풍산자
라이트유형

미적분 Ⅰ

정답과 풀이

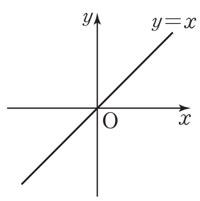
01 함수의 극한

기본을 다지는 유형

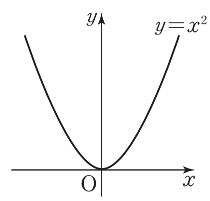
본문 009쪽

001

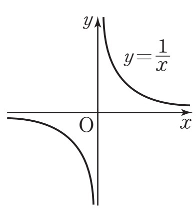
(1) $\lim_{x\to\infty} x=\infty$



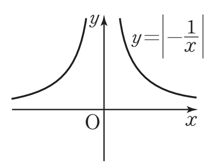
(2) $\lim_{x\to-\infty} x^2=\infty$



(3) $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$



(4) $\lim_{x\to\infty}\left|-\frac{1}{x}\right|=0$



답 (1) ∞ (2) ∞ (3) 0 (4) 0

002

(1) $\lim_{x\to2}(x^2+3)=2^2+3=7$

(2) $\lim_{x\to3}\sqrt{2x+3}=\sqrt{2\times3+3}=\sqrt{9}=3$

(3) $\lim_{x\to-1}(x-x^3)=\{-1-(-1)^3\}=0$

(4) $\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{6}{x^2}=\frac{6}{(\sqrt{2})^2}=3$

답 (1) 7 (2) 3 (3) 0 (4) 3

003

$\lim_{x\to-3}\frac{4}{x+1}+\lim_{x\to3}\frac{x+1}{4}=\frac{4}{-3+1}+\frac{3+1}{4}$
$=-2+1=-1$

답 ③

004

$\lim_{x\to3}\frac{x^3}{x-2}=\frac{3^3}{3-2}=27$

답 27

005

$\lim_{x\to-1}(x^2+ax+3)=2$에서 $(-1)^2-a+3=2$

$-a=-2$ $\quad\therefore a=2$

$\lim_{x\to3}(bx-4)=5$에서 $3b-4=5$

$3b=9$ $\quad\therefore b=3$

$\therefore a+b=2+3=5$

답 ⑤

006

$\lim_{x\to a}(x^2-2x+4)=3$에서 $a^2-2a+4=3$

$a^2-2a+1=0$, $(a-1)^2=0$

$\therefore a=1$ ······ ❶

$\lim_{x\to b}(x^2-4)=12$에서 $b^2-4=12$

$b^2=16$

$\therefore b=-4$ 또는 $b=4$ ······ ❷

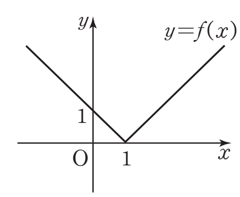
따라서 $a=1$, $b=4$일 때, ab는 최댓값 4를 갖는다. ······ ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ ab의 최댓값을 구할 수 있다.	20 %

007

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



(1) $\lim_{x\to1-}f(x)=0$

(2) $\lim_{x\to1+}f(x)=0$

(3) $\lim_{x\to1}f(x)=0$

답 (1) 0 (2) 0 (3) 0

|다른 풀이|

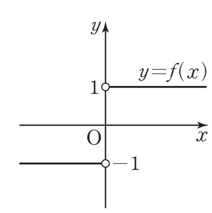
(1) $\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(-x+1)=0$

(2) $\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}(x-1)=0$

(3) $\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)=0$이므로 $\lim_{x\to1}f(x)=0$

008

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



(1) $\lim_{x\to0-}f(x)=-1$

(2) $\lim_{x\to0+}f(x)=1$

(3) $\lim_{x\to0-}f(x)\neq\lim_{x\to0+}f(x)$이므로
$\lim_{x\to0}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

답 (1) -1 (2) 1 (3) 존재하지 않는다.

|다른 풀이|

(1) $\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}\frac{-x}{x}=-1$

(2) $\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}\frac{x}{x}=1$

(3) $\lim_{x\to0-}f(x)\neq\lim_{x\to0+}f(x)$이므로 $\lim_{x\to0}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

009

ㄱ. $x=a$에서의 우극한이 존재하므로 $\lim_{x\to a+}f(x)$의 값이 존재한다.

ㄴ. $x=b$에서의 좌극한과 우극한이 일치하므로 $\lim_{x\to b}f(x)$의 값이 존재한다.

ㄷ. $x=c$에서의 좌극한과 우극한이 일치하지 않으므로 $\lim_{x\to c}f(x)$의 값이 존재하지 않는다.

ㄹ. $x=d$에서의 우극한이 존재하므로 $\lim_{x\to d+} f(x)$의 값이 존재한다.

ㅁ. $x=e$에서의 좌극한과 우극한이 일치하므로 $\lim_{x\to e} f(x)$의 값이 존재한다.

ㅂ. $x=f$에서의 좌극한과 우극한이 일치하므로 $\lim_{x\to f} f(x)$의 값이 존재한다.

따라서 극한값이 존재하지 않는 것은 ㄷ이다.

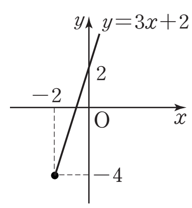
답 ㄷ

010

$x\geq -2$일 때 함수 $y=3x+2$의 그래프가 오른쪽 그림과 같고, $\lim_{x\to -2} f(x)$의 값이 존재하려면 $\lim_{x\to -2-} f(x)=\lim_{x\to -2+} f(x)$이어야 하므로

$-2k=-4$

$\therefore k=2$



답 ⑤

|다른 풀이|

$\lim_{x\to -2-} f(x)=\lim_{x\to -2-} kx=-2k$

$\lim_{x\to -2+} f(x)=\lim_{x\to -2+} (3x+2)=-4$

이때 $\lim_{x\to -2} f(x)$의 값이 존재하려면 $\lim_{x\to -2-} f(x)=\lim_{x\to -2+} f(x)$이어야 하므로

$-2k=-4$

$\therefore k=2$

011

$\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2-} (x-k)^2=(2-k)^2$

$\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2+} (-x+k)=-2+k$

이때 $\lim_{x\to 2} f(x)$의 값이 존재하려면 $\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2+} f(x)$이어야 하므로 ······ ❶

$(2-k)^2=-2+k$ ······ ❷

$4-4k+k^2=-2+k$

$k^2-5k+6=0,\ (k-2)(k-3)=0$

$\therefore k=2$ 또는 $k=3$ ······ ❸

답 2, 3

채점 기준	비율
❶ $\lim_{x\to 2} f(x)$의 값이 존재하기 위한 조건을 알 수 있다.	50 %
❷ k에 대한 식을 세울 수 있다.	30 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	20 %

012

(1) $\lim_{x\to -3-} f(x)=3$

(2) $\lim_{x\to -3+} f(x)=2$

(3) $\lim_{x\to 2-} f(x)=-3$

(4) $\lim_{x\to 2+} f(x)=-3$

답 (1) 3 (2) 2 (3) -3 (4) -3

013

$f(x)=|x-1|=\begin{cases} -(x-1) & (x<1) \\ x-1 & (x\geq 1) \end{cases}$

$x-1<0$이면 $x<1$이고 $|x-1|=-(x-1)$

$x-1\geq 0$이면 $x\geq 1$이고 $|x-1|=x-1$

(1) $\lim_{x\to 1-} \dfrac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1-} \dfrac{-(x-1)}{x-1}=-1$

(2) $\lim_{x\to 1+} \dfrac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1+} \dfrac{x-1}{x-1}=1$

답 (1) -1 (2) 1

014

$\lim_{x\to 0+} f(x)+\lim_{x\to 1-} f(x)=2+1=3$

답 ③

015

$\lim_{x\to -2+} f(x)+\lim_{x\to -1-} f(x)+\lim_{x\to 1-} f(x)=3+1+2=6$

답 ④

016

$\lim_{x\to -2-} f(x)=3$에서 $\lim_{x\to -2-} (-x+a)=3$

$2+a=3 \qquad \therefore a=1$ ······ ❶

$\lim_{x\to -2+} f(x)=-3$에서 $\lim_{x\to -2+} (x^2+bx+1)=-3$

$(-2)^2-2b+1=-3,\ -2b=-8$

$\therefore b=4$ ······ ❷

$\therefore ab=1\times 4=4$ ······ ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	20 %

017

(1) $x \longrightarrow 1+$일 때 $x-2 \longrightarrow -1+$이므로 $\lim_{x\to 1+} [x-2]=-1$

(2) $x \longrightarrow 3-$일 때 $x-3 \longrightarrow 0-$이므로 $\lim_{x\to 3-} [x-3]=-1$

(3) $x \longrightarrow -2-$일 때 $[x]=-3$이므로 $\lim_{x\to -2-} [x]^2=(-3)^2=9$

(4) $x \longrightarrow 0+$일 때 $[x]=0$이므로 $\lim_{x\to 0+} \dfrac{[x]}{x}=\lim_{x\to 0+} \dfrac{0}{x}=0$

답 (1) -1 (2) -1 (3) 9 (4) 0

018

$x \longrightarrow 1+$일 때 $2x \longrightarrow 2+$이므로 $\lim_{x\to 1+} [2x]=2$

$x \longrightarrow 1-$일 때 $[x]=0$이므로 $\lim_{x\to 1-} 3[x]=0$

$\therefore \lim_{x\to 1+} [2x]+\lim_{x\to 1-} 3[x]=2+0=2$

답 ④

019

$f(x)=t$로 놓으면

(1) $x \longrightarrow 1-$일 때 $t=0$이므로

$\lim_{x\to 1-} f(f(x))=f(0)=0$

(2) $x \longrightarrow 1+$일 때 $t \longrightarrow 1+$이므로

$\lim\limits_{x\to1+} f(f(x))=\lim\limits_{t\to1+} f(t)=1$

(3) $x \longrightarrow 0-$일 때 $t=0$이므로

$\lim\limits_{x\to0-} f(f(x))=f(0)=0$

(4) $x \longrightarrow 0+$일 때 $t=0$이므로

$\lim\limits_{x\to0+} f(f(x))=f(0)=0$

(5) $x \longrightarrow -1-$일 때 $t \longrightarrow 1+$이므로

$\lim\limits_{x\to-1-} f(f(x))=\lim\limits_{t\to1+} f(t)=1$

(6) $x \longrightarrow -1+$일 때 $t=0$이므로

$\lim\limits_{x\to-1+} f(f(x))=f(0)=0$

답 (1) 0 (2) 1 (3) 0 (4) 0 (5) 1 (6) 0

020

$f(x)=t$로 놓으면

(1) $x \longrightarrow 0-$일 때 $t \longrightarrow 0-$이므로

$\lim\limits_{x\to0-} f(f(x))=\lim\limits_{t\to0-} f(t)=\lim\limits_{t\to0-} t=0$

(2) $x \longrightarrow 0+$일 때 $t \longrightarrow -2+$이므로

$\lim\limits_{x\to0+} f(f(x))=\lim\limits_{t\to-2+} f(t)=\lim\limits_{t\to-2+} t=-2$

답 (1) 0 (2) -2

021

$f(x)=t$로 놓으면

$x \longrightarrow -1+$일 때 $t \longrightarrow 3-$이므로

$\lim\limits_{x\to-1+} f(f(x))=\lim\limits_{t\to3-} f(t)=2$

$x \longrightarrow 2+$일 때 $t \longrightarrow 1+$이므로

$\lim\limits_{x\to2+} f(f(x))=\lim\limits_{t\to1+} f(t)=3$

$\therefore \lim\limits_{x\to-1+} f(f(x))+\lim\limits_{x\to2+} f(f(x))=2+3=5$

답 ④

022

$f(x)=t$로 놓으면 $x \longrightarrow 0-$일 때 $t \longrightarrow 1-$이므로

$\lim\limits_{x\to0-} g(f(x))=\lim\limits_{t\to1-} g(t)=0$ ······ ❶

$g(x)=s$로 놓으면 $x \longrightarrow 1+$일 때 $s \longrightarrow 0+$이므로

$\lim\limits_{x\to1+} f(g(x))=\lim\limits_{s\to0+} f(s)=-1$ ······ ❷

$\therefore \lim\limits_{x\to0-} g(f(x))+\lim\limits_{x\to1+} f(g(x))=0+(-1)=-1$ ······ ❸

답 -1

채점 기준	비율
❶ $\lim\limits_{x\to0-} g(f(x))$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\lim\limits_{x\to1+} f(g(x))$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\lim\limits_{x\to0-} g(f(x))+\lim\limits_{x\to1+} f(g(x))$의 값을 구할 수 있다.	20 %

023

(1) $\lim\limits_{x\to1}\{f(x)+g(x)\}=\lim\limits_{x\to1} f(x)+\lim\limits_{x\to1} g(x)=3+(-6)=-3$

(2) $\lim\limits_{x\to1}\{2f(x)-g(x)\}=\lim\limits_{x\to1} 2f(x)-\lim\limits_{x\to1} g(x)$

$=2\lim\limits_{x\to1} f(x)-\lim\limits_{x\to1} g(x)$

$=2\times3-(-6)=12$

(3) $\lim\limits_{x\to1} f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to1} f(x)\times\lim\limits_{x\to1} g(x)=3\times(-6)=-18$

(4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3g(x)}{2f(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to1} 3g(x)}{\lim\limits_{x\to1} 2f(x)}=\dfrac{3\lim\limits_{x\to1} g(x)}{2\lim\limits_{x\to1} f(x)}=\dfrac{3\times(-6)}{2\times3}=-3$

(5) $\lim\limits_{x\to1}\{f(x)\}^2=\lim\limits_{x\to1} f(x)\times\lim\limits_{x\to1} f(x)=3\times3=9$

(6) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)+1}{g(x)+4}=\dfrac{\lim\limits_{x\to1}\{f(x)+1\}}{\lim\limits_{x\to1}\{g(x)+4\}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to1} f(x)+1}{\lim\limits_{x\to1} g(x)+4}$

$=\dfrac{3+1}{-6+4}=-2$

답 (1) -3 (2) 12 (3) -18 (4) -3 (5) 9 (6) -2

024

(1) $\lim\limits_{x\to-2}(3x+1)(x-1)=\{3\times(-2)+1\}(-2-1)$

$=-5\times(-3)=15$

(2) $\lim\limits_{x\to-1}(x^2+1)(x+3)=\{(-1)^2+1\}(-1+3)$

$=2\times2=4$

(3) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\dfrac{3^2-4}{3-2}=5$

(4) $\lim\limits_{x\to4}\sqrt{x}\sqrt{x^2+9}=\sqrt{4}\sqrt{4^2+9}=2\times5=10$

답 (1) 15 (2) 4 (3) 5 (4) 10

025

$2f(x)+g(x)=h(x)$라고 하면

$\lim\limits_{x\to0} h(x)=7$이고 $g(x)=h(x)-2f(x)$이므로

$\lim\limits_{x\to0} g(x)=\lim\limits_{x\to0}\{h(x)-2f(x)\}$

$=\lim\limits_{x\to0} h(x)-2\lim\limits_{x\to0} f(x)$

$=7-2\times3=1$

답 ③

참고

$\lim\limits_{x\to0} g(x)$의 값이 존재한다는 조건이 없으므로 위와 같은 방법을 이용한다.

026

$\lim\limits_{x\to-3} g(x)$의 값이 존재하므로

$\lim\limits_{x\to-3} f(x)=\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{f(x)g(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to-3} f(x)g(x)}{\lim\limits_{x\to-3} g(x)}=\dfrac{-8}{4}=-2$

$\therefore \lim\limits_{x\to-3}\{f(x)\}^2=(-2)^2=4$

답 ④

027

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+f(x)}{x-f(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\dfrac{f(x)}{x}}{1-\dfrac{f(x)}{x}}=\dfrac{1+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}}{1-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}}$

$=\dfrac{1+3}{1-3}=\dfrac{4}{-2}=-2$

답 -2

028

$\lim\limits_{x\to3}(x^2+2x-8)f(x)=\lim\limits_{x\to3}(x-2)(x+4)f(x)$

$=\lim\limits_{x\to3}(x-2)\times\lim\limits_{x\to3}(x+4)f(x)$

$=1\times(-3)=-3$

답 ②

029

ㄱ. $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a} g(x)=\beta$ (α, β는 실수)라고 하면

$\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)=\alpha+\beta$ (참)

ㄴ. [반례] $f(x)=\begin{cases}0 & (x<a)\\ 1 & (x\ge a)\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}1 & (x<a)\\ 0 & (x\ge a)\end{cases}$

이라고 하면 $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to a} g(x)$의 값은 모두 존재하지 않지만

$f(x)+g(x)=1$이므로 $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=1$이다. (거짓)

ㄷ. [반례] $f(x)=\dfrac{x}{x-a}$, $g(x)=\dfrac{a}{x-a}$

라고 하면 $\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=1$이지만 $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to a} g(x)$

의 값은 모두 존재하지 않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

답 ①

030

$\dfrac{2f(x)}{f(x)+g(x)}=h(x)$라고 하면

$\lim_{x\to 1000} h(x)=\dfrac{1}{2}$이고 $g(x)=\dfrac{2f(x)}{h(x)}-f(x)$이므로

$$\lim_{x\to 1000} g(x)=\lim_{x\to 1000}\left\{\frac{2f(x)}{h(x)}-f(x)\right\}$$

$$=\frac{2\lim_{x\to 1000} f(x)}{\lim_{x\to 1000} h(x)}-\lim_{x\to 1000} f(x)$$

$$=\frac{2\times(-5)}{\frac{1}{2}}-(-5)=-20+5=-15$$

답 ②

031

$x-2=t$로 놓으면 $x \longrightarrow 2$일 때 $t \longrightarrow 0$이므로

$\lim_{x\to 2} f(x-2)=\lim_{t\to 0} f(t)=-3$

$\therefore \lim_{x\to 0} f(x)=-3$ ❶

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{2f(x)-6}{3-f(x)}=\frac{2\lim_{x\to 0} f(x)-6}{3-\lim_{x\to 0} f(x)}$$

$$=\frac{2\times(-3)-6}{3-(-3)}=\frac{-12}{6}=-2$$ ❷

답 -2

채점 기준	비율
❶ $\lim_{x\to 0} f(x)$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ $\lim_{x\to 0}\dfrac{2f(x)-6}{3-f(x)}$의 값을 구할 수 있다.	50 %

032

(1) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$

(2) $\lim_{x\to 0}\dfrac{2x^2-5x}{x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{x(2x-5)}{x}=\lim_{x\to 0}(2x-5)=-5$

(3) $\lim_{x\to -3}\dfrac{x^2+4x+3}{x+3}=\lim_{x\to -3}\dfrac{(x+1)(x+3)}{x+3}=\lim_{x\to -3}(x+1)=-2$

(4) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\dfrac{(x-1)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x-1)=1$

(5) $\lim_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}=\lim_{x\to 3}\dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}$

$=\lim_{x\to 3}\dfrac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}$

$=\lim_{x\to 3}\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}$

$=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

(6) $\lim_{x\to -2}\dfrac{x+2}{\sqrt{x+6}-2}=\lim_{x\to -2}\dfrac{(x+2)(\sqrt{x+6}+2)}{(\sqrt{x+6}-2)(\sqrt{x+6}+2)}$

$=\lim_{x\to -2}\dfrac{(x+2)(\sqrt{x+6}+2)}{x+2}$

$=\lim_{x\to -2}(\sqrt{x+6}+2)$

$=2+2=4$

답 (1) 2 (2) -5 (3) -2 (4) 1 (5) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ (6) 4

033

$\lim_{x\to 2}\dfrac{4x^2-16}{x^2-2x}=\lim_{x\to 2}\dfrac{4(x+2)(x-2)}{x(x-2)}$

$=\lim_{x\to 2}\dfrac{4(x+2)}{x}=\dfrac{4\times 4}{2}=8$

답 ③

034

$\lim_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x-5}-1}{x-3}=\lim_{x\to 3}\dfrac{(\sqrt{2x-5}-1)(\sqrt{2x-5}+1)}{(x-3)(\sqrt{2x-5}+1)}$

$=\lim_{x\to 3}\dfrac{2x-5-1}{(x-3)(\sqrt{2x-5}+1)}$

$=\lim_{x\to 3}\dfrac{2(x-3)}{(x-3)(\sqrt{2x-5}+1)}$

$=\lim_{x\to 3}\dfrac{2}{\sqrt{2x-5}+1}$

$=\dfrac{2}{1+1}=1$

답 ①

035

$\lim_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\frac{1}{x}+1}=\lim_{x\to -1}\dfrac{x(x+1)}{1+x}=\lim_{x\to -1}x=-1$

답 ③

036

$\lim_{x\to 1}\dfrac{x-1}{(\sqrt{x}-1)f(x)}=\lim_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)f(x)}$

$=\lim_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)f(x)}$ ❶

$=\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}+1}{f(x)}$

$=\dfrac{2}{\lim_{x\to 1} f(x)}$ ❷

이때 $\dfrac{2}{\lim_{x\to 1} f(x)}=-\dfrac{2}{5}$이므로 $\lim_{x\to 1} f(x)=-5$ ❸

답 -5

채점 기준	비율
❶ 분모를 유리화 할 수 있다.	40 %
❷ $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(\sqrt{x}-1)f(x)}$을 간단히 할 수 있다.	30 %
❸ $\lim_{x\to 1}f(x)$의 값을 구할 수 있다.	30 %

037

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x^2-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x^2}}=\frac{0}{1}=0$

분자, 분모를 x^2으로 나눈다.

(2) $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+3x}{x^2-x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x+\frac{3}{x}}{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}4x=\infty$

분자, 분모를 x^2으로 나눈다.

(3) $x=-t$로 놓으면 $x\longrightarrow-\infty$일 때 $t\longrightarrow\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-8}{x^2-4x}=\lim_{t\to\infty}\frac{-t^3-8}{t^2+4t}$$

분자, 분모를 t^2으로 나눈다.

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-t-\frac{8}{t^2}}{1+\frac{4}{t}}=\lim_{t\to\infty}(-t)=-\infty$$

답 (1) 0 (2) ∞ (3) $-\infty$

참고

$\frac{\infty}{\infty}$의 꼴인 극한은 분모의 최고차항으로 분자, 분모를 각각 나누어서 조사한다.

(1) (분자의 차수)=(분모의 차수) ➡ 극한값은 최고차항의 계수의 비이다.
(2) (분자의 차수)<(분모의 차수) ➡ 극한값은 0이다.
(3) (분자의 차수)>(분모의 차수) ➡ 극한값은 없다.

038

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{2}=\frac{0}{2}=0$

(2) $\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}}=\frac{1}{1}=1$

(3) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+x-3}+3x}{\sqrt{4x^2-x}+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}+3}{\sqrt{4-\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}}=\frac{1+3}{2}=2$

(4) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x+1}+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}{\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+2}=\frac{1}{2}$

답 (1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) $\frac{1}{2}$

039

$$A=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{3x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}{3}=\frac{0}{3}=0$$

$$B=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+4x+1}}{-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}}{-1}=\frac{\sqrt{4}}{-1}=-2$$

$$C=\lim_{x\to\infty}\frac{3-5x-6x^2}{(x+1)(2x+3)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-5x-6x^2}{2x^2+5x+3}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x^2}-\frac{5}{x}-6}{2+\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}=\frac{-6}{2}=-3$$

$\therefore A+B-C=0+(-2)-(-3)=1$

답 ①

040

$x=-t$로 놓으면 $x\longrightarrow-\infty$일 때 $t\longrightarrow\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x-2}{\sqrt{9x^2-1}-\sqrt{4x^2-4}}=\lim_{t\to\infty}\frac{-5t-2}{\sqrt{9t^2-1}-\sqrt{4t^2-4}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-5-\frac{2}{t}}{\sqrt{9-\frac{1}{t^2}}-\sqrt{4-\frac{4}{t^2}}}$$

$$=\frac{-5}{3-2}=-5$$

답 ①

041

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3\{f(x)\}^2-x}{3x^2-f(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}^2-\frac{1}{x}}{3-\frac{f(x)}{x}\times\frac{1}{x}}$$

$$=\frac{3\times(-2)^2-0}{3-(-2)\times0}=\frac{12}{3}=4$$

답 ⑤

042

(1) $\lim_{x\to\infty}(x^2-x)=\lim_{x\to\infty}x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)=\infty$

(2) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x}-x)(\sqrt{x}+x)}{\sqrt{x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-x^2}{\sqrt{x}+x}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1-x}{\sqrt{\frac{1}{x}}+1}=-\infty$$

답 (1) ∞ (2) $-\infty$

043

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4x}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+4x}-x)(\sqrt{x^2+4x}+x)}{\sqrt{x^2+4x}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4x-x^2}{\sqrt{x^2+4x}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+4x}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1}$$

$$=\frac{4}{1+1}=2$$

답 ②

044

$x=-t$로 놓으면 $x\longrightarrow-\infty$일 때 $t\longrightarrow\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\sqrt{t^2-t}-t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t^2-t}+t}{(\sqrt{t^2-t}-t)(\sqrt{t^2-t}+t)}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t^2-t}+t}{t^2-t-t^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t^2-t}+t}{-t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{1}{t}}+1}{-1}=\frac{1+1}{-1}=-2$$

답 -2

045

(1) $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x+1}-1\right)=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{x}\times\frac{1-(x+1)}{x+1}\right\}$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}\times\frac{-x}{x+1}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\left(-\frac{1}{x+1}\right)=-1$$

(2) $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(x+\frac{x}{x+1}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}\times\frac{x^2+x+x}{x+1}\right)$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{x}\times\frac{x(x+2)}{x+1}\right\}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x+2}{x+1}=2$$

답 (1) -1 (2) 2

046

$$\lim_{x\to-1}\frac{1}{x+1}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x+2}}\right)=\lim_{x\to-1}\left(\frac{1}{x+1}\times\frac{\sqrt{x+2}-1}{\sqrt{x+2}}\right)$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{(\sqrt{x+2}-1)(\sqrt{x+2}+1)}{(x+1)\sqrt{x+2}(\sqrt{x+2}+1)}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{x+2-1}{(x+1)\sqrt{x+2}(\sqrt{x+2}+1)}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{1}{\sqrt{x+2}(\sqrt{x+2}+1)}$$

$$=\frac{1}{1\times2}=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

047

$$\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\left(2+\frac{x^2-5x}{x+1}\right)=\lim_{x\to2}\left\{\frac{1}{x-2}\times\frac{2(x+1)+(x^2-5x)}{x+1}\right\}$$

$$=\lim_{x\to2}\left\{\frac{1}{x-2}\times\frac{(x-1)(x-2)}{x+1}\right\}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x-1}{x+1}=\frac{1}{3}$$

답 ①

048

(1) $x\longrightarrow0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}(2x+a)=0$이므로 $a=0$

(2) $x\longrightarrow1$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\longrightarrow0$이므로 (분모) $\longrightarrow0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}(x+a)=0$이므로 $1+a=0$ $\quad\therefore a=-1$

답 (1) 0 (2) -1

049

$x\longrightarrow-1$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\longrightarrow0$이므로 (분모) $\longrightarrow0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to-1}(x^2+ax+4)=0$이므로 $1-a+4=0$

$\therefore a=5$

답 ④

050

$x\longrightarrow1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}(3x-a)=0$이므로 $3-a=0$

$\therefore a=3$

$$\lim_{x\to1}\frac{3x-3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{3(x-1)}{x-1}=3$$

$\therefore b=3$

$\therefore ab=3\times3=9$

답 ⑤

051

$x\longrightarrow-2$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\longrightarrow0$이므로 (분모) $\longrightarrow0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to-2}(\sqrt{x+a}-b)=0$이므로 $\sqrt{-2+a}-b=0$

$\therefore b=\sqrt{a-2}$ .... ㉠

$$\lim_{x\to-2}\frac{x+2}{\sqrt{x+a}-b}=\lim_{x\to-2}\frac{x+2}{\sqrt{x+a}-\sqrt{a-2}}$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(\sqrt{x+a}+\sqrt{a-2})}{(\sqrt{x+a}-\sqrt{a-2})(\sqrt{x+a}+\sqrt{a-2})}$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(\sqrt{x+a}+\sqrt{a-2})}{x+a-(a-2)}$$

$$=\lim_{x\to-2}(\sqrt{x+a}+\sqrt{a-2})$$

$$=\sqrt{-2+a}+\sqrt{a-2}$$

$$=2\sqrt{a-2}$$

이때 $2\sqrt{a-2}=6$이므로 $\sqrt{a-2}=3$

$a-2=9$ $\quad\therefore a=11$

$a=11$을 ㉠에 대입하면

$b=\sqrt{11-2}=\sqrt{9}=3$

$\therefore a+b=11+3=14$

답 14

052

$x=-t$로 놓으면 $x\longrightarrow-\infty$일 때 $t\longrightarrow\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{ax^2+bx}+x)=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{at^2-bt}-t)$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{at^2-bt}-t)(\sqrt{at^2-bt}+t)}{\sqrt{at^2-bt}+t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{at^2-bt-t^2}{\sqrt{at^2-bt}+t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(a-1)t^2-bt}{\sqrt{at^2-bt}+t}$$ .... ㉠

㉠의 극한값이 존재하므로 $a-1=0$

$\therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{t\to\infty}\frac{-bt}{\sqrt{t^2-bt}+t}=\lim_{t\to\infty}\frac{-b}{\sqrt{1-\frac{b}{t}}+1}=\frac{-b}{1+1}=-\frac{b}{2}$$

이때 $-\frac{b}{2}=4$이므로 $b=-8$

$\therefore a-b=1-(-8)=9$

답 ⑤

053

$x\longrightarrow3$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\longrightarrow$ 0이므로 (분모) $\longrightarrow$ 0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to3}(ax+b)=0$이므로 $3a+b=0$

$\therefore b=-3a$ ······ ㉠

$$\lim_{x\to3}\frac{3\sqrt{x^2-5}-2x}{ax+b}=\lim_{x\to3}\frac{3\sqrt{x^2-5}-2x}{ax-3a}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{(3\sqrt{x^2-5}-2x)(3\sqrt{x^2-5}+2x)}{a(x-3)(3\sqrt{x^2-5}+2x)}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{9(x^2-5)-4x^2}{a(x-3)(3\sqrt{x^2-5}+2x)}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{5x^2-45}{a(x-3)(3\sqrt{x^2-5}+2x)}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{5(x-3)(x+3)}{a(x-3)(3\sqrt{x^2-5}+2x)}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{5(x+3)}{a(3\sqrt{x^2-5}+2x)}$$
$$=\frac{30}{12a}=\frac{5}{2a}$$

이때 $\frac{5}{2a}=15$이므로 $a=\frac{1}{6}$

$a=\frac{1}{6}$을 ㉠에 대입하면 $b=-3\times\frac{1}{6}=-\frac{1}{2}$

$\therefore ab=\frac{1}{6}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{12}$

답 ①

054

$\lim_{x\to3}\left(\frac{a}{x-3}-\frac{b}{x^2-9}\right)=1$에서 $\lim_{x\to3}\frac{ax+3a-b}{x^2-9}=1$ ······ ㉠

㉠에서 $x\longrightarrow3$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow$ 0이므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to3}(ax+3a-b)=0$이므로 $3a+3a-b=0$

$\therefore b=6a$ ······ ㉡

㉠에 ㉡을 대입하면

$$\lim_{x\to3}\frac{ax+3a-b}{x^2-9}=\lim_{x\to3}\frac{ax+3a-6a}{(x-3)(x+3)}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{a(x-3)}{(x-3)(x+3)}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{a}{x+3}=\frac{a}{6}$$

이때 $\frac{a}{6}=1$이므로 $a=6$

$a=6$을 ㉡에 대입하면 $b=6\times6=36$

$\therefore b-a=36-6=30$

답 ⑤

055

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}=-3$ ······ ㉠

㉠에서 $x\longrightarrow1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow$ 0이므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}(x^2+ax+b)=0$이므로 $1+a+b=0$

$\therefore b=-a-1$ ······ ㉡

❶

㉠에 ㉡을 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax-a-1}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+a+1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}(x+a+1)=a+2$$

이때 $a+2=-3$이므로 $a=-5$

$a=-5$를 ㉡에 대입하면

$b=-(-5)-1=4$ ❷

따라서 $f(x)=x^2-5x+4$이므로

$f(2)=2^2-5\times2+4=-2$ ❸

답 -2

채점 기준	비율
❶ b를 a에 대한 식으로 정리할 수 있다.	30 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $f(2)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

056

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=3$에서 $f(x)$는 일차항의 계수가 3인 일차식이다.

즉, $f(x)=3x+k$ (k는 상수)로 놓으면

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to1}\frac{3x+k}{x}=\frac{3+k}{1}=3+k$

이때 $3+k=3$이므로 $k=0$

따라서 $f(x)=3x$이므로

$f(2)=3\times2=6$

답 ⑤

057

조건 ㈎에서 $f(x)$는 이차항의 계수가 1인 이차식이다.

즉, $f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)로 놓으면 조건 ㈏의

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=-2$에서 $\lim_{x\to0}\frac{x^2+ax+b}{x}=-2$ ······ ㉠

㉠에서 $x\longrightarrow0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow$ 0이므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}(x^2+ax+b)=0$이므로 $b=0$

$b=0$을 ㉠에 대입하면

$\lim_{x\to0}\frac{x^2+ax}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x(x+a)}{x}=\lim_{x\to0}(x+a)=a=-2$

따라서 $f(x)=x^2-2x$이므로

$f(4)=4^2-2\times4=8$

답 8

058

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$에서 $x\longrightarrow0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow0$ 이므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}f(x)=0$이므로 $f(0)=0$

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=1$에서 $x\longrightarrow1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow0$ 이므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로 $f(1)=0$

따라서 삼차함수 $f(x)$를

$f(x)=x(x-1)(ax+b)$ (a, b는 상수)

로 놓으면

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x(x-1)(ax+b)}{x}=\lim_{x\to0}(x-1)(ax+b)=-b$$

이때 $-b=1$이므로 $b=-1$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x(x-1)(ax+b)}{x-1}=\lim_{x\to1}x(ax+b)=a+b$$

이때 $a+b=1$이므로 $a-1=1$

$\therefore a=2$

따라서 $f(x)=x(x-1)(2x-1)$이므로

$f(2)=2\times1\times3=6$

답 ②

059

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=-2$에서 $f(x)$는 이차항의 계수가 -2인 이차식이다.

즉, $f(x)=-2x^2+ax+b$ (a, b는 상수)로 놓으면

$\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{x^2-2x-3}=1$에서 $\lim_{x\to3}\frac{-2x^2+ax+b}{x^2-2x-3}=1$ .... ㉠

㉠에서 $x\longrightarrow3$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow$ 0이므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to3}(-2x^2+ax+b)=0$이므로 $-18+3a+b=0$

$\therefore b=-3a+18$ .... ㉡

$b=-3a+18$을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to3}\frac{-2x^2+ax-3a+18}{(x-3)(x+1)}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(-2x+a-6)}{(x-3)(x+1)}=\lim_{x\to3}\frac{-2x+a-6}{x+1}=\frac{a-12}{4}$$

이때 $\frac{a-12}{4}=1$이므로 $a=16$

$a=16$을 ㉡에 대입하면 $b=-3\times16+18=-30$

따라서 $f(x)=-2x^2+16x-30$이므로

$f(0)=-30$

답 ①

060

$\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{f(x)}{x^2}+1\right\}=0$에서 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=-1$이므로

$f(x)$는 이차항의 계수가 -1인 이차식이다. .... ❶

즉, $f(x)=-x^2+ax+b$ (a, b는 상수)로 놓으면

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-4}{x}=-1$에서 $\lim_{x\to0}\frac{-x^2+ax+b-4}{x}=-1$ .... ㉠

㉠에서 $x\longrightarrow0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow$ 0이므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}(-x^2+ax+b-4)=0$이므로 $b-4=0$

$\therefore b=4$

$b=4$를 ㉠에 대입하면

$\lim_{x\to0}\frac{-x^2+ax}{x}=\lim_{x\to0}(-x+a)=a$

이므로 $a=-1$

$\therefore f(x)=-x^2-x+4$ .... ❷

$\therefore f(3)=-3^2-3+4=-8$ .... ❸

답 -8

채점 기준	비율
❶ $f(x)$의 차수와 최고차항의 계수를 알 수 있다.	30 %
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	60 %
❸ $f(3)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

061

$f(x)\le h(x)\le g(x)$이고

$\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}(x^2-2x-3)=2^2-2\times2-3=-3$

$\lim_{x\to2}g(x)=\lim_{x\to2}(2x^2-6x+1)=2\times2^2-6\times2+1=-3$

이므로 $\lim_{x\to2}h(x)=-3$

답 -3

참고

$f(x)\le h(x)\le g(x)$이고 $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=\alpha$이면 $\lim_{x\to a}h(x)=\alpha$이다.

062

양수 x에 대하여 $3x+1>0$, $3x+2>0$이므로

$3x+1<f(x)<3x+2$에서

$(3x+1)^2<\{f(x)\}^2<(3x+2)^2$

$3x^2+1>0$이므로 $\frac{(3x+1)^2}{3x^2+1}<\frac{\{f(x)\}^2}{3x^2+1}<\frac{(3x+2)^2}{3x^2+1}$

이때

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(3x+1)^2}{3x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{9x^2+6x+1}{3x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{9+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}}{3+\frac{1}{x^2}}=\frac{9}{3}=3$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(3x+2)^2}{3x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{9x^2+12x+4}{3x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{9+\frac{12}{x}+\frac{4}{x^2}}{3+\frac{1}{x^2}}=\frac{9}{3}=3$$

이므로 $\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{3x^2+1}=3$

답 ⑤

063

(1) $\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{(t-1)^2+(\sqrt{t})^2}=\sqrt{t^2-t+1}$

(2) $\overline{\mathrm{BP}}=\sqrt{(t-2)^2+(\sqrt{t})^2}=\sqrt{t^2-3t+4}$

(3) $\lim\limits_{t\to\infty}(\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{BP}})$

$$=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2-t+1}-\sqrt{t^2-3t+4})$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{t^2-t+1}-\sqrt{t^2-3t+4})(\sqrt{t^2-t+1}+\sqrt{t^2-3t+4})}{\sqrt{t^2-t+1}+\sqrt{t^2-3t+4}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{t^2-t+1-(t^2-3t+4)}{\sqrt{t^2-t+1}+\sqrt{t^2-3t+4}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{2t-3}{\sqrt{t^2-t+1}+\sqrt{t^2-3t+4}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{2-\frac{3}{t}}{\sqrt{1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}+\sqrt{1-\frac{3}{t}+\frac{4}{t^2}}}$$

$$=\frac{2}{1+1}=1$$

(4) $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{AP}}}{\overline{\mathrm{BP}}}=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t^2-t+1}}{\sqrt{t^2-3t+4}}$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}}{\sqrt{1-\frac{3}{t}+\frac{4}{t^2}}}=\frac{1}{1}=1$$

답 (1) $\sqrt{t^2-t+1}$ (2) $\sqrt{t^2-3t+4}$ (3) 1 (4) 1

풍쌤 개념 CHECK

두 점 사이의 거리_高 공통수학 2

두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2) 사이의 거리는

$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

064

(1) $S_A=\frac{1}{2}\times4\times y=2y=2x^2$ ($\because$ $y=x^2$)

(2) $S_B=\frac{1}{2}\times6\times x=3x$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{S_A}{xS_B}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x\times3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2}{3x^2}=\frac{2}{3}$

답 (1) $2x^2$ (2) $3x$ (3) $\frac{2}{3}$

065

$\mathrm{P}(t, \sqrt{t})$이므로 $\overline{\mathrm{OP}}^2=t^2+(\sqrt{t})^2=t^2+t$

선분 PH의 길이는 점 $\mathrm{P}(t, \sqrt{t})$와 직선 $y=\frac{1}{2}x$, 즉 $x-2y=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{\mathrm{PH}}=\frac{|t-2\sqrt{t}|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|t-2\sqrt{t}|}{\sqrt{5}}$$

삼각형 PHO는 직각삼각형이므로 → 피타고라스 정리 이용

$$\overline{\mathrm{OH}}^2=\overline{\mathrm{OP}}^2-\overline{\mathrm{PH}}^2$$

$$=t^2+t-\frac{(t-2\sqrt{t})^2}{5}$$

$$=\frac{4t^2+4t\sqrt{t}+t}{5}$$

$$\therefore \lim_{t\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{OH}}^2}{\overline{\mathrm{OP}}^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{4t^2+4t\sqrt{t}+t}{5}}{t^2+t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{4t^2+4t\sqrt{t}+t}{5t^2+5t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{4+\frac{4\sqrt{t}}{t}+\frac{1}{t}}{5+\frac{5}{t}}=\frac{4}{5}$$

답 ④

풍쌤 개념 CHECK

점과 직선 사이의 거리_高 공통수학 2

점 (x_1, y_1)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는

$\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

실력을 높이는 연습 문제

본문 022쪽

01

ㄱ. $\lim\limits_{x\to-2-}f(x)=\lim\limits_{x\to-2+}f(x)=-2$이므로

$\lim\limits_{x\to-2}f(x)=-2$

ㄴ. $\lim\limits_{x\to1-}f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to1+}f(x)=1$, 즉 $\lim\limits_{x\to1-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to1+}f(x)$이므로 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

ㄷ. $\lim\limits_{x\to3-}f(x)=5$

따라서 극한값이 존재하는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

02

$\lim\limits_{x\to a-}f(x)=\lim\limits_{x\to a-}(-3x-4)=-3a-4$

$\lim\limits_{x\to a+}f(x)=\lim\limits_{x\to a+}(2x+1)=2a+1$

이때 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$의 값이 존재하려면 $\lim\limits_{x\to a-}f(x)=\lim\limits_{x\to a+}f(x)$이어야 하므로

$-3a-4=2a+1$, $-5a=5$

$\therefore a=-1$

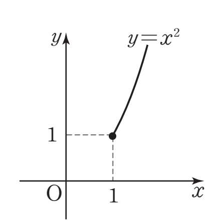
답 ③

03

$x\geq1$일 때 함수 $y=x^2$의 그래프가 오른쪽 그림과 같고, $\lim\limits_{x\to1}f(x)$의 값이 존재하지 않으려면 $\lim\limits_{x\to1-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to1+}f(x)$이어야 하므로

$-1+a\neq1$

$\therefore a\neq2$



답 ②

| 다른 풀이 |

$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} (-x+a) = -1+a$

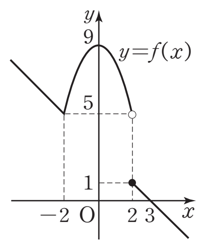
$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+} x^2 = 1$

이때 $\lim_{x \to 1} f(x)$의 값이 존재하지 않으려면 $\lim_{x \to 1-} f(x) \neq \lim_{x \to 1+} f(x)$이어야 하므로

$-1+a \neq 1$

$\therefore a \neq 2$

04



함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이때

$\lim_{x \to 2-} f(x) = 5$, $\lim_{x \to 2+} f(x) = 1$

이므로

$\lim_{x \to 2-} f(x) \neq \lim_{x \to 2+} f(x)$

즉, $\lim_{x \to 2} f(x)$의 값이 존재하지 않으므로

$a=2$

답 ⑤

05

① $\lim_{x \to -3+} f(x) = -1$이므로 $\lim_{x \to -3+} f(x)$의 값이 존재한다.

② $\lim_{x \to -1-} f(x) = \lim_{x \to -1+} f(x) = 1$이므로 $\lim_{x \to -1} f(x)$의 값이 존재한다.

③ $\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0} f(x) = 0$이다.

④ $-2<a<1$인 실수 a에 대하여 $x=a$의 좌극한과 우극한이 일치하므로 $\lim_{x \to a} f(x)$의 값이 항상 존재한다.

