$ ········ ㉡

$3x-4>0$에서

$3x>4$ $\therefore x>\frac{4}{3}$ ········ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에 의하여

$\frac{4}{3}<x \le 2$

답 ④

02

모든 실수 x에 대하여 $\sqrt{(k+2)x^2-(k+2)x+3}$의 값이 실수가 되려면 부등식

$(k+2)x^2-(k+2)x+3 \ge 0$ ········ ㉠

이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 한다.

(i) $k=-2$일 때

$3\geq 0$이므로 모든 실수 x에 대하여 ㉠이 성립한다.

(ii) $k\neq -2$일 때

이차방정식 $(k+2)x^2-(k+2)x+3=0$의 판별식을 D라고 할 때, 모든 실수 x에 대하여 ㉠이 성립하려면

$k+2>0$, $D\leq 0$

이어야 한다.

$k+2>0$에서 $k>-2$ ········ ㉡

$D=(k+2)^2-4\times(k+2)\times 3\leq 0$에서

$k^2-8k-20\leq 0$, $(k+2)(k-10)\leq 0$

$\therefore\ -2\leq k\leq 10$ ········ ㉢

㉡, ㉢에서 $-2<k\leq 10$

(i), (ii)에서

$-2\leq k\leq 10$

이므로 정수 k는 $-2, -1, 0, \cdots, 10$의 13개이다.

답 ③

풍쌤 개념 CHECK

이차부등식이 항상 성립할 조건_高 공통수학 1

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 $D=b^2-4ac$라고 할 때

(1) 모든 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c>0$이 성립하려면

$a>0$, $D<0$

(2) 모든 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c\geq 0$이 성립하려면

$a>0$, $D\leq 0$

(3) 모든 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c<0$이 성립하려면

$a<0$, $D<0$

(4) 모든 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c\leq 0$이 성립하려면

$a<0$, $D\leq 0$

03

$x+4\geq 0$에서 $x\geq -4$

$5-x\geq 0$에서 $x\leq 5$

따라서 $\sqrt{x+4}-\sqrt{5-x}$의 값이 실수가 되려면

$-4\leq x\leq 5$

이때 $x-5\leq 0$, $x+6>0$이므로

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-10x+25}+|x+6|&=\sqrt{(x-5)^2}+|x+6|\\&=|x-5|+|x+6|\\&=-(x-5)+x+6\\&=11\end{aligned}$$

답 11

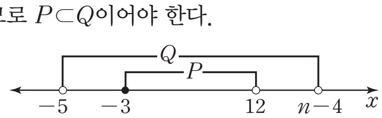
04

조건 p에서 $x-12<0$, $x+3\geq 0$이므로

$x<12$, $x\geq -3$

$\therefore\ -3\leq x<12$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면 p가 q이기 위한 충분조건이므로 $P\subset Q$이어야 한다.



위의 그림에서 $12\leq n-4$이어야 하므로 $n\geq 16$

따라서 n의 최솟값은 16이다.

답 16

05

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}&=\frac{(\sqrt{y})^2+(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}\sqrt{y}}\\&=\frac{x+y}{\sqrt{xy}}\end{aligned}$$

이때

$x+y=(\sqrt{6}+\sqrt{5})+(\sqrt{6}-\sqrt{5})=2\sqrt{6}$,

$xy=(\sqrt{6}+\sqrt{5})(\sqrt{6}-\sqrt{5})=(\sqrt{6})^2-(\sqrt{5})^2=1$

이므로

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}&=\frac{x+y}{\sqrt{xy}}\\&=\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{1}}=2\sqrt{6}\end{aligned}$$

답 ⑤

06

$x=\sqrt{5}-2$에서 $x+2=\sqrt{5}$

양변을 제곱하면

$x^2+4x+4=5$ $\quad\therefore\ x^2+4x=1$

$$\begin{aligned}\therefore\ (x-1)(x+5)(x^2+4x+9)&=(x^2+4x-5)(x^2+4x+9)\\&=(1-5)(1+9)\\&=-40\end{aligned}$$

답 -40

07

$y=\dfrac{bx+4}{x+a}=\dfrac{b(x+a)-ab+4}{x+a}=\dfrac{4-ab}{x+a}+b$이므로 이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-a$, $y=b$

$\therefore\ a=-2$, $b=-3$

따라서 함수 $y=\sqrt{ax+b}$, 즉 $y=\sqrt{-2x-3}$의 정의역은

$-2x-3\geq 0$에서 $x\leq -\frac{3}{2}$

$\left\{x\,\middle|\,x\leq -\dfrac{3}{2}\right\}$이다.