⑤ $x=1$에서의 좌극한과 우극한이 모두 존재하지만 $\lim_{x \to 1-} f(x) = 1$, $\lim_{x \to 1+} f(x) = 2$로 $\lim_{x \to 1-} f(x) \neq \lim_{x \to 1+} f(x)$이므로 $\lim_{x \to 1} f(x)$의 값이 존재하지 않는다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

06

$x \longrightarrow 2+$일 때, $x-2>0$이므로

$$\lim_{x \to 2+} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x \to 2+} \frac{x-2}{x-2} = 1$$

$x \longrightarrow -2-$일 때, $x+2<0$이므로

$$\lim_{x \to -2-} \frac{|x+2|}{x+2} = \lim_{x \to -2-} \frac{-(x+2)}{x+2} = -1$$

$$\therefore \lim_{x \to 2+} \frac{|x-2|}{x-2} + \lim_{x \to -2-} \frac{|x+2|}{x+2} = 1+(-1) = 0$$

답 ③

07

$x \longrightarrow 1-$일 때 $x-1 \longrightarrow 0-$이므로

$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} [x-1] = -1$ $x-1 \to 0-$이면 $-1<x-1<0$

$x \longrightarrow 1+$일 때 $[x]=1$이므로

$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+} ([x]+a) = 1+a$

이때 함수 $f(x)$의 $x=1$에서의 극한값이 존재하려면

$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1+} f(x)$이어야 하므로

$-1=1+a$

$\therefore a=-2$

답 -2

08

$$\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2-} \left[\frac{x^2-2x}{x-2} \right] = \lim_{x \to 2-} \left[\frac{x(x-2)}{x-2} \right]$$

$$= \lim_{x \to 2-} [x] = 1$$

$\lim_{x \to 2+} [x-2] = 0$

$$\lim_{x \to 2+} f(x) = \lim_{x \to 2+} \frac{[x-2]}{x-2} = 0$$

$$\therefore \lim_{x \to 2-} f(x) + \lim_{x \to 2+} f(x) = 1+0 = 1$$

답 1

09

$f(x)=t$로 놓으면

$x \longrightarrow 0+$일 때 $t \longrightarrow -1+$이므로

$A = \lim_{x \to 0+} f(f(x)) = \lim_{t \to -1+} f(t) = 0$

$x \longrightarrow -1-$일 때 $t \longrightarrow 0+$이므로

$B = \lim_{x \to -1-} g(f(x)) = \lim_{t \to 0+} g(t) = 3$

$g(x)=s$로 놓으면

$x \longrightarrow 1+$일 때 $s \longrightarrow 1-$이므로

$C = \lim_{x \to 1+} g(g(x)) = \lim_{s \to 1-} g(s) = 2$

$\therefore A<C<B$

답 ②

10

문제 접근하기

함수의 극한에 대한 성질 중에서 관련된 성질이 무엇인지 생각해 보고, 참이 아니라면 [반례]를 이용해서 거짓을 확인한다.

① [반례] $f(x) = \begin{cases} -1 & (x<a) \\ 1 & (x \geq a) \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} -1 & (x<a) \\ 1 & (x \geq a) \end{cases}$이면

$\lim_{x \to a} \{f(x)-g(x)\} = 0$이지만 $\lim_{x \to a} f(x)$와 $\lim_{x \to a} g(x)$의 값은 존재하지 않는다.

② [반례] $f(x) = \begin{cases} 0 & (x<a) \\ 1 & (x \geq a) \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 1 & (x<a) \\ 0 & (x \geq a) \end{cases}$이면

$\lim_{x \to a} f(x)g(x) = 0$이지만 $\lim_{x \to a} f(x) \neq 0$, $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$이다.

③ [반례] $f(x)=0$, $g(x) = \begin{cases} 1 & (x<a) \\ -1 & (x \geq a) \end{cases}$이면

$\lim_{x \to a} f(x) = 0$, $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = 0$이지만 $\lim_{x \to a} g(x)$의 값은 존재하지 않는다.

④ [반례] $f(x)=0$, $g(x) = \begin{cases} 1 & (x<a) \\ -1 & (x \geq a) \end{cases}$이면

$\lim_{x \to a} f(x) = 0$, $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$이지만 $\lim_{x \to a} g(x)$의 값은 존재하지 않는다.

⑤ $\lim_{x\to a} g(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\beta$ (α, β는 상수)이면

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\left\{g(x)\times\frac{f(x)}{g(x)}\right\}=\lim_{x\to a} g(x)\times\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha\beta$$

로 극한값이 존재한다.

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

11

$h(x)=2f(x)-3g(x)$라고 하면

$\lim_{x\to\infty} h(x)=1$이고 $f(x)=\frac{3g(x)+h(x)}{2}$

$\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty} h(x)=1$이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{h(x)}{g(x)}=0$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{4f(x)+g(x)}{3f(x)-g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{4\times\frac{3g(x)+h(x)}{2}+g(x)}{3\times\frac{3g(x)+h(x)}{2}-g(x)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{14g(x)+4h(x)}{7g(x)+3h(x)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{14+4\times\frac{h(x)}{g(x)}}{7+3\times\frac{h(x)}{g(x)}}$$

$$=\frac{14+4\times0}{7+3\times0}=2$$

답 ②

12

$$\lim_{x\to2}\frac{(x^2-4)f(x)}{x^3-8}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+2)f(x)}{(x-2)(x^2+2x+4)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(x+2)f(x)}{x^2+2x+4}$$

$$=\frac{(2+2)\times4}{2^2+2\times2+4}$$

$$=\frac{16}{12}=\frac{4}{3}$$

답 ④

13

$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2}{x^2-1}=2$에서 $\lim_{x\to\infty}\frac{a}{1-\frac{1}{x^2}}=2$이므로

$\frac{\infty}{\infty}$의 꼴인 함수의 극한을 이용한다.

$\frac{a}{1}=2$ $\quad\therefore a=2$

$$\lim_{x\to1}\frac{a(x-1)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{2(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{2}{x+1}$$

$$=\frac{2}{1+1}=1$$

이므로 $b=1$

$\therefore a+b=2+1=3$

답 3

14

$x=-t$로 놓으면 $x\longrightarrow-\infty$일 때 $t\longrightarrow\infty$이므로

$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\alpha$에서 $\lim_{t\to\infty}\frac{f(-t)}{-t}=\alpha$

$\therefore \lim_{t\to\infty}\frac{f(-t)}{t}=-\alpha$

$$\therefore \lim_{x\to-\infty}\frac{2-3f(x)}{2f(x)+\sqrt{2x-3f(x)}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{2-3f(-t)}{2f(-t)+\sqrt{-2t-3f(-t)}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{2}{t}-\frac{3f(-t)}{t}}{\frac{2f(-t)}{t}+\sqrt{-\frac{2}{t}-\frac{3f(-t)}{t^2}}}$$

$$=\frac{-3\times(-\alpha)}{2\times(-\alpha)}=-\frac{3}{2}$$

답 ①

15

$A=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x^2-4x})$

$\infty-\infty$의 꼴이므로 분모를 1로 생각하고 근호가 있는 부분을 유리화한다.

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x^2-4x})(\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2-4x})}{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2-4x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x-(x^2-4x)}{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2-4x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2-4x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{4}{x}}}=\frac{3}{1+1}=\frac{3}{2}$$

$$B=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{2}{x+2}-1\right)=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{x}\times\frac{2-(x+2)}{x+2}\right\}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}\times\frac{-x}{x+2}\right)=\lim_{x\to0}\left(-\frac{1}{x+2}\right)=-\frac{1}{2}$$

$\therefore 4AB=4\times\frac{3}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-3$

답 ①

16

$x\longrightarrow2$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow0$이므로

(분자) $\longrightarrow0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to2}(x^3-a)=0$이므로 $8-a=0$

$\therefore a=8$

$$\therefore b=\lim_{x\to2}\frac{x^3-a}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2}(x^2+2x+4)$$

$$=2^2+2\times2+4=12$$

$\therefore a+b=8+12=20$

답 ④

17

$x\longrightarrow4$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow0$이므로

(분자) $\longrightarrow0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to4}(x-a)=0$이므로 $4-a=0$

$\therefore a=4$

$$\therefore b=\lim_{x\to4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4}=\lim_{x\to4}(\sqrt{x}+2)$$

$$=2+2=4$$

$\therefore ab=4\times4=16$

답 ③

18

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+2x-8}=1$에서 $f(x)$는 이차항의 계수가 1인 이차식이다.

즉, $f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)로 놓으면

$\lim_{x\to-2}\frac{f(x)}{x+2}=3$에서 $\lim_{x\to-2}\frac{x^2+ax+b}{x+2}=3$ ⋯⋯ ㉠

이때 $x\longrightarrow-2$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow$ 0이므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to-2}(x^2+ax+b)=0$이므로 $4-2a+b=0$

$\therefore b=2a-4$ ⋯⋯ ㉡

㉠에 ㉡을 대입하면

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2+ax+b}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{x^2+ax+2a-4}{x+2}$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x+a-2)}{x+2}$$

$$=\lim_{x\to-2}(x+a-2)$$

$$=a-4$$

이때 $a-4=3$이므로 $a=7$

$a=7$을 ㉡에 대입하면 $b=2\times7-4=10$

따라서 $f(x)=x^2+7x+10$이므로

$f(-3)=(-3)^2+7\times(-3)+10=-2$

답 ②

19

문제 접근하기

이차함수 $f(x)$는 실수 a에 대하여 항상 $\lim_{x\to a}f(x)$의 값이 존재하므로 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}=\frac{3}{5}$에서 함수의 극한의 성질을 이용할 수 있다.

이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고, 방정식 $f(x)=0$의 두 근이 α, β이므로

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$

$\lim_{x\to a}f(x)\neq0$이면 함수의 극한의 성질을 이용한다.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}=\frac{f(a)-(a-a)}{f(a)+(a-a)}=1\neq\frac{3}{5}$$

이므로 $\lim_{x\to a}f(x)=0$이다.

즉, $f(x)$는 $x-a$를 인수로 가지므로 $a=\alpha$라고 하면

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}=\lim_{x\to\alpha}\frac{(x-\alpha)(x-\beta)-(x-\alpha)}{(x-\alpha)(x-\beta)+(x-\alpha)}$$

$$=\lim_{x\to\alpha}\frac{x-\beta-1}{x-\beta+1}$$

$$=\frac{\alpha-\beta-1}{\alpha-\beta+1}$$

이때 $\frac{\alpha-\beta-1}{\alpha-\beta+1}=\frac{3}{5}$이므로

$5(\alpha-\beta-1)=3(\alpha-\beta+1)$, $2(\alpha-\beta)=8$

$\therefore \alpha-\beta=4$

$\therefore |\alpha-\beta|=4$

답 ④

참고

$a=\beta$라고 하면

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}=\lim_{x\to\beta}\frac{(x-\alpha)(x-\beta)-(x-\beta)}{(x-\alpha)(x-\beta)+(x-\beta)}$$

$$=\lim_{x\to\beta}\frac{x-\alpha-1}{x-\alpha+1}$$

$$=\frac{\beta-\alpha-1}{\beta-\alpha+1}$$

이때 $\frac{\beta-\alpha-1}{\beta-\alpha+1}=\frac{3}{5}$이므로

$5(\beta-\alpha-1)=3(\beta-\alpha+1)$, $2(\alpha-\beta)=-8$

$\therefore \alpha-\beta=-4$

$\therefore |\alpha-\beta|=4$

20

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)g(x)}{2x^3}=-1$에서 $f(x)g(x)$는 삼차항의 계수가 -2인 삼차식이다.

즉, $f(x)g(x)=-2x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)로 놓으면

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)g(x)}{x^2}=6$에서

$\lim_{x\to0}\frac{-2x^3+ax^2+bx+c}{x^2}=6$ ⋯⋯ ㉠

이때 $x\longrightarrow0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow$ 0이므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}(-2x^3+ax^2+bx+c)=0$이므로 $c=0$

$c=0$을 ㉠에 대입하면

$\lim_{x\to0}\frac{-2x^3+ax^2+bx}{x^2}=6$에서

$\lim_{x\to0}\frac{-2x^2+ax+b}{x}=6$ ⋯⋯ ㉡

이때 $x\longrightarrow0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow$ 0이므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}(-2x^2+ax+b)=0$이므로 $b=0$

$b=0$을 ㉡에 대입하면

$\lim_{x\to0}\frac{-2x^2+ax}{x}=\lim_{x\to0}(-2x+a)=a=6$

따라서 $f(x)g(x)=-2x^3+6x^2$이므로

$\lim_{x\to1}f(x)g(x)=\lim_{x\to1}(-2x^3+6x^2)=-2+6=4$

답 ①

21

$\lim_{x\to2}(-2x^2+8x-11)=-2\times2^2+8\times2-11=-3$

$\lim_{x\to2}(x^2-4x+1)=2^2-4\times2+1=-3$

$\therefore \lim_{x\to2}f(x)=-3$

답 ③

22

$x^2+2x-3\le f(x)\le 2x^2-2$에서

$(x-1)(x+3)\le f(x)\le 2(x-1)(x+1)$ .... ㉠

(i) $x-1<0$, 즉 $x<1$일 때

㉠의 각 변을 $x-1$로 나누면

$2(x+1)\le \dfrac{f(x)}{x-1}\le x+3$ $x-1<0$이므로 부등호의 방향이 바뀐다.

이때 $\lim\limits_{x\to 1-} 2(x+1)=2\times 2=4$, $\lim\limits_{x\to 1-}(x+3)=4$이므로

$\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{f(x)}{x-1}=4$

(ii) $x-1>0$, 즉 $x>1$일 때

㉠의 각 변을 $x-1$로 나누면

$x+3\le \dfrac{f(x)}{x-1}\le 2(x+1)$

이때 $\lim\limits_{x\to 1+}(x+3)=4$, $\lim\limits_{x\to 1+}2(x+1)=2\times 2=4$이므로

$\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{f(x)}{x-1}=4$

(i), (ii)에서 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=4$ (좌극한)=(우극한)=4

답 ④

23

직선 l의 기울기가 1이고 y절편이 $g(t)$이므로 직선 l의 방정식은

$y=x+g(t)$

두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라고 하면 α, β는 이차방정식 $x^2=x+g(t)$, 즉 $x^2-x-g(t)=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-g(t)$ .... ㉠

$\mathrm{A}(\alpha, \alpha+g(t))$, $\mathrm{B}(\beta, \beta+g(t))$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}^2=(\alpha-\beta)^2+[\alpha+g(t)-\{\beta+g(t)\}]^2$

$=(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\beta)^2=2(\alpha-\beta)^2$

㉠에서 $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=1+4g(t)$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}^2=2+8g(t)$

선분 AB의 길이가 $2t$이어야 하므로

$2+8g(t)=4t^2\qquad \therefore g(t)=\dfrac{2t^2-1}{4}$

$$\therefore \lim_{t\to\infty}\frac{g(t)}{t^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{2t^2-1}{4t^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{2-\frac{1}{t^2}}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

답 ④

02 함수의 연속

기본을 다지는 유형

본문 027쪽

001

(1) $f(0)=1$, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$이므로 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(2) $f(0)$이 정의되지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

(3) $\lim\limits_{x\to 0-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0-}x=0$, $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}(x-1)=-1$에서

$\lim\limits_{x\to 0-}f(x)\ne\lim\limits_{x\to 0+}f(x)$이므로 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$가 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

답 (1) 연속 (2) 불연속 (3) 불연속

002

(1) $f(a)$가 정의되어 있지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 불연속이다.

(2) $\lim\limits_{x\to b-}f(x)\ne\lim\limits_{x\to b+}f(x)$이므로 $\lim\limits_{x\to b}f(x)$가 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=b$에서 불연속이다.

(3) $\lim\limits_{x\to c}f(x)\ne f(c)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=c$에서 불연속이다.

답 풀이 참조

003

ㄱ. $f(0)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$이므로 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄴ. $f(0)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$이므로 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. $\lim\limits_{x\to 0-}f(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=0$에서 $\lim\limits_{x\to 0-}f(x)\ne\lim\limits_{x\to 0+}f(x)$

이므로 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$가 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

따라서 $x=0$에서 연속인 함수는 ㄱ, ㄴ이다.

답 ④

004

ㄱ. $f(-1)$이 정의되지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

ㄴ. $f(-1)=-1+1=0$

$\lim\limits_{x\to -1}f(x)=\lim\limits_{x\to -1}(-x+1)=1+1=2$

즉, $\lim\limits_{x\to -1}f(x)\ne f(-1)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

ㄷ. $f(-2)=0$ .... ㉠

$\lim\limits_{x\to -2-}f(x)=0$

$\lim\limits_{x\to -2+}f(x)=\lim\limits_{x\to -2+}\sqrt{x+2}=\sqrt{-2+2}=0$이므로

$\lim\limits_{x\to -2}f(x)=0$ .... ㉡

㉠, ㉡에서 $\lim\limits_{x\to -2}f(x)=f(-2)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 연속이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

따라서 모든 실수 x에서 연속인 함수는 ㄷ이다.

답 ③

참고

(1) 다항함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이다.

(2) 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 유리함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$는 $g(x)\neq0$인 모든 실수 x에서 연속이다.

(3) 다항함수 $f(x)$에 대하여 무리함수 $\sqrt{f(x)}$는 $f(x)>0$인 모든 실수 x에서 연속이다.

005

$$f(x)=\frac{1}{x^2-2x-3}$$
$$=\frac{1}{(x+1)(x-3)} \cdots\cdots ❶$$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=3$에서 불연속이다. ······ ❷

따라서 실수 k의 값은 -1, 3이다. ······ ❸

답 -1, 3

채점 기준	비율
❶ $f(x)$의 분모를 인수분해할 수 있다.	40 %
❷ $f(x)$의 불연속을 조사할 수 있다.	40 %
❸ k의 값을 모두 구할 수 있다.	20 %

006

(1) $\lim_{x\to-1-}f(x)=1$, $\lim_{x\to-1+}f(x)=0$이므로 $\lim_{x\to-1-}f(x)\neq\lim_{x\to-1+}f(x)$

$\lim_{x\to0-}f(x)=0$, $\lim_{x\to0+}f(x)=-1$이므로 $\lim_{x\to0-}f(x)\neq\lim_{x\to0+}f(x)$

함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=0$에서 극한값이 존재하지 않는다.

(2) $\lim_{x\to-1}f(x)$, $\lim_{x\to0}f(x)$의 값이 존재하지 않고, $\lim_{x\to1}f(x)\neq f(1)$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=0$, $x=1$에서 불연속이다.

답 (1) -1, 0 (2) -1, 0, 1

007

주어진 그래프에서 $\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)$이지만 $f(1)$의 값이 정의되어 있지 않으므로 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

$\therefore a=1$

답 1

참고

열린구간 $(0, 4)$에서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서도 불연속이지만, 이때는 $\lim_{x\to2-}f(x)\neq\lim_{x\to2+}f(x)$이다.

008

① $f(-1)=2$

② $\lim_{x\to-1-}f(x)=1$, $\lim_{x\to-1+}f(x)=2$이므로

$\lim_{x\to-1-}f(x)\neq\lim_{x\to-1+}f(x)$

③ $\lim_{x\to1+}f(x)=1$

④ $f(1)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 함숫값을 갖는다.

⑤ 열린구간 $(-1, 1)$에서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이므로 불연속이 되는 x의 값은 1개이다.

따라서 옳은 것은 ④이다.

답 ④

009

ㄱ. $\lim_{x\to0+}f(x)=1$ (참)

ㄴ. $\lim_{x\to2-}f(x)=1$ (거짓)

ㄷ. $\lim_{x\to2-}|f(x)|=|1|=1$, $\lim_{x\to2+}|f(x)|=|-1|=1$이므로

$\lim_{x\to2}|f(x)|=1$

이때 $|f(2)|=|-1|=1$이므로 $\lim_{x\to2}|f(x)|=|f(2)|$

따라서 함수 $|f(x)|$는 $x=2$에서 연속이다. (참)

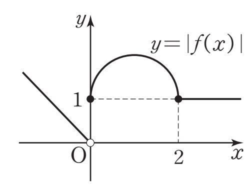
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

참고

함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

즉, 함수 $y=|f(x)|$는 $x=0$에서 불연속이다.



010

$f(1)=0$이므로 $(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(0)=1$

$f(x)=t$로 놓으면 $x\longrightarrow1-$일 때 $t\longrightarrow1-$이므로

$\lim_{x\to1-}(f\circ f)(x)=\lim_{x\to1-}f(f(x))=\lim_{t\to1-}f(t)=1$ ······ ㉠

또, $x\longrightarrow1+$일 때 $t\longrightarrow-1+$이므로

$\lim_{x\to1+}(f\circ f)(x)=\lim_{x\to1+}f(f(x))=\lim_{t\to-1+}f(t)=1$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $\lim_{x\to1}(f\circ f)(x)=1$

따라서 $\lim_{x\to1}(f\circ f)(x)=(f\circ f)(1)$이므로 함수 $(f\circ f)(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

답 연속

011

(1) $(f\circ g)(0)=f(g(0))=f(0)=1$ ······ ㉠

$\lim_{x\to0}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to0}f(g(x))=f(0)=1$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $\lim_{x\to0}(f\circ g)(x)=(f\circ g)(0)$

따라서 함수 $(f\circ g)(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(2) $(g\circ f)(0)=g(f(0))=g(1)=1$ ······ ㉠

$f(x)=t$로 놓으면 $x\longrightarrow0$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$\lim_{x\to0}(g\circ f)(x)=\lim_{x\to0}g(f(x))=\lim_{t\to0}g(t)=0$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $\lim_{x\to0}(g\circ f)(x)\neq(g\circ f)(0)$

따라서 함수 $(g\circ f)(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

답 (1) 연속 (2) 불연속

012

ㄱ. $\lim_{x\to1-}f(x)=0$, $\lim_{x\to1+}f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to1-}f(x)<\lim_{x\to1+}f(x)$ (참)

ㄴ. $\frac{1}{t}=x$로 놓으면 $t\longrightarrow\infty$일 때 $x\longrightarrow0+$이므로

$\lim_{t\to\infty}f\left(\frac{1}{t}\right)=\lim_{x\to0+}f(x)=1$ (참)

ㄷ. $f(x)=t$로 놓으면 $x \longrightarrow 3-$일 때 $t \longrightarrow 2+$이므로

$\lim_{x\to 3-} f(f(x))=\lim_{t\to 2+} f(t)=3$

또, $x \longrightarrow 3+$일 때 $t \longrightarrow 2-$이므로

$\lim_{x\to 3+} f(f(x))=\lim_{t\to 2-} f(t)=1$

즉, $\lim_{x\to 3} f(f(x))$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(f(x))$는 $x=3$에서 불연속이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

참고

모든 실수 x에서 정의된 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 합성함수 $(f\circ g)(x)$가 $x=a$에서 연속이려면 $\lim_{x\to a-} f(g(x))=\lim_{x\to a+} f(g(x))=f(g(a))$가 성립해야 한다.

013

ㄱ. $g(f(-1))=g(0)=1$ .... ㉠

$f(x)=t$로 놓으면 $x \longrightarrow -1$일 때 $t \longrightarrow 0$이므로

$\lim_{x\to -1} g(f(x))=\lim_{t\to 0} g(t)=1$ .... ㉡

㉠, ㉡에서 $\lim_{x\to -1} g(f(x))=g(f(-1))$

따라서 함수 $g(f(x))$는 $x=-1$에서 연속이다. (참)

ㄴ. $f(g(0))=f(1)=-1$ .... ㉠

$g(x)=s$로 놓으면 $x \longrightarrow 0$일 때 $s \longrightarrow 1-$이므로

$\lim_{x\to 0} f(g(x))=\lim_{s\to 1-} f(s)=0$ .... ㉡

㉠, ㉡에서 $\lim_{x\to 0} f(g(x)) \neq f(g(0))$

따라서 함수 $f(g(x))$는 $x=0$에서 불연속이다. (거짓)

ㄷ. $f(1)g(1)=-1\times 0=0$ .... ㉠

$\lim_{x\to 1-} f(x)g(x)=\lim_{x\to 1-} f(x)\times \lim_{x\to 1-} g(x)$

$=0\times 0=0$

$\lim_{x\to 1+} f(x)g(x)=\lim_{x\to 1+} f(x)\times \lim_{x\to 1+} g(x)$

$=-1\times 0=0$

$\therefore \lim_{x\to 1} f(x)g(x)=0$ .... ㉡

㉠, ㉡에서 $\lim_{x\to 1} f(x)g(x)=f(1)g(1)$

따라서 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 연속이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

참고

ㄷ에서 $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a} g(x)=\beta$이면 극한에 대한 성질이 성립하므로 $\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\lim_{x\to a} f(x)\times\lim_{x\to a} g(x)=\alpha\beta$임을 이용한다.

014

(1) 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=2$에서 연속이어야 하므로 $\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2+} f(x)=f(2)$이어야 한다. 이때

$\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2-} a=a$

$\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2+} (3x-1)=5$

$f(2)=3\times 2-1=5$

이므로 $a=5$

(2) 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=-1$에서 연속이어야 하므로 $\lim_{x\to -1-} f(x)=\lim_{x\to -1+} f(x)=f(-1)$이어야 한다.

이때

$\lim_{x\to -1-} f(x)=\lim_{x\to -1-} 2=2$

$\lim_{x\to -1+} f(x)=\lim_{x\to -1+} (-2x+a)=2+a$

$f(-1)=-2\times(-1)+a=2+a$

이므로 $2+a=2$

$\therefore a=0$

답 (1) 5 (2) 0

015

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이려면

$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1+} f(x)=f(1)$이어야 한다. 이때

$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-} (2x+a)=2+a$

$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+} (x+5)=6$

$f(1)=1+5=6$

이므로 $2+a=6$

$\therefore a=4$

답 ④

016

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=-2$에서 연속이어야 하므로 $\lim_{x\to -2-} f(x)=\lim_{x\to -2+} f(x)=f(-2)$이어야 한다.

이때

$\lim_{x\to -2-} f(x)=\lim_{x\to -2-} (5x+a)=-10+a$

$\lim_{x\to -2+} f(x)=\lim_{x\to -2+} (x^2-a)=4-a$

$f(-2)=4-a$

이므로 $-10+a=4-a$, $2a=14$

$\therefore a=7$

답 ②

017

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=-2$, $x=2$에서 연속이어야 한다.

$x=-2$에서 연속이려면 $\lim_{x\to -2-} f(x)=\lim_{x\to -2+} f(x)=f(-2)$이어야 하고

$\lim_{x\to -2-} f(x)=\lim_{x\to -2-} (x+a)=-2+a$

$\lim_{x\to -2+} f(x)=\lim_{x\to -2+} (3x-2)=-8$

$f(-2)=3\times(-2)-2=-8$

이므로 $-2+a=-8$

$\therefore a=-6$

$x=2$에서 연속이려면 $\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2+} f(x)=f(2)$이어야 하고

$\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2-} (3x-2)=4$

$\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2+} bx=2b$

$f(2)=2b$

이므로 $2b=4$

$\therefore b=2$

$\therefore a+b=-6+2=-4$

답 ①

018

함수 $f(x)g(x)$가 $x=1$에서 연속이려면

$\lim_{x\to1-} f(x)g(x)=\lim_{x\to1+} f(x)g(x)=f(1)g(1)$이어야 한다. 이때

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1-} f(x)g(x)&=\lim_{x\to1-} (x+1)(x+a)\\&=2(1+a)=2a+2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1+} f(x)g(x)&=\lim_{x\to1+} (x-2)(x+a)\\&=-(1+a)=-a-1\end{aligned}$$

$f(1)g(1)=-(1+a)=-a-1$

이므로 $2a+2=-a-1$, $3a=-3$

$\therefore a=-1$

답 ②

019

(1) 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로 $\lim_{x\to1} f(x)=f(1)$이어야 한다. 이때

$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1} (x+a)=1+a$

$f(1)=3$

이므로 $1+a=3$

$\therefore a=2$

(2) 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=-3$에서 연속이어야 하므로 $\lim_{x\to-3} f(x)=f(-3)$이어야 한다. 이때

$\lim_{x\to-3} f(x)=\lim_{x\to-3} (x+2)=-1$

$f(-3)=a$

이므로 $a=-1$

답 (1) 2 (2) -1

020

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로 $\lim_{x\to1} f(x)=f(1)$이어야 한다. 이때

$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1} (x+4)=5$

$f(1)=-a+3$

이므로 $-a+3=5$

$\therefore a=-2$

답 ②

021

함수 $f(x)$가 $x=3$에서 연속이므로 $\lim_{x\to3} f(x)=f(3)$이어야 한다.

$\therefore \lim_{x\to3} \dfrac{x^2-ax+6}{x-3}=b$ ········· ㉠

이때 $x\to3$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to3} (x^2-ax+6)=0$이므로

$9-3a+6=0$, $-3a=-15$

$\therefore a=5$

$a=5$를 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}b&=\lim_{x\to3} \frac{x^2-5x+6}{x-3}=\lim_{x\to3} \frac{(x-2)(x-3)}{x-3}\\&=\lim_{x\to3} (x-2)=1\end{aligned}$$

$\therefore a+b=5+1=6$

답 ⑤

참고

미정계수가 포함된 분수의 꼴의 함수에서

(1) $x\to a$일 때, 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이면 (분자) $\to0$이다.

(2) $x\to a$일 때, 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\to0$이면 (분모) $\to0$이다.

022

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이려면 $\lim_{x\to-1} f(x)=f(-1)$이어야 한다.

$\therefore \lim_{x\to-1} \dfrac{ax^2+4ax+6}{x+1}=b$ ········· ㉠

이때 $x\to-1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to-1} (ax^2+4ax+6)=0$이므로

$a-4a+6=0$, $-3a=-6$

$\therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}b&=\lim_{x\to-1} \frac{2x^2+8x+6}{x+1}\\&=\lim_{x\to-1} \frac{2(x+1)(x+3)}{x+1}\\&=\lim_{x\to-1} 2(x+3)=4\end{aligned}$$

$\therefore a+b=2+4=6$

답 ⑤

023

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=0$에서 연속이어야 하므로 $\lim_{x\to0} f(x)=f(0)$이어야 한다.

$\therefore \lim_{x\to0} \dfrac{\sqrt{x+a}+b}{x}=2$ ········· ㉠

❶

이때 $x\to0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0} (\sqrt{x+a}+b)=0$이므로

$\sqrt{a}+b=0$

$\therefore b=-\sqrt{a}$ ········· ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}}{x}&=\lim_{x\to0} \frac{(\sqrt{x+a}-\sqrt{a})(\sqrt{x+a}+\sqrt{a})}{x(\sqrt{x+a}+\sqrt{a})}\\&=\lim_{x\to0} \frac{x}{x(\sqrt{x+a}+\sqrt{a})}\\&=\lim_{x\to0} \frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{a}}\\&=\frac{1}{2\sqrt{a}}\end{aligned}$$

이때 $\frac{1}{2\sqrt{a}}=2$이므로 $a=\frac{1}{16}$ ……… ❷

$a=\frac{1}{16}$을 ㉡에 대입하면

$b=-\sqrt{a}=-\frac{1}{4}$ ……… ❸

답 $a=\frac{1}{16}$, $b=-\frac{1}{4}$

채점 기준	비율
❶ $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속인 조건을 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ b의 값을 구할 수 있다.	20 %

024

ㄱ. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 연속함수의 성질에 따라 $f(x)-g(x)$도 실수 전체의 집합에서 연속이다.
실수 전체의 집합에서 연속인 두 함수끼리 빼도 실수 전체의 집합에서 연속이다.

ㄴ. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 연속함수의 성질에 따라 $f(x)g(x)$도 실수 전체의 집합에서 연속이다.
실수 전체의 집합에서 연속인 두 함수끼리 곱해도 실수 전체의 집합에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$는 $f(x)=0$일 때 불연속이므로 실수 전체의 집합에서 항상 연속이라고 할 수 없다.

ㄹ. 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$는 $g(x)=0$일 때 불연속이므로 실수 전체의 집합에서 항상 연속이라고 할 수 없다.

따라서 실수 전체의 집합에서 항상 연속인 함수는 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

025

(1) 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$는 모든 실수 x에서 연속이므로 연속함수의 성질에 따라 $f(x)+g(x)$도 모든 실수 x에서 연속이다.
따라서 연속인 구간은 $(-\infty, \infty)$이다.

(2) 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$는 모든 실수 x에서 연속이므로 연속함수의 성질에 따라 $f(x)-g(x)$도 모든 실수 x에서 연속이다.
따라서 연속인 구간은 $(-\infty, \infty)$이다.

(3) 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$는 모든 실수 x에서 연속이므로 연속함수의 성질에 따라 $f(x)g(x)$도 모든 실수 x에서 연속이다.
따라서 연속인 구간은 $(-\infty, \infty)$이다.

(4) 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$는 $g(x)\neq0$, 즉 $x\neq3$인 모든 실수 x에서 연속이다.
$x-3\neq0$에서 $x\neq3$
따라서 연속인 구간은 $(-\infty, 3)$, $(3, \infty)$이다.

(5) 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$는 $f(x)\neq0$, 즉 $x\neq-1$이고 $x\neq2$인 모든 실수 x에서 연속이다.
$x^2-x-2\neq0$에서 $(x+1)(x-2)\neq0$
$\therefore x\neq-1, x\neq2$
따라서 연속인 구간은 $(-\infty, -1)$, $(-1, 2)$, $(2, \infty)$이다.

답 (1) $(-\infty, \infty)$ (2) $(-\infty, \infty)$
(3) $(-\infty, \infty)$ (4) $(-\infty, 3)$, $(3, \infty)$
(5) $(-\infty, -1)$, $(-1, 2)$, $(2, \infty)$

|다른 풀이|

(1) $f(x)+g(x)=(x^2-x-2)+(x-3)=x^2-5$
즉, $f(x)+g(x)$는 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다.
따라서 연속인 구간은 $(-\infty, \infty)$이다.

(2) $f(x)-g(x)=(x^2-x-2)-(x-3)=x^2-2x+1$
즉, $f(x)-g(x)$는 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다.
따라서 연속인 구간은 $(-\infty, \infty)$이다.

(3) $f(x)g(x)=(x^2-x-2)(x-3)=x^3-4x^2+x+6$
즉, $f(x)g(x)$는 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다.
따라서 연속인 구간은 $(-\infty, \infty)$이다.

(4) $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^2-x-2}{x-3}=\frac{(x+1)(x-2)}{x-3}$
즉, $\frac{f(x)}{g(x)}$는 $x-3\neq0$, 즉 $x\neq3$인 모든 실수 x에서 연속이다.
따라서 연속인 구간은 $(-\infty, 3)$, $(3, \infty)$이다.

(5) $\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{x-3}{x^2-x-2}=\frac{x-3}{(x+1)(x-2)}$
즉, $\frac{g(x)}{f(x)}$는 $(x+1)(x-2)\neq0$, 즉 $x\neq-1$이고 $x\neq2$인 모든 실수 x에서 연속이다.
따라서 연속인 구간은 $(-\infty, -1)$, $(-1, 2)$, $(2, \infty)$이다.

026

① 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$는 모든 실수 x에서 연속이므로 연속함수의 성질에 따라 $f(x)+g(x)$도 모든 실수 x에서 연속이다.

② 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$는 모든 실수 x에서 연속이므로 연속함수의 성질에 따라 $f(x)g(x)$도 모든 실수 x에서 연속이다.

③ 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$는 $g(x)\neq0$, 즉 $x\neq1$인 실수 x에서만 연속이다.
$x-1\neq0$에서 $x\neq1$
따라서 $x=1$에서 불연속이다.

④ 모든 실수 x에서 $f(x)\neq0$이므로 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$는 모든 실수 x에서 연속이다.

⑤ $g(f(x))=(x^2+1)-1=x^2$이므로 함수 $g(f(x))$는 모든 실수 x에서 연속이다.

답 ③

|다른 풀이|

① $f(x)+g(x)=x^2+x$이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

② $f(x)g(x)=(x^2+1)(x-1)=x^3-x^2+x-1$이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

③ $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^2+1}{x-1}$이므로 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$는 $x\neq1$에서 연속이다. 즉, 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$는 $x=1$에서 불연속이다.

④ $\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{x-1}{x^2+1}$이고, $x^2+1\neq0$이므로 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$는 모든 실수 x에서 연속이다.

027

ㄱ. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이므로 연속함수의 성질에 따라 $2f(x)-g(x)$, 즉 $f(x)+f(x)-g(x)$도 $x=a$에서 연속이다.

ㄴ. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이므로 연속함수의 성질에 따라 $f(x)g(x)$도 $x=a$에서 연속이다.
ㄷ. 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이므로 연속함수의 성질에 따라 $\{f(x)\}^2$, 즉 $f(x)f(x)$도 $x=a$에서 연속이다.
ㄹ. 함수 $\dfrac{f(x)}{\{g(x)\}^2}$는 $g(x)=0$인 x의 값에서 불연속이다.

$g(a)=0$인지 알 수 없으므로 함수 $\dfrac{f(x)}{\{g(x)\}^2}$가 $x=a$에서 항상 연속이라고 할 수 없다.

따라서 $x=a$에서 항상 연속인 함수는 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ③

| 다른 풀이 |

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이므로

$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$, $\lim_{x\to a} g(x)=g(a)$

ㄱ. $\lim_{x\to a} \{2f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to a} \{2f(x)\}-\lim_{x\to a} g(x)$
$=2f(a)-g(a)$
이므로 함수 $2f(x)-g(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

ㄴ. $\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\lim_{x\to a} f(x)\times\lim_{x\to a} g(x)=f(a)g(a)$
이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

ㄷ. $\lim_{x\to a} \{f(x)\}^2=\lim_{x\to a} f(x)\times\lim_{x\to a} f(x)=\{f(a)\}^2$
이므로 함수 $\{f(x)\}^2$은 $x=a$에서 연속이다.

028

함수 $f(x)$는 $x=0$에서만 불연속이므로 함수 $(f(x)+a)^2$이 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=0$에서 연속이어야 한다.

즉,

$\lim_{x\to 0-} (f(x)+a)^2=\lim_{x\to 0+} (f(x)+a)^2=(f(0)+a)^2$

이어야 한다. 이때

$\lim_{x\to 0-} (f(x)+a)^2=\lim_{x\to 0-} \left(x-\frac{1}{2}+a\right)^2=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2$

$\lim_{x\to 0+} (f(x)+a)^2=\lim_{x\to 0+} (-x^2+3+a)^2=(3+a)^2$

$(f(0)+a)^2=(3+a)^2$

이므로 $\left(a-\frac{1}{2}\right)^2=(3+a)^2$

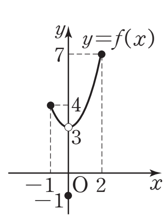
$a^2-a+\frac{1}{4}=a^2+6a+9$, $7a=-\frac{35}{4}$

$\therefore a=-\frac{5}{4}$

답 ③

029

닫힌구간 $[-1, 2]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



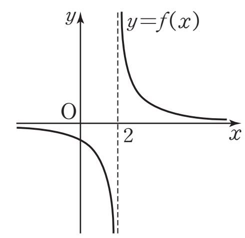
따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이고 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 7, $x=0$에서 최솟값 -1을 가지므로 최댓값과 최솟값의 합은

$7+(-1)=6$

답 6

030

함수 $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$은 $x\neq2$인 모든 실수 x에서 연속이고 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

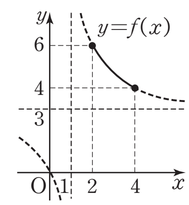


따라서 함수 $f(x)$는 $x<2$일 때 x의 값이 증가할수록 y의 값이 감소하므로 구간 $[0, 2)$에서 최솟값이 존재하지 않는다.

답 ②

031

$f(x)=\dfrac{3x}{x-1}=3+\dfrac{3}{x-1}$



이므로 닫힌구간 $[2, 4]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 6, $x=4$에서 최솟값 4를 가지므로

$M=6$, $m=4$

$\therefore M-m=6-4=2$

답 ④

032

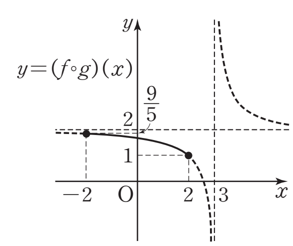
① 열린구간 $(-2, 4)$에서 함수 $f(x)$가 불연속이 되는 x의 값은 0의 1개이다.
② 닫힌구간 $[-2, 4]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 없다.
④ 닫힌구간 $[-2, 6]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 없고, 최댓값은 4이다.
⑤ 닫힌구간 $[0, 6]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 4이고, 최솟값은 1이므로 최댓값과 최솟값의 합은 $4+1=5$이다.

따라서 옳은 것은 ③이다.

답 ③

033

$(f\circ g)(x)=f(g(x))$
$=f\left(\dfrac{1}{x-3}\right)$
$=\dfrac{1}{x-3}+2$



이므로 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 함수 $y=(f\circ g)(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수 $(f\circ g)(x)$의 최댓값은

$(f\circ g)(-2)=f(g(-2))=\dfrac{1}{-2-3}+2=\dfrac{9}{5}$ ······ ❶

최솟값은

$(f\circ g)(2)=f(g(2))=\dfrac{1}{2-3}+2=1$ ······ ❷

이므로 $k=\dfrac{9}{5}+1=\dfrac{14}{5}$

$\therefore 5k=5\times\dfrac{14}{5}=14$ ······ ❸

답 14

채점 기준	비율
❶ $(f\circ g)(x)$의 최댓값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $(f\circ g)(x)$의 최솟값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $5k$의 값을 구할 수 있다.	20 %

034

$f(-2)f(-1)=2\times(-4)=-8<0$
$f(-1)f(0)=-4\times3=-12<0$
$f(0)f(1)=3\times(-2)=-6<0$
$f(1)f(2)=-2\times(-5)=10>0$
$f(2)f(3)=-5\times1=-5<0$
이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(2, 3)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.
따라서 방정식 $f(x)=0$은 적어도 4개의 실근을 가지므로
$n=4$

답 ④

035

$f(x)=x^4-5x^3+8$로 놓으면 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이고
$f(-2)=64>0$, $f(-1)=14>0$, $f(0)=8>0$, $f(1)=4>0$,
$f(2)=-16<0$, $f(3)=-46<0$
이때 $f(1)f(2)<0$이므로 사잇값 정리에 의하여 주어진 방정식이 적어도 하나의 실근을 갖는 구간은 $(1, 2)$이다.

답 ④

036

$f(x)=x$에서 $f(x)-x=0$
$g(x)=f(x)-x$로 놓으면 함수 $g(x)$는 연속함수이므로
$g(0)g(1)<0$이면 방정식 $g(x)=0$, 즉 $f(x)=x$는 열린구간 $(0, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다. ······ ❶
$f(0)=a$, $f(1)=a-2$이므로
$g(0)=a$, $g(1)=(a-2)-1=a-3$
$g(0)g(1)=a(a-3)<0$에서
$0<a<3$ ······ ❷

답 $0<a<3$

채점 기준	비율
❶ 방정식 $f(x)=x$가 열린구간 $(0, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖게 하기 위한 조건을 구할 수 있다.	70 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %

037

방정식 $f(x)=0$의 실근은 0, m, n이고 m, n은 자연수이므로 사잇값 정리에 의하여
$f(1)f(3)<0$에서 $f(2)=0$
$f(3)f(5)<0$에서 $f(4)=0$
따라서 $f(x)=x(x-2)(x-4)$이므로
$f(6)=6\times4\times2=48$

답 ④

038

현민이의 몸무게가 60 kg인 순간이 적어도 한 번 존재하는 때는 2주와 3주 사이, 3주와 4주 사이, 4주와 5주 사이이다.
따라서 6주 동안 현민이의 몸무게가 60 kg이었던 순간이 3번 이상 존재하므로 n의 최솟값은 3이다.

답 ③

실력을 높이는 연습 문제

본문 035쪽

01

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=1$에서도 연속이므로 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$이다. 이때
$\lim_{x\to1}f(x)=4-f(1)$이므로 $f(1)=4-f(1)$
$\therefore f(1)=2$

답 ②

02

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이려면
$\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a+}f(x)=f(a)$이어야 한다. 이때
$\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a-}(x+3)=a+3$
$\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a+}2x=2a$
$f(a)=2a$
이므로 $a+3=2a$
$\therefore a=3$

답 ②

03

ㄱ. $\lim_{x\to-1}f(x)g(x)=\lim_{x\to-1}f(x)\times\lim_{x\to-1}g(x)=-1\times1=-1$
이고, $f(-1)g(-1)=-1\times1=-1$이므로
$\lim_{x\to-1}f(x)g(x)=f(-1)g(-1)$
따라서 함수 $f(x)g(x)$는 $x=-1$에서 연속이다. (참)
ㄴ. $\lim_{x\to0-}f(x)g(x)=\lim_{x\to0-}f(x)\times\lim_{x\to0-}g(x)$
$=-1\times0=0$
$\lim_{x\to0+}f(x)g(x)=\lim_{x\to0+}f(x)\times\lim_{x\to0+}g(x)$
$=1\times0=0$
$\therefore \lim_{x\to0}f(x)g(x)=0$
이때 $f(0)g(0)=1\times0=0$이므로
$\lim_{x\to0}f(x)g(x)=f(0)g(0)$
따라서 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 연속이다. (거짓)
ㄷ. $\lim_{x\to1}f(x)g(x)=\lim_{x\to1}f(x)\times\lim_{x\to1}g(x)=1\times1=1$이고,
$f(1)g(1)=1\times1=1$이므로
$\lim_{x\to1}f(x)g(x)=f(1)g(1)$
따라서 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 연속이다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

04

문제 접근하기

$x=a$에서 불연속인 함수 $f(x)$에 대하여 합성함수 $(f\circ f)(x)$는 $f(x)=a$인 점에서 불연속임을 이용한다.