답 $\left\{x\,\middle|\,x\leq -\dfrac{3}{2}\right\}$

08

$$\begin{aligned}y&=\frac{-2x+5}{x-3}\\&=\frac{-2(x-3)-6+5}{x-3}\\&=-\frac{1}{x-3}-2\end{aligned}$$

함수 $y=\dfrac{-2x+5}{x-3}$의 그래프는 함수 $y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

$\therefore\ a=-1$, $b=3$, $c=-2$

따라서 함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$, 즉 $y=\sqrt{-x+3}-2$의 치역은

$\{y\,|\,y\geq -2\}$이다.

답 ③

|다른 풀이|

함수 $y=\frac{a}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 b만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\frac{a}{x-b}+c=\frac{cx+a-bc}{x-b}$

이것이 $y=\frac{-2x+5}{x-3}$와 일치하므로

$c=-2,\ a-bc=5,\ b=3$

$\therefore a=-1,\ b=3,\ c=-2$

09

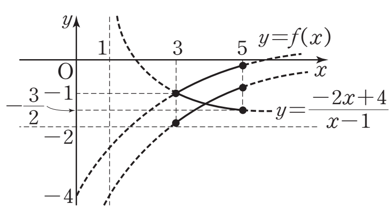
$y=\frac{-2x+4}{x-1}$

$=\frac{-2(x-1)-2+4}{x-1}$

$=\frac{2}{x-1}-2$

함수 $y=\frac{-2x+4}{x-1}$의 그래프는 함수 $y=\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $3\le x\le 5$에서 함수 $y=\frac{-2x+4}{x-1}$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$f(x)=\sqrt{3x}+k$라고 할 때, 두 함수 $y=\frac{-2x+4}{x-1}$, $y=f(x)$의 그래프가 한 점에서 만나려면 위의 그림과 같이

$f(3)\le -1,\ f(5)\ge -\frac{3}{2}$

이어야 한다.

$f(3)\le -1$에서 $\sqrt{9}+k\le -1$

$3+k\le -1 \qquad \therefore k\le -4$ ······ ㉠

$f(5)\ge -\frac{3}{2}$에서 $\sqrt{15}+k\ge -\frac{3}{2}$

$\therefore k\ge -\frac{3}{2}-\sqrt{15}$ ······ ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$-\frac{3}{2}-\sqrt{15}\le k\le -4$

따라서 k의 최댓값은 -4이므로 $M=-4$

$\therefore M^2=(-4)^2=16$

답 16

10

함수 $y=\sqrt{-2x+1}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{-2(x-p)+1}+q$

$\therefore y=\sqrt{-2x+2p+1}+q$

이 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{-2\times(-x)+2p+1}+q$

$\therefore y=\sqrt{2x+2p+1}+q$

이것이 $y=\sqrt{2x+7}-1$과 일치하므로

$2p+1=7,\ q=-1$

$\therefore p=3,\ q=-1$

$\therefore y=\frac{6x+q}{px+6}=\frac{6x-1}{3x+6}$

$=\frac{2(3x+6)-13}{3x+6}$

$=-\frac{13}{3(x+2)}+2$

따라서 함수 $y=\frac{6x-1}{3x+6}$의 그래프의 두 점근선의 방정식은

$x=-2,\ y=2$

즉, 함수 $y=\frac{6x-1}{3x+6}$의 그래프는 두 점근선의 교점 $(-2,\ 2)$에 대하여 대칭이므로

$a=-2,\ b=2$

$\therefore pq+ab=3\times(-1)+(-2)\times 2=-7$

답 -7

11

문제 접근하기

먼저 주어진 유리함수의 그래프에서 $a,\ b,\ c$의 부호를 구한 후 이를 이용하여 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프의 개형을 그려 본다.

함수 $y=\frac{b}{x+a}+c$의 그래프는 함수 $y=\frac{b}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-a$만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 것이므로 주어진 그래프에서

$-a>0,\ b<0,\ c>0$

$\therefore a<0,\ b<0,\ c>0$

함수 $y=\sqrt{ax+b}+c=\sqrt{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}+c$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{b}{a}$만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 것이다.

이때 $a<0,\ -\frac{b}{a}<0,\ c>0$이므로 함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프의 개형은 ⑤와 같다.

답 ⑤

12

ㄴ. 함수 $y=\sqrt{1-x}=\sqrt{-(x-1)}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

ㄷ. 함수 $y=-\sqrt{4-x}=-\sqrt{-(x-4)}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

따라서 평행이동 또는 대칭이동에 의하여 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프와 겹쳐지는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ③

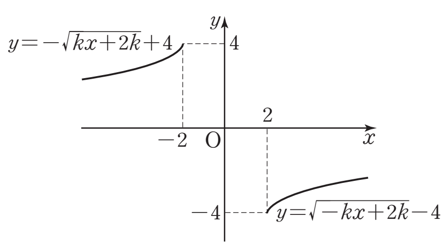
13

문제 접근하기

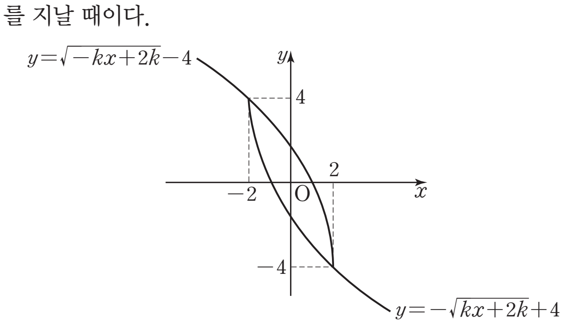
함수 $y=f(x)$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $y=-f(-x)$임을 이용하여 ㄱ의 참, 거짓을 확인하고, $k<0$일 때 주어진 두 함수의 그래프의 개형을 그려서 ㄴ의 참, 거짓을 확인한다.
ㄱ, ㄴ에서 확인한 내용을 바탕으로 두 곡선이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 k의 최댓값을 구하여 ㄷ의 참, 거짓을 확인한다.

ㄱ. 함수 $y=-\sqrt{kx+2k}+4$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은
$-y=-\sqrt{-kx+2k}+4$
$\therefore y=\sqrt{-kx+2k}-4$
따라서 주어진 두 곡선은 서로 원점에 대하여 대칭이다. (참)

ㄴ. 함수 $y=-\sqrt{kx+2k}+4=-\sqrt{k(x+2)}+4$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{kx}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.
함수 $y=\sqrt{-kx+2k}-4=\sqrt{-k(x-2)}-4$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-kx}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다.
따라서 $k<0$이면 주어진 두 곡선은 다음 그림과 같이 만나지 않는다. (거짓)



ㄷ. ㄴ에 의하여 $k<0$이면 두 곡선이 만나지 않으므로 두 곡선이 만나려면 $k>0$이어야 한다.
$k>0$일 때 k의 값이 커질수록 함수 $y=-\sqrt{kx+2k}+4$의 그래프는 직선 $y=4$와 멀어지고 함수 $y=\sqrt{-kx+2k}-4$의 그래프는 직선 $y=-4$와 멀어진다.
따라서 두 곡선이 서로 다른 두 점에서 만날 때, k의 값이 최대가 되는 경우는 다음 그림과 같이 함수 $y=-\sqrt{kx+2k}+4$의 그래프가 함수 $y=\sqrt{-kx+2k}-4$의 그래프 위의 점 $(2,\ -4)$를 지날 때이다.