주어진 그래프에서 함수 $f(x)=\begin{cases} x-3 & (x\neq 2) \\ 1 & (x=2) \end{cases}$ 이므로 합성함수

$(f\circ f)(x)$에 대하여

(i) $f(x)\neq 2$일 때

$$\begin{aligned}(f\circ f)(x)&=f(f(x))\\&=\begin{cases} f(x)-3 & (f(x)\neq 2) \\ f(2)-3 & (x=2) \end{cases}\\&=\begin{cases} (x-3)-3 & (x-3\neq 2) \\ 1-3 & (x=2) \end{cases}\\&=\begin{cases} x-6 & (x\neq 5) \\ -2 & (x=2) \end{cases}\end{aligned}$$

(ii) $f(x)=2$일 때

$$\begin{aligned}(f\circ f)(x)&=f(f(x))\\&=\begin{cases} f(x)-3 & (x\neq 2) \\ 1 & (f(x)=2) \end{cases}\\&=\begin{cases} (x-3)-3 & (x\neq 2) \\ 1 & (x-3=2) \end{cases}\\&=\begin{cases} x-6 & (x\neq 2) \\ 1 & (x=5) \end{cases}\end{aligned}$$

(i), (ii)에서

$$(f\circ f)(x)=\begin{cases} x-6 & (x\neq 2,\ x\neq 5) \\ -2 & (x=2) \\ 1 & (x=5) \end{cases}$$

이므로 함수 $(f\circ f)(x)$는 $x=2$, $x=5$에서 불연속이므로 $a=2$, $a=5$이다.

따라서 모든 a의 값의 합은

$2+5=7$

답 ⑤

05

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=-1$, $x=1$에서 연속이어야 한다.

$x=-1$에서 연속이려면 $\lim_{x\to -1-} f(x)=\lim_{x\to -1+} f(x)=f(-1)$이어야 한다. 이때

$\lim_{x\to -1-} f(x)=\lim_{x\to -1-} (2x+a)=-2+a$

$\lim_{x\to -1+} f(x)=\lim_{x\to -1+} (x^2+b)=1+b$

$f(-1)=-2+a$

이므로 $-2+a=1+b$

$\therefore a=b+3$

또, $x=1$에서 연속이려면 $\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1+} f(x)=f(1)$이어야 한다.

이때

$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-} (x^2+b)=1+b$

$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+} (cx+3)=c+3$

$f(1)=c+3$

이므로 $1+b=c+3$

$\therefore c=b-2$

이때 $f(0)=3$이므로 $f(0)=b=3$

따라서 $a=b+3=3+3=6$, $c=b-2=3-2=1$이므로

$abc=6\times 3\times 1=18$

답 ④

06

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로 $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$이어야 한다.

$\therefore \lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax-4}{x-1}=b$ ……… ㉠

이때 $x\longrightarrow 1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow$ 0이므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 1}(x^2+ax-4)=0$이므로 $1+a-4=0$

$\therefore a=3$

$a=3$을 ㉠에 대입하면

$$b=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x-4}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+4)}{x-1}$$

$=\lim_{x\to 1}(x+4)=1+4=5$

$\therefore a+b=3+5=8$

답 ⑤

07

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2+} f(x)=f(2)$이어야 한다. 이때

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2-} f(x)&=\lim_{x\to 2-}(a[x]-[x])\\&=(a-1)\lim_{x\to 2-}[x]\\&=(a-1)\times 1=a-1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2+} f(x)&=\lim_{x\to 2+}(a[x]-[x])\\&=(a-1)\lim_{x\to 2+}[x]\\&=(a-1)\times 2=2a-2\end{aligned}$$

$f(2)=2a-2$

이므로 $a-1=2a-2$

$\therefore a=1$

답 ④

참고

$[x]$가 x보다 크지 않은 최대의 정수일 때, 정수 n에 대하여

(1) $x\longrightarrow n-$이면 $n-1\le x<n$이므로 $\lim_{x\to n-}[x]=n-1$

(2) $x\longrightarrow n+$이면 $n\le x<n+1$이므로 $\lim_{x\to n+}[x]=n$

08

$x\neq 2$일 때, $f(x)=\dfrac{ax^2+bx}{x-2}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=2$에서도 연속이므로 $\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$이어야 한다.

$\therefore \lim_{x\to 2}\dfrac{ax^2+bx}{x-2}=6$ ……… ㉠

이때 $x \longrightarrow 2$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow$ 0이므로

(분자) $\longrightarrow$ 0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 2}(ax^2+bx)=0$이므로 $4a+2b=0$

$\therefore b=-2a$ ········ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to 2}\frac{ax^2-2ax}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{ax(x-2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}ax=2a$$

이때 $2a=6$이므로 $a=3$

$a=3$을 ㉡에 대입하면 $b=-6$

$\therefore ab=3\times(-6)=-18$

답 -18

09

ㄱ. $h(x)=f(x)+g(x)$라고 하면 $g(x)=h(x)-f(x)$
이때 $f(x)$, $h(x)$가 연속함수이므로 연속함수의 성질에 의하여 $g(x)$도 연속함수이다. (참)

ㄴ. [반례] $f(x)=0$, $g(x)=\begin{cases}-1 & (x<0)\\ 1 & (x\ge 0)\end{cases}$이라고 하면 $f(x)$와 $f(x)g(x)$는 연속함수이지만 $g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.
(거짓)

ㄷ. [반례] $f(x)=0$, $g(x)=\begin{cases}-1 & (x<0)\\ 1 & (x\ge 0)\end{cases}$이라고 하면 $f(x)$와 $\frac{f(x)}{g(x)}$는 연속함수이지만 $g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.
(거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

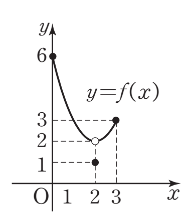
답 ①

10

$x\ne 2$일 때

$f(x)=x^2-4x+6=(x-2)^2+2$

이므로 닫힌구간 $[0, 3]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이고 $x=0$일 때 최댓값 6, $x=2$일 때 최솟값 1을 갖는다.

답 **최댓값**: 6, **최솟값**: 1

11

문제 접근하기

방정식 $f(x)=g(x)$의 꼴은 $f(x)-g(x)=0$의 꼴로 바꾼 후 사잇값 정리를 이용해서 방정식이 실근을 가질 때의 조건을 생각한다.

방정식 $f(x)=g(x)$는 방정식 $h(x)=0$이다.

$h(x)=f(x)-g(x)$로 놓으면 닫힌구간 $[1, 2]$에서 함수 $h(x)$가 연속이므로 사잇값 정리에 의하여 $h(1)h(2)<0$일 때 열린구간 $(1, 2)$에서 방정식 $h(x)=0$이 적어도 하나의 실근을 갖는다.

다항함수 $h(x)$는 모든 실수 x에서 연속이므로 닫힌구간 $[1, 2]$에서도 연속이다.

이때 $f(x)=x^4-3x^3+x^2+k$, $g(x)=x^3-4x^2+1$이므로

$h(1)=f(1)-g(1)=(k-1)-(-2)=k+1$

$h(2)=f(2)-g(2)=(k-4)-(-7)=k+3$

$h(1)h(2)<0$에서 $(k+1)(k+3)<0$

$\therefore -3<k<-1$

따라서 정수 k는 -2의 1개이다.

답 ①

12

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=12$에서 $f(0)=0$

$\lim_{x\to 4}\frac{f(x)}{x-4}=12$에서 $f(4)=0$

$x \longrightarrow a$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow$ 0이면 (분자) $\longrightarrow$ 0이어야 한다.

즉, $f(x)$는 x, $x-4$를 인수를 가지므로

$f(x)=x(x-4)g(x)$ ($g(x)$는 다항함수)로 놓으면

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x-4)g(x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}(x-4)g(x)$$
$$=-4g(0)=12$$

$\therefore g(0)=-3$

$$\lim_{x\to 4}\frac{f(x)}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{x(x-4)g(x)}{x-4}$$
$$=\lim_{x\to 4}xg(x)$$
$$=4g(4)=12$$

$\therefore g(4)=3$

$g(x)$는 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이고, $g(0)g(4)<0$이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$은 열린구간 $(0, 4)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=0$은 닫힌구간 $[0, 4]$에서 $x=0$, $x=4$, $g(x)=0$일 때 적어도 3개의 실근을 갖는다.

답 ③

풍쌤 개념 CHECK

인수 정리_高 공통수학 1

다항식 $p(x)$에 대하여

(1) $p(\alpha)=0$이면 $p(x)$는 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어진다.

(2) $p(x)$가 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어지면 $p(\alpha)=0$이다.

03 미분계수와 도함수

기본을 다지는 유형

본문 039쪽

001

(1) $\dfrac{\varDelta y}{\varDelta x}=\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}=\dfrac{8-0}{2}=4$

(2) $\dfrac{\varDelta y}{\varDelta x}=\dfrac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\dfrac{3-(-1)}{2}=2$

(3) $\dfrac{\varDelta y}{\varDelta x}=\dfrac{f(-5)-f(-1)}{-5-(-1)}=\dfrac{15-(-1)}{-4}=-4$

답 (1) 4 (2) 2 (3) -4

002

(1) $\dfrac{\varDelta y}{\varDelta x}=\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1}=\dfrac{-3-(-1)}{2}=-1$

(2) $\dfrac{\varDelta y}{\varDelta x}=\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1}=\dfrac{7-3}{2}=2$

(3) $\dfrac{\varDelta y}{\varDelta x}=\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1}=\dfrac{13-(-3)}{2}=8$

답 (1) -1 (2) 2 (3) 8

003

x의 값이 -2에서 1까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$\dfrac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)}=\dfrac{(-a+6)-(2a+9)}{3}=\dfrac{-3a-3}{3}=-a-1$

이때 $-a-1=8$이므로 $a=-9$

답 ①

004

x의 값이 -2에서 0까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$\dfrac{f(0)-f(-2)}{0-(-2)}=\dfrac{0-(-8)}{2}=4$ .... ㉠

x의 값이 0에서 a까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$\dfrac{f(a)-f(0)}{a-0}=\dfrac{a(a+1)(a-2)-0}{a}=(a+1)(a-2)$ .... ㉡

$a>0$, 즉 $a\neq0$이므로 약분할 수 있다.

㉠, ㉡에서 $4=(a+1)(a-2)$

$a^2-a-6=0$, $(a+2)(a-3)=0$

$\therefore a=3$ ($\because a>0$)

답 ③

005

직선 AB의 기울기가 2이므로

$\dfrac{f(5)-f(1)}{5-1}=\dfrac{f(5)-f(1)}{4}=2$ $\quad\therefore f(5)-f(1)=8$

x의 값이 0에서 1까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=f(1)-f(0)=f(1)-\underline{f(5)}=-8$

$f(0)=f(5)$

답 ①

006

(1) $f'(1)=\displaystyle\lim_{\varDelta x\to0}\frac{f(1+\varDelta x)-f(1)}{\varDelta x}$

$=\displaystyle\lim_{\varDelta x\to0}\frac{\{3\times(1+\varDelta x)+4\}-(3\times1+4)}{\varDelta x}$

$=\displaystyle\lim_{\varDelta x\to0}\frac{3\varDelta x}{\varDelta x}=\lim_{\varDelta x\to0}3=3$

(2) $f'(1)=\displaystyle\lim_{\varDelta x\to0}\frac{f(1+\varDelta x)-f(1)}{\varDelta x}$

$=\displaystyle\lim_{\varDelta x\to0}\frac{\{2\times(1+\varDelta x)^2\}-(2\times1^2)}{\varDelta x}$

$=\displaystyle\lim_{\varDelta x\to0}\frac{4\varDelta x+2(\varDelta x)^2}{\varDelta x}=\lim_{\varDelta x\to0}(4+2\varDelta x)=4$

답 (1) 3 (2) 4

| 다른 풀이 |

(1) $f'(1)=\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{3x+4-(3\times1+4)}{x-1}$

$=\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{3(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1}3=3$

(2) $f'(1)=\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{2x^2-2\times1^2}{x-1}$

$=\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{2(x+1)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1}2(x+1)=4$

007

(1) $f'(a)=\displaystyle\lim_{\varDelta x\to0}\frac{f(a+\varDelta x)-f(a)}{\varDelta x}$

$=\displaystyle\lim_{\varDelta x\to0}\frac{\{(a+\varDelta x)^2+1\}-(a^2+1)}{\varDelta x}$

$=\displaystyle\lim_{\varDelta x\to0}\frac{(\varDelta x)^2+2a\varDelta x}{\varDelta x}$

$=\displaystyle\lim_{\varDelta x\to0}(\varDelta x+2a)=2a$

이때 $2a=12$이므로 $a=6$

(2) $f'(a)=\displaystyle\lim_{\varDelta x\to0}\frac{f(a+\varDelta x)-f(a)}{\varDelta x}$

$=\displaystyle\lim_{\varDelta x\to0}\frac{(a+\varDelta x)^3-a^3}{\varDelta x}$

$=\displaystyle\lim_{\varDelta x\to0}\frac{(\varDelta x)^3+3a(\varDelta x)^2+3a^2\varDelta x}{\varDelta x}$

$=\displaystyle\lim_{\varDelta x\to0}\{(\varDelta x)^2+3a\varDelta x+3a^2\}=3a^2$

이때 $3a^2=12$이므로 $a^2=4$

$\therefore a=2$ ($\because a>0$)

답 (1) 6 (2) 2

| 다른 풀이 |

(1) $f'(a)=\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x^2+1)-(a^2+1)}{x-a}$

$=\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x+a)(x-a)}{x-a}$

$=\displaystyle\lim_{x\to a}(x+a)=2a$

이때 $2a=12$이므로 $a=6$

(2) $f'(a)=\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x-a}$

$=\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)}{x-a}$

$=\displaystyle\lim_{x\to a}(x^2+ax+a^2)=3a^2$

이때 $3a^2=12$이므로 $a^2=4$

$\therefore a=2$ ($\because a>0$)

008

x의 값이 1에서 $1+h$까지 변할 때의 평균변화율이 h^2+2h+3이므로

$\dfrac{f(1+h)-f(1)}{(1+h)-1}=h^2+2h+3$에서

$\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=h^2+2h+3$

$$\therefore f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0}(h^2+2h+3)=3$$

답 ⑤

참고

$f'(a)=\lim_{\Delta x\to0}\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$에서

$\Delta x=h$로 놓으면

$f'(a)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

009

x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{(3b^2+2b-7)-(3a^2+2a-7)}{b-a}=\frac{(b-a)(3a+3b+2)}{b-a}=3a+3b+2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

→ 분자를 인수분해하면
$3(b^2-a^2)+2(b-a)$
$=3(b+a)(b-a)+2(b-a)$
$=(b-a)\{3(b+a)+2\}$
$=(b-a)(3a+3b+2)$

……………… ❶

함수 $f(x)$의 $x=-1$에서의 미분계수는

$$f'(-1)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\{3(-1+\Delta x)^2+2(-1+\Delta x)-7\}-(-6)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{3(\Delta x)^2-4\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}(3\Delta x-4)=-4 \quad \cdots\cdots ㉡$$

……………… ❷

㉠, ㉡에서 $3a+3b+2=-4$이므로 $3a+3b=-6$

$\therefore a+b=-2$ ……………… ❸

답 -2

채점 기준	비율
❶ x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율을 구할 수 있다.	40 %
❷ 함수 $f(x)$의 $x=-1$에서의 미분계수를 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

| 다른 풀이 |

함수 $f(x)$의 $x=-1$에서의 미분계수는

$$f'(-1)=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to-1}\frac{3x^2+2x-7-(-6)}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{3x^2+2x-1}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(3x-1)(x+1)}{x+1}=\lim_{x\to-1}(3x-1)=-4$$

010

$f(x)=2x^2-x$라고 하면 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, 6)$에서의 접선의 기울기는 함수 $f(x)$의 $x=2$에서의 미분계수 $f'(2)$와 같으므로

$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\{2(2+\Delta x)^2-(2+\Delta x)\}-(2\times2^2-2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{2(\Delta x)^2+7\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}(2\Delta x+7)=7$$

답 ⑤

011

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(1-3\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(1-3\Delta x)-f(1)}{-3\Delta x}\times(-3)=-3f'(1)=-3\times(-2)=6$$

답 ⑤

참고

미분계수의 정의를 이용하도록 식을 변형할 때에는 다음과 같이 색칠한 부분을 같은 꼴로 만들어 준다.

실수 p에 대하여

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(a+p\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(a+p\Delta x)-f(a)}{p\Delta x}\times p=pf'(a)$$

012

$$\lim_{h\to0}\frac{f(-3-5h)-f(-3)}{4h}=\lim_{h\to0}\frac{f(-3-5h)-f(-3)}{-5h}\times\left(-\frac{5}{4}\right)=-\frac{5}{4}f'(-3)=-\frac{5}{4}\times4=-5$$

답 ①

013

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{3h}=\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}f'(a)$$

답 ③

014

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(3+\Delta x)-f(3-2\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\{f(3+\Delta x)-f(3)\}-\{f(3-2\Delta x)-f(3)\}}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}-\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(3-2\Delta x)-f(3)}{-2\Delta x}\times(-2)$$
$$=f'(3)+2f'(3)=3f'(3)=3\times2=6$$

답 ⑤

015

$$\lim_{h\to0}\frac{f(-3+h)-5}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(-3+h)-f(-3)}{h}=f'(-3)=-4$$

답 ①

016

$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=2$이므로 $f'(1)=2$ ········ ㉠

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{\Delta x\to 0}&\frac{f(1+\Delta x)-f(1-\Delta x)}{2\Delta x}\\ &=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{f(1+\Delta x)-f(1)\}-\{f(1-\Delta x)-f(1)\}}{2\Delta x}\\ &=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{2\Delta x}-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1-\Delta x)-f(1)}{2\Delta x}\\ &=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}\times\frac{1}{2}\\ &\qquad -\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1-\Delta x)-f(1)}{-\Delta x}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\\ &=\frac{1}{2}f'(1)+\frac{1}{2}f'(1)\\ &=f'(1)=2\ (\because ㉠)\end{aligned}$$

답 ⑤

017

$$\begin{aligned}&\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(3\Delta x)-f(-\Delta x)}{3\Delta x}\\ &=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{f(0+3\Delta x)-f(0)\}-\{f(0-\Delta x)-f(0)\}}{3\Delta x}\\ &=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+3\Delta x)-f(0)}{3\Delta x}-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0-\Delta x)-f(0)}{-\Delta x}\times\left(-\frac{1}{3}\right)\\ &=f'(0)+\frac{1}{3}f'(0)\\ &=\frac{4}{3}f'(0)\end{aligned}$$ ········ ❶

이때 $\frac{4}{3}f'(0)=8$이므로 $f'(0)=6$ ········ ❷

답 6

채점 기준	비율
❶ $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(3\Delta x)-f(-\Delta x)}{3\Delta x}$를 $f'(0)$에 대한 식으로 정리할 수 있다.	80 %
❷ $f'(0)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

018

$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-4}{h}=6$에서 $h \longrightarrow 0$일 때 극한값이 존재하고

(분모) $\longrightarrow$ 0이므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이어야 한다.

즉, $\lim_{h\to 0}\{f(1+2h)-4\}=0$이므로

$f(1)=4$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-4}{h}&=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\times 2\\ &=2f'(1)\end{aligned}$$

이때 $2f'(1)=6$이므로 $f'(1)=3$

$\therefore f(1)+f'(1)=4+3=7$

답 ③

019

$$\lim_{x\to -2}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=f'(-2)=5$$

답 ⑤

참고

미분계수의 정의 $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$를 이용하도록 식을 변형할 때에는 주어진 식을 $\lim_{●\to ▲}\frac{f(●)-f(▲)}{●-▲}$의 꼴을 포함한 식으로 변형한다.

같은 모양끼리 같은 꼴이 되게 한다.

020

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}&=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+1}\right\}\\ &=\frac{1}{2}f'(1)=\frac{1}{2}\times(-2)=-1\end{aligned}$$

답 ②

021

$2x=t$로 놓으면 $x \longrightarrow 3$일 때 $t \longrightarrow 6$이므로 ← ㉠

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}\frac{f(2x)-f(6)}{x-3}&=\lim_{x\to 3}\frac{f(2x)-f(6)}{2x-6}\times 2\\ &=\underbrace{\lim_{t\to 6}\frac{f(t)-f(6)}{t-6}}_{㉠}\times 2\\ &=2f'(6)=2\times(-2)=-4\end{aligned}$$

답 ①

022

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{xf(1)-f(x)}{x-1}&=\lim_{x\to 1}\frac{\{xf(1)-f(1)\}-\{f(x)-f(1)\}}{x-1}\\ &=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)f(1)}{x-1}-\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\\ &=f(1)-f'(1)=2-3=-1\end{aligned}$$

답 ③

023

$x^3=t$로 놓으면 $x \longrightarrow a$일 때 $t \longrightarrow a^3$이므로 ← ㉠

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to a}\frac{f(x^3)-f(a^3)}{x-a}\\ &=\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x^3)-f(a^3)}{(x-a)(x^2+ax+a^2)}\times(x^2+ax+a^2)\right\}\\ &=\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x^3)-f(a^3)}{x^3-a^3}\times(x^2+ax+a^2)\right\}\\ &=\underbrace{\lim_{t\to a^3}\frac{f(t)-f(a^3)}{t-a^3}}_{㉠}\times\lim_{x\to a}(x^2+ax+a^2)\\ &=3a^2f'(a^3)\end{aligned}$$

답 ③

024

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x^2+x-6}&=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{(x-2)(x+3)}\ (\because f(2)=0)\\ &=\lim_{x\to 2}\left\{\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\frac{1}{x+3}\right\}\\ &=\frac{1}{5}f'(2)=\frac{1}{5}\times 5=1\end{aligned}$$

답 ④

025

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{(x-1)(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+1}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}f'(1)$$

이때 $\frac{1}{2}f'(1)=-1$이므로 $f'(1)=-2$

$$\therefore \lim_{\Delta x\to0}\frac{f(1-2\Delta x)-f(1+3\Delta x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\{f(1-2\Delta x)-f(1)\}-\{f(1+3\Delta x)-f(1)\}}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(1-2\Delta x)-f(1)}{-2\Delta x}\times(-2)-\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(1+3\Delta x)-f(1)}{3\Delta x}\times3$$
$$=-2f'(1)-3f'(1)$$
$$=-5f'(1)$$
$$=-5\times(-2)=10$$

답 10

026

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1-\Delta x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\{f(1+\Delta x)-f(1)\}-\{f(1-\Delta x)-f(1)\}}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}-\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(1-\Delta x)-f(1)}{-\Delta x}\times(-1)$$

$=f'(1)+f'(1)=2f'(1)$ ❶

이때 $2f'(1)=12$이므로 $f'(1)=6$ ❷

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{f(x)-f(1)}=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)(x-1)}{f(x)-f(1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}}$$

$=\frac{2}{f'(1)}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ ❸

답 $\frac{1}{3}$

채점 기준	비율
❶ $\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1-\Delta x)}{\Delta x}=12$의 좌변을 간단히 할 수 있다.	40 %
❷ $f'(1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{f(x)-f(1)}$의 값을 구할 수 있다.	40 %

027

(1) (i) $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(ii) $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x}=1$

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이고 미분가능하다.

(2) (i) $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(ii) $\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{-x}{x}=-1$

$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{x}{x}=1$

이므로 극한값 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$, 즉 $f'(0)$의 값이 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

(3) $f(0)$이 정의되지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이고 미분가능하지 않다.

답 **(1) 연속이고, 미분가능하다.**
(2) 연속이고, 미분가능하지 않다.
(3) 불연속이고, 미분가능하지 않다.

참고

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속인지 알아보려면 다음을 모두 확인해야 한다.

(i) 함숫값 $f(a)$가 존재하는지 확인한다.

(ii) $\lim_{x\to a}f(x)$의 값이 존재하는지 확인한다.

➡ $\lim_{x\to a-}f(x)$와 $\lim_{x\to a+}f(x)$의 값이 같은지 확인한다.

(iii) $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$인지 확인한다.

028

ㄱ. (i) $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

(ii) $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x-1}=1$

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이고 미분가능하다.

ㄴ. (i) $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

(ii) $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x-1}=1$

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이고 미분가능하다.

ㄷ. (i) $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

(ii) $$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{|x^2-1|}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{-(x^2-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{-(x+1)(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}(-x-1)=-2$$

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{|x^2-1|}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{x^2-1}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}(x+1)=2$$

이므로 극한값 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$, 즉 $f'(1)$의 값이 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

따라서 구하는 함수는 ㄷ이다.

답 ③

029

①, ②, ③의 그래프는 $x=a$에서 연속이지만 뾰족하므로 미분가능하지 않다.
④의 그래프는 $x=a$에서 끊어져 있어 불연속이므로 미분가능하지 않다.
따라서 $x=a$에서 미분가능한 것은 ⑤이다.

답 ⑤

030

① 함수 $f(x)$는 $x=1$, $x=4$, $x=5$에서 불연속이므로 이때의 x의 값은 3개이다.
② 함수 $f(x)$는 $x=1$, $x=3$, $x=4$, $x=5$에서 미분가능하지 않으므로 이때의 x의 값은 4개이다.
③ 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 연속이지만 미분가능하지 않으므로 이때의 x의 값은 1개이다.
④ 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 그 값이 정의되지 않으므로 이때의 x의 값은 1개이다.
⑤ 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 극한값이 존재하지 않으므로 이때의 x의 값은 1개이다.
$\lim_{x\to 4-} f(x)=1$, $\lim_{x\to 4+} f(x)=2$이므로 $\lim_{x\to 4-} f(x)\neq \lim_{x\to 4+} f(x)$
따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

답 ④

031

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로 $x=2$에서 연속이다.
즉, $\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2+} f(x)=f(2)$에서
$4b+4=4+4a \quad \therefore a=b$ ⋯⋯ ㉠
또, $f'(2)$의 값이 존재하므로

$$\lim_{x\to 2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2-}\frac{bx^2+4-(4+4a)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2-}\frac{bx^2-4b}{x-2}\ (\because ㉠)$$
$$=\lim_{x\to 2-}\frac{b(x+2)(x-2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2-} b(x+2)$$
$$=4b$$
$$\lim_{x\to 2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2+}\frac{x^2+2ax-(4+4a)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2+}\frac{x^2+2ax-2(2+2a)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2+}\frac{(x-2)(x+2+2a)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2+}(x+2+2a)$$
$$=4+2a$$

에서 $4b=4+2a$
㉠에서 $a=b$이므로
$4a=4+2a$, $2a=4$
$\therefore a=2,\ b=2$
$\therefore a+b=2+2=4$

답 4

| 다른 풀이 |

$f(x)=\begin{cases} bx^2+4 & (x<2) \\ x^2+2ax & (x\geq 2)\end{cases}$에서 $f'(x)=\begin{cases} 2bx & (x<2) \\ 2x+2a & (x>2)\end{cases}$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로
$x=2$에서 미분가능 ➡ $x=2$에서 연속

$\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2+} f(x)=f(2)$
$\lim_{x\to 2-}(bx^2+4)=\lim_{x\to 2+}(x^2+2ax)=4+4a$
$4b+4=4+4a \quad \therefore a-b=0$ ⋯⋯ ㉠
$f'(2)$의 값이 존재하므로
$x=2$에서 미분가능 ➡ $f'(2)$의 값 존재

$\lim_{x\to 2-} f'(x)=\lim_{x\to 2+} f'(x)$
$\lim_{x\to 2-} 2bx=\lim_{x\to 2+}(2x+2a)$, $4b=4+2a$
$\therefore a-2b=-2$ ⋯⋯ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=2$
$\therefore a+b=2+2=4$

032

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 미분가능하므로 $x=0$에서 미분가능하고 연속이다.
즉, $\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0+} f(x)=f(0)$에서
$b=-1$
또, $f'(0)$의 값이 존재하므로

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{x^3+2x-1-(-1)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0-}\frac{x(x^2+2)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0-}(x^2+2)$$
$$=2$$
$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{ax-1-(-1)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0+}\frac{ax}{x}$$
$$=a$$

에서 $a=2$
$\therefore ab=2\times(-1)=-2$

답 -2

033

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 미분가능하므로 $x=-1$에서 미분가능하고 연속이다.
즉, $\lim_{x\to -1-} f(x)=\lim_{x\to -1+} f(x)=f(-1)$에서
$-b=-6+a \quad \therefore b=6-a$ ⋯⋯ ㉠
또, $f'(-1)$의 값이 존재하므로

$$\lim_{x\to -1-}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to -1-}\frac{bx^3-(-6+a)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to -1-}\frac{bx^3+b}{x+1}\ (\because ㉠)$$
$$=\lim_{x\to -1-}\frac{b(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to -1-} b(x^2-x+1)$$
$$=3b$$

$$\lim_{x\to-1+}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to-1+}\frac{6x+a-(-6+a)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1+}\frac{6x+6}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1+}\frac{6(x+1)}{x+1}$$
$$=6$$

에서 $3b=6$ $\quad\therefore b=2$

$b=2$를 ㉠에 대입하면 $2=6-a$ $\quad\therefore a=4$

$\therefore ab=4\times2=8$

답 8

034

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)=f(1)$에서

$1=a(1+b)$ $\quad\therefore a+ab=1$ ········ ㉠

또, $f'(1)$의 값이 존재하므로

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{x^2-(a+ab)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{x^2-1}{x-1}\ (\because ㉠)$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}(x+1)$$
$$=2$$
$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{ax+ab-(a+ab)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{a(x-1)}{x-1}$$
$$=a$$

에서 $a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $2+2b=1$, $2b=-1$

$\therefore b=-\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=\begin{cases}x^2 & (x<1)\\ 2\left(x-\frac{1}{2}\right) & (x\ge1)\end{cases}$이므로

$f(4)=2\times\left(4-\frac{1}{2}\right)=2\times\frac{7}{2}=7$

답 7

035

함수 $f(x)$가 미분가능한 함수이므로 $x=0$에서 미분가능하고 연속이다.

즉, $\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0+}f(x)=f(0)$에서

$1=a+b$ ········ ㉠

또, $f'(0)$의 값이 존재하므로

$$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{-x+1-(a+b)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0-}\frac{-x+1-1}{x}\ (\because ㉠)$$
$$=\lim_{x\to0-}\frac{-x}{x}$$
$$=-1$$
$$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{a(x-1)^2+b-(a+b)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0+}\frac{a\{(x-1)^2-1\}}{x}$$
$$=\lim_{x\to0+}\frac{ax(x-2)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0+}a(x-2)$$
$$=-2a$$

에서 $-2a=-1$ $\quad\therefore a=\frac{1}{2}$

$a=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $1=\frac{1}{2}+b$ $\quad\therefore b=\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=\begin{cases}-x+1 & (x<0)\\ \frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2} & (x\ge0)\end{cases}$이므로

$f(1)=\frac{1}{2}\times(1-1)^2+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

답 ②

036

(1) $f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{(x+h)-x}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{h}{h}=1$

이므로 $f'(1)=1$

(2) $f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{2xh+h^2}{h}=\lim_{h\to0}(2x+h)=2x$

이므로 $f'(1)=2\times1=2$

(3) $f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{3(x+h)-3x}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{3h}{h}=3$

이므로 $f'(1)=3$

답 (1) $f'(x)=1$, $f'(1)=1$ (2) $f'(x)=2x$, $f'(1)=2$
(3) $f'(x)=3$, $f'(1)=3$

037

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\{2(x+h)^2+3\}-(2x^2+3)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{4xh+2h^2}{h}=\lim_{h\to0}(\boxed{㈎\ 4x+2h})=\boxed{㈏\ 4x}$$

$\therefore$ ㈎: $4x+2h$, ㈏: $4x$

답 ㈎: $4x+2h$ ㈏: $4x$

038

$f'(x)$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\{(\boxed{㈎\ x+h})-x\}\{(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\cdots+x^{n-1}\}}{h}$

$=\lim_{h\to0}\{(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\cdots+x^{n-1}\}$

$=\underbrace{x^{n-1}+x^{n-1}+\cdots+x^{n-1}}_{n개}$

$=\boxed{㈏\ n}x^{n-1}$

$\therefore$ (가): $x+h$, (나): n

답 (가): $x+h$ (나): n

참고

$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+a^{n-4}b^3+\cdots+b^{n-1})$

039

$$\begin{aligned} g'(x)&=\lim_{h\to0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\ &=\lim_{h\to0}\frac{2(x+h)f(x+h)-2xf(x)}{h}\\ &=\lim_{h\to0}\frac{2x\{f(x+h)-f(x)\}+\boxed{A\ 2hf(x+h)}}{h}\\ &=2x\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+2\lim_{h\to0}f(x+h)\\ &=2xf'(x)+\boxed{B\ 2f(x)} \end{aligned}$$

$\therefore A=2hf(x+h),\ B=2f(x)$

답 $A=2hf(x+h),\ B=2f(x)$

040

(1) $y'=-2x$

(2) $y'=(4\times2)x+3=8x+3$

(3) $y'=-(2\times3)x^2+4=-6x^2+4$

(4) $y'=-(2\times5)x^4=-10x^4$

답 (1) $y'=-2x$ (2) $y'=8x+3$ (3) $y'=-6x^2+4$ (4) $y'=-10x^4$

041

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+4x-2$라고 하면

$f'(x)=x^2+x+4$

따라서 $x=-3$에서의 미분계수는

$f'(-3)=(-3)^2+(-3)+4=10$

답 ④

참고

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때

$y=af(x)\pm bg(x)$ (a, b는 상수) ➡ $y'=af'(x)\pm bg'(x)$ (복호동순)

042

$f'(x)=6x^2-2x$이므로

$f'(1)=6-2=4$

답 ④

043

$f'(x)=1+x+x^2+\cdots+x^9$이므로 ❶

$f'(-1)=1+(-1)+1+(-1)+\cdots+(-1)=0$

$f'(1)=1+1+1+1+\cdots+1=10$ ❷

$\therefore f'(-1)+f'(1)=0+10=10$ ❸

답 10

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ $f'(-1)$, $f'(1)$의 값을 구할 수 있다	40 %
❸ $f'(-1)+f'(1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

044

$f'(x)=4x^3+2x$이므로 $f'(a)=4a^3+2a$

이때 $4a^3+2a=36$이므로 $4a^3+2a-36=0$

$2(a-2)(2a^2+4a+9)=0$ ⟶ 조립제법을 이용해서 인수분해

$\therefore a=2$ ($\because 2a^2+4a+9>0$) ⟶ a는 실수이므로 $a=2$

답 ⑤

045

$f'(x)=-9x^2+2ax$이고, $f'(1)=-3$이므로

$-9+2a=-3,\ 2a=6$

$\therefore a=3$

답 ④

046

$f(0)=-5$이므로 $b=-5$

$f'(x)=2x^2-ax+3$이고, $f'(-3)=9$이므로

$18+3a+3=9,\ 3a=-12$

$\therefore a=-4$

따라서 $f(x)=\frac{2}{3}x^3+2x^2+3x-5$이므로

$f(3)=18+18+9-5=40$

답 ③

047

$f(3)=-4$이므로 $9+3a+b=-4$

$\therefore 3a+b=-13$ ㉠

$f'(x)=2x+a$이고, $f'(-1)=-5$이므로

$-2+a=-5$ $\therefore a=-3$

$a=-3$을 ㉠에 대입하면 $b=-4$

$\therefore a+b=-3+(-4)=-7$

답 ①

048

(1) $$\begin{aligned} y'&=(x+1)'(2x+3)+(x+1)(2x+3)'\\ &=(2x+3)+2(x+1)\\ &=2x+3+2x+2\\ &=4x+5 \end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned} y'&=(x^2-3)'(4x+1)+(x^2-3)(4x+1)'\\ &=2x(4x+1)+4(x^2-3)\\ &=8x^2+2x+4x^2-12\\ &=12x^2+2x-12 \end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned} y'&=x'(x+1)(x-2)+x(x+1)'(x-2)+x(x+1)(x-2)'\\ &=(x+1)(x-2)+x(x-2)+x(x+1)\\ &=x^2-x-2+x^2-2x+x^2+x\\ &=3x^2-2x-2 \end{aligned}$$

답 (1) $y'=4x+5$ (2) $y'=12x^2+2x-12$ (3) $y'=3x^2-2x-2$

049

(1) $$\begin{aligned} y'&=\{(2x-3)^3\}'\\ &=3(2x-3)^{3-1}(2x-3)'\\ &=6(2x-3)^2 \end{aligned}$$

(2) $y'=\{(x^2+2x+3)^4\}'$
$=4(x^2+2x+3)^{4-1}(x^2+2x+3)'$
$=4(x^2+2x+3)^3(2x+2)$
$=8(x+1)(x^2+2x+3)^3$

(3) $y'=(x^3)'(x+2)^2+x^3\{(x+2)^2\}'$
$=3x^2(x+2)^2+x^3\times2(x+2)(x+2)'$
$=3x^2(x+2)^2+2x^3(x+2)$
$=x^2(x+2)(3x+6+2x)$
$=x^2(x+2)(5x+6)$

답 (1) $y'=6(2x-3)^2$ (2) $y'=8(x+1)(x^2+2x+3)^3$
(3) $y'=x^2(x+2)(5x+6)$

050

$f'(x)=(x^2+1)'(3x^2-x)+(x^2+1)(3x^2-x)'$
$=2x(3x^2-x)+(x^2+1)(6x-1)$
$\therefore f'(1)=2\times2+2\times5=14$

답 ④

051

$f'(x)=x'(3x-1)(4x+2)+x(3x-1)'(4x+2)+x(3x-1)(4x+2)'$
$=(3x-1)(4x+2)+3x(4x+2)+4x(3x-1)$
$=36x^2+4x-2$

이때 $f'(a)=-2$이므로 $36a^2+4a-2=-2$
$36a^2+4a=0,\ 4a(9a+1)=0$
$\therefore a=0$ 또는 $a=-\frac{1}{9}$

답 $0,\ -\frac{1}{9}$

052

$f'(x)=(3x^3+1)'(x-2)^2+(3x^3+1)\{(x-2)^2\}'$
$=9x^2(x-2)^2+(3x^3+1)\times2(x-2)(x-2)'$
$=9x^2(x-2)^2+2(3x^3+1)(x-2)$
$\therefore f'(1)=9\times1^2\times(-1)^2+2\times4\times(-1)=1$

답 1

053

$f'(x)=\{(3x+a)^4\}'=4(3x+a)^3(3x+a)'$
$=12(3x+a)^3$

이때 $f'(1)=12$이므로 $12(3+a)^3=12$
$(3+a)^3=1,\ a^3+9a^2+27a+26=0$
$(a+2)(a^2+7a+13)=0$
$\therefore a=-2\ (\because a^2+7a+13>0)$

답 ②

054

$f(x)=(x^2+3)^4$이라고 하면
$f'(x)=\{(x^2+3)^4\}'=4(x^2+3)^3(x^2+3)'$
$=8x(x^2+3)^3$ ······ ❶

곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=1$인 점에서의 접선의 기울기는 $f'(1)$이므로
$f'(1)=8\times4^3=512$ ······ ❷

답 512

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	60 %
❷ 접선의 기울기를 구할 수 있다.	40 %

055

$f(x)=x^2+2x+1$에서 $f'(x)=2x+2$
$g(x)=x^2+5x+3$에서 $g'(x)=2x+5$
$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로 함수 $f(x)g(x)$의 $x=0$에서의 미분계수는
$\{f(0)g(0)\}'=f'(0)g(0)+f(0)g'(0)$
$=2\times3+1\times5=11$

답 ①

056

$\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=f'(2)$

이때 $f'(x)=6x$이므로
$f'(2)=6\times2=12$

답 ④

057

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+1}\right\}=\frac{1}{2}f'(1)$

이때 $f'(x)=-12x^3+6x^2+4$이므로
$f'(1)=-12+6+4=-2$
따라서 구하는 값은
$\frac{1}{2}f'(1)=\frac{1}{2}\times(-2)=-1$

답 ①

058

$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$
$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(1+h)-f(1)\}-\{f(1-h)-f(1)\}}{h}$
$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}\times(-1)$
$=f'(1)+f'(1)=2f'(1)$

이때 $f'(x)=2x+3$이므로 $f'(1)=2+3=5$
따라서 구하는 값은
$2f'(1)=2\times5=10$

답 ③

059

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(2x-1)}{x-1}$
$=\lim_{x\to1}\frac{\{f(x)-f(1)\}-\{f(2x-1)-f(1)\}}{x-1}$
$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}-\lim_{x\to1}\frac{f(2x-1)-f(1)}{(2x-1)-1}\times2$
$=f'(1)-2f'(1)=-f'(1)$ $x\longrightarrow1$일 때, $2x-1\longrightarrow1$

이때 $f'(x)=6x+2$이므로 $f'(1)=6+2=8$

따라서 구하는 값은

$-f'(1)=-8$

답 ①

060

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a-2h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(a-2h)-f(a)}{-2h}\times(-2)$$
$$=-2f'(a)$$

이때 $-2f'(a)=-10$이므로 $f'(a)=5$ ······ ㉠

한편, $f(x)=x^3-2x^2+x$에서 $f'(x)=3x^2-4x+1$이므로

$f'(a)=3a^2-4a+1$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $3a^2-4a+1=5$

$3a^2-4a-4=0$, $(3a+2)(a-2)=0$

따라서 구하는 정수 a의 값은 2이다.

답 ⑤

061

$f(x)=x^6-3x$라고 하면 $f(1)=1-3=-2$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{x^6-3x+2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$$

이때 $f'(x)=6x^5-3$이므로 구하는 값은

$f'(1)=6-3=3$

답 ④

062

$f(x)=x^n-5x^2-2x$라고 하면 $f(1)=1-5-2=-6$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{x^n-5x^2-2x+6}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$$ ······ ❶

이때 $f'(x)=nx^{n-1}-10x-2$이므로

$f'(1)=n-10-2=n-12$ ······ ❷

이때 $f'(1)=0$이므로 $n-12=0$

$\therefore n=12$ ······ ❸

답 12

채점 기준	비율
❶ $f(x)=x^n-5x^2-2x$라 하고 미분계수를 이용하여 주어진 식을 간단히 할 수 있다.	40 %
❷ $f'(1)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ n의 값을 구할 수 있다.	20 %

063

$$\lim_{h\to0}\frac{f(2-h)-f(2)}{h}=3$$에서

$$\lim_{h\to0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}\times(-1)=3$$

$-f'(2)=3 \qquad \therefore f'(2)=-3$ ······ ㉠

$f(x)=x^2+ax+3$에서 $f'(x)=2x+a$

이때 ㉠에서 $f'(2)=-3$이므로

$4+a=-3 \qquad \therefore a=-7$

따라서 $f(x)=x^2-7x+3$이므로

$f(-2)=4+14+3=21$

답 21

064

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{2h}=6$$에서

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\times\frac{1}{2}=6$$

$\frac{1}{2}f'(1)=6 \qquad \therefore f'(1)=12$ ······ ㉠

$f(x)=x^2+ax$에서 $f'(x)=2x+a$

이때 ㉠에서 $f'(1)=12$이므로

$2+a=12 \qquad \therefore a=10$

답 ①

065

$$\lim_{h\to0}\frac{f(5+h)-f(5-h)}{h}=8$$에서

$$\lim_{h\to0}\frac{\{f(5+h)-f(5)\}-\{f(5-h)-f(5)\}}{h}=8$$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(5+h)-f(5)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{f(5-h)-f(5)}{-h}\times(-1)=8$$

$f'(5)+f'(5)=8$, $2f'(5)=8$

$\therefore f'(5)=4$ ······ ㉠

$f(x)=ax^2-6x$에서 $f'(x)=2ax-6$

이때 ㉠에서 $f'(5)=4$이므로

$10a-6=4 \qquad \therefore a=1$

따라서 $f(x)=x^2-6x$이므로

$f(2)=4-12=-8$

답 ①

066

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=7$에서 $x \longrightarrow 1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$ 이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로 $f(1)=0$

이때 $f(1)=1+a+b$이므로 $1+a+b=0$

$\therefore a+b=-1$ ······ ㉠

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=7$에서 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-0}{x-1}=7$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=7$$

$\therefore f'(1)=7$ ······ ㉡

$f(x)=x^2+ax+b$에서 $f'(x)=2x+a$

이때 ㉡에서 $f'(1)=7$이므로

$2+a=7 \qquad \therefore a=5$

$a=5$를 ㉠에 대입하면

$5+b=-1 \qquad \therefore b=-6$

따라서 $f(x)=x^2+5x-6$이므로

$f'(x)=2x+5$

$\therefore f(2)+f'(2)=8+9=17$

답 ④

참고

다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-b}{x-a}=c$ (c는 실수)이면

➡ $f(a)=b$, $f'(a)=c$

067

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{2x^2+3x-1}=1$에서 $f(x)$는 이차항의 계수가 2인 이차식이므로 $f(x)=2x^2+ax+b$ (a, b는 상수)로 놓자. ⋯⋯ ㉠

$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-6}{x+1}=-4$에서 $x\longrightarrow-1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow$ 0이므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to-1}\{f(x)-6\}=0$이므로 $f(-1)=6$

이때 ㉠에 $x=-1$을 대입하면 $f(-1)=2-a+b$이므로

$2-a+b=6$

$\therefore -a+b=4$ ⋯⋯ ㉡

$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-6}{x+1}=-4$에서 $\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=-4$

$\therefore f'(-1)=-4$ ⋯⋯ ㉢

한편, $f'(x)=4x+a$이고, ㉢에서 $f'(-1)=-4$이므로

$-4+a=-4$ $\quad\therefore a=0$

$a=0$을 ㉡에 대입하면 $b=4$

따라서 $f(x)=2x^2+4$이므로

$f(2)=8+4=12$

답 12

068

(1) $f(x)=x^2+ax$라고 하면 $f'(x)=2x+a$
이때 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=1$인 점에서의 접선의 기울기가 4이므로 $f'(1)=4$에서
$2+a=4$ $\quad\therefore a=2$

(2) $f(x)=ax^3+x+1$이라고 하면 $f'(x)=3ax^2+1$
이때 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=1$인 점에서의 접선의 기울기가 4이므로 $f'(1)=4$에서
$3a+1=4$, $3a=3$ $\quad\therefore a=1$

답 (1) 2 (2) 1

참고
함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 (a, b)에서의 접선의 기울기가 m이면
➡ $f(a)=b$, $f'(a)=m$

069

점 $(-1, 7)$이 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이므로

$f(-1)=7$에서

$1-a+1=7$, $-a=5$ $\quad\therefore a=-5$

$f(x)=x^2-5x+1$이므로 $f'(x)=2x-5$

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(-1, 7)$에서의 접선의 기울기가 m이므로

$m=f'(-1)=-2-5=-7$

$\therefore am=-5\times(-7)=35$

답 ④

070

$f(x)=(2x+1)^3(x^2+k)$라고 하면

$f'(x)=\{(2x+1)^3\}'(x^2+k)+(2x+1)^3(x^2+k)'$

$\quad=6(2x+1)^2(x^2+k)+2x(2x+1)^3$

$\quad=2(2x+1)^2(5x^2+x+3k)$

이때 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=-1$인 점에서의 접선의 기울기가 -4이므로 $f'(-1)=-4$에서

$2\times(-1)^2\times(4+3k)=-4$

$8+6k=-4$, $6k=-12$

$\therefore k=-2$

이때 $f(x)=(2x+1)^3(x^2-2)$이고, 곡선 $y=f(x)$가 점 $(1, a)$를 지나므로

$a=f(1)=-27$

$\therefore a+k=-27-2=-29$

답 ③

071

점 $(a, 11)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $f(a)=11$에서

$3a^2+ak+3=11$

$\therefore 3a^2+ak=8$ ⋯⋯ ㉠

한편, $f'(x)=6x+k$이고, 점 $(a, 11)$에서의 접선의 기울기가 -10이므로 $f'(a)=-10$에서

$6a+k=-10$

$\therefore k=-6a-10$ ⋯⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $3a^2+a(-6a-10)=8$

$3a^2+10a+8=0$

$(a+2)(3a+4)=0$

$\therefore a=-2$ ($\because$ a는 정수)

$a=-2$를 ㉡에 대입하면 $k=12-10=2$

따라서 $f'(x)=6x+2$이므로

$a+f'(k)=-2+f'(2)=-2+14=12$

답 ③

072

점 $(2, -3)$이 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이므로

$f(2)=-3$에서

$4a+2b+c=-3$ ⋯⋯ ㉠

또한, 점 $(-1, -9)$도 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이므로

$f(-1)=-9$에서

$a-b+c=-9$ ⋯⋯ ㉡

⋯⋯ ❶

㉠−㉡을 하면 $3a+3b=6$

$\therefore a+b=2$ ⋯⋯ ㉢

한편, $f'(x)=2ax+b$이고, 점 $(-1, -9)$에서의 접선의 기울기가 8이므로 $f'(-1)=8$에서

$-2a+b=8$ ⋯⋯ ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=4$

$a=-2$, $b=4$를 ㉡에 대입하면

$-2-4+c=-9$ $\quad\therefore c=-3$ ⋯⋯ ❷

따라서 $f(x)=-2x^2+4x-3$이므로

$f(3)=-18+12-3=-9$ ⋯⋯ ❸

답 -9

채점 기준	비율
❶ 두 점이 함수의 그래프 위의 점임을 이용하여 식을 세울 수 있다.	40 %
❷ a, b, c의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $f(3)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

073

다항식 x^3+ax+b를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라고 하면

$x^3+ax+b=(x-1)^2Q(x)$ ⋯⋯ ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1+a+b=0$

$\therefore a+b=-1$ ⋯⋯ ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$3x^2+a=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)$

위 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$3+a=0 \qquad \therefore a=-3$

$a=-3$을 ㉡에 대입하면

$-3+b=-1 \qquad \therefore b=2$

$\therefore ab=-3\times2=-6$

답 ①

| 다른 풀이 |

$f(x)=x^3+ax+b$라고 하면 $f(x)$가 $(x-1)^2$으로 나누어떨어지므로

$f(1)=0,\ f'(1)=0$

$f(1)=0$에서 $1+a+b=0$

$\therefore a+b=-1$ ⋯⋯ ㉠

한편, $f(x)=x^3+ax+b$에서 $f'(x)=3x^2+a$이므로

$f'(1)=0$에서

$3+a=0 \qquad \therefore a=-3$

$a=-3$을 ㉠에 대입하면

$-3+b=-1 \qquad \therefore b=2$

$\therefore ab=-3\times2=-6$

참고

두 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)=(x-a)^2g(x)$이면

➡ $f(x)$는 $(x-a)^2$으로 나누어떨어진다.

➡ $f'(x)$는 $x-a$로 나누어떨어진다.

➡ $f(a)=0,\ f'(a)=0$

074

다항식 $x^{10}+5x^2+1$을 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하고, 나머지 $R(x)$를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라고 하면

$x^{10}+5x^2+1=(x+1)^2Q(x)+R(x)$에서

$x^{10}+5x^2+1=(x+1)^2Q(x)+ax+b$ ⋯⋯ ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$7=-a+b$ ⋯⋯ ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$10x^9+10x=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)+a$

위 식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$a=-20$

$a=-20$을 ㉡에 대입하면

$7=20+b \qquad \therefore b=-13$

따라서 $R(x)=-20x-13$이므로

$R(2)=-40-13=-53$

답 -53

참고

다항식을 n차식으로 나누었을 때의 나머지는 $(n-1)$차 이하이다.

실력을 높이는 연습 문제

본문 054쪽

01

x의 값이 0에서 3까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=\frac{4-1}{3}=1$$

x의 값이 -4에서 a까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\begin{aligned}\frac{f(a)-f(-4)}{a-(-4)}&=\frac{(-a^2+4a+1)-(-31)}{a+4}\\&=\frac{-a^2+4a+32}{a+4}\\&=\frac{-(a+4)(a-8)}{a+4}\\&=-a+8\end{aligned}$$

이때 $1=-a+8$이므로 $a=7$

답 ⑤

02

x의 값이 0에서 2까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{(8+2a)-0}{2}=4+a$$

이때 $4+a=7$이므로 $a=3$

따라서 $f(x)=x^3+3x$이므로

$f(1)=1+3=4$

답 ④

03

x의 값이 a에서 1까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(1)-f(a)}{1-a}=\frac{5-(-a^2+2a+4)}{1-a}=\frac{(a-1)^2}{-(a-1)}=-a+1$$

함수 $f(x)$의 $x=2$에서의 미분계수는

$$\begin{aligned}f'(2)&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\{-(2+\Delta x)^2+2(2+\Delta x)+4\}-4}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{-(\Delta x)^2-2\Delta x}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to0}(-\Delta x-2)=-2\end{aligned}$$

이때 $-a+1=-2$이므로 $a=3$

답 ②

| 다른 풀이 |

함수 $f(x)$의 $x=2$에서의 미분계수는

$$\begin{aligned}f'(2)&=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\\&=\lim_{x\to2}\frac{(-x^2+2x+4)-4}{x-2}\\&=\lim_{x\to2}\frac{-x(x-2)}{x-2}\\&=\lim_{x\to2}(-x)=-2\end{aligned}$$

04

$f(x)=2x^2+x+3$이라고 하면 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, 3)$에서의 접선의 기울기는 함수 $f(x)$의 미분계수 $f'(0)$과 같으므로

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{2(\Delta x)^2+\Delta x+3\}-3}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(\Delta x)^2+\Delta x}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(2\Delta x+1)=1$$

답 1

참고

미분법의 공식을 이용하여 다음과 같이 구할 수도 있다.

➡ $f'(x)=4x+1$이므로 $f'(0)=1$

05

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+4\Delta x)-f(1+2\Delta x)}{3\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{f(1+4\Delta x)-f(1)\}-\{f(1+2\Delta x)-f(1)\}}{3\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+4\Delta x)-f(1)}{4\Delta x}\times\frac{4}{3}-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+2\Delta x)-f(1)}{2\Delta x}\times\frac{2}{3}$$
$$=\frac{4}{3}f'(1)-\frac{2}{3}f'(1)$$
$$=\frac{2}{3}f'(1)=\frac{2}{3}\times 6=4$$

답 ④

06

$x^2=t$로 놓으면 $x\longrightarrow -2$일 때 $t\longrightarrow 4$이므로 ← ㉠

$$\lim_{x\to -2}\frac{f(x^2)-f(4)}{f(x)-f(-2)}$$

$x^2-4=x^2-2^2=x^2-(-2)^2$

$$=\lim_{x\to -2}\left\{\frac{f(x^2)-f(4)}{x^2-4}\times\frac{x^2-4}{f(x)-f(-2)}\right\}$$
$$=\lim_{x\to -2}\left[\frac{f(x^2)-f(4)}{x^2-4}\times\frac{x-(-2)}{f(x)-f(-2)}\times\{x+(-2)\}\right]$$
$$=\lim_{x\to -2}\frac{f(x^2)-f(4)}{x^2-4}\times\lim_{x\to -2}\frac{x-(-2)}{f(x)-f(-2)}\times\lim_{x\to -2}\{x+(-2)\}$$
$$=\underbrace{\lim_{t\to 4}\frac{f(t)-f(4)}{t-4}}_{㉠}\times\lim_{x\to -2}\frac{1}{\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}}\times\lim_{x\to -2}\{x+(-2)\}$$
$$=f'(4)\times\frac{1}{f'(-2)}\times(-4)$$
$$=6\times\left(-\frac{1}{3}\right)\times(-4)=8$$

답 8

07

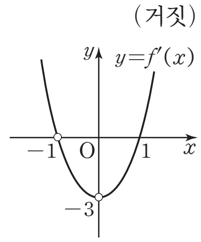
ㄱ. 함수 $f(x)$의 불연속인 점은 $x=-1$, $x=0$의 2개이다. (참)

ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이므로 미분가능하지 않다. (거짓)

ㄷ. $f'(x)=\begin{cases}3x^2-3 & (x<-1 \text{ 또는 } x>0)\\ 3x^2-3 & (-1<x<0)\end{cases}$

이므로

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}(3x^2-3)$$
$$=-3 \text{ (참)}$$



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

08

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로 $x=2$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 2-}f(x)=\lim_{x\to 2+}f(x)=f(2)$에서

$2-a=4+2b+a$

$\therefore b=-a-1$ ········· ㉠

또, $f'(2)$의 값이 존재하므로

$x=2$에서 미분가능 ➡ $f'(2)$의 값 존재

$$\lim_{x\to 2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2-}\frac{x-a-(2-a)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2-}\frac{x-2}{x-2}$$
$$=1$$
$$\lim_{x\to 2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2+}\frac{x^2+bx+a-(2-a)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2+}\frac{x^2-(a+1)x+2(a-1)}{x-2}\ (\because ㉠)$$
$$=\lim_{x\to 2+}\frac{(x-2)\{x-(a-1)\}}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2+}\{x-(a-1)\}$$
$$=3-a$$

에서 $1=3-a$ $\quad\therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $b=-3$

따라서 $f(x)=\begin{cases}x-2 & (x\le 2)\\ x^2-3x+2 & (x>2)\end{cases}$이므로

$f(2)=2-2=0$

답 ③

09

문제 접근하기

절댓값 기호가 나오면 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 기준으로 구간을 나누어 $f(x)$를 구한다.

$f(x)=|x-1|(x+a)=\begin{cases}-(x-1)(x+a) & (x<1)\\ (x-1)(x+a) & (x\ge 1)\end{cases}$에 대하여

$f'(1)$의 값이 존재하므로

$x=1$에서 미분가능 ➡ $f'(1)$의 값 존재

$$\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{-(x-1)(x+a)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1-}\{-(x+a)\}=-1-a$$
$$\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{(x-1)(x+a)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1+}(x+a)=1+a$$

에서 $-1-a=1+a$, $-2a=2$

$\therefore a=-1$

답 ②

10

$f(2)=0$이므로 $4a+2b+c=0$ ········· ㉠

$f'(x)=2ax+b$이므로

$f'(-2)=9$에서 $-4a+b=9$ ········· ㉡

$f'(1)=3$에서 $2a+b=3$ ········· ㉢

ⓛ, ⓒ을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=5$

$a=-1$, $b=5$를 ㉠에 대입하면

$-4+10+c=0 \qquad \therefore c=-6$

따라서 $f(x)=-x^2+5x-6$이므로

$f(1)=-1+5-6=-2$

답 ②

11

$f(x)=3x^2-xf'(1)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=6x-f'(1)$

위 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f'(1)=6-f'(1)$

$2f'(1)=6 \qquad \therefore f'(1)=3$

따라서 $f(x)=3x^2-3x$이므로 $f(2)=12-6=6$

$f'(x)=6x-3$이므로 $f'(2)=12-3=9$

$\therefore f(2)+f'(2)=6+9=15$

답 15

12

$$\begin{aligned} f'(x)&=\{(x^2+2x)^5\}'=5(x^2+2x)^4(x^2+2x)' \\ &=5(x^2+2x)^4(2x+2) \\ &=10(x+1)(x^2+2x)^4 \end{aligned}$$

$\therefore f'(1)=10\times2\times3^4=1620$

답 ③

13

$g(x)=(x^2-2x)f(x)$에서

$$\begin{aligned} g'(x)&=(x^2-2x)'f(x)+(x^2-2x)f'(x) \\ &=(2x-2)f(x)+(x^2-2x)f'(x) \end{aligned}$$

$g'(0)=-2f(0)$, $g'(2)=2f(2)$이므로

$g'(0)+g'(2)=16$에서

$-2f(0)+2f(2)=16$

$2\{f(2)-f(0)\}=16$

$\therefore f(2)-f(0)=8$

답 ②

14

$$\begin{aligned} &f'(x) \\ &=(x-1)'(x-2)(x-3)\cdots(x-10) \\ &\qquad +(x-1)(x-2)'(x-3)\cdots(x-10) \\ &\qquad +\cdots+(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-10)' \\ &=(x-2)(x-3)\cdots(x-10)+(x-1)(x-3)\cdots(x-10) \\ &\qquad +\cdots+(x-1)(x-2)\cdots(x-9) \end{aligned}$$

이므로

$f'(1)=(-1)\times(-2)\times\cdots\times(-9)$

$f'(2)=1\times(-1)\times(-2)\times\cdots\times(-8)$

$$\therefore \frac{f'(1)}{f'(2)}=\frac{(-1)\times(-2)\times\cdots\times(-9)}{1\times(-1)\times(-2)\times\cdots\times(-8)}=\frac{-9}{1}=-9$$

답 ①

15

$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)-3}{x-1}=8$에서 $x\longrightarrow1$일 때 극한값이 존재하고

(분모) $\longrightarrow$ 0이므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이어야 한다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to1}\{f(x)-3\}=0$이므로

$f(1)-3=0 \qquad \therefore f(1)=3$

$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)-3}{x-1}=8$에서 $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=8$

$\therefore f'(1)=8$

$g(x)=xf(x)$에서 $g'(x)=f(x)+xf'(x)$

$\therefore g'(1)=f(1)+f'(1)=3+8=11$

답 ④

16

$f(x)=x^3-3x^2+x$에서

$f'(x)=3x^2-6x+1$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3)}{2h}&=\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}\times\frac{1}{2} \\ &=\frac{1}{2}f'(3) \\ &=\frac{1}{2}\times10=5 \end{aligned}$$

답 ③

17

$f(x)=x^{10}-2x$라고 하면 $f(1)=-1$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{x^{10}-2x+1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$$

이때 $f'(x)=10x^9-2$이므로

$f'(1)=10-2=8$

답 ⑤

18

$f(-1)=1$이므로 $-1-a+b=1$

$\therefore -a+b=2$ ········ ㉠

$\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x^2-1}=-\frac{7}{2}$에서

$$\lim_{x\to-1}\left\{\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}\times\frac{1}{x+(-1)}\right\}=-\frac{7}{2}$$

$-\frac{1}{2}f'(-1)=-\frac{7}{2}$

$\therefore f'(-1)=7$ ········ ⓛ

$f(x)=x^3+ax+b$에서

$f'(x)=3x^2+a$

이때 ⓛ에서 $f'(-1)=7$이므로

$3+a=7 \qquad \therefore a=4$

$a=4$를 ㉠에 대입하면

$-4+b=2 \qquad \therefore b=6$

따라서 $f(x)=x^3+4x+6$이므로

$f(1)=1+4+6=11$

답 ④

19

x의 값이 -1에서 k까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(k)-f(-1)}{k-(-1)}=\frac{(k^2+ak)-(1-a)}{k+1}$$
$$=\frac{k^2+ak+a-1}{k+1} \quad \cdots\cdots ㉠$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=2$인 점에서의 접선의 기울기는

$f'(x)=2x+a$에서

$f'(2)=a+4 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡에서 $\frac{k^2+ak+a-1}{k+1}=a+4$

$\frac{(k^2-1)+a(k+1)}{k+1}=a+4$, $\frac{(k+1)(k-1)+a(k+1)}{k+1}=a+4$

이때 $k\neq-1$이므로 $k-1+a=a+4$

$\therefore k=5$

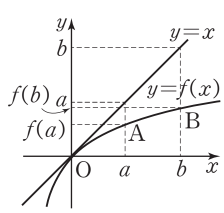
답 5

20

문제 접근하기

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기는 $f'(a)$이고, 곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록할 때 $a<b$이면 $f'(a)>f'(b)$임을 이용한다.

$\mathrm{A}(a,\ f(a))$, $\mathrm{B}(b,\ f(b))$로 놓자.



① $f(a)<f(b)$

② (직선 OA의 기울기)$>$(직선 OB의 기울기)이므로

$\frac{f(a)}{a}>\frac{f(b)}{b}$

③ (직선 AB의 기울기)$<$(직선 $y=x$의 기울기)이므로

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<1 \qquad \therefore f(b)-f(a)<b-a$

④ (점 A에서의 접선의 기울기)$<$(직선 $y=x$의 기울기)이므로

$f'(a)<1$

⑤ (점 A에서의 접선의 기울기)$>$(점 B에서의 접선의 기울기)이므로

$f'(a)>f'(b)$

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

풍쌤 개념 CHECK

직선의 기울기_中 수학 2

직선이 y축에 가까울수록 직선의 기울기의 절댓값은 크다.

21

삼차함수 $f(x)$가 $f(a)=0$, $f'(a)=0$을 만족시키므로 함수 $f(x)$는 $(x-a)^2$을 인수로 갖고, $f(b)=0$을 만족시키므로 $x-b$도 인수로 갖는다.

즉, 삼차함수 $f(x)$를 $f(x)=k(x-a)^2(x-b)$ $(k\neq0)$라고 하면

$f'(x)=k\{(x-a)^2\}'(x-b)+k(x-a)^2(x-b)'$
$\qquad=2k(x-a)(x-b)+k(x-a)^2$
$\qquad=k(x-a)(3x-a-2b)$

이때 $f'(c)=0$이므로

$k(c-a)(3c-a-2b)=0$

$\therefore c-a=0$ 또는 $3c-a-2b=0$ $(\because k\neq0)$

이때 a, b, c는 서로 다른 실수이므로

$3c-a-2b=0 \qquad \therefore c=\frac{a+2b}{3}$

답 ④

22

$f(x)=x^6+6x+a$라고 하면 $f(x)$가 $(x+k)^2$으로 나누어떨어지므로

$f(-k)=0$, $f'(-k)=0$

$f(-k)=0$에서 $k^6-6k+a=0 \quad \cdots\cdots ㉠$

한편, $f(x)=x^6+6x+a$에서 $f'(x)=6x^5+6$이므로

$f'(-k)=0$에서 $-6k^5+6=0$

$-6k^5=-6$, $k^5=1$

$\therefore k=1$ $(\because k$는 정수$)$

$k=1$을 ㉠에 대입하면

$1-6+a=0 \qquad \therefore a=5$

$\therefore ak=5\times1=5$

답 ②

23

함수 $f(x)$를 $(x-4)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하고, 나머지 $R(x)$를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라고 하면

$f(x)=(x-4)^2Q(x)+ax+b \quad \cdots\cdots ㉠$

다항함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(4,\ -4)$를 지나므로

$f(4)=-4$에서

$4a+b=-4 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠에서 $f'(x)=2(x-4)Q(x)+(x-4)^2Q'(x)+a$이고,

점 $(4,\ -4)$에서의 접선의 기울기가 3이므로

$f'(4)=3$에서 $a=3$

$a=3$을 ㉡에 대입하면

$12+b=-4 \qquad \therefore b=-16$

따라서 $R(x)=3x-16$이므로

$R(5)=15-16=-1$

답 ②

04 도함수의 활용 (1)

기본을 다지는 유형

본문 059쪽

001

(1) $f(x)=-2x^2$이라고 하면 $f'(x)=-4x$
따라서 곡선 위의 $x=2$인 점에서의 접선의 기울기는
$f'(2)=-4\times2=-8$

(2) $f(x)=x^2+3x$라고 하면 $f'(x)=2x+3$
따라서 곡선 위의 $x=2$인 점에서의 접선의 기울기는
$f'(2)=2\times2+3=7$

(3) $f(x)=x^3+3x^2$이라고 하면 $f'(x)=3x^2+6x$
따라서 곡선 위의 $x=2$인 점에서의 접선의 기울기는
$f'(2)=3\times2^2+6\times2=24$

답 (1) -8 (2) 7 (3) 24

002

(1) $f(x)=3x^2+2x-4$라고 하면 $f'(x)=6x+2$
따라서 점 $(1, 1)$에서의 접선의 기울기는
$f'(1)=6\times1+2=8$

(2) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-9x$라고 하면 $f'(x)=x^2-9$
따라서 점 $(-3, 18)$에서의 접선의 기울기는
$f'(-3)=(-3)^2-9=0$

답 (1) 8 (2) 0

참고
(2)에서 기울기가 0인 접선은 x축에 평행한 직선이다.

003

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1-h)-f(1)}{2h}=\lim_{h\to0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}\times\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$=-\frac{1}{2}f'(1)$$

이때 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선의 기울기가 4이므로
$f'(1)=4$
따라서 구하는 값은
$-\frac{1}{2}f'(1)=-\frac{1}{2}\times4=-2$

답 ③

004

$f(x)=x^4-4x^3+6x^2+4$에서 $f'(x)=4x^3-12x^2+12x$
점 (a, b)가 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이므로 $f(a)=b$에서
$a^4-4a^3+6a^2+4=b$ ……… ㉠
점 (a, b)에서의 접선의 기울기가 4이므로 $f'(a)=4$에서
$4a^3-12a^2+12a=4$
$4a^3-12a^2+12a-4=0$, $4(a-1)^3=0$
$\therefore a=1$
$a=1$을 ㉠에 대입하면 $b=1-4+6+4=7$
$\therefore a^2+b^2=1^2+7^2=50$

답 50

005

$f(x)=ax^3+bx^2+cx$라고 하면 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$
두 점 $(2, 12)$, $(4, 0)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로
$f(2)=12$, $f(4)=0$에서
$8a+4b+2c=12$, $64a+16b+4c=0$
$\therefore 4a+2b+c=6$, $16a+4b+c=0$
위 두 식에서 c를 소거하여 정리하면
$6a+b=-3$ ……… ㉠
두 점 $(2, 12)$, $(4, 0)$에서의 접선이 서로 평행하므로 접선의 기울기가 서로 같다.
즉, $f'(2)=f'(4)$에서
$12a+4b+c=48a+8b+c$
$36a+4b=0$
$\therefore 9a+b=0$ ……… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-9$
$16a+4b+c=0$에 $a=1$, $b=-9$를 대입하면
$16-36+c=0$　　$\therefore c=20$
$\therefore ab+c=1\times(-9)+20=11$

답 ③

006

(1) $f(x)=-x^3+2x$라고 하면 $f'(x)=-3x^2+2$
따라서 점 $(1, 1)$에서의 접선의 기울기는
$f'(1)=-3+2=-1$

(2) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 1)$에서의 접선의 기울기가 -1이므로 접선의 방정식은
$y-1=-(x-1)$
$\therefore y=-x+2$

답 (1) -1 (2) $y=-x+2$

007

$f(x)=(x^2-1)(x+2)$라고 하면
$f'(x)=(x^2-1)'(x+2)+(x^2-1)(x+2)'$
$=2x(x+2)+x^2-1$
$=3x^2+4x-1$
따라서 점 $(0, -2)$에서의 접선의 기울기는
$f'(0)=-1$
이므로 접선의 방정식은
$y-(-2)=-x$
$\therefore y=-x-2$

답 ①

008

$f(x)=x^4+2x^3+x+2$라고 하면 $f'(x)=4x^3+6x^2+1$

곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=1$인 점에서의 접선의 기울기는
$f'(1)=4+6+1=11$
이고, $f(1)=1+2+1+2=6$
점 $(1, 6)$에서의 접선의 방정식은
$y-6=11(x-1)$
$\therefore y=11x-5$
이때 이 직선이 점 $(2, k)$를 지나므로
$k=22-5=17$

답 ⑤

009

$f(x)=x^3-4x^2+x+2$라고 하면 $f'(x)=3x^2-8x+1$
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 0)$에서의 접선 l의 기울기는
$f'(1)=3-8+1=-4$
이므로 접선 l의 방정식은
$y=-4(x-1)$
$\therefore y=-4x+4$ ········ ㉠
또, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, -4)$에서의 접선 m의 기울기는
$f'(-1)=3+8+1=12$
이므로 접선 m의 방정식은
$y-(-4)=12\{x-(-1)\}$
$\therefore y=12x+8$ ········ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=-\frac{1}{4}$, $y=5$
따라서 두 직선 l, m의 교점의 좌표는 $\left(-\frac{1}{4}, 5\right)$이다.

답 $\left(-\frac{1}{4}, 5\right)$

010

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, f(0))$에서의 접선의 기울기는 $f'(0)$이므로 접선의 방정식은
$y-f(0)=f'(0)(x-0)$
$\therefore y=f'(0)x+f(0)$
이때 접선의 방정식이 $y=3x-1$이므로
$f'(0)=3$, $f(0)=-1$
$g(x)=(x+2)f(x)$에서
$g'(x)=f(x)+(x+2)f'(x)$
$\therefore g'(0)=f(0)+2f'(0)=-1+2\times3=5$

답 ①

011

$f(x)=x^3+ax+b$라고 하면 $f'(x)=3x^2+a$
점 $(-2, -2)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로
$f(-2)=-2$에서 $-8-2a+b=-2$
$\therefore -2a+b=6$ ········ ㉠
점 $(-2, -2)$에서의 접선의 기울기가 7이므로
$f'(-2)=7$에서 $12+a=7$ $\quad\therefore a=-5$
$a=-5$를 ㉠에 대입하면
$10+b=6$ $\quad\therefore b=-4$
$\therefore a-b=-5-(-4)=-1$

답 ②

012

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2$이라고 하면
$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx$
점 $(-1, 2)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로
$f(-1)=2$에서 $1-a+b=2$
$\therefore -a+b=1$ ········ ㉠
········ ❶
점 $(-1, 2)$에서의 접선 $y=2x+c$의 기울기가 2이므로
$f'(-1)=2$에서 $-4+3a-2b=2$
$\therefore 3a-2b=6$ ········ ㉡
········ ❷
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=8$, $b=9$
한편, 접선 $y=2x+c$가 점 $(-1, 2)$를 지나므로
$2=-2+c$ $\quad\therefore c=4$
$\therefore a+b-c=8+9-4=13$ ········ ❸

답 13

채점 기준	비율
❶ 곡선이 점 $(-1, 2)$를 지남을 이용하여 a, b에 대한 식을 세울 수 있다.	30 %
❷ 점 $(-1, 2)$에서의 접선의 기울기를 이용하여 a, b에 대한 식을 세울 수 있다.	40 %
❸ $a+b-c$의 값을 구할 수 있다.	30 %

013

$f(x)=x^3-10$이라고 하면 $f'(x)=3x^2$
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(-2, -18)$에서의 접선의 기울기는
$f'(-2)=12$
이므로 접선의 방정식은
$y-(-18)=12\{x-(-2)\}$
$\therefore y=12x+6$ ········ ㉠
$g(x)=x^3+k$라고 하면 $g'(x)=3x^2$
점 Q의 좌표를 (a, a^3+k)라고 하면 곡선 $y=x^3+k$ 위의 점 Q에서의 접선의 기울기는
$g'(a)=3a^2$
이므로 접선의 방정식은
$y-(a^3+k)=3a^2(x-a)$
$\therefore y=3a^2x-2a^3+k$ ········ ㉡
㉠, ㉡이 일치하므로 $3a^2=12$, $-2a^3+k=6$
$3a^2=12$에서 $a^2=4$
$\therefore a=-2$ 또는 $a=2$
$-2a^3+k=6$에서
$a=-2$일 때, $16+k=6$ $\quad\therefore k=-10$
$a=2$일 때, $-16+k=6$ $\quad\therefore k=22$
$k>0$이므로 $k=22$

답 22

014

(1) $f(x)=x^3+2x$라고 하면 $f'(x)=3x^2+2$
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, -3)$에서의 접선 l의 기울기는
$f'(-1)=3+2=5$

(2) 접선 l에 수직인 직선 m의 기울기를 k라고 하면

$5k=-1 \qquad \therefore k=-\frac{1}{5}$

따라서 직선 m의 기울기는 $-\frac{1}{5}$이다.

(3) 점 $(-1, 1)$을 지나고, 기울기가 $-\frac{1}{5}$인 직선의 방정식은

$y-1=-\frac{1}{5}\{x-(-1)\}$

$\therefore y=-\frac{1}{5}x+\frac{4}{5}$

답 (1) 5 (2) $-\frac{1}{5}$ (3) $y=-\frac{1}{5}x+\frac{4}{5}$

풍쌤 개념 CHECK

두 직선의 수직 조건_高 공통수학 2

두 직선 $y=ax+b$, $y=cx+d$가 서로 수직이면 두 직선의 기울기의 곱은 -1이다. 즉, $ac=-1$이다.

015

$f(x)=x^3+ax^2+b$라고 하면 $f'(x)=3x^2+2ax$

점 $(-2, -6)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(-2)=-6$에서 $-8+4a+b=-6$

$\therefore 4a+b=2$ ⋯⋯ ㉠

접선과 수직인 직선의 기울기가 $-\frac{1}{4}$이므로 접선의 기울기는 4이다.

서로 수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1

즉, 점 $(-2, -6)$에서의 접선의 기울기가 4이므로

$f'(-2)=4$에서 $12-4a=4$

$-4a=-8 \qquad \therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면

$8+b=2 \qquad \therefore b=-6$

$\therefore \frac{b}{a}=\frac{-6}{2}=-3$

답 ①

016

$f(x)=2x^3-4x^2+3x$라고 하면 $f'(x)=6x^2-8x+3$

곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=1$인 점 P에서의 접선 l의 기울기는

$f'(1)=6-8+3=1$

이므로 접선 l에 수직인 직선 m의 기울기는 -1이다.

(l의 기울기)$\times$(m의 기울기)$=-1$

이때 $f(1)=2-4+3=1$이므로 점 P의 좌표는 $(1, 1)$이고, 점 P를 지나고 기울기가 -1인 직선 m의 방정식은

$y-1=-(x-1)$

$\therefore y=-x+2$

따라서 직선 m의 y절편은 2이다. → y절편은 $x=0$일 때의 y의 값이다.

답 ④

017

$f(x)=ax^3-3ax$라고 하면 $f'(x)=3ax^2-3a$

곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=0$인 점에서의 접선의 기울기는

$f'(0)=-3a$

곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=2$인 점에서의 접선의 기울기는

$f'(2)=12a-3a=9a$

이때 두 접선이 서로 수직이므로

$f'(0)f'(2)=-1$에서 $-3a\times 9a=-1$

$-27a^2=-1$, $a^2=\frac{1}{27}$

$\therefore a=\frac{\sqrt{3}}{9}$ ($\because a>0$)

답 ①

018

$f(x)=x(x-4)(x-a)$에서

$f'(x)=(x-4)(x-a)+x(x-a)+x(x-4)$

$\quad =3x^2-2(a+4)x+4a$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, 0)$에서의 접선의 기울기는

$f'(0)=4a$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(4, 0)$에서의 접선의 기울기는

$f'(4)=-4a+16$

이때 두 접선이 서로 수직이므로

$f'(0)f'(4)=-1$에서 $4a(-4a+16)=-1$

$\therefore 16a^2-64a-1=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 a의 값의 합은 $-\frac{-64}{16}=4$이다.

답 4

참고

이차방정식 $16a^2-64a-1=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-32)^2-16\times(-1)=1040>0$

이므로 이차방정식 $16a^2-64a-1=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

019

$f(x)=x^3-2x+7$이라고 하면 $f'(x)=3x^2-2$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P(1, 6)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=3-2=1$

이므로 접선의 방정식은

$y-6=x-1 \qquad \therefore y=x+5$

곡선 $y=x^3-2x+7$과 직선 $y=x+5$가 만나는 점의 x좌표는

$x^3-2x+7=x+5$에서

$x^3-3x+2=0$, $(x+2)(x-1)^2=0$

$\therefore x=-2$ ($\because x\neq 1$) 점 P와 다른 점이므로

이때 $f(-2)=-8+4+7=3$이므로 다시 만나는 점 Q의 좌표는 $(-2, 3)$이다.

$\therefore \overline{PQ}=\sqrt{(-2-1)^2+(3-6)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

답 $3\sqrt{2}$

풍쌤 개념 CHECK

좌표평면 위의 두 점 사이의 거리_高 공통수학 2

두 점 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ 사이의 거리는

$\overline{PQ}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

020

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+b$

두 점 $(-1, 1)$, $(2, 4)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(-1)=1$에서 $-1+a-b+c=1$

$\therefore a-b+c=2$ ······ ㉠

$f(2)=4$에서 $8+4a+2b+c=4$

$\therefore 4a+2b+c=-4$ ······ ㉡

㉡$-$㉠을 하면

$3a+3b=-6 \qquad \therefore a+b=-2$ ······ ㉢

······ ❶

두 점 $(-1,\ 1)$, $(2,\ 4)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-1=\dfrac{4-1}{2-(-1)}\{x-(-1)\}$

$\therefore y=x+2$

즉, 점 $(-1,\ 1)$에서의 접선의 기울기가 1이므로

$f'(-1)=1$에서 $3-2a+b=1$

$\therefore -2a+b=-2$ ······ ㉣

······ ❷

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=-2$

$a=0$, $b=-2$를 ㉠에 대입하여 풀면 $c=0$

따라서 $f(x)=x^3-2x$이므로

$f(1)=1-2=-1$ ······ ❸

답 -1

채점 기준	비율
❶ 두 점이 곡선 위의 점임을 이용하여 a, b에 대한 식을 구할 수 있다.	40 %
❷ 점 $(-1,\ 1)$에서의 접선의 기울기를 이용하여 a, b에 대한 식을 구할 수 있다.	40 %
❸ $f(1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

풍쌤 개념 CHECK

두 점을 지나는 직선의 방정식_高 공통수학 2

두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$를 지나는 직선의 방정식은

① $x_1\neq x_2$일 때, $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

② $x_1=x_2$일 때, $x=x_1$

021

(1) $f(x)=x^3-3x^2+4x+2$라고 하면 $f'(x)=3x^2-6x+4$

접점의 좌표를 $(k,\ k^3-3k^2+4k+2)$라고 하면 직선 $y=x+5$에 평행한 접선의 기울기는 1이므로 $f'(k)=1$에서

$3k^2-6k+4=1$, $3k^2-6k+3=0$

$3(k-1)^2=0 \qquad \therefore k=1$

따라서 접점의 좌표는 $(1,\ 1-3+4+2)$, 즉 $(1,\ 4)$이다.

(2) 점 $(1,\ 4)$를 지나고 기울기가 1인 접선의 방정식은

$y-4=x-1 \qquad \therefore y=x+3$

답 (1) $(1,\ 4)$ (2) $y=x+3$

022

$f(x)=x^2+3x-2$라고 하면 $f'(x)=2x+3$

접점의 좌표를 $(k,\ k^2+3k-2)$라고 하면 직선 $y=x+1$에 평행한 접선의 기울기는 1이므로 $f'(k)=1$에서

직선 $y=x+1$을 평행이동하여도 기울기는 변하지 않는다.

$2k+3=1$, $2k=-2$

$\therefore k=-1$

따라서 접점의 좌표는 $(-1,\ -4)$이고, 이 점을 지나고 기울기가 1인 접선의 방정식은

$y-(-4)=x-(-1)$

$\therefore y=x-3$

답 $y=x-3$

023

$f(x)=x^3-3x+5$라고 하면 $f'(x)=3x^2-3$

접점의 좌표를 $(k,\ k^3-3k+5)$라고 하면 x축에 평행한 접선의 기울기는 0이므로 $f'(k)=0$에서

$3k^2-3=0$

$3k^2=3$, $k^2=1$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=1$

$k=-1$일 때, 접점의 좌표는 $(-1,\ 7)$이므로 접선의 방정식은

$y=7$

$k=1$일 때, 접점의 좌표는 $(1,\ 3)$이므로 접선의 방정식은

$y=3$

따라서 두 접선이 직선 $x=3$과 만나는 두 점의 좌표는 $(3,\ 7)$, $(3,\ 3)$이므로 구하는 y좌표는 3, 7이다.

답 3, 7

풍쌤 개념 CHECK

x축에 평행한 직선의 방정식_高 공통수학 2

점 $(a,\ b)$를 지나고, x축에 평행한 직선의 방정식은 $y=b$이다.

024

$f(x)=2x^3+3x^2+2x+1$이라고 하면 $f'(x)=6x^2+6x+2$

접점의 좌표를 $(k,\ 2k^3+3k^2+2k+1)$이라고 하면 직선 $x+2y-4=0$, 즉 $y=-\dfrac{1}{2}x+2$에 수직인 접선의 기울기는 2이므로 ······ ❶

$f'(k)=2$에서 $6k^2+6k+2=2$

$6k^2+6k=0$, $6k(k+1)=0$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=0$ ······ ❷

(i) $k=-1$일 때

접점의 좌표는 $(-1,\ 0)$이므로 이 점을 지나고 기울기가 2인 접선의 방정식은

$y=2\{x-(-1)\}$

$\therefore y=2x+2$

(ii) $k=0$일 때

접점의 좌표는 $(0,\ 1)$이므로 이 점을 지나고 기울기가 2인 접선의 방정식은

$y-1=2(x-0)$

$\therefore y=2x+1$

(i), (ii)에서 구하는 직선의 방정식은

$y=2x+2$, $y=2x+1$ ······ ❸

답 $y=2x+2$, $y=2x+1$

채점 기준	비율
❶ 접선의 기울기를 구할 수 있다.	30 %
❷ 접점의 x좌표를 구할 수 있다.	20 %
❸ 접선의 방정식을 구할 수 있다.	50 %

025

$f(x)=x^3-x^2+3$이라고 하면 $f'(x)=3x^2-2x$

이때 곡선과 접선은 $x=k$인 점에서 접하고, x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $45°$이므로 기울기가 $\tan 45°=1$이다.

즉, $f'(k)=1$에서 $3k^2-2k=1$

$3k^2-2k-1=0$, $(3k+1)(k-1)=0$

$\therefore k=1$ ($\because k$는 정수)

접점의 좌표는 $(1, 3)$이므로 이 점을 지나고 기울기가 1인 접선의 방정식은

$y-3=x-1 \qquad \therefore y=x+2$

따라서 접선의 y절편은 2이다. ⟶ y절편은 $x=0$일 때의 y의 값이다.

답 ④

026

(1) $f(x)=-x^3+x+3$이라고 하면 $f'(x)=-3x^2+1$

접점의 좌표를 $(k, -k^3+k+3)$이라고 하면 접선의 기울기는

$f'(k)=-3k^2+1$

이므로 접선의 방정식은

$y-(-k^3+k+3)=(-3k^2+1)(x-k)$

$\therefore y=(-3k^2+1)x+2k^3+3$ ……… ㉠

이 접선이 점 $(0, 5)$를 지나므로

$5=2k^3+3$, $2k^3=2$

$k^3=1 \qquad \therefore k=1$ ($\because k$는 실수)

따라서 접점의 좌표는 $(1, 3)$이다.

(2) $f'(1)=-3+1=-2$이므로 접선의 기울기는 -2이다.

(3) $k=1$을 (1)의 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y=(-3+1)x+2+3$

$\therefore y=-2x+5$

답 (1) $(1, 3)$ (2) -2 (3) $y=-2x+5$

027

$f(x)=x^3-6x+7$이라고 하면 $f'(x)=3x^2-6$

접점의 좌표는 (k, k^3-6k+7)이고 접선의 기울기는

$f'(k)=3k^2-6$

이므로 접선의 방정식은

$y-(k^3-6k+7)=(3k^2-6)(x-k)$

$\therefore y=(3k^2-6)x-2k^3+7$

이 접선이 점 $(2, -1)$을 지나므로

$-1=2(3k^2-6)-2k^3+7$, $2k^3-6k^2+4=0$

$2(k-1)(k^2-2k-2)=0$

$\therefore k=1$ ($\because k$는 정수)

답 ①

028

$f(x)=x^3-x+2$라고 하면 $f'(x)=3x^2-1$

접점의 좌표를 (k, k^3-k+2)라고 하면 접선의 기울기는

$f'(k)=3k^2-1$

이므로 접선의 방정식은

$y-(k^3-k+2)=(3k^2-1)(x-k)$

$\therefore y=(3k^2-1)x-2k^3+2$ ……… ㉠

이 접선이 점 $(0, 4)$를 지나므로

$4=-2k^3+2$, $2k^3=-2$

$k^3=-1 \qquad \therefore k=-1$ ($\because k$는 실수)

$k=-1$을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y=2x+4$

$y=2x+4$에 $y=0$을 대입하면 $0=2x+4$에서

$x=-2$

따라서 접선의 x절편은 -2이다.

답 ④

029

$f(x)=x^3-12x+3$이라고 하면 $f'(x)=3x^2-12$

접점의 좌표는 $(k, k^3-12k+3)$이고 접선의 기울기는

$f'(k)=3k^2-12$

이므로 접선의 방정식은

$y-(k^3-12k+3)=(3k^2-12)(x-k)$

$\therefore y=(3k^2-12)x-2k^3+3$ ……… ㉠

이 접선이 점 $(-1, 10)$을 지나므로

$10=-(3k^2-12)-2k^3+3$

$2k^3+3k^2-5=0$

$(k-1)(2k^2+5k+5)=0$

$\therefore k=1$ ($\because k$는 정수)

$k=1$을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y=-9x+1$

이 직선이 x축과 점 $\left(\frac{1}{9}, 0\right)$에서 만나고, y축과 점 $(0, 1)$에서 만난다. 따라서 접선과 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{9}\times 1=\frac{1}{18}$

답 ①

030

점 $(0, 16)$을 지나고 기울기가 8인 접선의 방정식은

$y=8x+16$ ……… ㉠

한편, $f(x)=x^3-ax$에서 $f'(x)=3x^2-a$

접점의 좌표를 (k, k^3-ak)라고 하면 접선의 기울기는 $3k^2-a$이므로 접선의 방정식은

$y-(k^3-ak)=(3k^2-a)(x-k)$

$\therefore y=(3k^2-a)x-2k^3$ ……… ㉡

㉠, ㉡이 서로 같으므로

$-2k^3=16$에서 $k^3=-8$

$\therefore k=-2$ ($\because k$는 실수)

$3k^2-a=8$에서 $12-a=8 \qquad \therefore a=4$

따라서 $f(x)=x^3-4x$이므로

$f(a)=f(4)=4^3-4\times 4=48$

답 48

031

(1) $f(2)=g(2)$에서 $4+2a+b=4-3$

$\therefore 2a+b=-3$ ……… ㉠

(2) $f'(x)=2x+a$, $g'(x)=2$이므로 $f'(2)=g'(2)$에서

$4+a=2 \qquad \therefore a=-2$

(3) $a=-2$를 (1)의 ㉠에 대입하면

$-4+b=-3 \qquad \therefore b=1$

$\therefore f(x)=x^2-2x+1$

답 (1) $2a+b=-3$ (2) -2 (3) $f(x)=x^2-2x+1$

참고

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 $x=k$인 점에서 접한다.

➡ 직선은 곡선의 접선이다.

(1) $x=k$인 점에서 곡선과 직선이 만난다.

➡ $f(k)=g(k)$

(2) $x=k$인 점에서의 곡선 $y=f(x)$의 접선의 기울기는 직선 $y=g(x)$의 기울기와 같다.