즉, $-4=-\sqrt{2k+2k}+4$이므로
$\sqrt{4k}=8,\ 4k=64$
$\therefore k=16$ (참)

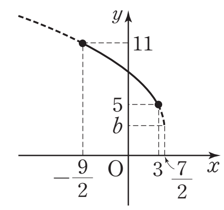
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

14

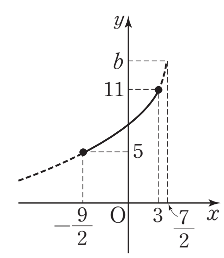
$f(x)=a\sqrt{7-2x}+b$
$\quad=a\sqrt{-2\left(x-\frac{7}{2}\right)}+b$

(i) $a>0$일 때
$-\frac{9}{2}\le x\le 3$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=-\frac{9}{2}$일 때 최댓값 11, $x=3$일 때 최솟값 5를 갖는다. 즉,



$f\left(-\frac{9}{2}\right)=4a+b=11$,
$f(3)=a+b=5$
이므로 위의 두 식을 연립하여 풀면
$a=2,\ b=3$
$\therefore a-b=-1$

(ii) $a<0$일 때
$-\frac{9}{2}\le x\le 3$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=3$일 때 최댓값 11, $x=-\frac{9}{2}$일 때 최솟값 5를 갖는다. 즉,



$f(3)=a+b=11$,
$f\left(-\frac{9}{2}\right)=4a+b=5$
이므로 위의 두 식을 연립하여 풀면
$a=-2,\ b=13$
$\therefore a-b=-15$

(i), (ii)에서 $a-b$의 최솟값은 -15이다.

답 -15

15

함수 $y=-\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=-\sqrt{a(x-2)}-3$
$\therefore y=-\sqrt{ax-2a}-3$
이 함수의 그래프가 직선 $y=x-6$에 접하므로
$-\sqrt{ax-2a}-3=x-6,\ \sqrt{ax-2a}=3-x$
$ax-2a=x^2-6x+9$
$\therefore x^2-(a+6)x+2a+9=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면
$D=(a+6)^2-4(2a+9)=0$
$a^2+4a=0,\ a(a+4)=0$
$\therefore a=-4\ (\because a\ne 0)$

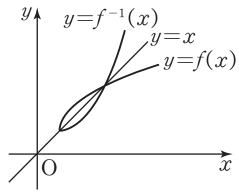
답 -4

16

문제 접근하기

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점이 직선 $y=x$ 위에 있음을 이용한다.

$f(x)=\sqrt{2x-a}+1=\sqrt{2\left(x-\frac{a}{2}\right)}+1$



이고 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같이 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$도 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

$\sqrt{2x-a}+1=x$에서

$\sqrt{2x-a}=x-1$, $2x-a=x^2-2x+1$

$\therefore\ x^2-4x+a+1=0$

이 이차방정식의 두 근을 α, β라고 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=a+1$

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 좌표는 (α, α), (β, β)이므로 두 교점 사이의 거리는

$$\begin{aligned}\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(\beta-\alpha)^2}&=\sqrt{2(\beta-\alpha)^2}\\&=\sqrt{2\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}}\\&=\sqrt{2\{4^2-4(a+1)\}}\\&=\sqrt{24-8a}\end{aligned}$$

따라서 $\sqrt{24-8a}=2\sqrt{2}$이므로 양변을 제곱하면

$24-8a=8$, $8a=16$

$\therefore\ a=2$

답 ②

17

$$\begin{aligned}(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(4)&=(\overbrace{f\circ f^{-1}}^{\text{항등함수}}\circ g^{-1}\circ f)(4)\\&=(g^{-1}\circ f)(4)\\&=g^{-1}(f(4))\\&=g^{-1}\left(\frac{4+2}{4-2}\right)\\&=g^{-1}(3)\end{aligned}$$

$g^{-1}(3)=k$라고 하면 $g(k)=3$이므로

$\sqrt{4k-2}=3$, $4k-2=9$

$4k=11$ $\quad\therefore\ k=\frac{11}{4}$

$\therefore\ (f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(4)=g^{-1}(3)=\frac{11}{4}$

답 ④

|다른 풀이|

$y=\sqrt{4x-2}$로 놓으면

$y^2=4x-2$, $4x=y^2+2$

$\therefore\ x=\frac{1}{4}y^2+\frac{1}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}$

$\therefore\ g^{-1}(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\ (x\geq 0)$

$\therefore\ (f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(4)=g^{-1}(3)=\frac{1}{4}\times 9+\frac{1}{2}=\frac{11}{4}$