➡ $f'(k)=g'(k)$

032

$f(x)=2x^3-x$, $g(x)=5x+a$라고 하면

$f'(x)=6x^2-1$, $g'(x)=5$

곡선과 직선이 $x=k$인 점에서 접한다고 하면

$f(k)=g(k)$이므로 $2k^3-k=5k+a$

$\therefore a=2k^3-6k$ ········· ㉠

$f'(k)=g'(k)$이므로 $6k^2-1=5$

$6k^2=6$, $k^2=1$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=1$

$k=-1$을 ㉠에 대입하면 $a=-2+6=4$

$k=1$을 ㉠에 대입하면 $a=2-6=-4$

따라서 모든 실수 a의 값의 곱은

$4\times(-4)=-16$

답 -16

033

$f(x)=x^3-4x+3$, $g(x)=ax-13$이라고 하면

$f'(x)=3x^2-4$, $g'(x)=a$

곡선과 직선이 $x=k$인 점에서 접한다고 하면

$f(k)=g(k)$이므로 $k^3-4k+3=ak-13$

$\therefore k^3-(a+4)k+16=0$ ········· ㉠

$f'(k)=g'(k)$이므로 $3k^2-4=a$ ········· ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $k^3-3k^3+16=0$

$-2k^3+16=0$, $2k^3=16$

$k^3=8 \qquad \therefore k=2$ ($\because$ k는 실수)

$k=2$를 ㉡에 대입하면 $a=12-4=8$

따라서 접선의 기울기가 8이므로 이 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{8}$이다.

답 ②

034

$f(x)=-x^3+x+2$, $g(x)=ax-2a$라고 하면

$f'(x)=-3x^2+1$, $g'(x)=a$

곡선과 직선이 $x=k$인 점에서 접하므로

$f(k)=g(k)$에서 $-k^3+k+2=ak-2a$

$\therefore k^3+(a-1)k-2a-2=0$ ········· ㉠

$f'(k)=g'(k)$에서 $-3k^2+1=a$ ········· ㉡

········· ❶

㉡을 ㉠에 대입하면

$k^3+(-3k^2)k-2(-3k^2+1)-2=0$

$-2k^3+6k^2-4=0$

$-2(k-1)(k^2-2k-2)=0$

$\therefore k=1$ ($\because$ k는 정수)

$k=1$을 ㉡에 대입하면 $a=-3+1=-2$ ········· ❷

$\therefore a^2+k^2=(-2)^2+1^2=5$ ········· ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ 곡선과 직선이 접함을 이용하여 a, k에 대한 식을 세울 수 있다.	50 %
❷ a, k의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ a^2+k^2의 값을 구할 수 있다.	10 %

035

$f(x)=x^3-4x+5$라고 하면 $f'(x)=3x^2-4$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=3-4=-1$

이므로 접선의 방정식은

$y-2=-(x-1)$

$\therefore y=-x+3$

$g(x)=x^4+3x+a$, $h(x)=-x+3$이라고 하면

$g'(x)=4x^3+3$, $h'(x)=-1$

곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=h(x)$가 $x=k$인 점에서 접한다고 하면

$g(k)=h(k)$이므로 $k^4+3k+a=-k+3$

$\therefore a=-k^4-4k+3$ ········· ㉠

$g'(k)=h'(k)$이므로 $4k^3+3=-1$

$4k^3=-4$, $k^3=-1$

$\therefore k=-1$ ($\because$ k는 실수)

$k=-1$을 ㉠에 대입하면

$a=-1+4+3=6$

답 ①

036

(1) $f(2)=g(2)$에서 $16-18=8a+2b$이므로

$8a+2b=-2$

$\therefore 4a+b=-1$ ········· ㉠

(2) $f'(x)=8x-9$, $g'(x)=3ax^2+b$이므로

$f'(2)=g'(2)$에서 $16-9=12a+b$

$\therefore 12a+b=7$ ········· ㉡

(3) ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-5$

$\therefore g(x)=x^3-5x$

답 (1) $4a+b=-1$ (2) $12a+b=7$ (3) $g(x)=x^3-5x$

참고

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=k$인 점에서 공통인 접선을 갖는다.

(1) $x=k$인 점에서 두 곡선이 만난다.

➡ $f(k)=g(k)$

(2) $x=k$인 점에서의 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 기울기가 같다.

➡ $f'(k)=g'(k)$

037

$f(x)=x^3+ax+b$, $g(x)=x^2+4x$라고 하면

$f'(x)=3x^2+a$, $g'(x)=2x+4$

두 곡선이 $x=-1$인 점에서 공통인 접선을 가지면

$f(-1)=g(-1)$이므로 $-1-a+b=1-4$

$\therefore a-b=2$ ⋯⋯ ㉠

$f'(-1)=g'(-1)$이므로 $3+a=-2+4$

$\therefore a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면

$-1-b=2 \qquad \therefore b=-3$

$\therefore ab=-1\times(-3)=3$

답 ④

038

$f(x)=ax^3$, $g(x)=bx^2+c$라고 하면

$f'(x)=3ax^2$, $g'(x)=2bx$

두 곡선이 점 $(2, 8)$에서 공통인 접선을 가지면

$f(2)=g(2)=8$이므로

$f(2)=8$에서 $8a=8 \qquad \therefore a=1$

$g(2)=8$에서 $4b+c=8$ ⋯⋯ ㉠

$f'(2)=g'(2)$이므로 $12a=4b$

$\therefore b=3a=3\ (\because a=1)$

$b=3$을 ㉠에 대입하면

$12+c=8 \qquad \therefore c=-4$

$\therefore abc=1\times3\times(-4)=-12$

답 ①

039

$f(x)=x^3-x+3$, $g(x)=x^2+ax+2$라고 하면

$f'(x)=3x^2-1$, $g'(x)=2x+a$

두 곡선이 $x=k$인 점에서 접한다고 하면

$f(k)=g(k)$이므로 $k^3-k+3=k^2+ak+2$

$\therefore k^3-k^2-(a+1)k+1=0$ ⋯⋯ ㉠

$f'(k)=g'(k)$이므로 $3k^2-1=2k+a$

$\therefore a=3k^2-2k-1$ ⋯⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$k^3-k^2-(3k^2-2k)k+1=0$

$2k^3-k^2-1=0$, $(k-1)(2k^2+k+1)=0$

$\therefore k=1\ (\because 2k^2+k+1>0)$

$k=1$을 ㉡에 대입하면 $a=3-2-1=0$

답 ③

참고

두 곡선이 한 점에서 접한다.

$\Longleftrightarrow$ 두 곡선이 한 점에서 공통인 접선을 갖는다.

040

$f(x)=kx^4-4x^2$에서 $f'(x)=4kx^3-8x$

이때 롤의 정리를 만족시키는 상수가 2이므로

$f'(2)=0$에서 $32k-16=0$, $32k=16$

$\therefore k=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

참고

$f(x)=\frac{1}{2}x^4-4x^2$은 다항함수이므로 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-3, 3]$에서 연속이면서 열린구간 $(-3, 3)$에서 미분가능하고 $f(-3)=f(3)=\frac{9}{2}$이다.

따라서 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-3, 3)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=2x^3-8x$이므로 $f'(c)=0$에서

$2c^3-8c=0$, $2c(c+2)(c-2)=0$

$\therefore c=-2$ 또는 $c=0$ 또는 $c=2$

041

함수 $f(x)=x^3-3x^2+3$은 다항함수이므로 닫힌구간 $[0, 3]$에서 연속이면서 열린구간 $(0, 3)$에서 미분가능하고, $f(0)=f(3)=3$이다.

따라서 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(0, 3)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=3x^2-6x$이므로 $f'(c)=0$에서

$3c^2-6c=0$, $3c(c-2)=0$

$\therefore c=2\ (\because 0<c<3)$

따라서 롤의 정리를 만족시키는 c의 값은 ㄷ이다.

답 ③

042

함수 $f(x)=x^4+x^2-2$는 다항함수이므로 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 연속이면서 열린구간 $(-2, 2)$에서 미분가능하고,

$f(-2)=f(2)=18$이다.

따라서 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-2, 2)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=4x^3+2x$이므로 $f'(c)=0$에서

$4c^3+2c=0$, $2c(2c^2+1)=0$

$\therefore c=0\ (\because 2c^2+1>0)$

답 ③

043

함수 $f(x)=x^2-ax$는 다항함수이므로 닫힌구간 $[0, 4]$에서 연속이면서 열린구간 $(0, 4)$에서 미분가능하다.

이때 롤의 정리를 만족시키려면 $f(0)=f(4)$이어야 하므로

$0=16-4a$, $4a=16 \qquad \therefore a=4$

따라서 $f(x)=x^2-4x$에서 $f'(x)=2x-4$이다.

한편, 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(0, 4)$에 적어도 하나 존재하므로

$f'(c)=2c-4=0$

$2c=4 \qquad \therefore c=2$

$\therefore a-c=4-2=2$

답 ⑤

044

함수 $f(x)=x^2-6x$는 다항함수이므로 닫힌구간 $[a, 2a]$에서 연속이면서 열린구간 $(a, 2a)$에서 미분가능하다.

이때 롤의 정리를 만족시키려면 $f(a)=f(2a)$이어야 하므로

$a^2-6a=4a^2-12a$, $3a^2-6a=0$

$3a(a-2)=0 \qquad \therefore a=2\ (\because a\neq0)$

한편, 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(2, 4)$에 적어도 하나 존재하고, $f'(x)=2x-6$이므로 $f'(c)=0$에서

$2c-6=0 \qquad \therefore c=3$

$\therefore ac=2\times3=6$

답 ④

045

함수 $f(x)=2x^2-x-1$은 다항함수이므로 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 연속이고 열린구간 $(-1, 1)$에서 미분가능하다.

따라서 평균값 정리에 의하여 $\dfrac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(-1, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=4x-1$이므로 $f'(c)=4c-1$

즉, $\dfrac{0-2}{2}=4c-1$이므로 $4c-1=-1$

$4c=0 \qquad \therefore c=0$

답 0

046

함수 $f(x)=x(x-1)(x-2)$는 다항함수이므로 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 연속이고 열린구간 $(-1, 2)$에서 미분가능하다.

따라서 평균값 정리에 의하여 $\dfrac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(-1, 2)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f(x)=x(x-1)(x-2)=x^3-3x^2+2x$에서

$f'(x)=3x^2-6x+2$이므로 $f'(c)=3c^2-6c+2$

즉, $\dfrac{0-(-6)}{3}=3c^2-6c+2$이므로 $3c^2-6c+2=2$

$3c^2-6c=0,\ 3c(c-2)=0$

$\therefore c=0\ (\because -1<c<2)$

답 ②

047

함수 $f(x)=x^3$은 다항함수이므로 닫힌구간 $[0, a]$에서 연속이고 열린구간 $(0, a)$에서 미분가능하다.

이때 $f'(x)=3x^2$이고 닫힌구간 $[0, a]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수가 $\sqrt{3}$이므로

$\dfrac{f(a)-f(0)}{a-0}=f'(\sqrt{3})$

$\dfrac{a^3}{a}=9,\ a^2=9$

$\therefore a=3\ (\because a>\sqrt{3})$

답 ④

048

함수 $f(x)=2x^2-5x$는 다항함수이므로 닫힌구간 $[-1, a]$에서 연속이고 열린구간 $(-1, a)$에서 미분가능하다.

이때 $f'(x)=4x-5$이고 닫힌구간 $[-1, a]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수가 1이므로

$\dfrac{f(a)-f(-1)}{a-(-1)}=f'(1)$

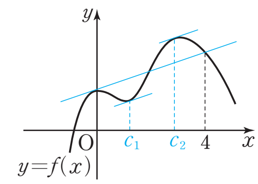
$\dfrac{(2a^2-5a)-7}{a+1}=-1,\ 2a^2-5a-7=-a-1$

$2a^2-4a-6=0,\ 2(a+1)(a-3)=0$

$\therefore a=3\ (\because a>1)$

답 ②

049



닫힌구간 $[0, 4]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c는 두 점 $(0, f(0))$, $(4, f(4))$를 잇는 직선과 평행한 접선을 갖는 점의 x좌표이고, 평행한 접선을 2개 그을 수 있으므로 상수 c의 개수는 2이다.

답 ③

실력을 높이는 연습 문제

본문 069쪽

01

$f(x)=x^3+3x^2+x+5$라고 하면

$f'(x)=3x^2+6x+1=3(x+1)^2-2$

이므로 $f'(x)$는 $x=-1$에서 최솟값 -2를 갖는다.

따라서 접선의 기울기 m의 최솟값은 -2이다.

답 ①

02

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$라고 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

두 점 $(2, 5)$, $(-2, 1)$은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(2)=5$에서 $8+4a+2b+c=5$

$\therefore 4a+2b+c=-3$ ......㉠

$f(-2)=1$에서 $-8+4a-2b+c=1$

$\therefore 4a-2b+c=9$ ......㉡

㉠$-$㉡을 하면

$4b=-12 \qquad \therefore b=-3$

$f'(x)=3x^2+2ax-3$이고, 두 점 $(2, 5)$, $(-2, 1)$에서의 두 접선이 서로 평행하므로 두 접선의 기울기는 서로 같다. 즉,

$f'(2), f'(-2)$

$f'(2)=f'(-2)$

$12+4a-3=12-4a-3,\ 8a=0$

$\therefore a=0$

$a=0,\ b=-3$을 ㉠에 대입하면

$-6+c=-3 \qquad \therefore c=3$

$\therefore a-b+c=0-(-3)+3=6$

답 ④

03

$f(x)=\dfrac{2}{3}x^3-2x^2$이라고 하면 $f'(x)=2x^2-4x$

점 $(3, 0)$에서의 접선의 기울기는

$f'(3)=18-12=6$

이므로 접선의 방정식은

$y-0=6(x-3) \qquad \therefore y=6x-18$

따라서 직선 $y=6x-18$이 지나는 점의 좌표는 ⑤ $(2, -6)$이다.

답 ⑤

참고

⑤에서 $x=2$, $y=-6$을 $y=6x-18$에 대입하면 $-6=12-18$로 등식이 성립하므로 점 $(2, -6)$이 접선이 지나는 점의 좌표임을 알 수 있다.

04

$f(x)=x^3-x^2+x-2$라고 하면 $f'(x)=3x^2-2x+1$

점 $(1, -1)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=3-2+1=2$

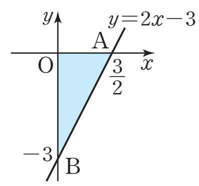
이므로 접선의 방정식은

$y-(-1)=2(x-1)$

$\therefore y=2x-3$

따라서 삼각형 AOB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times3=\frac{9}{4}$



답 ②

05

$f(x)=x^3-2x^2+2x+a$에서 $f'(x)=3x^2-4x+2$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=3-4+2=1$

이고, $f(1)=1-2+2+a=a+1$이므로 접선의 방정식은

$y-(a+1)=x-1$

$\therefore y=x+a$

따라서 $\mathrm{P}(-a, 0)$, $\mathrm{Q}(0, a)$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}a$

이때 $\sqrt{2}a=6$이므로 $a=3\sqrt{2}$

답 ③

06

$f(x)=x^3$, $g(x)=ax^2+bx$라고 하면

$f'(x)=3x^2$, $g'(x)=2ax+b$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 모두 점 $(1, 1)$을 지나므로

$f(1)=g(1)$에서 $1=a+b$ ········ ㉠

점 $(1, 1)$에서의 두 접선이 서로 수직이므로

$f'(1)g'(1)=-1$에서 $3(2a+b)=-1$

$6a+3b=-1$ ········ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-\frac{4}{3}$, $b=\frac{7}{3}$

$\therefore 9ab=9\times\left(-\frac{4}{3}\right)\times\frac{7}{3}=-28$

답 -28

07

$f(x)=-3x(x^2-1)=-3x^3+3x$라고 하면

$f'(x)=-9x^2+3$

점 P에서의 접선과 수직인 직선의 기울기가 $-\frac{1}{3}$이므로 접선의 기울기는 3이다.

서로 수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1임을 이용해서 구한다.

이때 $\mathrm{P}(k, f(k))$라고 하면 $f'(k)=3$이므로

$-9k^2+3=3$, $-9k^2=0$

$\therefore k=0$

$\therefore f(k)=f(0)=0$

따라서 점 $\mathrm{P}(0, 0)$을 지나고 기울기가 3인 접선의 방정식은

$y=3x$

즉, $m=3$, $n=0$이므로 $m+n=3+0=3$

답 ④

08

문제 접근하기

곡선 $y=f(x)$ 위의 한 점 $(k, f(k))$에서의 접선의 방정식은 $y=f'(k)(x-k)+f(k)$이고, 곡선 $y=f(x)$와 접선 $y=f'(k)(x-k)+f(k)$의 교점의 x좌표는 방정식 $f(x)=f'(x)(x-k)+f(k)$의 해이다.

$f(x)=x^3+ax$에서 $f'(x)=3x^2+a$

점 $\mathrm{A}(-1, -1-a)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-1)=a+3$

이므로 접선의 방정식은

$y-(-1-a)=(a+3)\{x-(-1)\}$

$\therefore y=(a+3)x+2$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=(a+3)x+2$가 만나는 점의 x좌표는

$x^3+ax=(a+3)x+2$에서

$x^3-3x-2=0$, $(x+1)^2(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

$\therefore \mathrm{B}(2, 2a+8)$

점 B에서의 접선의 기울기는

$f'(2)=a+12$

이므로 접선의 방정식은

$y-(2a+8)=(a+12)(x-2)$

$\therefore y=(a+12)x-16$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=(a+12)x-16$이 만나는 점의 x좌표는

$x^3+ax=(a+12)x-16$에서

$x^3-12x+16=0$, $(x+4)(x-2)^2=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=2$

$\therefore \mathrm{C}(-4, -4a-64)$

따라서 $b=2$, $c=-4$이므로

$$\begin{aligned} f(b)+f(c)&=f(2)+f(-4)\\ &=(2a+8)+(-4a-64)\\ &=-2a-56 \end{aligned}$$

이때 $-2a-56=-80$이므로

$-2a=-24$ $\quad\therefore a=12$

답 ③

09

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-6$이라고 하면 $f'(x)=x^2+2x$

구하는 접선이 직선 $x+3y+21=0$, 즉 $y=-\frac{1}{3}x-7$에 수직이므로 접선의 기울기는 3이다.

서로 수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1임을 이용해서 구한다.

이때 접점의 좌표를 $(k, f(k))$라고 하면

$f'(k)=3$에서 $k^2+2k=3$

$k^2+2k-3=0$, $(k+3)(k-1)=0$

$\therefore k=-3$ 또는 $k=1$

(ⅰ) $k=-3$일 때

$f(k)=f(-3)=\frac{1}{3}\times(-3)^3+(-3)^2-6=-6$

이므로 접점의 좌표는 $(-3,\ -6)$이고, 이 점을 지나고 기울기가 3인 접선의 방정식은

$y-(-6)=3\{x-(-3)\}$

$\therefore\ y=3x+3$

따라서 y절편은 3이다. ⟶ y절편은 $x=0$일 때의 y의 값이다.

(ⅱ) $k=1$일 때

$f(k)=f(1)=\frac{1}{3}\times1^3+1^2-6=-\frac{14}{3}$

이므로 접점의 좌표는 $\left(1,\ -\frac{14}{3}\right)$이고, 이 점을 지나고 기울기가 3인 접선의 방정식은

$y-\left(-\frac{14}{3}\right)=3(x-1)$

$\therefore\ y=3x-\frac{23}{3}$

따라서 y절편은 $-\frac{23}{3}$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 접선의 y절편의 곱은

$3\times\left(-\frac{23}{3}\right)=-23$

답 ②

10

문제 접근하기

점 $(1,\ -1)$을 지나는 접선의 기울기를 먼저 구하고, 평행한 두 직선의 기울기가 같음을 이용해서 다른 곡선에서의 접선의 방정식을 구한다.

$f(x)=x^3-2x$라고 하면 $f'(x)=3x^2-2$

점 $(1,\ -1)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=3-2=1$

$h(x)=x^2+3x$라고 하면 $h'(x)=2x+3$

곡선 $y=h(x)$와 직선 $y=g(x)$의 접점의 좌표를 $(k,\ k^2+3k)$라고 하면 접선의 기울기는

$h'(k)=2k+3$

평행한 두 직선의 기울기는 같으므로

$f'(1)=h'(k)$

$1=2k+3,\ 2k=-2$

$\therefore\ k=-1$

즉, 곡선 $y=h(x)$에서의 접점의 좌표는 $(-1,\ -2)$이다.

접선 $y=g(x)$는 점 $(-1,\ -2)$를 지나고 기울기가 1인 직선이므로

$y-(-2)=x-(-1)$

$\therefore\ y=x-1$

따라서 $g(x)=x-1$이므로

$g(5)=5-1=4$

답 ②

11

$f(x)=x^3-4x+3$이라고 하면 $f'(x)=3x^2-4$

직선 $y=-x+1$이 곡선 $y=f(x)$에 접할 때 그 접점의 좌표를 $(k,\ k^3-4k+3)$이라고 하면 접선의 기울기는 -1이므로

$f'(k)=-1$

$3k^2-4=-1,\ 3k^2=3$

$k^2=1\quad\therefore\ k=-1$ 또는 $k=1$

즉, 접선의 기울기가 -1일 때, 접점의 좌표는 $(-1,\ 6)$, $(1,\ 0)$이고, 이 중에서 점 $(1,\ 0)$만 직선 $y=-x+1$ 위의 점이므로 구하는 접점의 좌표는 $(1,\ 0)$이다.

한편, 접선 $y=-x+1$에 수직인 직선의 기울기는 1이므로

점 $(1,\ 0)$을 지나고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$y=x-1$

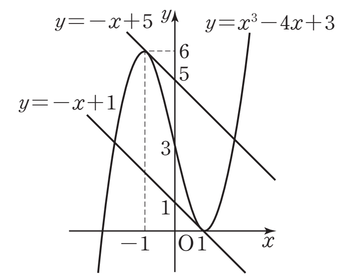
따라서 접선에 수직인 직선의 y절편은 -1이다.

답 ②

참고

오른쪽 그림과 같이 $y=x^3-4x+3$의 그래프에 접하고 기울기가 -1인 직선은 $y=-x+1$, $y=-x+5$로 2개가 있다.

접선이 $y=-x+1$일 때의 접점은 $(1,\ 0)$이고, 접선이 $y=-x+5$일 때의 접점은 $(-1,\ 6)$이므로 접점을 구했을 때 그것이 문제의 조건에 맞는지 확인해야 한다.



12

$f(x)=2x^2+5x+2$라고 하면 $f'(x)=4x+5$

접점의 좌표를 $(k,\ 2k^2+5k+2)$라고 하면 접선의 기울기는

$f'(k)=4k+5$

이므로 접선의 방정식은

$y-(2k^2+5k+2)=(4k+5)(x-k)$

$\therefore\ y=(4k+5)x-2k^2+2$

이 접선이 점 $(2,\ 12)$를 지나므로

$12=2(4k+5)-2k^2+2$

$2k^2-8k=0,\ 2k(k-4)=0$

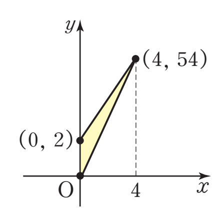
$\therefore\ k=0$ 또는 $k=4$

$k=0$일 때, 접점의 좌표는 $(0,\ 2)$이다.

$k=4$일 때, 접점의 좌표는 $(4,\ 54)$이다.

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2\times4=4$



답 4

13

$f(x)=(x+1)(-x^2-x+a)$, $g(x)=-4x-7$이라고 하면

$f'(x)=(-x^2-x+a)+(x+1)(-2x-1)$

$\quad\quad=-3x^2-4x+a-1$

$g'(x)=-4$

곡선과 직선이 $x=k$인 점에서 접한다고 하면

(ⅰ) $f(k)=g(k)$이므로

$(k+1)(-k^2-k+a)=-4k-7$

$\therefore\ -k^3-2k^2+(a+3)k+a+7=0$ ········ ㉠

(ⅱ) $f'(k)=g'(k)$이므로

$-3k^2-4k+a-1=-4$

$\therefore\ a=3k^2+4k-3$ ········ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$-k^3-2k^2+(3k^2+4k)k+3k^2+4k+4=0$

$2k^3+5k^2+4k+4=0$

$(k+2)(2k^2+k+2)=0$

$\therefore k=-2$ ($\because 2k^2+k+2>0$)

$k=-2$를 ㉡에 대입하면

$a=12-8-3=1$

답 ④

14

$f(x)=x^3+ax$, $g(x)=x^2+a$라고 하면

$f'(x)=3x^2+a$, $g'(x)=2x$

두 곡선이 $x=k$인 점에서 공통인 접선을 가지면

(i) $f(k)=g(k)$이므로 $k^3+ak=k^2+a$

$\quad \therefore k^3-k^2+ak-a=0$ .... ㉠

(ii) $f'(k)=g'(k)$이므로 $3k^2+a=2k$

$\quad \therefore a=-3k^2+2k$ .... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$k^3-k^2+(-3k^2+2k)k-(-3k^2+2k)=0$

$-2k^3+4k^2-2k=0$

$-2k(k-1)^2=0$

$\therefore k=0$ 또는 $k=1$

$k=0$을 ㉡에 대입하면 $a=0$

$k=1$을 ㉡에 대입하면 $a=-1$

이때 $a\neq0$이므로

$a=-1$

답 -1

15

$f(x)=-2x^2+kx$에서

$f'(x)=-4x+k$

이때 롤의 정리를 만족시키는 상수가 5이므로 $f'(5)=0$에서

$-20+k=0 \qquad \therefore k=20$

$\therefore f(x)=-2x^2+20x$

한편, 롤의 정리가 성립하려면 $f(2a)=f(3a)$이므로

$-8a^2+40a=-18a^2+60a$

$10a^2-20a=0$

$10a(a-2)=0$

이때 $a\neq0$이므로

$a=2$

답 $a=2$, $k=20$

16

함수 $f(x)$에서

$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0+}f(x)=f(0)=0$

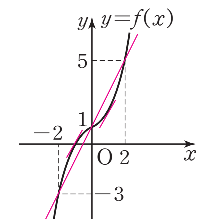
$\lim_{x\to0-}f'(x)=\lim_{x\to0+}f'(x)=0$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이고 미분가능하다.

즉, 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 연속이고 열린구간 $(-2, 2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리를 만족시키는 상수 c가 존재한다.

이때 $f(-2)=-4+1=-3$, $f(2)=4+1=5$이므로 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 상수 c가 평균값 정리를 만족시키면 $x=c$에서의 접선의 기울기는 두 점 $(-2, -3)$, $(2, 5)$를 잇는 직선의 기울기와 같다.

오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 두 점 $(-2, -3)$, $(2, 5)$를 잇는 직선과 평행한 접선은 2개 그을 수 있으므로 상수 c의 개수는 2이다.

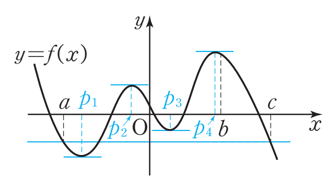


답 2

17

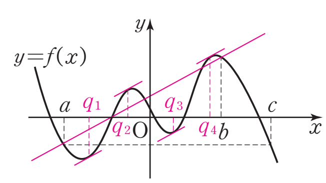
열린구간 (a, c)에서 $f(a)=f(c)$이고, 롤의 정리를 만족시키는 실수 x는 두 점 $(a, f(a))$, $(c, f(c))$를 잇는 직선, 즉 x축과 평행한 접선을 갖는 점의 x좌표이다. 이때 x축에 평행한 접선을 다음 그림과 같이 4개 그을 수 있으므로 실수 x의 개수는 4이다.

$\therefore p=4$



열린구간 (a, b)에서 평균값 정리를 만족시키는 실수 x는 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 잇는 직선과 평행한 접선을 갖는 점의 x좌표이고, 평행한 접선을 다음 그림과 같이 4개 그을 수 있으므로 실수 x의 개수는 4이다.

$\therefore q=4$



$\therefore p+q=4+4=8$

답 8

18

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1, 5]$에서 연속이고 열린구간 $(1, 5)$에서 미분가능하므로 평균값의 정리에 의하여

$\dfrac{f(5)-f(1)}{5-1}=f'(c)$

를 만족시키는 상수 c가 열린구간 $(1, 5)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 조건 (나)에 의하여 $f'(c)\geq5$이므로

$\dfrac{f(5)-f(1)}{5-1}\geq5$

조건 (가)에서 $f(1)=3$이므로

$\dfrac{f(5)-3}{4}\geq5 \qquad \therefore f(5)\geq23$

따라서 $f(5)$의 최솟값은 23이다.

답 ③

05 도함수의 활용 (2)

기본을 다지는 유형

본문 073쪽

001

(1) $0<x_1<x_2$인 임의의 두 양수 x_1, x_2에 대하여

$f(x_1)-f(x_2)=x_1^2-x_2^2=\underline{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}<0$

이므로 $f(x_1)<f(x_2)$ ↳ $x_1+x_2>0$, $x_1-x_2<0$

따라서 함수 $f(x)=x^2$은 구간 $(0, \infty)$에서 증가한다.

(2) $x_1<x_2<-1$인 임의의 두 음수 x_1, x_2에 대하여

$f(x_1)-f(x_2)=(x_1^2+1)-(x_2^2+1)=x_1^2-x_2^2$

$=\underline{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}>0$

이므로 $f(x_1)>f(x_2)$ ↳ $x_1+x_2<0$, $x_1-x_2<0$

따라서 함수 $f(x)=x^2+1$은 구간 $(-\infty, -1)$에서 감소한다.

(3) $x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

$f(x_1)-f(x_2)=x_1^3-x_2^3=\underline{(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)}<0$

이므로 $f(x_1)<f(x_2)$ ↳ $x_1-x_2<0$, $x_1^2+x_1x_2+x_2^2>0$

따라서 함수 $f(x)=x^3$은 구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가한다.

답 (1) 증가 (2) 감소 (3) 증가

002

$f(x)=x^3-3x+1$에서 $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

함수 $f(x)$는 $f'(x)\geq 0$인 구간에서 증가하므로

$3(x+1)(x-1)\geq 0$

$\therefore x\leq -1$ 또는 $x\geq 1$

따라서 함수 $f(x)$가 증가하는 구간이 아닌 것은 ③ $(-1, 1)$이다.

답 ③

003

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2-5x+1$에서

$f'(x)=x^2-4x-5=(x+1)(x-5)$

함수 $f(x)$는 $f'(x)\leq 0$인 구간에서 감소하므로

$(x+1)(x-5)\leq 0$

$\therefore -1\leq x\leq 5$

즉, 함수 $f(x)$가 감소하는 구간은 $[-1, 5]$이므로

$-1\leq a<b\leq 5$

따라서 $b-a$의 최댓값은

$5-(-1)=6$

답 ①

004

$f(x)=-x^3-ax^2+bx+8$에서 $f'(x)=-3x^2-2ax+b$

함수 $f(x)$가 $x=-4$, $x=0$의 좌우에서 증가와 감소가 바뀌므로

$x=-4$, $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀐다.

즉, 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근은 -4, 0이므로 ❶

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-4+0=-\frac{-2a}{-3}$, $-4\times 0=\frac{b}{-3}$

$-4=-\frac{2}{3}a$, $0=-\frac{b}{3}$

$\therefore a=6$, $b=0$ ❷

$\therefore a^2+b^2=6^2+0^2=36$ ❸

답 36

채점 기준	비율
❶ 방정식 $f'(x)=0$의 두 근을 알 수 있다.	40 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ a^2+b^2의 값을 구할 수 있다.	20 %

005

$f'(x)\geq 0$인 구간에서 함수 $f(x)$는 증가한다.

$a\leq x\leq c$, $x\geq g$에서 $f'(x)\geq 0$이므로 함수 $f(x)$가 증가하는 x의 값의 범위는 ② $b\leq x\leq c$이다.

답 ②

006

$f(x)=x^3+3x^2+ax+5$에서 $f'(x)=3x^2+6x+a$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=9-3a\leq 0$, $3a\geq 9$ $\therefore a\geq 3$

답 ⑤

참고

삼차함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서

(1) 증가하면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$

(2) 감소하면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\leq 0$

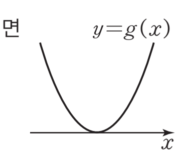
풍쌤 개념 CHECK

이차부등식이 항상 성립할 조건_高 공통수학 1

이차함수 $g(x)=ax^2+bx+c$에 대하여 이차방정식 $g(x)=0$의 판별식을 D라고 할 때

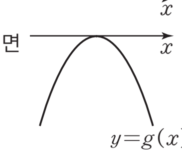
(1) 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\geq 0$이 성립하려면

$a>0$, $D\leq 0$



(2) 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\leq 0$이 성립하려면

$a<0$, $D\leq 0$



007

$f(x)=-x^3+2ax^2-ax+4$에서 $f'(x)=-3x^2+4ax-a$

함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\leq 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=4a^2-3a\leq 0$, $a(4a-3)\leq 0$

$\therefore 0\leq a\leq \frac{3}{4}$

따라서 정수 a는 0의 1개이다.

답 ②

008

$f(x)=x^3+ax^2-(a^2-8a)x+3$에서

$f'(x)=3x^2+2ax-a^2+8a$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=a^2-3(-a^2+8a)\leq 0$, $4a^2-24a\leq 0$

$4a(a-6)\leq 0$ $\therefore 0\leq a\leq 6$

따라서 실수 a의 최댓값은 6이다.

답 6

009

함수 $f(x)$가 일대일함수이려면 실수 전체의 집합에서 증가하거나 감소해야 한다. 이때 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 $f(x)$는 증가해야 한다.

$f(x)=x^3+3ax^2-2ax+1$에서

$f'(x)=3x^2+6ax-2a$

함수 $f(x)$가 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=9a^2+6a\leq 0$, $3a(3a+2)\leq 0$

$\therefore -\frac{2}{3}\leq a\leq 0$

따라서 상수 a의 값이 될 수 있는 것은 ③이다.

답 ③

010

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$가 일대일대응이어야 하므로 실수 전체의 집합에서 $f(x)$는 증가하거나 감소해야 한다. 이때 $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수이므로 $f(x)$는 감소해야 한다.

$f(x)=-\frac{1}{3}x^3+(a-2)x^2-ax+4$에서

$f'(x)=-x^2+2(a-2)x-a$

함수 $f(x)$가 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\leq 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(a-2)^2-a\leq 0$, $a^2-5a+4\leq 0$

$(a-1)(a-4)\leq 0$ $\therefore 1\leq a\leq 4$

따라서 모든 정수 a의 값의 합은

$1+2+3+4=10$

답 ④

011

함수 $f(x)$가 주어진 조건을 만족시키므로 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 감소해야 한다.

$f(x)=-x^3+3ax^2-(a+4)x$에서

$f'(x)=-3x^2+6ax-a-4$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\leq 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=9a^2-3(a+4)\leq 0$, $9a^2-3a-12\leq 0$

$3(a+1)(3a-4)\leq 0$

$\therefore -1\leq a\leq \frac{4}{3}$

따라서 실수 a의 최댓값은 $\frac{4}{3}$이다.

답 ④

012

함수 $f(x)$에 대하여 주어진 명제가 참이면 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.

$f(x)=x^3+(a+1)x^2+(a+1)x$에서

$f'(x)=3x^2+2(a+1)x+a+1$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(a+1)^2-3(a+1)\leq 0$, $a^2-a-2\leq 0$

$(a+1)(a-2)\leq 0$ $\therefore -1\leq a\leq 2$

따라서 실수 a의 최댓값은 2, 최솟값은 -1이므로 구하는 합은

$2+(-1)=1$

답 ③

013

함수 $f(x)$가 주어진 조건을 만족시키면 $f(x)$는 일대일함수이다. 이때 $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수이므로 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 감소해야 한다. ❶

$f(x)=-x^3+ax^2+3ax+5$에서

$f'(x)=-3x^2+2ax+3a$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\leq 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=a^2+9a\leq 0$, $a(a+9)\leq 0$

$\therefore -9\leq a\leq 0$ ❷

따라서 정수 a는 $-9, -8, \cdots, 0$의 10개이다. ❸

답 10

채점 기준	비율
❶ 함수 $f(x)$가 감소해야 함을 알 수 있다.	40 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ 정수 a의 개수를 구할 수 있다.	20 %

014

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+ax+2$에서

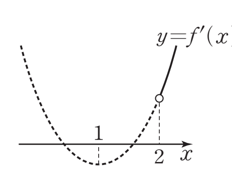
$f'(x)=x^2-2x+a=(x-1)^2+a-1$

함수 $f(x)$가 $x>2$에서 증가하려면 $x>2$에서 $f'(x)\geq 0$이어야 하므로

$f'(2)=4-4+a\geq 0$

$\therefore a\geq 0$

따라서 실수 a의 최솟값은 0이다.



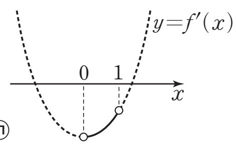
답 0

015

$f(x)=x^3+ax+2$에서 $f'(x)=3x^2+a$

함수 $f(x)$가 구간 $(0, 1)$에서 감소하려면

$0<x<1$에서 $f'(x)\le 0$이어야 하므로



$f'(0)=a\le 0$에서

$a\le 0$ ······ ㉠

$f'(1)=3+a\le 0$에서

$a\le -3$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위는 $a\le -3$

따라서 실수 a의 최댓값은 -3이다.

답 ①

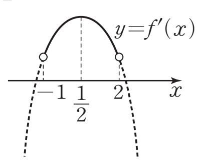
016

$f(x)=-2x^3+3x^2+ax$에서

$f'(x)=-6x^2+6x+a=-6\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+a+\frac{3}{2}$

함수 $f(x)$가 $-1<x<2$에서 증가하려면

$-1<x<2$에서 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로



$f'(-1)=-6-6+a=a-12\ge 0$에서

$a\ge 12$ ······ ㉠

$f'(2)=-24+12+a=a-12\ge 0$에서

$a\ge 12$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위는 $a\ge 12$

따라서 실수 a의 최솟값은 12이다.

답 ③

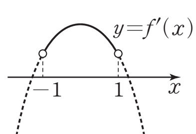
017

$f(x)=-x^3+ax^2+4x+4$에서

$f'(x)=-3x^2+2ax+4$

함수 $f(x)$가 구간 $(-1, 1)$에서 증가하려면

$-1<x<1$에서 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로



$f'(-1)=-3-2a+4=-2a+1\ge 0$에서

$a\le \frac{1}{2}$ ······ ㉠

$f'(1)=-3+2a+4=2a+1\ge 0$에서

$a\ge -\frac{1}{2}$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위는 $-\frac{1}{2}\le a\le \frac{1}{2}$

따라서 $\alpha=-\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{1}{2}$이므로 $|4\alpha\beta|=\left|4\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}\right|=1$

답 ④

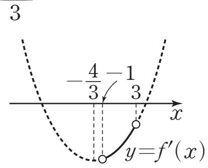
018

$f(x)=x^3+4x^2-(a+1)x+3$에서

$f'(x)=3x^2+8x-a-1=3\left(x+\frac{4}{3}\right)^2-a-\frac{19}{3}$

함수 $f(x)$가 구간 $(-1, 3)$에서 감소하려면

$-1<x<3$에서 $f'(x)\le 0$이어야 하므로



$f'(3)=27+24-a-1=-a+50\le 0$에서

$a\ge 50$

따라서 실수 a의 최솟값은 50이다.

답 ②

019

(1) $f(x)=x^3-12x+3$에서 $f'(x)=3x^2-12$

(2) $f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

(3)

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	19	$\searrow$	-13	$\nearrow$

(4) 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 19, $x=2$에서 극솟값 -13을 갖는다.

답 (1) $f'(x)=3x^2-12$ (2) -2, 2
(3) 풀이 참조
(4) **극댓값**: 19, **극솟값**: -13

020

함수 $f(x)$가 $x=-1$의 좌우에서 증가하다가 감소하므로 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이고, 극댓값은 $f(-1)=2$이다.

함수 $f(x)$가 $x=2$의 좌우에서 감소하다가 증가하므로 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이고, 극솟값은 $f(2)=-2$이다.

답 **극댓값**: 2, **극솟값**: -2

021

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2-12x+4$에서

$f'(x)=x^2-4x-12=(x+2)(x-6)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=6$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	6	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극대이고, $x=6$에서 극소이다.

따라서 $\alpha=-2$, $\beta=6$이므로

$\beta-\alpha=6-(-2)=8$

답 ⑤

022

$f(x)=\frac{3}{2}x^4-4x^3+3x^2+1$에서

$f'(x)=6x^3-12x^2+6x=6x(x-1)^2$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	1	$\nearrow$		$\nearrow$

이때 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값 1을 갖고, $x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $x=1$에서 극값을 갖지 않는다.

따라서 $a=0$, $b=1$이므로

$a-b=0-1=-1$

답 ③

023

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x-\frac{2}{3}$에서

$f'(x)=x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

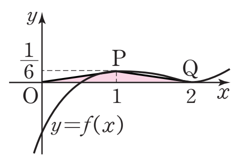
x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{1}{6}$	↘	0	↗

❶

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 $\frac{1}{6}$,

$x=2$에서 극솟값 0을 가지므로

$\mathrm{P}\left(1,\ \frac{1}{6}\right)$, $\mathrm{Q}(2,\ 0)$이다. ❷



따라서 삼각형 OPQ의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}\times2\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$

$\therefore\ 12S=12\times\frac{1}{6}=2$ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ 함수 $f(x)$의 증가와 감소 상태를 알 수 있다.	40 %
❷ 두 점 P, Q의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❸ $12S$의 값을 구할 수 있다.	30 %

024

(1) $f(x)=2x^3-6x^2+a$에서 $f'(x)=6x^2-12x=6x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

(2)

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	a	↘	$a-8$	↗

(3) 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값 $a-8$을 가지므로

$a-8=-5\qquad\therefore\ a=3$

(4) 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 a를 가지므로 구하는 극댓값은 3이다.

답 (1) 0, 2 (2) **풀이 참조** (3) 3 (4) 3

참고

미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값 b를 갖는다.

➡ $f(a)=b,\ f'(a)=0$

025

$f(x)=2x^3-12x^2+ax-2$에서 $f'(x)=6x^2-24x+a$

함수 $f(x)$가 $x=3$에서 극솟값을 가지므로

$f'(3)=0,\ 54-72+a=0\qquad\therefore\ a=18$

$f(x)=2x^3-12x^2+18x-2$이므로

$m=f(3)=54-108+54-2=-2$

$\therefore\ a+m=18+(-2)=16$

답 ④

참고

$f'(x)=6x^2-24x+18=6(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	6	↘	-2	↗

함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극솟값 -2를 갖는다.

026

$f(x)=-x^3+ax$에서

$f'(x)=-3x^2+a$

함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 극값을 가지므로

$f'(-2)=0,\ -12+a=0$

$\therefore\ a=12$

$f(x)=-x^3+12x$이므로

$f'(x)=-3x^2+12=-3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-16	↗	16	↘

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값 16을 가지므로

$p=16$

$\therefore\ a+p=12+16=28$

답 ⑤

027

$f(x)=x^4+ax^2+b$에서

$f'(x)=4x^3+2ax$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극소이므로

$f'(1)=0,\ 4+2a=0$

$\therefore\ a=-2$

$f(x)=x^4-2x^2+b$이므로

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$b-1$	↗	b	↘	$b-1$	↗

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 4를 가지므로

$f(0)=b=4$

$\therefore\ a+b=-2+4=2$

답 2

028

$f(x)=x^3-3x+a$에서

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$a+2$	$\searrow$	$a-2$	$\nearrow$

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $a+2$, $x=1$에서 극솟값 $a-2$를 갖는다.
이때 함수 $f(x)$의 모든 극값의 곱이 5이므로
$(a+2)(a-2)=5$, $a^2-4=5$
$a^2-9=0$, $(a+3)(a-3)=0$
$\therefore a=3$ ($\because a>0$)

답 ②

029

$f(x)=-2x^3+9x^2-12x+a$에서
$f'(x)=-6x^2+18x-12=-6(x-1)(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$a-5$	$\nearrow$	$a-4$	$\searrow$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값 $a-5$, $x=2$에서 극댓값 $a-4$를 갖는다.
이때 극댓값과 극솟값의 절댓값이 같고 그 부호가 서로 다르므로
$a-5=-(a-4)$, $a-5=-a+4$
$2a=9$ $\quad\therefore a=\frac{9}{2}$

답 ③

030

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+b$
함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극댓값 0을 가지므로
$f(-1)=0$, $f'(-1)=0$
$f(-1)=0$에서 $-1+a-b+c=0$
$\therefore a-b+c=1$ ⋯⋯ ㉠
$f'(-1)=0$에서 $3-2a+b=0$
$\therefore -2a+b=-3$ ⋯⋯ ㉡
❶

$x=1$에서 극솟값을 가지므로
$f'(1)=0$에서 $3+2a+b=0$ $\quad\therefore 2a+b=-3$ ⋯⋯ ㉢
❷

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=-3$
$a=0$, $b=-3$을 ㉠에 대입하여 풀면 $c=-2$ ❸
따라서 $f(x)=x^3-3x-2$이므로 극솟값은
$f(1)=1-3-2=-4$ ❹

답 -4

채점 기준	비율
❶ $x=-1$에서 극댓값 0을 가짐을 이용하여 식을 세울 수 있다.	30 %
❷ $x=1$에서 극솟값을 가짐을 이용하여 식을 세울 수 있다.	20 %
❸ a, b, c의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ 극솟값을 구할 수 있다.	20 %

031

$f(x)=x^3+6ax^2-8a$에서 $f'(x)=3x^2+12ax=3x(x+4a)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=-4a$
즉, 함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=-4a$에서 극값을 갖고, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축에 접하므로
$f(0)=0$ 또는 $f(-4a)=0$
이때 $f(0)=-8a$이고, $a\neq0$이므로 $f(0)\neq0$
따라서 $f(-4a)=0$이므로
$-64a^3+96a^3-8a=0$
$32a^3-8a=0$
$8a(2a+1)(2a-1)=0$
$\therefore a=\frac{1}{2}$ ($\because a>0$)

답 ③

032

$f(x)=x^3+ax^2+ax$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+a$
삼차함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.
이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=a^2-3a>0$, $a(a-3)>0$
$\therefore a<0$ 또는 $a>3$
따라서 $\alpha=0$, $\beta=3$이므로
$\alpha+\beta=3$

답 ①

참고
삼차함수 $f(x)$에 대하여
(1) $f(x)$가 극댓값, 극솟값을 모두 갖는다.
➡ 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는다.
(2) $f(x)$가 극값을 갖지 않는다.
➡ 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 갖는다.

풍쌤 개념 CHECK

이차방정식의 근의 판별_高 공통수학 1
계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라고 하면
(1) 서로 다른 두 실근을 갖는다. ➡ $D=b^2-4ac>0$
(2) 중근(서로 같은 두 실근)을 갖는다. ➡ $D=b^2-4ac=0$
(3) 서로 다른 두 허근을 갖는다. ➡ $D=b^2-4ac<0$

033

$f(x)=-\frac{2}{3}ax^3+3x^2-2ax+4$에서 $f'(x)=-2ax^2+6x-2a$
삼차함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지므로 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.
이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=9-4a^2>0$, $-(2a+3)(2a-3)>0$
$(2a+3)(2a-3)<0$
$\therefore -\frac{3}{2}<a<\frac{3}{2}$
따라서 자연수 a의 최댓값은 1이다.

답 ①

034

$f(x)=3x^3+(a+1)x^2+(a-1)x-3$에서

$f'(x)=9x^2+2(a+1)x+a-1$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. → 극댓값과 극솟값을 모두 갖는다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(a+1)^2-9(a-1)>0$, $a^2-7a+10>0$

$(a-2)(a-5)>0$ $\quad\therefore a<2$ 또는 $a>5$

따라서 실수 a의 값이 될 수 있는 것은 ⑤이다.

답 ⑤

참고

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖는다.

$\Longleftrightarrow$ 삼차함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 갖는다.

035

$f(x)=x^3+x^2+ax+3$에서 $f'(x)=3x^2+2x+a$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=1-3a\le0$, $-3a\le-1$

$\therefore a\ge\frac{1}{3}$

따라서 실수 a의 최솟값은 $\frac{1}{3}$이다.

답 ④

036

$f(x)=x^3+(a+1)x^2+(a+1)x-3$에서

$f'(x)=3x^2+2(a+1)x+a+1$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(a+1)^2-3(a+1)\le0$, $a^2-a-2\le0$

$(a+1)(a-2)\le0$

$\therefore -1\le a\le2$

답 ②

037

$f(x)=-x^3+ax^2-ax+4$에서 $f'(x)=-3x^2+2ax-a$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=a^2-3a\le0$, $a(a-3)\le0$

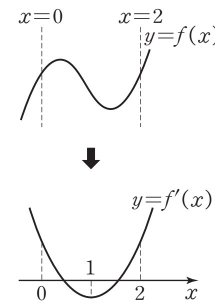
$\therefore 0\le a\le3$

따라서 정수 a는 0, 1, 2, 3의 4개이다.

답 ③

038

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+ax$에서 $f'(x)=x^2-2x+a$



삼차함수 $f(x)$가 구간 $(0,\ 2)$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 $0<x<2$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=1-a>0$, $-a>-1$

$\therefore a<1$

(ii) $f'(0)>0$에서 $a>0$

$f'(2)>0$에서 $4-4+a>0$

$\therefore a>0$

(iii) $f'(x)=x^2-2x+a=(x-1)^2+a-1$이므로 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=1$이고 $0<1<2$이다.

(i)~(iii)에서 실수 a의 값의 범위는 $0<a<1$이다.

답 ④

참고

삼차함수 $f(x)$가 $a<x<b$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지면 이차방정식 $f'(x)=0$은 $a<x<b$에서 서로 다른 두 실근을 갖는다. 이때 다음의 세 가지를 조사하여 문제를 해결한다.

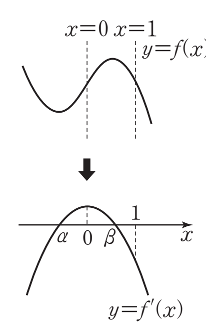
(1) 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식 D의 값의 부호

(2) $f'(a)$, $f'(b)$의 값의 부호

(3) 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축의 위치

039

$f(x)=-x^3-x^2+ax-2$에서 $f'(x)=-3x^2-2x+a$



함수 $f(x)$가 구간 $(0,\ 1)$에서 극댓값을 갖고, 구간 $(-\infty,\ 0)$에서 극솟값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라고 할 때, $\alpha<0$, $0<\beta<1$이어야 한다. ❶

(i) $f'(0)>0$에서 $a>0$

(ii) $f'(1)<0$에서 $-3-2+a<0$

$\therefore a<5$

(i), (ii)에서 $0<a<5$ ❷

따라서 모든 정수 a의 값의 합은

$1+2+3+4=10$ ❸

답 10

채점 기준	비율
❶ $f'(x)=0$의 두 실근의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ 모든 정수 a의 값의 합을 구할 수 있다.	20 %

040

$f(x)=x^4-\frac{2}{3}(a+2)x^3+ax^2$에서

$f'(x)=4x^3-2(a+2)x^2+2ax=2x(x-1)(2x-a)$ ⋯⋯ ㉠

함수 $f(x)$가 극댓값을 가지려면 함수 $f(x)$는 극댓값과 극솟값을 모두 가져야 하므로 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

이때 ㉠에서 방정식 $f'(x)=0$의 세 실근은

$x=0,\ x=1,\ x=\frac{a}{2}$

$\frac{a}{2}\neq 0$이므로 $a\neq 0$, $\frac{a}{2}\neq 1$이므로 $a\neq 2$

따라서 실수 a의 값이 될 수 없는 것은 ②이다.

답 ②

참고

최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$는 항상 극솟값을 갖는다.
이때 사차함수 $f(x)$가
(1) 극댓값을 가지면 삼차방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.
(2) 극댓값을 갖지 않으면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖거나 한 실근과 중근을 갖거나 삼중근을 갖는다.

041

$f(x)=-x^4+4x^3-ax^2$에서

$f'(x)=-4x^3+12x^2-2ax=-2x(2x^2-6x+a)$

함수 $f(x)$가 극솟값을 가지려면 $f(x)$는 극댓값과 극솟값을 모두 가져야 하므로 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

이때 방정식 $f'(x)=0$의 한 실근이 $x=0$이므로 이차방정식 $2x^2-6x+a=0$은 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

즉, a는 $a\neq 0$인 실수이어야 한다. ……… ㉠

$a=0$이면 $2x^2-6x=0$에서 한 근이 0이 된다.

이차방정식 $2x^2-6x+a=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=9-2a>0,\ -2a>-9$

$\therefore\ a<\frac{9}{2}$ ……… ㉡

㉠, ㉡에서 $a<0$ 또는 $0<a<\frac{9}{2}$

따라서 모든 자연수 a의 값의 합은

$1+2+3+4=10$

답 ①

참고

최고차항의 계수가 음수인 사차함수 $f(x)$는 항상 극댓값을 갖는다. 이때 사차함수 $f(x)$가
(1) 극솟값을 가지면 삼차방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.
(2) 극솟값을 갖지 않으면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖거나 한 실근과 중근을 갖거나 삼중근을 갖는다.

042

$f(x)=-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}(a+1)x^3+ax+2$에서

$f'(x)=-x^3-(a+1)x^2+a=-(x+1)(x^2+ax-a)$

조립제법을 이용해서 인수분해

$g(x)=x^2+ax-a$라고 하면

$f'(x)=-(x+1)g(x)$

함수 $f(x)$가 극댓값은 갖고, 극솟값은 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖거나 한 실근과 중근을 갖거나 삼중근을 가져야 한다.

(i) $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖는 경우

$-(x+1)(\underbrace{x^2+ax-a}_{=g(x)})=0$의 한 근이 $x=-1$이므로 이차방정식 $\underbrace{x^2+ax-a}_{=g(x)}=0$이 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $\underbrace{x^2+ax-a}_{=g(x)}=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=a^2+4a<0,\ a(a+4)<0$

$\therefore\ \boxed{-4<a<0}$

(ii) $f'(x)=0$이 한 실근과 중근을 갖는 경우

$-(x+1)(\underbrace{x^2+ax-a}_{=g(x)})=0$의 한 근이 $x=-1$이므로 이차방정식 $\underbrace{x^2+ax-a}_{=g(x)}=0$이 $x=-1$을 한 근으로 갖거나 -1이 아닌 실수를 중근으로 가져야 한다.

$\underbrace{x^2+ax-a}_{=g(x)}=0$이 $x=-1$을 한 근으로 가지면

$1-a-a=0,\ 1-2a=0$

$\therefore\ \boxed{a=\frac{1}{2}}$

$\underbrace{x^2+ax-a}_{=g(x)}=0$이 -1이 아닌 실수를 중근으로 가지면 판별식을 D라고 할 때

$D=a^2+4a=0,\ a(a+4)=0$

$\therefore\ \boxed{a=-4 \text{ 또는 } a=0}$

(iii) $f'(x)=0$이 삼중근을 갖는 경우

$-(x+1)(x^2-x+a)=0$에서 $x^2-x+a=0$이 $x=-1$을 중근으로 가질 수 없으므로 삼차방정식 $f'(x)=0$은 삼중근을 가질 수 없다.

(i)~(iii)에서 $\boxed{-4\leq a\leq 0}$ 또는 $\boxed{a=\frac{1}{2}}$

따라서 a의 최솟값은 -4이다.

답 ②

043

$f(x)=x^3+ax^2+bx-3$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f'(x)=0$의 두 실근이 α, β이고, $\alpha<\beta<0$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta>0$에서

$-\frac{2a}{3}<0,\ \frac{b}{3}>0$

$\therefore\ a>0,\ b>0$

답 $a>0,\ b>0$

044

함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+2$의 그래프에서 $x\longrightarrow\infty$일 때 $f(x)\longrightarrow\infty$이므로 $a>0$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$에서 $f'(x)=0$의 두 실근이 α, β이고, $0<\alpha<\beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$에서 $-\frac{2b}{3a}>0,\ \frac{c}{3a}>0$

이때 $a>0$이므로 $b<0,\ c>0$

$\therefore\ ab<0,\ ac>0,\ a-b>0,\ a+c>0,\ a-bc>0$

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

045

함수 $f(x)=-x^3+ax^2+bx+c$의 그래프가 y축과 y축의 양의 부분에서 만나므로 $c>0$

$f'(x)=-3x^2+2ax+b$에서 $f'(x)=0$의 두 실근이 α, β이고, $\alpha<\beta<0$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta>0$에서 $-\dfrac{2a}{-3}<0$, $\dfrac{b}{-3}>0$

$\therefore a<0,\ b<0$

$\therefore a<0,\ a-c<0,\ c-b>0,\ ac<0,\ bc<0$

따라서 양수인 것은 ③이다.

답 ③

046

함수 $f(x)=ax^3+bx^2-cx+d$의 그래프에서 $x\longrightarrow\infty$일 때 $f(x)\longrightarrow-\infty$이므로 $a<0$

또, 함수의 그래프가 y축과 y축의 음의 부분에서 만나므로 $d<0$

$f'(x)=3ax^2+2bx-c$에서 $f'(x)=0$의 두 실근이 α, β이고, $0<\alpha<\beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$에서 $-\dfrac{2b}{3a}>0$, $\dfrac{-c}{3a}>0$

이때 $a<0$이므로 $b>0$, $c>0$

$\therefore ab<0,\ bc>0,\ a-b<0,\ cd<0,\ a+d<0$

따라서 부호가 다른 하나는 ②이다.

답 ②

047

함수 $f(x)=ax^3-bx^2+cx-d$의 그래프에서 $x\longrightarrow\infty$일 때 $f(x)\longrightarrow-\infty$이므로 $a<0$

또, 함수의 그래프가 y축과 y축의 음의 부분에서 만나므로 $-d<0$

$\therefore d>0$ ······ ❶

$f'(x)=3ax^2-2bx+c$에서 $f'(x)=0$의 두 실근이 α, β이고, $\alpha<0<\beta$, $0<|\alpha|<\beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta<0$에서

$-\dfrac{-2b}{3a}>0$, $\dfrac{c}{3a}<0$

이때 $a<0$이므로 $b<0$, $c>0$ ······ ❷

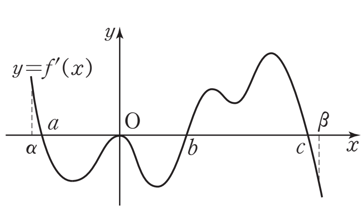
$\therefore \dfrac{|a|}{a}+\dfrac{|b|}{b}+\dfrac{|c|}{c}+\dfrac{|d|}{d}=\dfrac{-a}{a}+\dfrac{-b}{b}+\dfrac{c}{c}+\dfrac{d}{d}$

$=-1-1+1+1=0$ ······ ❸

답 0

채점 기준	비율
❶ a, d의 값의 부호를 구할 수 있다.	30 %
❷ b, c의 값의 부호를 구할 수 있다.	50 %
❸ $\dfrac{\|a\|}{a}+\dfrac{\|b\|}{b}+\dfrac{\|c\|}{c}+\dfrac{\|d\|}{d}$의 값을 구할 수 있다.	20 %

048



위의 그림과 같이 함수 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점 중에서 원점이 아닌 점의 x좌표를 각각 a, b, c라고 하자.

(1) $x=a$, $x=c$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=a$, $x=c$에서 극댓값을 갖는다.
따라서 극댓값을 갖는 x의 값의 개수는 2이다.

(2) $x=b$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=b$에서 극솟값을 갖는다.
따라서 극솟값을 갖는 x의 값의 개수는 1이다.

답 (1) 2 (2) 1

참고

함수 $f(x)$가 극값을 가지면 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나고, 만나는 그 점의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀐다.
문제에서 $y=f'(x)$의 그래프가 $x=0$에서 x축과 만나지만 $x=0$의 좌우에서는 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $x=0$에서는 극값을 갖지 않는다.

049

(1) $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+b$
$y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -1, 2이므로
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f'(-1)=0$이므로 $3-2a+b=0$

$\therefore -2a+b=-3$ ······ ㉠

$f'(2)=0$이므로 $12+4a+b=0$

$\therefore 4a+b=-12$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\dfrac{3}{2}$, $b=-6$

(2) $f(x)=x^3-\dfrac{3}{2}x^2-6x+c$이고, 함수 $f(x)$의 극솟값이 -5이므로
$f(2)=-5$
$8-6-12+c=-5$ $\quad\therefore c=5$

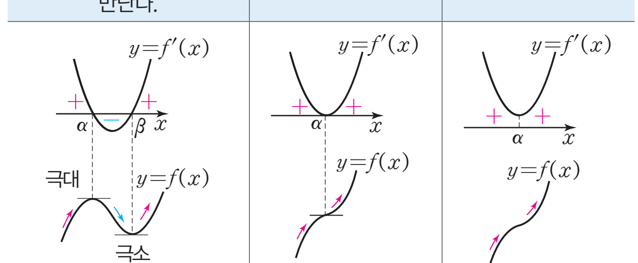
(3) $f(x)=x^3-\dfrac{3}{2}x^2-6x+5$이므로 함수 $f(x)$의 극댓값은
$f(-1)=-1-\dfrac{3}{2}+6+5=\dfrac{17}{2}$

답 (1) $a=-\dfrac{3}{2}$, $b=-6$ (2) 5 (3) $\dfrac{17}{2}$

참고

$y=f'(x)$의 그래프를 이용한 삼차함수 $y=f(x)$의 해석

서로 다른 두 점에서 만난다.	한 점에서 접한다.	만나지 않는다.
$x=\alpha$, $x=\beta$에서 $f(x)$의 극값이 존재한다.	$x=\alpha$에서 $f(x)$의 극값이 존재하지 않는다.	



050

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$에서 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 0, 2이므로
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f'(0)=0$이므로 $c=0$
$f'(2)=0$이므로 $12a+4b=0$
$\therefore 3a+b=0$ .... ㉠
함수 $f(x)=ax^3+bx^2+d$의 극댓값이 2이므로
$f(0)=2$ $\quad\therefore d=2$
함수 $f(x)=ax^3+bx^2+2$의 극솟값이 -2이므로
$f(2)=-2$, $8a+4b+2=-2$
$\therefore 2a+b=-1$ .... ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-3$
따라서 $f(x)=x^3-3x^2+2$이므로
$f(1)=1-3+2=0$

답 0

051

$x=4$, $x=10$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=4$, $x=10$에서 극댓값을 갖는다.
따라서 구하는 모든 x의 값의 합은
$4+10=14$

답 ⑤

052

$y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 a, b이므로
$f'(x)=0$에서 $x=a$ 또는 $x=b$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$ (0) $\cdots$	b	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

① $f(x)$는 $x=b$에서 극솟값을 갖는다.
② $f(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 갖는다.
③ 구간 $(0, b)$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소한다.
④ 구간 (a, b)에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소한다.
⑤ 구간 $(-\infty, a)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다.
따라서 옳은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

053

$y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -1, 1이므로
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

ㄱ. $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값을 갖는다. (거짓)
ㄴ. 구간 $(0, 1)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다. (거짓)
ㄷ. 구간 $(1, \infty)$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소한다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

답 ③

054

$y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -1, 0, 1이므로 $f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

ㄱ. $f(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 극솟값을 갖는다. (거짓)
ㄴ. $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다. (참)
ㄷ. 구간 $(0, 1)$에서 $f(x)$는 감소하므로 $f(0)>f(1)$이다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

055

$y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -2, 0, 2이므로 $f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

$x=-2$, $x=2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=-2$, $x=2$에서 극댓값을 갖는다.
$x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다.
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ⑤이다.

답 ⑤

056

(1) $f(x)=x^4-2x^2+3$에서
$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$
구간 $[-1, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	↗	3	↘	2	↗	11

(2) 함수 $f(x)$는 $x=-1$ 또는 $x=1$일 때 최솟값 2를 갖는다.
(3) 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 11을 갖는다.

답 (1) 풀이 참조 (2) 2 (3) 11

057

$f(x)=-x^3+3x+2$에서
$f'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because 0\le x\le 2$)

구간 $[0,\ 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	2	↗	4	↘	0

함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최댓값 4를 갖는다.
따라서 $a=1$, $b=4$이므로
$a+b=1+4=5$

답 5

058

$f(x)=x^3-6x^2+9x+6$에서
$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$
$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$
구간 $[-1,\ 3]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$	-10	↗	10	↘	6

함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최댓값 10을 갖는다.

답 ⑤

059

$f(x)=-x^4+8x^3-16x^2+6$에서
$f'(x)=-4x^3+24x^2-32x=-4x(x-2)(x-4)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$ ($\because -1\le x\le 2$)
구간 $[-1,\ 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$	-19	↗	6	↘	-10

함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 최댓값 6을 갖고, $x=-1$일 때 최솟값 -19를 갖는다.
따라서 $M=6$, $m=-19$이므로
$M+m=6+(-19)=-13$

답 ①

060

$x+1=t$라고 하면 $-4\le x\le 0$에서
$-3\le t\le 1$
$g(t)=t^3-3t+2$라고 하면
$g'(t)=3t^2-3=3(t+1)(t-1)$
$g'(t)=0$에서 $t=-1$ 또는 $t=1$ ❶
$-3\le t\le 1$에서 함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	1
$g'(t)$		$+$	0	$-$	0
$g(t)$	-16	↗	4	↘	0

❷

함수 $g(t)$는 $t=-1$일 때 최댓값 4를 갖고, $t=-3$일 때 최솟값 -16을 갖는다.
따라서 $f(x)$의 최댓값은 4, 최솟값은 -16이다. ❸

답 **최댓값**: 4, **최솟값**: -16

채점 기준	비율
❶ $x+1=t$로 치환한 함수 $g(t)$의 도함수가 0이 되게 하는 t의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $g(t)$의 증가와 감소 상태를 알 수 있다.	40 %
❸ $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

061

$f(x)=x^3-6x^2+9x+a$에서
$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$
$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$
구간 $[0,\ 3]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$	a	↗	$a+4$	↘	a

함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최댓값 $a+4$를 갖는다.
이때 함수 $f(x)$의 최댓값이 12이므로
$a+4=12$ $\therefore a=8$

답 ④

062

$f(x)=x^3-6x^2+a$에서
$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$
$f'(x)=0$에서 $x=4$ ($\because 1\le x\le 6$)
구간 $[1,\ 6]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	4	$\cdots$	6
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$a-5$	↘	$a-32$	↗	a

함수 $f(x)$는 $x=6$일 때 최댓값 a, $x=4$일 때 최솟값 $a-32$를 가지므로
$M=a$, $m=a-32$
이때 $M+m=2$이므로 $a+(a-32)=2$
$2a-32=2$ $\therefore a=17$

답 17

063

$f(x)=x^4-4x^3+a$에서
$f'(x)=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	a	↘	$a-27$	↗

함수 $f(x)$는 $x=3$일 때 최솟값 $a-27$을 갖는다.

이때 함수 $f(x)$의 최솟값이 -4이므로

$a-27=-4$ $\therefore a=23$

답 ②

064

$f(x)=ax^3-3ax^2+b$에서

$f'(x)=3ax^2-6ax=3ax(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ ($\because -1\le x\le 1$)

이때 a, b가 양수이므로 구간 $[-1, 1]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$b-4a$	↗	b	↘	$b-2a$

함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 최댓값 b, $x=-1$일 때 최솟값 $b-4a$를 가지므로

a, b가 양수이므로 $b-4a<b-2a<b$

$b=4$, $b-4a=-4$

$\therefore a=2$, $b=4$

$\therefore ab=2\times 4=8$

답 ④

065

$f(x)=ax^4-2ax^2+b$에서

$f'(x)=4ax^3-4ax=4ax(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$ ($\because 0\le x\le 2$)

이때 a, b가 양수이므로 구간 $[0, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	b	↘	$b-a$	↗	$8a+b$

········· ❶

함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 $8a+b$, $x=1$일 때 최솟값 $b-a$를 가지므로 ········· ❷

$8a+b=4$, $b-a=1$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{4}{3}$

$\therefore 9ab=9\times\frac{1}{3}\times\frac{4}{3}=4$ ········· ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ $f(x)$의 증가와 감소 상태를 알 수 있다.	40 %
❷ $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 a, b로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ $9ab$의 값을 구할 수 있다.	30 %

066

(1) 꼭짓점 C, D의 좌표가 각각 $(-a, -a^2+6)$, $(a, -a^2+6)$이므로 직사각형 ABDC의 넓이를 $S(a)$라고 하면

$S(a)=2a(-a^2+6)$

$=-2a^3+12a$

(2) $S'(a)=-6a^2+12=-6(a^2-2)$

$S'(a)=0$에서 $a^2-2=0$, $a^2=2$

$\therefore a=\sqrt{2}$ ($\because 0<a<\sqrt{6}$)

$0<a<\sqrt{6}$에서 $S(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	(0)	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	$(\sqrt{6})$
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		↗	$8\sqrt{2}$	↘	

$S(a)$는 $a=\sqrt{2}$일 때 극대이면서 최대이다.

따라서 직사각형 ABDC의 넓이의 최댓값은 $S(\sqrt{2})=8\sqrt{2}$이다.

답 (1) $-2a^3+12a$ (2) $8\sqrt{2}$

067

곡선 $y=x^2$ 위를 움직이는 점의 좌표를 (t, t^2)이라고 하면

점 (t, t^2)과 점 $(0, 4)$ 사이의 거리 l에 대하여

$l^2=t^2+(t^2-4)^2=t^4-7t^2+16$

$f(t)=t^4-7t^2+16$이라고 하면

$f'(t)=4t^3-14t=2t(2t^2-7)$

$f'(t)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=\pm\frac{\sqrt{14}}{2}$

$f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{14}}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{14}}{2}$	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	↘	$\frac{15}{4}$	↗	16	↘	$\frac{15}{4}$	↗

$f(t)$는 $t=-\frac{\sqrt{14}}{2}$ 또는 $t=\frac{\sqrt{14}}{2}$일 때 최솟값 $\frac{15}{4}$를 가지므로 l^2의 최솟값은 $\frac{15}{4}$이다.

답 ②

068

$f(x)=x^3-3x^2+2x$라고 하면 $\mathrm{A}(t, f(t))$, $\mathrm{B}(t+1, f(t+1))$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\{(t+1)-t\}^2+\{f(t+1)-f(t)\}^2}$

$=\sqrt{1+(3t^2-3t)^2}$

$=\sqrt{1+9t^2(t-1)^2}$

$\{(t+1)^3-3(t+1)^2+2(t+1)\}$
$-(t^3-3t^2+2t)$
$=(t^3-t)-(t^3-3t^2+2t)$
$=3t^2-3t$

이때 $g(t)=9t^2(t-1)^2$이라고 하면

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{1+g(t)}$ ········· ㉠

$g'(t)=18t(t-1)^2+18t^2(t-1)$

$=18t(t-1)(2t-1)$

$g'(t)=0$에서 $t=\frac{1}{2}$ ($\because 0<t<1$)

$0<t<1$에서 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	(1)
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$		↗	$\frac{9}{16}$	↘	

$g(t)$는 $t=\frac{1}{2}$일 때 극대이면서 최대이므로 $g(t)$의 최댓값은

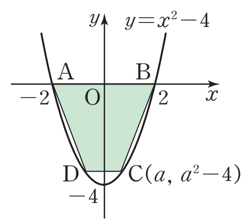
$g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{16}$이다.

이때 ㉠에서 $g(t)$가 최대일 때 선분 AB의 길이도 최대이므로 구하는 선분 AB의 길이의 최댓값은

$\sqrt{1+\frac{9}{16}}=\sqrt{\frac{25}{16}}=\frac{5}{4}$

답 ②

069



$x^2-4=0$에서 $(x+2)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=2$

$\therefore\ A(-2,\ 0),\ B(2,\ 0)$

$C(a,\ a^2-4)\ (0<a<2)$라고 하면

$D(-a,\ a^2-4)$

사다리꼴 ABCD의 넓이를 $S(a)$라고 하면 $a^2-4<0$이므로

$S(a)=\frac{1}{2}\times(4+2a)\times|a^2-4|$

$\quad=\frac{1}{2}\times(4+2a)\times(4-a^2)$

$\quad=-a^3-2a^2+4a+8$

$\therefore\ S'(a)=-3a^2-4a+4=-(a+2)(3a-2)$

$S'(a)=0$에서 $a=\frac{2}{3}\ (\because\ 0<a<2)$

$0<a<2$에서 $S(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	(0)	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	(2)
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		↗	$\frac{256}{27}$	↘	

$S(a)$는 $a=\frac{2}{3}$일 때 극대이면서 최대이므로 사다리꼴의 넓이의 최댓값은 $\frac{256}{27}$이다.

따라서 $k=\frac{256}{27}$이므로

$27k=256$

답 256

070

잘라 내는 정사각형의 한 변의 길이를 $x\ (0<x<5)$라 하고, 상자의 부피를 $V(x)$라고 하면

$x>0,\ 10-2x>0$에서 $0<x<5$

$V(x)=x(16-2x)(10-2x)$

$\quad=4x^3-52x^2+160x$

$\therefore\ V'(x)=12x^2-104x+160$

$\quad=4(x-2)(3x-20)$

$V'(x)=0$에서 $x=2\ (\because\ 0<x<5)$

$0<x<5$에서 $V(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	(5)
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		↗	144	↘	

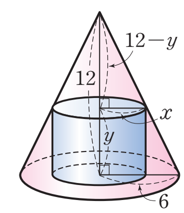
$V(x)$는 $x=2$일 때 극대이면서 최대이므로 상자의 부피의 최댓값은 $V(2)=144$이다.

따라서 $k=2,\ M=144$이므로

$k+M=2+144=146$

답 ⑤

071



원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 x $(0<x<6)$, 높이를 $y\ (0<y<12)$라고 하면

$6:12=x:(12-y)$

$1:2=x:(12-y),\ 2x=12-y$

$\therefore\ y=-2x+12$ ······ ❶

원기둥의 부피를 $V(x)$라고 하면

$V(x)=\pi x^2y$

$\quad=\pi x^2(-2x+12)$

$\quad=-2\pi x^3+12\pi x^2$ ······ ❷

$\therefore\ V'(x)=-6\pi x^2+24\pi x=-6\pi x(x-4)$

$V'(x)=0$에서 $x=4\ (\because\ 0<x<6)$

$0<x<6$에서 $V(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	4	$\cdots$	(6)
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		↗	64π	↘	

$V(x)$는 $x=4$일 때 극대이면서 최대이므로 원기둥의 부피의 최댓값은 $V(4)=64\pi$이다. ······ ❸

답 64π

채점 기준	비율
❶ 원기둥의 밑면의 반지름의 길이와 높이에 대한 관계식을 구할 수 있다.	30 %
❷ 원기둥의 부피를 하나의 문자에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❸ 원기둥의 부피의 최댓값을 구할 수 있다.	50 %

실력을 높이는 연습 문제

본문 088쪽

01

$f(x)=2x^3-ax^2+bx$에서 $f'(x)=6x^2-2ax+b$

함수 $f(x)$가 감소하는 구간이 $[-1,\ 2]$이므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근은 $-1,\ 2$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-1+2=-\frac{-2a}{6},\ -1\times2=\frac{b}{6}$

이므로 $a=3,\ b=-12$

$\therefore\ \frac{b}{a}=\frac{-12}{3}=-4$

답 ①

02

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$가 일대일대응이어야 하므로 실수 전체의 집합에서 $f(x)$는 증가하거나 감소해야 한다.
이때 $a<0$이므로 $f(x)$는 감소해야 한다.
$f(x)=ax^3+3x^2+(a+2)x+3$에서 $f'(x)=3ax^2+6x+a+2$
함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=9-3a(a+2)\le 0$, $-3a^2-6a+9\le 0$

$a^2+2a-3\ge 0$, $(a+3)(a-1)\ge 0$
이때 a가 음수이면 $a-1<0$이므로 $a+3\le 0$, 즉 $a\le -3$이어야 한다.
따라서 음수 a의 최댓값은 -3이다.

답 ③

03

문제 접근하기

삼차함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하면 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 극댓값과 극솟값이 모두 존재하지 않는다. 즉, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이다.
한편, 함수 $f(x)$의 식에 절댓값 기호가 포함되어 있으므로 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되게 하는 x의 값을 기준으로 구간을 나누어 $f(x)$를 구한다.

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

(i) $x-2a\le 0$, 즉 $x\le 2a$이면
$f(x)=x^3+6x^2-15x+30a+3$이므로
$f'(x)=3x^2+12x-15=3(x+5)(x-1)$
이때 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로
$3(x+5)(x-1)\ge 0$ $\quad\therefore x\le -5$ 또는 $x\ge 1$
이때 함수 $f(x)$가 $x\le 2a$에서 증가하려면 $x\le 2a$가 $x\le -5$ 또는 $x\ge 1$에 포함되어야 하므로
$2a\le -5$ $\quad\therefore a\le -\frac{5}{2}$

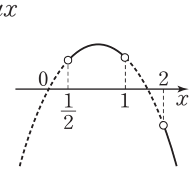
(ii) $x-2a>0$, 즉 $x>2a$이면
$f(x)=x^3+6x^2+15x-30a+3$이므로
$f'(x)=3x^2+12x+15=3(x+2)^2+3$
즉, $x>2a$이면 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

(i), (ii)에서 $a\le -\frac{5}{2}$이므로 실수 a의 최댓값은 $-\frac{5}{2}$이다.

답 ①

04

$f(x)=-x^3+ax^2+3$에서 $f'(x)=-3x^2+2ax$
함수 $f(x)$가 구간 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$에서 증가하려면
$\frac{1}{2}<x<1$에서 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.



$f'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{4}+a\ge 0$에서

$a\ge \frac{3}{4}$ ⋯⋯ ㉠

$f'(1)=-3+2a\ge 0$에서

$a\ge \frac{3}{2}$ ⋯⋯ ㉡

함수 $f(x)$가 구간 $(2, \infty)$에서 감소하려면 $x>2$에서 $f'(x)\le 0$이어야 하므로 $f'(2)=-12+4a\le 0$에서

$a\le 3$ ⋯⋯ ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통 범위는

$\frac{3}{2}\le a\le 3$

따라서 $\alpha=\frac{3}{2}$, $\beta=3$이므로

$2\alpha\beta=2\times\frac{3}{2}\times 3=9$

답 ⑤

05

$f(x)=2x^3-3x^2+2$에서
$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	2	↘	1	↗

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 2, $x=1$에서 극솟값 1을 가지므로 P(0, 2), Q(1, 1)이다.
따라서 두 점 P, Q 사이의 거리는
$\sqrt{(1-0)^2+(1-2)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

답 ①

06

$f(x)=(x-1)^2(x+1)^2$에서
$f'(x)=2(x-1)(x+1)^2+2(x-1)^2(x+1)$
$\quad=4x(x+1)(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↘	0	↗	1	↘	0	↗

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 1을 갖고, $x=-1$ 또는 $x=1$에서 극솟값 0을 가지므로 세 점 A, B, C의 좌표는 각각 $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$이다.
따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 2\times 1=1$

답 ③

07

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+ax+b$에서 $f'(x)=x^2-3x+a$
함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극값을 가지므로 $f'(1)=0$
$1-3+a=0$ $\quad\therefore a=2$
즉, $f'(x)=x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$이므로
$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$b+\frac{5}{6}$	$\searrow$	$b+\frac{2}{3}$	$\nearrow$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 $b+\frac{5}{6}$, $x=2$에서 극솟값 $b+\frac{2}{3}$를 갖고, 극댓값과 극솟값의 합이 $\frac{1}{2}$이므로

$\left(b+\frac{5}{6}\right)+\left(b+\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{2}$, $2b+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$

$2b=-1 \qquad \therefore b=-\frac{1}{2}$

따라서 함수 $f(x)$의 극솟값은

$f(2)=b+\frac{2}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$

답 ①

08

$f(x)=2x^3-3ax^2+a$에서

$f'(x)=6x^2-6ax=6x(x-a)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=a$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=a$에서 극댓값 또는 극솟값을 갖는다.

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축에 접하므로

$f(0)=0$ 또는 $f(a)=0$

이때 $f(0)=a$이고, $a\neq0$이므로 $f(0)\neq0$

$\therefore f(a)=0$

즉, $2a^3-3a^3+a=0$에서 $-a^3+a=0$

$-a(a+1)(a-1)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=1$ ($\because a\neq0$)

따라서 모든 실수 a의 값의 곱은

$-1\times1=-1$

답 ②

09

문제 접근하기

함수 $y=f(x)=|g(x)|$의 그래프는 함수 $y=g(x)$의 그래프에서 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로, 절댓값 기호 안의 함수의 그래프를 파악하여 함수 $f(x)$가 2개의 극댓값을 갖게 하는 p의 값을 구한다.

$f(x)=|x^3-3x^2+p|$에서 $g(x)=x^3-3x^2+p$라고 하면

$g'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$g'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)=|g(x)|$가 극대가 되는 x의 값이 2개가 되려면

$g(0)>0$, $g(2)<0$이어야 하므로

$g(0)>0$에서 $p>0$

$g(2)<0$에서 $p-4<0 \qquad \therefore p<4$

$\therefore 0<p<4$

이때 $f(x)$는 $x=0$과 $x=2$에서 극대이므로 $f(0)=f(2)$에서

$|p|=|p-4|$

$p=-(p-4)$ ($\because 0<p<4$)

$2p=4 \qquad \therefore p=2$

답 ②

10

$f(x)=ax^3-5x^2+4ax+4$에서

$f'(x)=3ax^2-10x+4a$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=25-12a^2>0$, $12a^2-25<0$

$(2\sqrt{3}a+5)(2\sqrt{3}a-5)<0$

$\therefore -\frac{5\sqrt{3}}{6}<a<\frac{5\sqrt{3}}{6}$

이때 $1<\frac{5\sqrt{3}}{6}<2$이므로 정수 a의 최댓값은 1이다.

답 ③

11

$f(x)=x^3+(a+1)x^2+(2a-1)x-1$에서

$f'(x)=3x^2+2(a+1)x+2a-1$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(a+1)^2-3(2a-1)\leq0$, $(a-2)^2\leq0$

$\therefore a=2$

즉, $f(x)=x^3+3x^2+3x-1$이므로 $f'(x)=3x^2+6x+3$

이때 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 중에서 접선의 기울기가 3인 점의 x좌표를 k라고 하면

$f'(k)=3$

$3k^2+6k+3=3$, $3k(k+2)=0$

$\therefore k=-2$ 또는 $k=0$

따라서 구하는 x좌표의 합은

$-2+0=-2$

답 ②

12

$f(x)=-x^4+2ax^2+4(a-1)x+3$에서

조립제법을 이용해서 인수분해

$f'(x)=-4x^3+4ax+4(a-1)=-4(x+1)(x^2-x-a+1)$

사차함수 $f(x)$가 극솟값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖거나 한 실근과 중근을 갖거나 삼중근을 가져야 한다.

(i) $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖는 경우

$-4(x+1)(x^2-x-a+1)=0$의 한 근이 $x=-1$이므로 이차방정식 $x^2-x-a+1=0$이 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2-x-a+1=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=1-4(-a+1)<0$, $4a-3<0$

$\therefore a<\frac{3}{4}$

(ii) $f'(x)=0$이 한 실근과 중근을 갖는 경우

$-4(x+1)(x^2-x-a+1)=0$의 한 근이 $x=-1$이므로 이차방정식 $x^2-x-a+1=0$이 $x=-1$을 한 근으로 갖거나 -1이 아닌 실수를 중근으로 가져야 한다.

$x^2-x-a+1=0$이 $x=-1$을 한 근으로 가지면

$1+1-a+1=0 \quad \therefore a=3$ ……… ㉠

$x^2-x-a+1=0$이 -1이 아닌 실수를 중근으로 가지면 판별식을 D라고 할 때

$D=1-4(-a+1)=0,\ 4a-3=0$

$\therefore a=\frac{3}{4}$ ……… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=\frac{3}{4}$ 또는 $a=3$

(iii) $f'(x)=0$이 삼중근을 갖는 경우

$-4(x+1)(x^2-x-a+1)=0$에서 $x^2-x-a+1=0$이 $x=-1$을 중근으로 가질 수 없으므로 삼차방정식 $f'(x)=0$은 삼중근을 가질 수 없다.

(i)~(iii)에서 $a\le\frac{3}{4}$ 또는 $a=3$

답 $a\le\frac{3}{4}$ 또는 $a=3$

참고

사차항의 계수가 음수인 사차함수 $f(x)$가 극솟값을 갖지 않으면 삼차방정식 $f'(x)=0$은 다음 중에서 하나가 성립한다.

(1) 한 실근과 두 허근을 갖는다.
(2) 한 실근과 중근을 갖는다.
(3) 삼중근을 갖는다.

13

$f(x)=3x^4-4ax^3+6ax^2$에서

$f'(x)=12x^3-12ax^2+12ax=12x(x^2-ax+a)$

사차함수 $f(x)$가 극댓값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖거나 한 실근과 중근을 갖거나 삼중근을 가져야 한다.

(i) $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖는 경우

$12x(x^2-ax+a)=0$의 한 근이 $x=0$이므로 이차방정식 $x^2-ax+a=0$이 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2-ax+a=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=a^2-4a<0,\ a(a-4)<0$

$\therefore 0<a<4$

(ii) $f'(x)=0$이 한 실근과 중근을 갖는 경우

$12x(x^2-ax+a)=0$의 한 근이 $x=0$이므로 이차방정식 $x^2-ax+a=0$이 $x=0$을 한 근으로 갖거나 0이 아닌 실수를 중근으로 가져야 한다.

$x^2-ax+a=0$이 $x=0$을 한 근으로 가지면 $a=0$ ……… ㉠

$x^2-ax+a=0$이 0이 아닌 실수를 중근으로 가지면 판별식을 D라고 할 때

$D=a^2-4a=0,\ a(a-4)=0$

$\therefore a=4\ (\because a\ne0)$ ……… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=0$ 또는 $a=4$

(iii) $f'(x)=0$이 삼중근을 갖는 경우

$12x(x^2-ax+a)=0$의 삼중근이 $x=0$이어야 하므로

$a=0$

(i)~(iii)에서 $0\le a\le4$

답 $0\le a\le4$

14

함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$의 그래프에서 $x\longrightarrow\infty$일 때 $f(x)\longrightarrow\infty$이므로 $a>0$

또, 함수의 그래프가 y축과 y축의 음의 부분에서 만나므로 $d<0$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$에서 $f'(x)=0$의 두 실근이 α, β이고, $\alpha<0<\beta$, $|\alpha|>\beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta<0$에서

$-\frac{2b}{3a}<0,\ \frac{c}{3a}<0$

이때 $a>0$이므로 $b>0$, $c<0$

함수 $g(x)=-ax^2+bx-d$의 그래프는 $-a<0$이므로 위로 볼록하고, $\frac{b}{2a}>0$이므로 축이 y축의 오른쪽에 있다. 또, $-d>0$이므로 y축과 y축의 양의 부분에서 만난다.

따라서 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ④이다.

답 ④

| 다른 풀이 |

$g(x)=-ax^2+bx-d$의 그래프는 $-a<0$이므로 위로 볼록하다.

$-ab<0$, 즉 $-a$와 b의 부호가 다르므로 축은 y축의 오른쪽에 있다.

$-d>0$이므로 y축과 y축의 양의 부분에서 만난다.

풍쌤 개념 CHECK

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 a, b, c의 부호_中 수학 3

(1) a의 부호 → 그래프의 모양으로 결정

① 아래로 볼록 ➡ $a>0$ ② 위로 볼록 ➡ $a<0$

(2) b의 부호 → 축의 위치로 결정

① 축이 y축의 왼쪽에 위치 ➡ $ab>0$ → a, b는 같은 부호

② 축이 y축과 일치 ➡ $b=0$

③ 축이 y축의 오른쪽에 위치 ➡ $ab<0$ → a, b는 다른 부호

(3) c의 부호 → y축과의 교점의 위치로 결정

① y축과의 교점이 y축의 양의 부분에 위치 ➡ $c>0$

② y축과의 교점이 원점과 일치 ➡ $c=0$

③ y축과의 교점이 y축의 음의 부분에 위치 ➡ $c<0$

15

ㄱ. 구간 (a, b)에서 $y=f(x)$의 그래프가 감소하므로 $f'(x)<0$이다. (참)

ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=a$, $x=c$에서 극댓값을 가지므로 $f'(a)=f'(c)=0$이다. (참)

ㄷ. 함수 $f(x)$가 $x=b$, $x=d$의 좌우에서 감소하다가 증가하므로 극솟값을 가지며, 극솟값은 $f(b)$, $f(d)$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

참고

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않을 때에도 $x=a$에서 극값을 가질 수 있다. 이 문제에서도 $x=b$에서 함수 $f(x)$는 미분가능하지 않지만 $x=b$의 좌우에서 감소하다가 증가하므로 극솟값을 갖는다.

16

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ($a>0$, a, b, c, d는 상수)라고 하면

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$ → $y=f'(x)$의 그래프가 아래로 볼록하므로

$y=f'(x)$의 그래프가 y축과 점 $(0, -2)$에서 만나므로

$f'(0)=-2$에서 $c=-2$

$y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -1, 2이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

$f'(-1)=0$이므로 $3a-2b-2=0$

$\therefore 3a-2b=2$ ⋯⋯⋯ ㉠

$f'(2)=0$이므로 $12a+4b-2=0$

$\therefore 6a+2b=1$ ⋯⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{3}$, $b=-\frac{1}{2}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+d$

이때 함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(-1)$, 극솟값은 $f(2)$이므로

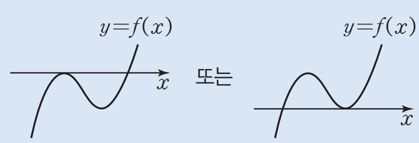
$$p-q=f(-1)-f(2)$$
$$=\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2+d\right)-\left(\frac{8}{3}-2-4+d\right)$$
$$=\frac{9}{2}$$

답 $\frac{9}{2}$

17

문제 접근하기

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 접하면 다음 그림과 같이 삼차함수의 극댓값 또는 극솟값이 0이다.



$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라고 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -1, 3이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

$f'(-1)=0$이므로 $3-2a+b=0$

$\therefore -2a+b=-3$ ⋯⋯⋯ ㉠

$f'(3)=0$이므로 $27+6a+b=0$

$\therefore 6a+b=-27$ ⋯⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=-9$

$\therefore f(x)=x^3-3x^2-9x+c$

이때 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축에 접하려면 극댓값 또는 극솟값이 0이어야 한다.

(i) $f(-1)=0$일 때 → 극대일 때 그래프가 x축에 접한다.

$-1-3+9+c=0$ $\quad\therefore c=-5$

즉, $f(x)=x^3-3x^2-9x-5$이므로 $f(0)=-5$

(ii) $f(3)=0$일 때 → 극소일 때 그래프가 x축에 접한다.

$27-27-27+c=0$ $\quad\therefore c=27$

즉, $f(x)=x^3-3x^2-9x+27$이므로 $f(0)=27$

(i), (ii)에서 모든 $f(0)$의 값의 합은

$-5+27=22$

답 22

18

$x^2-1=t$라고 하면 $-1\le x\le 2$에서 $-1\le t\le 3$

→ $-1\le x\le 2$이면 $0\le x^2\le 4$이므로 $-1\le x^2-1\le 3$

$g(t)=2t^3-3t^2+2$라고 하면

$g'(t)=6t^2-6t=6t(t-1)$

$g'(t)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=1$

$-1\le t\le 3$에서 함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$g'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(t)$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	29

함수 $g(t)$는 $t=3$일 때 최댓값 29를 갖고, $t=-1$일 때 최솟값 -3을 갖는다.

따라서 $f(x)$의 최댓값은 29, 최솟값은 -3이므로

$M=29$, $m=-3$

$\therefore M-m=29-(-3)=32$

답 ④

19

$f(x)=x^3+ax^2-a^2x+2$에서

$f'(x)=3x^2+2ax-a^2=(x+a)(3x-a)$

$f'(x)=0$에서 $x=-a$ 또는 $x=\frac{a}{3}$

구간 $[-a, a]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$-a$	$\cdots$	$\frac{a}{3}$	$\cdots$	a
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(-a)$	$\searrow$	$f\left(\frac{a}{3}\right)$	$\nearrow$	$f(a)$

함수 $f(x)$는 $x=\frac{a}{3}$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값 $f\left(\frac{a}{3}\right)$를 갖는다.

이때 $f\left(\frac{a}{3}\right)=\frac{14}{27}$이므로

$\frac{a^3}{27}+\frac{a^3}{9}-\frac{a^3}{3}+2=\frac{14}{27}$

$-5a^3=-40$, $a^3=8$

$\therefore a=2$ ($\because a>0$)

$\therefore f(x)=x^3+2x^2-4x+2$

$f(-2)=-8+8+8+2=10$, $f(2)=8+8-8+2=10$이므로 함수 $f(x)$의 최댓값은 10이다.

$\therefore M=10$

$\therefore a+M=2+10=12$

답 12

20

$f(x)=2x^3-9x^2+12x-2$에서

$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$

구간 $[0, a]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	a
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-2	↗	3	↘	2	↗	$f(a)$

이때 함수 $f(x)$의 최댓값이 7이므로 $f(a)=7$이어야 한다.

즉, $2a^3-9a^2+12a-2=7$이므로

$2a^3-9a^2+12a-9=0$

$(a-3)(2a^2-3a+3)=0$

$\therefore a=3$ ($\because 2a^2-3a+3>0$)

답 ③

참고

구간 $[0, 2]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 극댓값인 3이다. 그런데 문제에서 최댓값이 7이라고 했으므로 $a>2$이다.

21

$f(x)=\frac{1}{2}x^4-2x^3+8$이라고 하면

$f'(x)=2x^3-6x^2$

곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(t, f(t))$ $(t>0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t^3-6t^2$

이때 기울기가 최소인 접선의 기울기는 $f'(t)$의 최솟값이므로

$f'(t)=g(t)$라고 하면

$g(t)=2t^3-6t^2$에서

$g'(t)=6t^2-12t=6t(t-2)$

$g'(t)=0$에서 $t=2$ ($\because t>0$)

$t>0$에서 함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(t)$		$-$	0	$+$
$g(t)$		↘	극소	↗

함수 $g(t)$, 즉 $f'(t)$는 $t=2$일 때 극소이면서 최소이므로 곡선 $y=f(x)$ $(x>0)$ 위의 점에서 그은 접선 중 기울기가 최소인 접선의 기울기는

$f'(2)=16-24=-8$

이때 $f(2)=8-16+8=0$이므로 구하는 접선은 기울기가 -8이고, 점 $(2, 0)$을 지나는 직선이다.

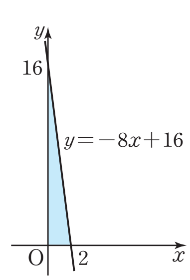
즉, 접선의 방정식은

$y=-8(x-2)$

$\therefore y=-8x+16$

따라서 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\times 2\times 16=16$



답 16

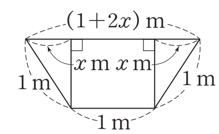
22

문제 접근하기

주어진 물통은 밑면의 모양이 등변사다리꼴인 사각기둥이다. 이때 등변사다리꼴의 한 변의 길이가 주어지지 않았으므로 등변사다리꼴의 성질을 이용하여 주어지지 않은 변의 길이를 미지수 x로 나타낸다.

주어진 물통을 밑면이 등변사다리꼴인 사각기둥으로 보면 높이는 8 m로 일정하므로 등변사다리꼴의 넓이가 최대일 때 물통의 부피는 최대가 된다.

오른쪽 그림과 같이 등변사다리꼴 모양의 철판의 가장 긴 변의 길이를 $(1+2x)$ m $(x>0)$라고 하면 높이는 $\sqrt{1-x^2}$ m이다.



이 등변사다리꼴의 넓이를 $S(x)$ m^2라고 하면

$S(x)=\frac{1}{2}\times\{(1+2x)+1\}\times\sqrt{1-x^2}$

$\quad=(1+x)\sqrt{1-x^2}$

이때 $f(x)=(1+x)^2(1-x^2)$이라고 하면 $S(x)=\sqrt{f(x)}$이고, $f(x)$가 최대일 때 $S(x)$도 최대가 된다.

$f'(x)=2(1+x)(1-x^2)+(1+x)^2(-2x)$

$\quad=-2(x+1)^2(2x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{1}{2}$ ($\because x>0$)

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	$\frac{27}{16}$	↘

$f(x)$는 $x=\frac{1}{2}$일 때 극대이면서 최대이므로 $f(x)$의 최댓값은

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{27}{16}$이다.

이때 등변사다리꼴의 넓이 $S(x)$의 최댓값은

$S\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\frac{27}{16}}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

따라서 물통의 부피의 최댓값은

$8\times\frac{3\sqrt{3}}{4}=6\sqrt{3}$ (m^3)

답 ②

06 도함수의 활용 (3)

기본을 다지는 유형

본문 093쪽

001

(1) $f(x)=x^3-3x^2+2$라고 하면

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

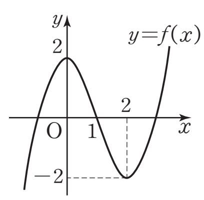
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 세 점에서 만난다.

따라서 구하는 실근의 개수는 3이다.



(2) $f(x)=x^3-3x^2$이라고 하면

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

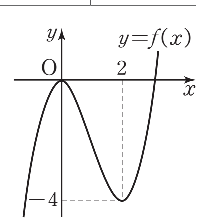
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↘	-4	↗

오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 한 점에서 만나고 다른 한 점에서 접한다.

따라서 구하는 실근의 개수는 2이다.



(3) $f(x)=x^3-3x^2-2$라고 하면

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

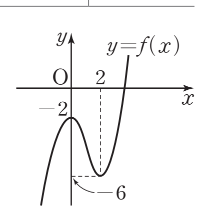
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	-2	↘	-6	↗

오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 한 점에서 만난다.

따라서 구하는 실근의 개수는 1이다.



답 (1) 3 (2) 2 (3) 1

|다른 풀이|

(1) $f(x)=x^3-3x^2+2$라고 하면

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

$f(0)f(2)=2\times(-2)=-4<0$이므로 삼차방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

따라서 구하는 실근의 개수는 3이다.

(2) $f(x)=x^3-3x^2$이라고 하면

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

$f(0)f(2)=0\times(-4)=0$이므로 삼차방정식 $f(x)=0$은 한 실근과 중근을 갖는다.

따라서 구하는 실근의 개수는 2이다.

(3) $f(x)=x^3-3x^2-2$라고 하면

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

$f(0)f(2)=-2\times(-6)=12>0$이므로 삼차방정식 $f(x)=0$은 한 실근과 두 허근을 갖는다.

따라서 구하는 실근의 개수는 1이다.

002

방정식 $2x^3+3x^2-12x-k=0$, 즉 $2x^3+3x^2-12x=k$의 실근의 개수는 곡선 $y=2x^3+3x^2-12x$와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

$f(x)=2x^3+3x^2-12x$라고 하면

$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

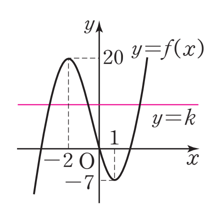
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	20	↘	-7	↗

주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

$-7<k<20$

따라서 정수 k는 -6, -5, $\cdots$, 19의 26개이다.



답 26

|다른 풀이|

$f(x)=2x^3+3x^2-12x-k$라고 하면

$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$f(-2)f(1)<0$이어야 하므로

$(-k+20)(-k-7)<0$, $(k-20)(k+7)<0$

$\therefore -7<k<20$

따라서 정수 k는 -6, -5, $\cdots$, 19의 26개이다.

003

방정식 $x^3-3x^2-9x+k=0$, 즉 $x^3-3x^2-9x=-k$의 실근의 개수는 곡선 $y=x^3-3x^2-9x$와 직선 $y=-k$의 교점의 개수와 같다.

$f(x)=x^3-3x^2-9x$라고 하면

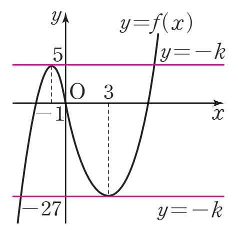
$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-27	$\nearrow$

주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 2이려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-k$가 한 점에서 만나고, 다른 한 점에서 접해야 하므로



$-k=5$ 또는 $-k=-27$

$\therefore$ $k=-5$ 또는 $k=27$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$-5+27=22$

답 ④

|다른 풀이|

$f(x)=x^3-3x^2-9x+k$라고 하면

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

삼차방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2이려면 한 개의 중근과 다른 한 실근을 가져야 하므로

$f(-1)f(3)=0$

$(k+5)(k-27)=0$

$\therefore$ $k=-5$ 또는 $k=27$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 22이다.

004

방정식 $x^3-12x-k=0$, 즉 $x^3-12x=k$의 실근의 개수는 곡선 $y=x^3-12x$와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

$f(x)=x^3-12x$라고 하면

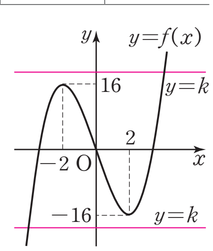
$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	16	$\searrow$	-16	$\nearrow$

주어진 방정식이 오직 하나의 실근을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 한 점에서 만나야 하므로



$k<-16$ 또는 $k>16$

따라서 음의 정수 k의 최댓값은 -17이다.

답 -17

|다른 풀이|

$f(x)=x^3-12x-k$라고 하면

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

삼차방정식 $f(x)=0$이 오직 하나의 실근을 가지려면

$f(-2)f(2)>0$이어야 하므로

$(-k+16)(-k-16)>0$

$(k-16)(k+16)>0$

$\therefore$ $k<-16$ 또는 $k>16$

따라서 음의 정수 k의 최댓값은 -17이다.

005

함수 $y=x^3-6x^2+9x$의 그래프를 y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 그래프의 함수가 $y=f(x)$이므로

$f(x)=x^3-6x^2+9x+k$

이때 방정식 $f(x)=0$에서 $x^3-6x^2+9x+k=0$, 즉 $x^3-6x^2+9x=-k$의 실근의 개수는 곡선 $y=x^3-6x^2+9x$와 직선 $y=-k$의 교점의 개수와 같다.

$g(x)=x^3-6x^2+9x$라고 하면

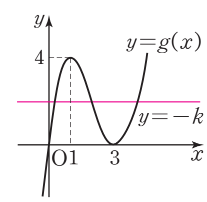
$g'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$g'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$

방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=-k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로



$0<-k<4$

$\therefore$ $-4<k<0$

따라서 정수 k의 최솟값은 -3이다.

답 -3

|다른 풀이|

함수 $y=x^3-6x^2+9x$의 그래프를 y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 그래프의 함수가 $y=f(x)$이므로

$f(x)=x^3-6x^2+9x+k$

$\therefore$ $f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$f(1)f(3)<0$이어야 하므로

$(k+4)k<0$

$\therefore$ $-4<k<0$

따라서 정수 k의 최솟값은 -3이다.

006

방정식 $x^4-4x^3+4x^2-k=0$, 즉 $x^4-4x^3+4x^2=k$의 실근의 개수는 곡선 $y=x^4-4x^3+4x^2$과 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

$f(x)=x^4-4x^3+4x^2$이라고 하면

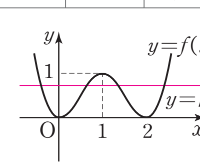
$f'(x)=4x^3-12x^2+8x=4x(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$

주어진 방정식이 서로 다른 네 실근을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 네 점에서 만나야 하므로 실수 k의 값의 범위는



$0<k<1$

답 $0<k<1$

007

방정식 $3x^4-8x^3+8-k=0$, 즉 $3x^4-8x^3+8=k$의 실근의 개수는 곡선 $y=3x^4-8x^3+8$과 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

$f(x)=3x^4-8x^3+8$이라고 하면

$f'(x)=12x^3-24x^2=12x^2(x-2)$

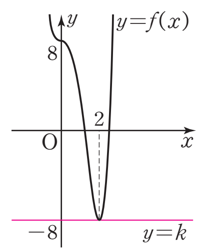
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	8	↘	-8	↗

주어진 방정식이 오직 하나의 실근만을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 한 점에서 만나야 하므로

$k=-8$



답 -8

008

방정식 $x^4-2x^2-k=0$, 즉 $x^4-2x^2=k$의 실근의 개수는 곡선 $y=x^4-2x^2$과 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

$f(x)=x^4-2x^2$이라고 하면

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

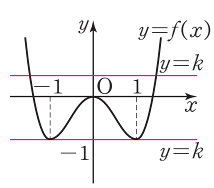
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$ ❶

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-1	↗	0	↘	-1	↗

주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$k=-1$ 또는 $k>0$



❷

따라서 구하는 자연수 k의 최솟값은 1이다. ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ $f(x)=x^4-2x^2$으로 놓고 $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ 자연수 k의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

009

방정식 $x^4+\frac{4}{3}x^3-4x^2-k=0$, 즉 $x^4+\frac{4}{3}x^3-4x^2=k$의 실근의 개수는 곡선 $y=x^4+\frac{4}{3}x^3-4x^2$과 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

$f(x)=x^4+\frac{4}{3}x^3-4x^2$이라고 하면

$f'(x)=4x^3+4x^2-8x=4x(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

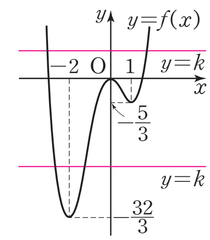
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{32}{3}$	↗	0	↘	$-\frac{5}{3}$	↗

주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$-\frac{32}{3}<k<-\frac{5}{3}$ 또는 $k>0$

따라서 상수 k의 값이 될 수 없는 것은 ③이다.



답 ③

010

방정식 $3x^4-4x^3-12x^2+3-k=0$, 즉 $3x^4-4x^3-12x^2+3=k$의 실근의 개수는 곡선 $y=3x^4-4x^3-12x^2+3$과 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+3$이라고 하면

$f'(x)=12x^3-12x^2-24x=12x(x+1)(x-2)$

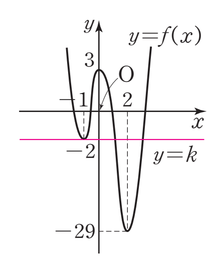
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-2	↗	3	↘	-29	↗

주어진 방정식이 한 개의 음수인 근과 서로 다른 두 개의 양수인 근을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 한 개는 음수이고, 다른 두 개는 양수이어야 하므로

$k=-2$



답 ②

011

두 곡선 $y=x^3+4x^2-3x$, $y=x^2+6x+k$가 오직 한 점에서 만나려면 방정식 $x^3+4x^2-3x=x^2+6x+k$, 즉 $x^3+3x^2-9x-k=0$이 오직 한 개의 실근만을 가져야 한다.

방정식 $x^3+3x^2-9x-k=0$, 즉 $x^3+3x^2-9x=k$의 실근의 개수는 곡선 $y=x^3+3x^2-9x$와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

$f(x)=x^3+3x^2-9x$라고 하면

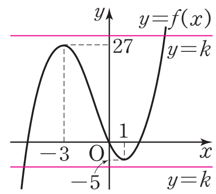
$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	27	↘	-5	↗

방정식 $x^3+3x^2-9x-k=0$이 오직 한 개의 실근만을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 한 점에서 만나야 하므로



$k<-5$ 또는 $k>27$
따라서 $\alpha=-5$, $\beta=27$이므로
$\alpha+\beta=-5+27=22$

답 22

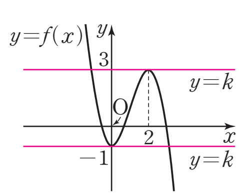
|다른 풀이|
두 곡선 $y=x^3+4x^2-3x$, $y=x^2+6x+k$가 오직 한 점에서 만나려면 방정식 $x^3+4x^2-3x=x^2+6x+k$, 즉 $x^3+3x^2-9x-k=0$이 오직 한 개의 실근만을 가져야 한다.
$f(x)=x^3+3x^2-9x-k$라고 하면
$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$
삼차방정식 $f(x)=0$이 오직 한 개의 실근만을 가지려면
$f(-3)f(1)>0$이어야 하므로
$(-k+27)(-k-5)>0$
$(k-27)(k+5)>0$
$\therefore k<-5$ 또는 $k>27$
따라서 $\alpha=-5$, $\beta=27$이므로
$\alpha+\beta=-5+27=22$

012

두 곡선 $y=2x^2-1$, $y=x^3-x^2+k$가 만나는 점의 개수가 2가 되려면 방정식 $2x^2-1=x^3-x^2+k$, 즉 $-x^3+3x^2-1-k=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.
방정식 $-x^3+3x^2-1-k=0$, 즉 $-x^3+3x^2-1=k$의 실근의 개수는 곡선 $y=-x^3+3x^2-1$과 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.
$f(x)=-x^3+3x^2-1$이라고 하면
$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$

방정식 $-x^3+3x^2-1=k$가 서로 다른 두 실근을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 한 점에서 만나고, 다른 한 점에서 접해야 하므로 양수 k의 값은 3이다.



답 ③

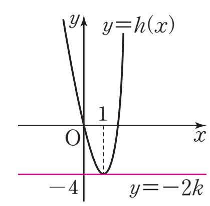
|다른 풀이|
두 곡선 $y=2x^2-1$, $y=x^3-x^2+k$가 만나는 점의 개수가 2가 되려면 방정식 $2x^2-1=x^3-x^2+k$, 즉 $x^3-3x^2+1+k=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.
$f(x)=x^3-3x^2+1+k$라고 하면
$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$
삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면
$f(0)f(2)=0$이어야 하므로
$(k+1)(k-3)=0$
$\therefore k=-1$ 또는 $k=3$
따라서 양수 k의 값은 3이다.

013

두 함수 $f(x)=x^4-5x+k$, $g(x)=-x^2+x-k$의 그래프가 오직 한 점에서 만나려면 방정식 $x^4-5x+k=-x^2+x-k$, 즉 $x^4+x^2-6x+2k=0$이 오직 한 개의 실근만을 가져야 한다.
방정식 $x^4+x^2-6x+2k=0$, 즉 $x^4+x^2-6x=-2k$의 실근의 개수는 곡선 $y=x^4+x^2-6x$와 직선 $y=-2k$의 교점의 개수와 같다.
$h(x)=x^4+x^2-6x$라고 하면
$h'(x)=4x^3+2x-6=2(x-1)(2x^2+2x+3)$
$h'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because 2x^2+2x+3>0$)
함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\searrow$	-4	$\nearrow$

방정식 $x^4+x^2-6x+2k=0$이 오직 한 개의 실근만을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=h(x)$와 직선 $y=-2k$가 한 점에서 만나야 하므로



$-2k=-4$ $\qquad\therefore k=2$

답 ②

014

$f(x)=x^4+4x+k$라고 하면
$f'(x)=4x^3+4=4(x+1)(x^2-x+1)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ ($\because x^2-x+1>0$)
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$k-3$	$\nearrow$

실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극소이면서 최소이다.
즉, 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq0$이려면 $f(-1)\geq0$이어야 하므로
$k-3\geq0$ $\qquad\therefore k\geq3$
따라서 정수 k의 최솟값은 3이다.

답 ⑤

015

$6x^4-4x^3+x^2-k\geq3x^4+x^2$에서 $3x^4-4x^3-k\geq0$
$f(x)=3x^4-4x^3-k$라고 하면
$f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-k$	$\searrow$	$-k-1$	$\nearrow$

실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge 0$이려면 $f(1)\ge 0$이어야 하므로

$-k-1\ge 0 \qquad \therefore k\le -1$

따라서 정수 k의 최댓값은 -1이다.

답 ③

016

$-4x^4-x+k\le -3x^4-5x+6$에서 $x^4-4x-k+6\ge 0$

$f(x)=x^4-4x-k+6$이라고 하면

$f'(x)=4x^3-4=4(x-1)(x^2+x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=1\ (\because x^2+x+1>0)$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-k+3$	$\nearrow$

실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge 0$이려면 $f(1)\ge 0$이어야 하므로

$-k+3\ge 0,\ -k\ge -3$

$\therefore k\le 3$

따라서 모든 자연수 k의 값의 합은

$1+2+3=6$

답 ④

017

$f(x)\ge g(x)$에서 $x^4-2x\ge 2x^2-2x+k$

$\therefore x^4-2x^2-k\ge 0$ ······ ❶

$h(x)=x^4-2x^2-k$라고 하면

$h'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

$h'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\searrow$	$-k-1$	$\nearrow$	$-k$	$\searrow$	$-k-1$	$\nearrow$

실수 전체의 집합에서 함수 $h(x)$는 $x=-1,\ x=1$에서 극소이면서 최소이다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $h(x)\ge 0$이려면 $h(-1)\ge 0,\ h(1)\ge 0$이어야 하므로

$-k-1\ge 0,\ -k\ge 1$

$\therefore k\le -1$ ······ ❷

따라서 정수 k의 최댓값은 -1이다. ······ ❸

답 -1

채점 기준	비율
❶ 부등식을 간단히 할 수 있다.	20 %
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	60 %
❸ 정수 k의 최댓값을 구할 수 있다.	20 %

참고

모든 실수 x에서 부등식 $f(x)\ge g(x)$가 성립하도록 하려면 $h(x)=f(x)-g(x)$로 놓고 부등식 $h(x)\ge 0$이 성립하도록 하면 된다.

018

$f(x)=x^4-4x-a^2+a+9$라고 하면

$f'(x)=4x^3-4=4(x-1)(x^2+x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=1\ (\because x^2+x+1>0)$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-a^2+a+6$	$\nearrow$

실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge 0$이려면 $f(1)\ge 0$이어야 하므로

$-a^2+a+6\ge 0,\ a^2-a-6\le 0$

$(a+2)(a-3)\le 0$

$\therefore -2\le a\le 3$

따라서 정수 a는 $-2,\ -1,\ \cdots,\ 3$의 6개이다.

답 ①

019

$f(x)=2x^3-3x^2+k$라고 하면

$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

$x\ge 0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	k	$\searrow$	$k-1$	$\nearrow$

$x\ge 0$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이다.

즉, $x\ge 0$일 때 $f(x)\ge 0$이려면 $f(1)\ge 0$이어야 하므로

$k-1\ge 0 \qquad \therefore k\ge 1$

따라서 상수 k의 최솟값은 1이다.

답 ②

020

$4x^3-3x^2-6x\le k$에서 $4x^3-3x^2-6x-k\le 0$

$f(x)=4x^3-3x^2-6x-k$라고 하면

$f'(x)=12x^2-6x-6=6(2x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{2}\ (\because x<0)$

$x<0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	(0)
$f'(x)$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\nearrow$	$-k+\frac{7}{4}$	$\searrow$	

$x<0$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=-\frac{1}{2}$에서 극대이면서 최대이다.

즉, $x<0$일 때 $f(x)\le 0$이려면 $f\left(-\frac{1}{2}\right)\le 0$이어야 하므로

$-k+\frac{7}{4}\le 0,\ -k\le -\frac{7}{4}$

$\therefore k\ge \frac{7}{4}$

따라서 정수 k의 최솟값은 2이다.

답 ②

021

$x^3-2x+1\geq x+k$에서 $x^3-3x-k+1\geq 0$

$f(x)=x^3-3x-k+1$이라고 하면

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because -1<x<3$)

$-1<x<3$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(-1)	$\cdots$	1	$\cdots$	(3)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$-k-1$	$\nearrow$	

$-1<x<3$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이다.

즉, $-1<x<3$일 때 $f(x)\geq 0$이려면 $f(1)\geq 0$이어야 하므로

$-k-1\geq 0$, $-k\geq 1$

$\therefore k\leq -1$

따라서 정수 k의 최댓값은 -1이다.

답 ①

022

$-x^3-6x+6>-2x^3+6x-k$에서 $x^3-12x+k+6>0$

$f(x)=x^3-12x+k+6$이라고 하면

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

이때 $x>2$이므로 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 없다.

$x>2$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(2)	$\cdots$
$f'(x)$		$+$
$f(x)$		$\nearrow$

$x>2$일 때 $f(x)>0$이려면 $f(2)>0$이어야 하므로

$k-10>0$ $\quad\therefore k>10$

따라서 자연수 k의 최솟값은 11이다.

답 ③

023

$f(x)\geq g(x)$에서 $x^3-x+6\geq x^2+a$

$\therefore x^3-x^2-x+6-a\geq 0$

$h(x)=x^3-x^2-x+6-a$라고 하면

$h'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$

$h'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because x\geq 0$)

$x\geq 0$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$	$-a+6$	$\searrow$	$-a+5$	$\nearrow$

$x\geq 0$일 때, 함수 $h(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이다.

즉, $x\geq 0$일 때 $h(x)\geq 0$이려면 $h(1)\geq 0$이어야 하므로

$-a+5\geq 0$, $-a\geq -5$

$\therefore a\leq 5$

따라서 실수 a의 최댓값은 5이다.

답 ⑤

참고

어떤 구간에서 부등식 $f(x)\geq g(x)$가 성립하도록 하려면 $h(x)=f(x)-g(x)$로 놓고 그 구간에서 부등식 $h(x)\geq 0$이 성립하도록 하면 된다.

024

(1) 시각 t에서의 점 P의 속도를 v라고 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=6t^2-8t$

따라서 $t=2$일 때 점 P의 속도는

$6\times 2^2-8\times 2=8$

(2) 시각 t에서의 점 P의 가속도를 a라고 하면

$a=\dfrac{dv}{dt}=12t-8$

따라서 $t=2$일 때 점 P의 가속도는

$12\times 2-8=16$

답 (1) 8 (2) 16

025

시각 t에서의 점 P의 가속도를 k라고 하면

$k=v'(t)=-2t+10$

이때 $t=a$에서의 점 P의 가속도가 0이므로

$k=0$에서 $-2a+10=0$, $-2a=-10$

$\therefore a=5$

답 ②

026

시각 t에서의 점 P의 속도를 v라고 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=6t^2-18t$

이때 $t=k$에서의 점 P의 속도가 24이므로

$v=24$에서 $6k^2-18k=24$, $6(k+1)(k-4)=0$

$\therefore k=4$ ($\because k\geq 0$) $\longrightarrow$ $t\geq 0 \Rightarrow k\geq 0$

답 ④

027

점 P가 원점을 지나는 순간의 위치는 0이므로

$x=0$에서 $t^3-6t^2=0$, $t^2(t-6)=0$

$\therefore t=6$ ($\because t>0$) $\longrightarrow$ 점 P가 출발 후 다시 원점을 지나므로 $t>0$

시각 t에서의 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라고 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-12t$, $a=\dfrac{dv}{dt}=6t-12$

따라서 $t=6$에서의 점 P의 가속도는

$6\times 6-12=24$

답 ③

028

시각 t에서의 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라고 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-2pt+q$, $a=\dfrac{dv}{dt}=6t-2p$ ······ ❶

이때 $t=4$에서의 점 P의 가속도가 12이므로

$a=12$에서 $6\times 4-2p=12$, $-2p=-12$

$\therefore p=6$ ······ ❷

또, $t=4$에서의 점 P의 속도가 9이므로

$v=9$에서 $3\times 4^2-2\times \underbrace{6}_{p=6\text{ 대입}}\times 4+q=9$

$\therefore q=9$ ······ ❸

따라서 $x=t^3-6t^2+9t$이므로 $t=2$에서의 점 P의 위치는

$2^3-6\times2^2+9\times2=2$ ❹

답 2

채점 기준	비율
❶ 시각 t에서의 점 P의 속도와 가속도를 구할 수 있다.	40 %
❷ p의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ q의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ $t=2$에서의 점 P의 위치를 구할 수 있다.	20 %

029

(1) 시각 t에서의 점 P의 속도를 v라고 하면

$v=\frac{dx}{dt}=-t^2+1$

운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$v=0$에서 $-t^2+1=0$, $-(t+1)(t-1)=0$

$\therefore t=1$ ($\because t>0$)

따라서 점 P가 운동 방향을 바꾸는 시각은 1이다.

(2) 시각 t에서의 점 P의 가속도를 a라고 하면

$a=\frac{dv}{dt}=-2t$

따라서 $t=1$에서의 점 P의 가속도는

→ 점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 시각

$-2\times1=-2$

답 (1) 1 (2) -2

030

시각 t에서의 점 P의 속도를 v라고 하면

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-4t-4$

운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$v=0$에서 $3t^2-4t-4=0$, $(3t+2)(t-2)=0$

$\therefore t=2$ ($\because t>0$) → 점 P가 출발 후 운동 방향을 바꾸므로 $t>0$

답 ②

031

시각 t에서의 점 P의 속도를 v라고 하면

$v=\frac{dx}{dt}=2t^2-10t+12$ ❶

운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$v=0$에서 $2t^2-10t+12=0$, $2(t-2)(t-3)=0$

$\therefore t=2$ 또는 $t=3$

즉, 두 번째로 운동 방향을 바꾸는 순간은 $t=3$일 때이다. ❷

이때 시각 t에서의 점 P의 가속도를 a라고 하면

$a=\frac{dv}{dt}=4t-10$

따라서 $t=3$에서의 점 P의 가속도는

$4\times3-10=2$ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ 점 P의 속도를 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ 두 번째로 운동 방향을 바꾸는 순간의 시각을 구할 수 있다.	30 %
❸ 두 번째로 운동 방향을 바꾸는 순간의 가속도를 구할 수 있다.	40 %

032

시각 t에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q라고 하면

$v_P=\frac{d}{dt}x_1(t)=3t^2-6t-24$, $v_Q=\frac{d}{dt}x_2(t)=2t-a$

운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$v_P=0$에서 $3t^2-6t-24=0$, $3(t+2)(t-4)=0$

$\therefore t=4$ ($\because t>0$)

$0<t<4$에서 $v_P<0$, $t>4$에서 $v_P>0$이므로 점 P의 운동 방향은 시각 $t=4$에서만 바뀐다.

이때 두 점 P, Q의 운동 방향이 동시에 바뀌므로 점 Q의 운동 방향도 시각 $t=4$에서 바뀌어야 한다.

즉, $t=4$일 때 $v_Q=0$이어야 하므로

$8-a=0$ $\therefore a=8$

따라서 $a=8$, $k=4$이므로

$a+k=8+4=12$

답 12

033

시각 t에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q라고 하면

$v_P=\frac{d}{dt}f(t)=6t-1$, $v_Q=\frac{d}{dt}g(t)=4t-12$

두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이면 $v_Pv_Q<0$이므로

$(6t-1)(4t-12)<0$ → 서로 반대 방향으로 움직이면 속도의 부호가 서로 반대이다.

$4(6t-1)(t-3)<0$

$\therefore \frac{1}{6}<t<3$

따라서 $\alpha=\frac{1}{6}$, $\beta=3$이므로

$6\alpha\beta=6\times\frac{1}{6}\times3=3$

답 3

034

(1) 자동차가 브레이크를 밟고 t초 후의 속도를 v m/s라고 하면

$v=\frac{dx}{dt}=40-20t$

자동차가 정지할 때의 속도는 0 m/s이므로

$v=0$에서 $40-20t=0$

$\therefore t=2$

따라서 구하는 시간은 2초이다.

(2) 자동차가 브레이크를 밟은 후 정지할 때까지 2초 동안 움직인 거리는

$40\times2-10\times2^2=40$ (m)

답 (1) 2초 (2) 40 m

035

자동차에 제동을 걸고 t초 후의 속도를 v m/s라고 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=60-2kt$

자동차가 정지할 때의 속도는 0 m/s이고, 정지할 때까지 걸린 시간은 3초이므로

$v=0$에서 $60-2k\times3=0$, $6k=60$

$\therefore k=10$

따라서 이 자동차가 3초 동안 움직인 거리는

$60\times3-10\times3^2=90$ (m)

답 90 m

036

(1) 물체의 t초 후의 속도를 v m/s라고 하면

$v=\dfrac{dh}{dt}=30-10t$

(2) 물체가 최고 높이에 도달하는 순간의 속도는 0 m/s이므로

$v=0$에서 $30-10t=0$, $-10t=-30$

$\therefore t=3$

따라서 물체가 최고 높이에 도달할 때까지 걸린 시간은 3초이다.

답 (1) $(30-10t)$ m/s (2) 3초

037

공이 지표면에 닿는 순간의 높이는 0 m이므로 → 지표면의 높이는 0 m

$h=0$에서 $10t-4t^2=0$, $-2t(2t-5)=0$

$\therefore t=\dfrac{5}{2}$ ($\because t>0$) ❶ ← 던져 올린 공이 떨어져 지표면에 닿는 순간의 시각

공의 t초 후의 속도를 v m/s라고 하면

$v=\dfrac{dh}{dt}=10-8t$ ❷

따라서 $t=\dfrac{5}{2}$일 때의 공의 속도는

$10-8\times\dfrac{5}{2}=-10$ (m/s) ❸

답 -10 m/s

채점 기준	비율
❶ 공이 지표면에 닿는 순간의 시각을 구할 수 있다.	40 %
❷ t초 후의 공의 속도를 구할 수 있다.	30 %
❸ 공이 지표면에 닿는 순간의 속도를 구할 수 있다.	30 %

038

$x(t)$가 점 P의 시각 t에서의 위치이므로 점 P가 원점을 지나는 순간은 $t=b$, $t=d$의 2번이다.

≠움직인 거리

답 ②

039

$|x(t)|$의 값이 가장 큰 $t=1$일 때 점 P가 원점에서 가장 멀리 떨어져 있다.

답 ①

040

시각 t에서의 점 P의 속도는 시각 t에 대하여 $x(t)$를 미분한 것이다. 이때 점 P가 원점을 지나는 순간은 $t=d$이고, 이때의 속도는 $x'(d)$이다.

답 ⑤

041

$t=d$의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀌므로 점 P의 운동 방향이 바뀌는 순간은 $t=d$일 때이다.

답 ④

042

위치 $x(t)$의 그래프가 $t=0$, $t=2$, $t=3$에서 x축과 만나므로

$x(t)=at(t-2)(t-3)=at^3-5at^2+6at$

$\therefore b=-5a$, $c=6a$, $d=0$

또, 위치 $x(t)$의 그래프에서 $a>0$

ㄱ. $bc=-5a\times6a=-30a^2<0$ (참)

ㄴ. 시각 t에서의 점 P의 속도를 $v(t)$라고 하면

$v(t)=\dfrac{d}{dt}x(t)=3at^2-10at+6a$

이때 $v(2)=12a-20a+6a=-2a\neq0$ ($\because a>0$)이므로 $t=2$일 때의 점 P의 속도는 0이 아니다. (거짓)

ㄷ. 시각 t에서의 점 P의 가속도는 $v'(t)$이고

$v'(t)=6at-10a$

이때 $v'\left(\dfrac{5}{3}\right)=6a\times\dfrac{5}{3}-10a=0$이므로 $t=\dfrac{5}{3}$일 때의 점 P의 가속도는 0이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

043

$\dfrac{dl}{dt}=2t+2$이므로 ③이다.

답 ③

044

$\dfrac{dl}{dt}=-t-1$이므로 $t=3$에서의 초의 길이의 변화율은

$-3-1=-4$

답 ④

045

$\dfrac{dl}{dt}=3t^2-4t$이므로 $t=2$에서의 고무줄 길이의 변화율은

$3\times2^2-4\times2=4$

답 ④

046

t초 후 정사각형의 한 변의 길이는 $(12+2t)$ cm

시각 t에서의 정사각형의 한 대각선의 길이를 l cm라고 하면

$l=(12+2t)\sqrt{2}=2\sqrt{2}t+12\sqrt{2}$

시각 t에서의 정사각형의 한 대각선의 길이의 변화율은

$\dfrac{dl}{dt}=2\sqrt{2}$

따라서 정사각형의 한 대각선의 길이의 변화율은 $2\sqrt{2}$ cm/s이므로

$p=2\sqrt{2}$

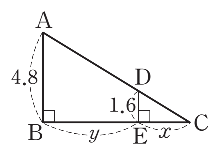
$\therefore p^2=8$

답 ⑤

047

t초 동안 현민이가 움직인 거리를 y m라고 하면 오른쪽 그림에서 $\triangle ABC \backsim \triangle DEC$이므로

AA 닮음



$4.8:1.6=(x+y):x$

$1.6(x+y)=4.8x \qquad \therefore y=2x$

이때 $y=1.6t$이므로 $2x=1.6t \qquad \therefore x=0.8t$

따라서 시각 t에서의 현민이의 그림자 길이의 변화율은

$\dfrac{dx}{dt}=0.8\,(\text{m/s})$

답 ①

048

$\dfrac{dS}{dt}=4t+4$이므로 ③이다.

답 ③

049

$\dfrac{dS}{dt}=3t^2-3$이므로 $t=2$에서의 도형의 넓이의 변화율은

$3\times 2^2-3=9$

답 ④

050

반지름의 길이가 r인 구의 겉넓이는 $4\pi r^2$이다.

시각 t에서의 구의 겉넓이를 S라고 하면

$S=4\pi\times\left(\dfrac{1}{2}t\right)^2=4\pi\times\dfrac{1}{4}t^2=\pi t^2$

시각 t에서의 구의 겉넓이의 변화율은

$\dfrac{dS}{dt}=2\pi t$

따라서 $t=4$에서의 구의 겉넓이의 변화율은

$2\pi\times 4=8\pi$

답 ④

051

t초 후 정사각형의 대각선의 길이는

$(4\sqrt{2}+\sqrt{2}t)$ cm

시각 t에서의 정사각형의 넓이를 S cm^2라고 하면

$S=\dfrac{1}{2}(4\sqrt{2}+\sqrt{2}t)^2=(4+t)^2$

한 대각선의 길이가 l인 정사각형의 넓이는 $\dfrac{1}{2}l^2$이다.

정사각형의 넓이가 25 cm^2가 되는 순간은

$S=25$에서 $(4+t)^2=25$

$t^2+8t-9=0$, $(t+9)(t-1)=0$

$\therefore t=1\ (\because t>0)$

시각 t에서의 정사각형의 넓이의 변화율은

$\dfrac{dS}{dt}=2(4+t)=8+2t$

따라서 $t=1$에서의 정사각형의 넓이의 변화율은

$8+2\times 1=10\,(\text{cm}^2/\text{s})$

답 ⑤

052

추를 던진 지 t초 후의 가장 바깥쪽 원의 반지름의 길이는 $10t$ cm이다.

시각 t에서의 가장 바깥쪽 원의 넓이를 S cm^2라고 하면

$S=(10t)^2\pi=100\pi t^2$

시각 t에서의 가장 바깥쪽 원의 넓이의 변화율은

$\dfrac{dS}{dt}=200\pi t$

따라서 $t=2$에서의 가장 바깥쪽 원의 넓이의 변화율은

$200\pi\times 2=400\pi\,(\text{cm}^2/\text{s})$

$\therefore p=400$

답 ②

053

$\dfrac{dV}{dt}=2t^2-3t+1$

답 $2t^2-3t+1$

054

$\dfrac{dV}{dt}=\dfrac{2}{3}t^2+\dfrac{2}{3}t$이므로 $t=3$에서의 도형의 부피의 변화율은

$\dfrac{2}{3}\times 3^2+\dfrac{2}{3}\times 3=6+2=8$

답 ①

055

반지름의 길이가 r인 구의 부피는 $\dfrac{4}{3}\pi r^3$이다.

시각 t에서의 구의 부피를 V라고 하면

$V=\dfrac{4}{3}\pi\times\left(\dfrac{3}{2}t\right)^3=\dfrac{4}{3}\pi\times\dfrac{27}{8}t^3=\dfrac{9}{2}\pi t^3$

시각 t에서의 부피의 변화율은

$\dfrac{dV}{dt}=\dfrac{27}{2}\pi t^2$

따라서 $t=2$에서의 구의 부피의 변화율은

$\dfrac{27}{2}\pi\times 2^2=54\pi$

답 ④

056

t초 후 정육면체의 한 모서리의 길이는

$(2+2t)$ cm

시각 t에서의 정육면체의 부피를 V cm^3라고 하면

$V=(2+2t)^3$

시각 t에서의 정육면체의 부피의 변화율은

$\dfrac{dV}{dt}=3(2+2t)^2\times 2=6(2+2t)^2$

따라서 $t=3$에서의 정육면체의 부피의 변화율은
$6(2+2\times3)^2=6\times64=384\ (\text{cm}^3/\text{s})$

답 ⑤

057

t초 후 원기둥의 밑면의 반지름의 길이는
$(5+t)$ cm
원기둥의 반지름의 길이가 8 cm가 되는 순간은
$5+t=8$
$\therefore t=3$
시각 t에서의 원기둥의 부피를 V cm^3라고 하면
$V=(5+t)^2\pi\times10$
$\quad=10\pi(5+t)^2$
시각 t에서의 원기둥의 부피의 변화율은
$\dfrac{dV}{dt}=10\pi\times2(5+t)$
$\quad=20\pi(t+5)$
따라서 $t=3$에서의 원기둥의 부피의 변화율은
$20\pi\times(3+5)=160\pi\ (\text{cm}^3/\text{s})$

답 ④

실력을 높이는 연습 문제

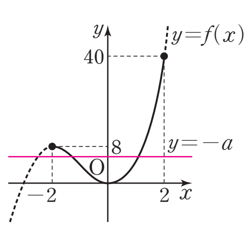
본문 105쪽

01

방정식 $2x^3+6x^2+a=0$, 즉 $2x^3+6x^2=-a$의 실근의 개수는 곡선 $y=2x^3+6x^2$과 직선 $y=-a$의 교점의 개수와 같다.
$f(x)=2x^3+6x^2$이라고 하면
$f'(x)=6x^2+12x=6x(x+2)$
$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	8	↘	0	↗	40	↗

주어진 방정식이 $-2\le x\le2$에서 서로 다른 두 실근을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 $-2\le x\le2$에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-a$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로



$0<-a\le8 \qquad \therefore -8\le a<0$
따라서 정수 a는 $-8, -7, \cdots, -1$의 8개이다.

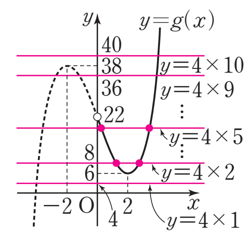
답 ③

02

삼차방정식 $x^3-12x+22-4k=0$, 즉 $x^3-12x+22=4k$의 실근의 개수는 곡선 $y=x^3-12x+22$와 직선 $y=4k$가 만나는 교점의 개수와 같다.
$g(x)=x^3-12x+22$라고 하면
$g'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$
$g'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$
함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	38	↘	6	↗

$x>0$에서 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=4k$의 교점은 오른쪽 그림과 같다.
$\therefore f(1)+f(3)+f(5)+f(7)+f(9)$
$\quad=0+2+2+1+1$
$\quad=6$



답 6

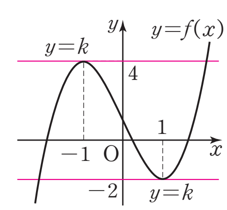
참고
삼차방정식의 양의 실근의 개수를 구하는 문제이므로 $x>0$에서 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=4k$가 만나는 교점의 개수를 구한다.

03

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	4	↘	-2	↗

방정식 $f(x)-k=0$, 즉 $f(x)=k$가 서로 다른 두 실근을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로
$k=-2$ 또는 $k=4$
따라서 모든 정수 k의 값의 곱은
$(-2)\times4=-8$



답 -8

참고
$y=f'(x)$의 그래프가 아래로 볼록하므로 함수 $y=f(x)$의 최고차항의 계수는 양수이다.

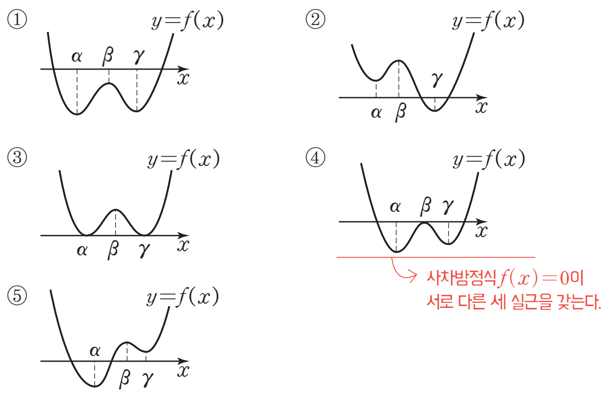
04

문제 접근하기
$f'(\alpha)=f'(\beta)=f'(\gamma)=0$을 만족시키고, $x=\alpha$, $x=\beta$, $x=\gamma$의 좌우에서 $f'(x)$의 값의 부호가 바뀌므로 $f(x)$는 $x=\alpha$, $x=\beta$, $x=\gamma$에서 극값을 갖는다.

함수 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 α, β, γ이고 $\alpha<\beta<\gamma$이므로 함수 $y=f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	γ	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

①~⑤의 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



따라서 사차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖기 위한 조건이 아닌 것은 ④이다.

답 ④

05

원점을 지나고 삼차함수 $y=x^3+2$의 그래프에 접하는 직선이 $y=x^3+2$의 그래프와 만나는 접점의 좌표를 $(t,\ t^3+2)$라고 하면

$y'=3x^2$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+2)=3t^2(x-t)$

$\therefore\ y=3t^2x-2t^3+2$

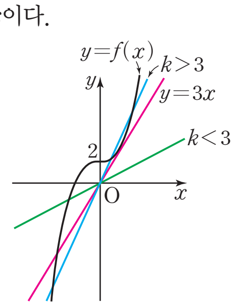
이때 이 접선이 원점을 지나므로

$-2t^3+2=0,\ t^3=1$

$\therefore\ t=1\ (\because\ t$는 실수)

즉, 원점을 지나는 접선의 방정식은 $y=3x$이다.

따라서 함수 $y=x^3+2$의 그래프와 직선 $y=kx$가 만나는 교점의 개수 $f(k)$는



$k<3$일 때 $f(k)=1$

$k=3$일 때 $f(k)=2$

$k>3$일 때 $f(k)=3$

이므로

$f(1)+f(3)+f(5)=1+2+3=6$

답 6

06

$f(x)\geq g(x)$에서

$2x^4-x^3+x^2-k\geq -x^4+3x^3+x^2+k$

$\therefore\ 3x^4-4x^3-2k\geq 0$

$h(x)=3x^4-4x^3-2k$라고 하면

$h'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$

$h'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	$-2k$	↘	$-2k-1$	↗

함수 $h(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $h(x)\geq 0$이려면 $h(1)\geq 0$이어야 하므로

$-2k-1\geq 0,\ -2k\geq 1$

$\therefore\ k\leq -\frac{1}{2}$

따라서 정수 k의 최댓값은 -1이다.

답 ①

07

$5x^3-3x^2-7x\geq x^3-x+k$에서 $4x^3-3x^2-6x-k\geq 0$

$f(x)=4x^3-3x^2-6x-k$라고 하면

$f'(x)=12x^2-6x-6=6(2x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=1\ (\because\ x\geq 0)$

$x\geq 0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$-k$	↘	$-k-5$	↗

$x\geq 0$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이다.

즉, $x\geq 0$일 때 $f(x)\geq 0$이려면 $f(1)\geq 0$이어야 하므로

$-k-5\geq 0,\ -k\geq 5$

$\therefore\ k\leq -5$

따라서 실수 k의 최댓값은 -5이다.

답 ②

08

$0<x<5$일 때, 곡선 $y=x^3-12x^2+37x-20$이 직선 $y=x+k$보다 항상 아래에 있으려면

$x^3-12x^2+37x-20<x+k$, 즉 $x^3-12x^2+36x-k-20<0$이어야 한다.

$f(x)=x^3-12x^2+36x-k-20$이라고 하면

$f'(x)=3x^2-24x+36=3(x-2)(x-6)$

$f'(x)=0$에서 $x=2\ (\because\ 0<x<5)$

$0<x<5$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	(5)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$-k+12$	↘	

$0<x<5$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극대이면서 최대이다.

즉, $0<x<5$일 때 $f(x)<0$이려면 $f(2)<0$이어야 하므로

$-k+12<0,\ -k<-12$

$\therefore\ k>12$

따라서 정수 k의 최솟값은 13이다.

답 ④

09

시각 t에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q라고 하면

$v_P=\frac{dx_P}{dt}=t^2-3,\ v_Q=\frac{dx_Q}{dt}=2t$

$v_P=v_Q$에서 $t^2-3=2t$ → 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간

$t^2-2t-3=0$

$(t+1)(t-3)=0$

$\therefore\ t=3\ (\because\ t>0)$

$t=3$에서의 점 P의 위치는

$\frac{1}{3}\times 3^3-3\times 3+10=10$

$t=3$에서의 점 Q의 위치는

$3^2-5=4$

따라서 두 점 P, Q 사이의 거리는

$|10-4|=6$

답 ①

10

문제 접근하기

수직선 위를 움직이는 점 P가 움직이는 방향을 바꿀 때의 속도는 0이다. 이때 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=f(t)$이면 시각 t에서의 점 P의 속도는 $v=\frac{dx}{dt}=f'(t)$이다.

두 점 P, Q의 중점 M의 t분 후의 좌표를 x_3이라고 하면

$x_3=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{(2t^3-9t^2)+(t^2+8t)}{2}=t^3-4t^2+4t$

시각 t에서의 세 점 P, Q, M의 속도를 각각 v_1, v_2, v_3이라고 하면

$v_1=\frac{dx_1}{dt}=6t^2-18t=6t(t-3)$

$v_2=\frac{dx_2}{dt}=2t+8=2(t+4)$

$v_3=\frac{dx_3}{dt}=3t^2-8t+4=(3t-2)(t-2)$

움직이는 방향을 바꿀 때의 속도는 0이고, 이 점의 좌우에서 속도의 부호가 바뀌어야 한다.

$v_1=0$에서 $t=3$이고, $t=3$의 좌우에서 v_1의 부호가 바뀌므로

$a=1$

$v_2=0$을 만족시키는 $0<t\le4$인 t는 존재하지 않으므로

$b=0$

$v_3=0$에서 $t=\frac{2}{3}$ 또는 $t=2$이고, $t=\frac{2}{3}$와 $t=2$의 좌우에서 모두 v_3의 부호가 바뀌므로

$c=2$

$\therefore a+b+c=1+0+2=3$

답 ③

11

기차에 제동을 걸고 t초 후의 속도를 v m/s, 가속도를 a m/s^{2}이라고 하면

$v=\frac{dx}{dt}=72-2t^2$, $a=\frac{dv}{dt}=-4t$

$t=2$일 때의 기차의 가속도는

$-4\times2=-8$ (m/s^2)

이므로 $p=-8$

기차가 정지할 때의 속도는 0 m/s이므로

$v=0$에서 $72-2t^2=0$

$-2t^2=-72$, $t^2=36$

$\therefore t=6$ ($\because t>0$)

따라서 정지할 때까지 걸린 시간은 6초이므로

$q=6$

$\therefore p+q=-8+6=-2$

답 ②

12

비행기의 바퀴가 지면에 닿고 t초 후의 속도를 v m/s라고 하면

$v=\frac{dx}{dt}=90-3t$

비행기가 정지할 때의 속도는 0 m/s이므로

$v=0$에서 $90-3t=0$, $-3t=-90$

$\therefore t=30$

따라서 비행기가 정지할 때까지 걸린 시간은 30초이므로

$p=30$

30초 동안 비행기가 움직인 거리는

$x=90\times30-\frac{3}{2}\times30^2=1350$ (m)

이므로 $q=1350$

$\therefore \frac{q}{p}=\frac{1350}{30}=45$

답 ③

13

자동차의 브레이크를 밟고 t초 후의 속도를 v m/s라고 하면

$v=\frac{dx}{dt}=40-2kt$

자동차가 멈출 때의 속도는 0 m/s이므로

$v=0$에서 $40-2kt=0$, $-2kt=-40$

$\therefore t=\frac{20}{k}$

자동차가 멈출 때까지 걸린 시간은 $\frac{20}{k}$초이고, 자동차가 멈출 때까지 달린 거리는 100 m이내이므로

$40\times\frac{20}{k}-k\times\left(\frac{20}{k}\right)^2=\frac{400}{k}\le100$

$\therefore k\ge4$

따라서 양수 k의 최솟값은 4이다.

답 ②

14

시각 t에서의 물체의 속도를 v m/s, 가속도를 a m/s^{2}이라고 하면

$v=\frac{dh}{dt}=20-10t$, $a=\frac{dv}{dt}=-10$

① $t=1$일 때, $v=20-10=10$ (m/s)이므로 쏘아 올린 지 1초 후 물체의 속도는 10 m/s이다.

② $a=-10$이므로 물체의 가속도는 -10 m/s^{2}으로 일정하다.

③ $v=0$일 때, $20-10t=0$에서 $t=2$이므로 물체가 최고 높이에 도달하는 데 걸리는 시간은 2초이다.

최고 높이에 도달했을 때 속도는 0 m/s이다.

④ $t=2$일 때 $h=25+20\times2-5\times2^2=45$ (m)이므로 물체가 최고 높이에 도달했을 때, 지면으로부터의 높이는 45 m이다.

⑤ 물체가 지면에 닿는 순간의 높이는 0 m이므로

$h=0$에서 $25+20t-5t^2=0$, $-5(t+1)(t-5)=0$

$\therefore t=5$ ($\because t>0$)

즉, 물체가 지면에 도착할 때까지 걸린 시간은 5초이다.

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

답 ④

15

지상 1000 m 상공에서 낙하산의 조절 장치를 누르므로 조절 장치를 누르는 순간의 시각은 $h=1000$에서 $3000-5t^2=1000$

$-5t^2=-2000$, $t^2=400$

$\therefore t=20\ (\because t>0)$

시각 t에서의 스카이다이버의 속도는

$\dfrac{dh}{dt}=-10t$

따라서 $t=20$에서의 스카이다이버의 속도는

$-10\times20=-200\ (\mathrm{m/s})$

답 -200 m/s

16

문제 접근하기

시각 t에서의 위치를 미분한 것이 그 점에서의 속도이다. 즉, 위치 그래프의 한 점에서의 접선의 기울기가 속도이므로 위치 그래프에서 극대 또는 극소일 때의 속도는 0이다.

ㄱ. 두 점 P, Q는 $t=b$, $t=d$일 때, 즉 두 번 만난다. (참)

ㄴ. $t=b$에서 두 점 P, Q의 속도 $f'(b)$, $g'(b)$는 각각 $t=b$에서의 $y=f(t)$의 그래프와 $y=g(t)$의 그래프의 접선의 기울기이므로

$f'(b)<0<g'(b)$

또, $t=d$에서 두 점 P, Q의 속도 $f'(d)$, $g'(d)$는 각각 $t=d$에서의 $y=f(t)$의 그래프와 $y=g(t)$의 그래프의 접선의 기울기이므로

$0<g'(d)<f'(d)$

즉, $t=b$, $t=d$에서 두 점 P, Q의 속도는 다르다. (거짓)

ㄷ. $t=a$에서 두 점 P, Q의 속도 $f'(a)$, $g'(a)$는 각각 $t=a$에서의 $y=f(t)$의 그래프와 $y=g(t)$의 그래프의 접선의 기울기이고, $f'(a)=0$, $g'(a)>0$, 즉 $f'(a)<g'(a)$이므로 $t=a$에서의 속도는 점 P가 점 Q보다 더 작다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

답 ①

참고

ㄴ. $t=b$, $t=d$에서 두 점 P, Q의 속도가 같으려면 $f'(b)=g'(b)$, $f'(d)=g'(d)$이어야 한다.

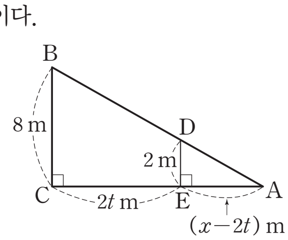
ㄷ. $y=f(t)$는 $t=a$에서 극대이므로 $f'(a)=0$이다.

17

출발한 지 t초 후의 조명 바로 밑에서부터 무대장치의 그림자 끝까지의 길이를 x m라고 하자.

무대장치가 2 m/s의 속도로 움직이고 있으므로 무대장치가 출발한 후 t초 동안 움직인 거리는 $2t$ m이다.

즉, 출발한 지 t초 후의 무대장치의 그림자의 길이는 $(x-2t)$ m이고, 오른쪽 그림에서



$\triangle ABC \backsim \triangle ADE$이므로

$8 : x=2 : (x-2t)$

$2x=8x-16t$

$\therefore x=\dfrac{8}{3}t$

따라서 시각 t에서의 길이 x의 변화율은

$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{8}{3}\ (\mathrm{m/s})$

답 ①

18

t초일 때 $\overline{AP}=2t$, $\overline{BQ}=t$이므로

$\overline{PB}=10-2t\ (0\le t\le5)$

시각 t에서의 삼각형 PBD와 삼각형 QDB의 넓이를 각각 S_P, S_Q라고 하면

$S_P=\dfrac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{PB}=\dfrac{1}{2}\times10\times(10-2t)=50-10t$

$S_Q=\dfrac{1}{2}\times\overline{DC}\times\overline{BQ}=\dfrac{1}{2}\times10\times t=5t$

시각 t에서의 사각형 DPBQ의 넓이는

$S_P+S_Q=(50-10t)+5t=50-5t$

이때 (사각형 DPBQ의 넓이)$=\dfrac{2}{5}\times$(정사각형 ABCD의 넓이)이면

$50-5t=\dfrac{2}{5}\times10\times10$

$50-5t=40$, $-5t=-10$

$\therefore t=2$

시각 t에서의 삼각형 PBQ의 넓이를 S라고 하면

$S=\dfrac{1}{2}\times(10-2t)\times t=5t-t^2$

시각 t에서의 삼각형 PBQ의 넓이의 변화율은

$\dfrac{dS}{dt}=-2t+5$

따라서 $t=2$에서의 삼각형 PBQ의 넓이의 변화율은

$-2\times2+5=1$

답 ②

19

t초 후 가로의 길이는 $(9+0.2t)$ cm, 세로의 길이는 $(4+0.3t)$ cm이고, 직사각형이 정사각형이 되는 순간 가로와 세로의 길이가 서로 같아지므로

$9+0.2t=4+0.3t$, $0.1t=5$

$\therefore t=50$

시각 t에서의 직사각형의 넓이를 S cm²라고 하면

$S=(9+0.2t)(4+0.3t)$

$\quad=0.06t^2+3.5t+36$

시각 t에서의 직사각형의 넓이의 변화율은

$\dfrac{dS}{dt}=0.12t+3.5$

직사각형이 정사각형이 되는 순간의 넓이의 변화율

따라서 $t=50$에서의 넓이의 변화율은

$0.12\times50+3.5=9.5\ (\mathrm{cm^2/초})$

답 ①

20

t초 후 구의 반지름의 길이는

$(8+t)$ cm

시각 t에서의 구의 부피를 $V\text{ cm}^3$라고 하면

$V=\frac{4}{3}\pi(8+t)^3$

시각 t에서의 부피의 변화율은

$\frac{dV}{dt}=\frac{4}{3}\pi\times3\times(8+t)^2$

$=4\pi(8+t)^2$

따라서 $t=2$에서의 구의 부피의 변화율은

$4\pi\times(8+2)^2=400\pi\ (\text{cm}^3/\text{s})$

답 $400\pi\text{ cm}^3/\text{s}$

21

t초 후 밑면의 가로와 세로의 길이는 $(2+2t)\text{ cm}$, 높이는 $(20-t)\text{ cm}$이다.

시각 t에서의 정사각기둥의 부피를 $V\text{ cm}^3$라고 하면

$V=(2+2t)^2(20-t)$

시각 t에서의 정사각기둥의 부피의 변화율은

$\frac{dV}{dt}=2(2+2t)\times2\times(20-t)-(2+2t)^2$

$=12(t+1)(-t+13)$

따라서 $t=4$에서의 정사각기둥의 부피의 변화율은

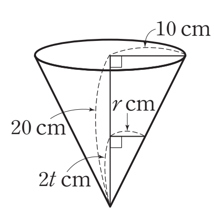
$12\times(4+1)\times(-4+13)=540\ (\text{cm}^3/\text{s})$

답 ③

22

문제 접근하기

그릇이 원뿔 모양이므로 물의 높이가 증가할수록 담긴 물의 밑면의 반지름의 길이, 즉 수면의 반지름의 길이도 증가하므로 비례식을 이용해서 시각 t에서의 길이를 구한다.



t초 후 수면의 높이는 $2t\text{ cm}$이므로 t초 후 수면의 반지름의 길이를 $r\text{ cm}$라고 하면

$r:10=2t:20$, $20r=10\times2t$

$\therefore r=t$

t초 후 그릇에 담긴 물의 부피를 $V\text{ cm}^3$라고 하면

$V=\frac{1}{3}\pi t^2\times2t=\frac{2}{3}\pi t^3$

시각 t에서의 물의 부피의 변화율은

$\frac{dV}{dt}=\frac{2}{3}\pi\times3t^2=2\pi t^2$

따라서 $t=2$에서의 물의 부피의 변화율은

$2\pi\times2^2=8\pi\ (\text{cm}^3/\text{s})$

답 ⑤

07 부정적분

기본을 다지는 유형

본문 111쪽

001

(1) $f(x)=(2x+C)'=2$

(2) $f(x)=(x^2+C)'=2x$

(3) $f(x)=(x^2+2x+C)'=2x+2$

답 (1) $f(x)=2$ (2) $f(x)=2x$ (3) $f(x)=2x+2$

002

(1) $(5x)'=5$이므로 $\int5\,dx=5x+C$

(2) $(-x^2)'=-2x$이므로 $\int(-2x)dx=-x^2+C$

(3) $(x^4)'=4x^3$이므로 $\int4x^3dx=x^4+C$

답 (1) $5x+C$ (2) $-x^2+C$ (3) x^4+C

003

$\int(ax^2-2x+b)dx=2x^3+cx^2+5x-3$에서

$ax^2-2x+b=6x^2+2cx+5$

위 식은 x에 대한 항등식이므로

$a=6$, $-2=2c$, $b=5$

즉, $a=6$, $b=5$, $c=-1$이므로

$a+b-c=6+5-(-1)=12$

답 ③

004

$f'(x)=2x$, $g'(x)=3$이므로 $\int F(x)dx=f(x)g(x)$에서

$F(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$=2x(3x-2)+3(x^2+1)$

$=6x^2-4x+3x^2+3$

$=9x^2-4x+3$

따라서 $F(x)$의 일차항의 계수는 -4이다.

답 ②

005

$\int xf(x)dx=x^3+3x^2+5$에서 $xf(x)=3x^2+6x$

즉, $xf(x)=x(3x+6)$이므로 $f(x)=3x+6$ → 함수 $f(x)$는 다항함수

$\therefore f(-1)=-3+6=3$

답 ①

006

(1) $\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)dx\right\}=f(x)$이므로

$\frac{d}{dx}\left\{\int(x^2+3x)dx\right\}=x^2+3x$

(2) $\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C$이므로

$\int\left\{\frac{d}{dx}(x^2+3x)\right\}dx=x^2+3x+C$

답 (1) x^2+3x (2) x^2+3x+C

007

$f(x)=4x^2+x+3$이므로 $f(2)=16+2+3=21$

답 ②

008

$\frac{d}{dx}\left\{\int(x^2+ax-3)dx\right\}=x^2+ax-3$이므로

$x^2+ax-3=bx^2+2x+c$

위 식은 x에 대한 항등식이므로

$a=2,\ b=1,\ c=-3$

$\therefore\ abc=2\times1\times(-3)=-6$

답 ①

009

$f(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(x^2+2x)\right\}dx=x^2+2x+C$

방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 곱이 -2이므로 $x^2+2x+C=0$에서

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$C=-2$

따라서 $f(x)=x^2+2x-2$이므로

$f(2)=4+4-2=6$

답 ①

010

$\frac{d}{dx}\left[\int\{f(x)+x\}dx\right]=f(x)+x$이므로

$f(x)+x=3x^2+2ax+b$

$f(x)=3x^2+(2a-1)x+b$

$f(0)=3$이므로 $b=3$ ······ ❶

이때 $f'(x)=6x+2a-1$이고, $f'(1)=3$이므로

$6+2a-1=3,\ 2a=-2$

$\therefore\ a=-1$ ······ ❷

따라서 $f(x)=3x^2-3x+3$이므로

$f(-1)=3+3+3=9$ ······ ❸

답 9

채점 기준	비율
❶ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $f(-1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

011

(1) $\int(-2x+3)dx=-x^2+3x+C$

(2) $\int(12x^3+6x)dx=3x^4+3x^2+C$

(3) $\int x(x+1)(x-2)dx=\int(x^3-x^2-2x)dx$

$=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2+C$

답 (1) $-x^2+3x+C$ (2) $3x^4+3x^2+C$ (3) $\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2+C$

012

$f(x)=\int x(3x+1)dx=\int(3x^2+x)dx=x^3+\frac{1}{2}x^2+C$

이때 $f(0)=-1$이므로 $C=-1$

따라서 $f(x)=x^3+\frac{1}{2}x^2-1$이므로

$f(2)=8+2-1=9$

답 9

013

$f(x)=\int(x^2+2x-3)dx-\int(x^2-4)dx$

$=\int\{(x^2+2x-3)-(x^2-4)\}dx$

$=\int(2x+1)dx=x^2+x+C$

이때 $f(1)=-3$이므로 $1+1+C=-3$

$\therefore\ C=-5$

따라서 $f(x)=x^2+x-5$이므로

$f(-2)=4-2-5=-3$

답 ①

014

$f(x)=\int\frac{x^2}{x+1}dx-\int\frac{1}{x+1}dx$

$=\int\frac{x^2-1}{x+1}dx=\int\frac{(x+1)(x-1)}{x+1}dx$

$=\int(x-1)dx=\frac{1}{2}x^2-x+C$

이때 $f(2)=8$이므로 $2-2+C=8$

$\therefore\ C=8$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+8$이므로

$f(-2)=2+2+8=12$

답 ④

015

$f(x)=\int(x+\sqrt{3})^2dx-\int(x-\sqrt{3})^2dx$

$=\int\{(x+\sqrt{3})^2-(x-\sqrt{3})^2\}dx$

$=\int\{(x+\sqrt{3})+(x-\sqrt{3})\}\{(x+\sqrt{3})-(x-\sqrt{3})\}dx$

$=\int(2x\times2\sqrt{3})dx=2\sqrt{3}x^2+C$

이때 $f(0)=0$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=2\sqrt{3}x^2$이므로 $f(1)=2\sqrt{3}$

즉, $k=2\sqrt{3}$이므로 $k^2=(2\sqrt{3})^2=12$

답 ⑤

016

$f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int(3x^2+2x+1)dx$

$=x^3+x^2+x+C$

이때 $f(0)=-2$이므로 $C=-2$

따라서 $f(x)=x^3+x^2+x-2$이므로

$f(1)=1+1+1-2=1$

답 ①

참고

함수 $f(x)$와 도함수 $f'(x)$에 대하여 $f(x)=\int f'(x)dx$가 성립함을 이용한다.

017

$f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int(3x^2-4x+k)dx$

$=x^3-2x^2+kx+C$

이때 $f(0)=3$이므로 $C=3$

$f(x)=x^3-2x^2+kx+3$이고, $f(1)=5$이므로

$1-2+k+3=5 \qquad \therefore k=3$

따라서 $f(x)=x^3-2x^2+3x+3$이므로

$f(2)=8-8+6+3=9$

답 ②

018

$f'(x)=-3x^2+4$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(-3x^2+4)dx$

$=-x^3+4x+C$

이때 $f(-1)=-2$이므로

$1-4+C=-2 \qquad \therefore C=1$

$\therefore f(x)=-x^3+4x+1$

따라서 방정식 $f(x)=0$, 즉 $-x^3+4x+1=0$의 모든 근의 곱은 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{1}{-1}=1$

답 ④

019

$f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int\{6x^2-2f(1)x\}dx$

$=2x^3-f(1)x^2+C$

이때 $f(0)=4$이므로 $C=4$

$\therefore f(x)=2x^3-f(1)x^2+4$

위 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=2-f(1)+4 \qquad \therefore f(1)=3$

따라서 $f(x)=2x^3-3x^2+4$이므로

$f(2)=16-12+4=8$

답 ④

020

$f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{2x^3+2}{x^2-x+1}dx$

$=\int\frac{2(x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1}dx$

$=\int(2x+2)dx$

$=x^2+2x+C$ ······ ❶

이때 $f(-2)=6$이므로

$4-4+C=6 \qquad \therefore C=6$ ······ ❷

따라서 $f(x)=x^2+2x+6$이므로 방정식 $f(x)=0$, 즉 $x^2+2x+6=0$의 모든 근의 합은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{2}{1}=-2$ ······ ❸

답 -2

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 적분상수를 사용하여 나타낼 수 있다.	40 %
❷ 적분상수를 구할 수 있다.	20 %
❸ 방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 합을 구할 수 있다.	40 %

021

$\int g(x)dx=x^2f(x)+C$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$

$\therefore g(2)=4f(2)+4f'(2)$

$=4\times1+4\times(-4)$

$=4-16=-12$

답 -12

022

$\int f(x)dx=xf(x)-x^3+x^2+C$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-3x^2+2x$

$xf'(x)=3x^2-2x$

$\therefore f'(x)=3x-2$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int(3x-2)dx$

$=\frac{3}{2}x^2-2x+C_1$

이때 $f(2)=5$이므로

$6-4+C_1=5 \qquad \therefore C_1=3$

따라서 $f(x)=\frac{3}{2}x^2-2x+3$이므로

$f(-2)=6+4+3=13$

답 ④

023

$F(x)+F'(x)=xf(x)-3x^2+6x$에서

$F(x)+f(x)=xf(x)-3x^2+6x$이므로 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)+f'(x)=f(x)+xf'(x)-6x+6$
$f(x)+f'(x)=f(x)+xf'(x)-6x+6$
$-(x-1)f'(x)=-6(x-1)$
$\therefore f'(x)=6$
$\therefore f(x)=\int f'(x)dx$
$=\int 6dx=6x+C$
이때 $f(2)=3$이므로
$12+C=3 \qquad \therefore C=-9$
따라서 $f(x)=6x-9$이므로 $f(k)=-3$이면
$6k-9=-3$, $6k=6$
$\therefore k=1$

답 ⑤

024

$F(x)=(x+2)f(x)-x^3+12x$의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f(x)=f(x)+(x+2)f'(x)-3x^2+12$
$(x+2)f'(x)=3x^2-12$
$(x+2)f'(x)=3(x+2)(x-2)$
$\therefore f'(x)=3x-6$
$\therefore f(x)=\int f'(x)dx$
$=\int (3x-6)dx$
$=\frac{3}{2}x^2-6x+C$
또, $F(0)=30$에서 $2f(0)=30$, 즉 $f(0)=15$이므로
$C=15$
따라서 $f(x)=\frac{3}{2}x^2-6x+15$이므로
$f(2)=6-12+15=9$

답 9

025

$f(x)+\int(x-1)f'(x)dx=2x^4-2x^3+4x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f'(x)+(x-1)f'(x)=8x^3-6x^2+8x$
$xf'(x)=8x^3-6x^2+8x$
$\therefore f'(x)=8x^2-6x+8$ ······ ❶
$\therefore f(x)=\int f'(x)dx$
$=\int(8x^2-6x+8)dx$
$=\frac{8}{3}x^3-3x^2+8x+C$ ······ ❷
이때 $f(0)=3$이므로 $C=3$
$\therefore f(x)=\frac{8}{3}x^3-3x^2+8x+3$ ······ ❸

답 $f(x)=\frac{8}{3}x^3-3x^2+8x+3$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ $f(x)$를 적분상수를 사용하여 나타낼 수 있다.	40 %
❸ $f(x)$를 구할 수 있다.	20 %

026

$f'(x)=\begin{cases} 2x-1 & (x<-1) \\ -3 & (x>-1) \end{cases}$

에서 $f(x)=\begin{cases} x^2-x+C_1 & (x<-1) \\ -3x+C_2 & (x\ge -1) \end{cases}$ ······ ㉠

이고, $f(-1)=\lim_{x\to -1-}f(x)=\lim_{x\to -1+}f(x)$이다.
이때 $f(-1)=\lim_{x\to -1-}f(x)$이므로 ㉠에서
$3+C_2=1+1+C_1 \qquad \therefore C_2-C_1=-1$
$\therefore f(0)-f(-2)=(0+C_2)-(4+2+C_1)$
$=-6+C_2-C_1$
$=-6-1=-7$

답 -7

참고
함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 $f'(x)=\begin{cases} g(x) & (x<a) \\ h(x) & (x>a) \end{cases}$이고,
$f(x)$가 $x=a$에서 연속이면
$f(x)=\begin{cases} \int g(x)dx & (x<a) \\ \int h(x)dx & (x\ge a) \end{cases}$
이고, $f(a)=\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a+}f(x)$임을 이용한다.

027

$f'(x)=\begin{cases} -4x & (x<0) \\ 2x & (x>0) \end{cases}$

에서 $f(x)=\begin{cases} -2x^2+C_1 & (x<0) \\ x^2+C_2 & (x\ge 0) \end{cases}$ ······ ㉠

이고, $f(0)=\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0+}f(x)$이다.
이때 $f(-2)=6$이므로 ㉠에서
$-8+C_1=6 \qquad \therefore C_1=14$
또, $f(0)=\lim_{x\to 0-}f(x)$이므로 ㉠에서
$C_2=14$
따라서 $f(x)=\begin{cases} -2x^2+14 & (x<0) \\ x^2+14 & (x\ge 0) \end{cases}$이므로
$f(1)=1+14=15$

답 15

028

함수 $F(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $F(x)$는 연속함수이고, $F'(x)=f(x)$이다.
$f(x)=\begin{cases} -2x & (x<0) \\ k(2x-x^2) & (x\ge 0) \end{cases}$
에서 $F(x)=\begin{cases} -x^2+C_1 & (x<0) \\ k\left(x^2-\frac{1}{3}x^3\right)+C_2 & (x\ge 0) \end{cases}$이고, 함수 $F(x)$가
$x=0$에서 연속이므로 $F(0)=\lim_{x\to 0-}F(x)=\lim_{x\to 0+}F(x)$이다.
$\therefore C_1=C_2$

즉, $F(x)=\begin{cases} -x^2+C_1 & (x<0) \\ k\left(x^2-\frac{1}{3}x^3\right)+C_1 & (x\geq 0) \end{cases}$ 이므로

$F(2)-F(-3)=21$에서

$\left(\frac{4}{3}k+C_1\right)-(-9+C_1)=21,\ \frac{4}{3}k=12$

$\therefore\ k=9$

답 9

029

$f'(x)=4|x-1|+3$

$=\begin{cases} -4(x-1)+3 & (x<1) \\ 4(x-1)+3 & (x\geq 1) \end{cases}$

$=\begin{cases} -4x+7 & (x<1) \\ 4x-1 & (x\geq 1) \end{cases}$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$f(x)=\begin{cases} -2x^2+7x+C_1 & (x<1) \\ 2x^2-x+C_2 & (x\geq 1) \end{cases}$ ······ ㉠

이고, $f(1)=\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1+}f(x)$이다.

이때 $f(0)=-6$이므로 ㉠에서

$C_1=-6$ ······ ❶

또, $f(1)=\lim_{x\to 1-}f(x)$이므로 ㉠에서

$2-1+C_2=-2+7-6$

$\therefore\ C_2=-2$ ······ ❷

따라서 $f(x)=\begin{cases} -2x^2+7x-6 & (x<1) \\ 2x^2-x-2 & (x\geq 1) \end{cases}$ 이므로

$f(3)=18-3-2=13$ ······ ❸

답 13

채점 기준	비율
❶ $x<1$일 때의 적분상수를 구할 수 있다.	40 %
❷ $x\geq 1$일 때의 적분상수를 구할 수 있다.	40 %
❸ $f(3)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

참고

함수 $f(x)$가 $x=k$에서 연속이면 다음을 모두 이용할 수 있다.

$f(k)=\lim_{x\to k}f(x)$ 또는 $f(k)=\lim_{x\to k-}f(x)$ 또는 $f(k)=\lim_{x\to k+}f(x)$

또는 $\lim_{x\to k-}f(x)=\lim_{x\to k+}f(x)$

030

$f'(x)=\begin{cases} x & (x<2) \\ 2 & (x>2) \end{cases}$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2+C_1 & (x<2) \\ 2x+C_2 & (x\geq 2) \end{cases}$ ······ ㉠

이고, $f(2)=\lim_{x\to 2-}f(x)=\lim_{x\to 2+}f(x)$이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(0,\ 2)$를 지나므로 ㉠에서

$f(0)=2\qquad \therefore\ C_1=2$

또, $f(2)=\lim_{x\to 2-}f(x)$이므로 ㉠에서

$4+C_2=2+2\qquad \therefore\ C_2=0$

따라서 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2+2 & (x<2) \\ 2x & (x\geq 2) \end{cases}$ 이므로

$f(3)=2\times 3=6$

답 ④

031

$f'(x)=-2x-1$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(-2x-1)dx$

$=-x^2-x+C$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$f(1)=0,\ -1-1+C=0\qquad \therefore\ C=2$

따라서 $f(x)=-x^2-x+2$이므로

$f(-1)=-1+1+2=2$

답 ②

참고

곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x,\ f(x))$에서의 접선의 기울기는 $f'(x)$이고 $f(x)=\int f'(x)dx$이다.

032

$f'(x)=2x+3$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int(2x+3)dx$

$=x^2+3x+C$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(0,\ -3)$을 지나므로

$f(0)=-3\qquad \therefore\ C=-3$

따라서 $f(x)=x^2+3x-3$이므로

$f(2)=4+6-3=7$

답 ③

033

$f'(x)=6x^2-2x+1$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int(6x^2-2x+1)dx$

$=2x^3-x^2+x+C$

곡선 $y=f(x)$가 원점, 즉 점 $(0,\ 0)$을 지나므로

$f(0)=0\qquad \therefore\ C=0$

따라서 $f(x)=2x^3-x^2+x$이므로 방정식 $f(x)=0$, 즉 $2x^3-x^2+x=0$의 모든 근의 합은 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{-1}{2}=\frac{1}{2}$

답 ④

034

$f'(x)=-3x^2$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(-3x^2)dx$

$=-x^3+C$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(1, 7)$을 지나므로

$f(1)=7$, $-1+C=7$ $\quad\therefore C=8$

$\therefore f(x)=-x^3+8$

곡선 $y=f(x)$가 x축과 만날 때 y좌표가 0이므로

$-x^3+8=0$, $x^3=8$

$\therefore x=2$ ($\because x$는 실수)

따라서 곡선 $y=f(x)$가 x축과 만나는 점의 좌표는 $(2, 0)$이다.

답 ⑤

035

$f(x)=\int(3x^2+4x+k)dx$에서 $f'(x)=3x^2+4x+k$

점 $(-1, 6)$에서의 접선의 기울기가 -5이므로

$f'(-1)=-5$, $3-4+k=-5$

$\therefore k=-4$ ❶

$\therefore f(x)=\int(3x^2+4x-4)dx=x^3+2x^2-4x+C$

점 $(-1, 6)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(-1)=6$, $-1+2+4+C=6$

$\therefore C=1$

즉, $f(x)=x^3+2x^2-4x+1$이므로 ❷

$a=f(2)=8+8-8+1=9$ ❸

답 9

채점 기준	비율
❶ k의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20 %

036

$$\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{3x-3}=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}\times\frac{1}{3}$$
$$=\frac{1}{3}F'(1)=\frac{1}{3}f(1)$$

따라서 구하는 값은

$\frac{1}{3}f(1)=\frac{1}{3}\times(6-4-3)=\frac{1}{3}\times(-1)=-\frac{1}{3}$

답 ②

037

$$\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(2+h)-f(2)\}-\{f(2-h)-f(2)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}$$
$$=f'(2)+f'(2)=2f'(2)$$

$f(x)=\int(x^2+2x)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2+2x$

따라서 구하는 값은

$2f'(2)=2\times(4+4)=2\times8=16$

답 ②

038

$$\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3-h)}{2h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(3+h)-f(3)\}-\{f(3-h)-f(3)\}}{2h}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}+\frac{1}{2}\lim_{h\to0}\frac{f(3-h)-f(3)}{-h}$$
$$=\frac{1}{2}f'(3)+\frac{1}{2}f'(3)=f'(3)$$

$$f(x)=\frac{d}{dx}\left\{\int3x(x-2)dx\right\}=\frac{d}{dx}\left\{\int(3x^2-6x)dx\right\}$$
$$=3x^2-6x$$

이므로 $f'(x)=6x-6$

따라서 구하는 값은

$f'(3)=18-6=12$

답 ③

039

$$\lim_{x\to-2}\frac{f(x)-f(-2)}{2x+4}=\lim_{x\to-2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{2}f'(-2)$$

$\int f(x)dx=-x^3-2x^2+3$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=-3x^2-4x$

$\therefore f'(x)=-6x-4$

따라서 구하는 값은

$\frac{1}{2}f'(-2)=\frac{1}{2}\times(12-4)=\frac{1}{2}\times8=4$

답 ①

040

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x-h)-f(x+h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(x-h)-f(x)\}-\{f(x+h)-f(x)\}}{h}$$
$$=-\lim_{h\to0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}-\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$=-f'(x)-f'(x)=-2f'(x)$ ❶

이고, $-2f'(x)=-6x^2+8x-4$이므로

$f'(x)=3x^2-4x+2$ ❷

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2-4x+2)dx$$
$$=x^3-2x^2+2x+C$$

이때 $f(1)=3$이므로

$1-2+2+C=3$ $\quad\therefore C=2$

따라서 $f(x)=x^3-2x^2+2x+2$이므로

$f(2)=8-8+4+2=6$ ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ 주어진 식의 좌변을 정리할 수 있다.	40 %
❷ $f'(x)$를 구할 수 있다.	20 %
❸ $f(2)$의 값을 구할 수 있다.	40 %

041

$f(x)=-\int(x^2-6x+5)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=-(x^2-6x+5)=-(x-1)(x-5)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=5$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=5$에서 극댓값을 가지므로

$k=5$

답 ⑤

042

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 4를 갖고, $x=2$에서 극솟값을 갖는다.

이때

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2-6x)dx$

$=x^3-3x^2+C$

이므로 $f(0)=4$에서 $C=4$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2+4$이므로 극솟값은

$f(2)=8-12+4=0$

답 ③

043

함수 $f(x)$의 최고차항이 $-x^3$이므로 $f'(x)$의 최고차항은 $-3x^2$이고, 함수 $y=f'(x)$의 그래프에서 $f'(0)=f'(2)=0$이므로

$f'(x)=-3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값을 갖고, $x=0$에서 극솟값 5를 갖는다.

이때

$f(x)=\int f'(x)dx=\int\{-3x(x-2)\}dx$

$=\int(-3x^2+6x)dx$

$=-x^3+3x^2+C$

이므로 $f(0)=5$에서 $C=5$

즉, $f(x)=-x^3+3x^2+5$이므로 극댓값은

$f(2)=-8+12+5=9$

답 9

044

$f(x)$가 삼차함수이므로 $f'(x)$는 이차함수이고,

함수 $y=f'(x)$의 그래프에서 $f'(-1)=f'(1)=0$이므로

$f'(x)=a(x+1)(x-1)$ $(a>0)$로 놓을 수 있다.

$y=f'(x)$의 그래프가 아래로 볼록하므로 $a>0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 4를 갖고, $x=1$에서 극솟값 0을 갖는다.

이때

$f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int a(x+1)(x-1)dx$

$=\int a(x^2-1)dx$

$=a\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)+C$

$f(-1)=4$에서 $\frac{2}{3}a+C=4$ ⋯⋯ ㉠

$f(1)=0$에서 $-\frac{2}{3}a+C=0$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=3$, $C=2$

따라서 $f(x)=x^3-3x+2$이므로

$f(3)=27-9+2=20$

답 ④

045

함수 $f(x)$의 최고차항이 x^3이므로 $f'(x)$의 최고차항은 $3x^2$이고,

$f'(-1)=f'(2)=0$이므로

$f'(x)=3(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 p를 갖고, $x=2$에서 극솟값 -9를 갖는다. ⋯⋯ ❶

이때

$f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int 3(x+1)(x-2)dx$

$=\int(3x^2-3x-6)dx$

$=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+C$

이므로 $f(2)=-9$에서

$8-6-12+C=-9$ $\therefore C=1$

$\therefore f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+1$ ⋯⋯ ❷

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은

$f(-1)=-1-\frac{3}{2}+6+1=\frac{9}{2}$

이므로

$p=\frac{9}{2}$

$\therefore 2p=9$ ❸

답 9

채점 기준	비율
❶ 극대, 극소일 때의 x의 값을 알 수 있다.	40 %
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ $2p$의 값을 구할 수 있다.	20 %

046

함수 $f(x)$의 한 부정적분이 $F(x)$이므로

$F'(x)=f(x)=3x^2-12x+9$

$\quad=3(x-1)(x-3)$

$F'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $F(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$F'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$F(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $F(x)$는 $x=1$에서 극댓값 6을 갖고, $x=3$에서 극솟값을 갖는다.

이때

$F(x)=\int F'(x)dx$

$\quad=\int(3x^2-12x+9)dx$

$\quad=x^3-6x^2+9x+C$

이므로 $F(1)=6$에서 $1-6+9+C=6$

$\therefore C=2$

따라서 $F(x)=x^3-6x^2+9x+2$이므로 $F(x)$의 극솟값은

$F(3)=27-54+27+2=2$

답 ④

047

함수 $f(x)$의 한 부정적분이 $F(x)$이므로

$F'(x)=f(x)$

함수 $F(x)$가 $x=4$에서 극솟값, $x=-2$에서 극댓값을 가지므로

$F'(4)=F'(-2)=0$

즉, $f(4)=f(-2)=0$이고, $f(x)$의 최고차항이 x^2이므로

$f(x)=(x+2)(x-4)$

$\quad=x^2-2x-8$

$\therefore F(x)=\int f(x)dx$

$\quad=\int(x^2-2x-8)dx$

$\quad=\frac{1}{3}x^3-x^2-8x+C$

$F(4)=-20$이므로

$\frac{64}{3}-16-32+C=-20$

$\therefore C=\frac{20}{3}$

따라서

$F(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-8x+\frac{20}{3}$

이므로 극댓값 p는

$p=F(-2)=-\frac{8}{3}-4+16+\frac{20}{3}=16$

답 ①

048

$f(x+y)=f(x)+f(y)-3$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-3$

$\therefore f(0)=3$ ㉠

한편, $f'(0)=1$이므로

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)-3-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-3}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}\ (\because ㉠)$$
$$=f'(0)=1$$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx$

$\quad=\int dx=x+C$ $=\int 1\,dx$

㉠에서 $C=3$

따라서 $f(x)=x+3$이므로

$f(-2)=-2+3=1$

답 1

049

$f(x+y)=f(x)+xy+y^2$에서 $f(x+y)-f(x)=xy+y^2$이므로

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{xh+h^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}(x+h)=x$$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int x\,dx$

$\quad=\frac{1}{2}x^2+C$

이때 $f(2)=5$이므로

$2+C=5 \qquad \therefore C=3$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+3$이므로 함수 $f(x)$의 최솟값은 $x=0$일 때 3이다.

답 3

01

$f(x)$의 한 부정적분이 $F(x)$이므로

$f(x)=F'(x)=3x^2+2ax+b$

$f(0)=1$이므로 $b=1$

$F(1)=2$이므로 $1+a+1+2=2$

$\therefore a=-2$

$\therefore ab=-2\times1=-2$

답 ①

02

$$f(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(-2x^2+4x-k)\right\}dx$$
$$=-2x^2+4x-k+C$$

방정식 $f(x)=0$, 즉 $-2x^2+4x-k+C=0$의 모든 근의 곱이 -3이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{-k+C}{-2}=-3$에서 $-k+C=6$

따라서 $f(x)=-2x^2+4x+6$이므로

$f(1)=-2+4+6=8$

답 ③

03

함수 $f(x)$의 상수항이 0이므로

$$G(x)=\int\left[\frac{d}{dx}\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx\right]dx$$
$$=\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)+C_1\}\right]dx$$
$$=\int f'(x)dx=f(x)+C$$

$$\therefore G(x)=\underbrace{\frac{1}{100}x^{100}+\frac{1}{99}x^{99}+\frac{1}{98}x^{98}+\cdots+\frac{1}{2}x^2+x}_{f(x)}+C$$

따라서 $G'(x)=x^{99}+x^{98}+x^{97}+\cdots+x+1$이므로

$$G'(-1)=(-1)^{99}+(-1)^{98}+(-1)^{97}+\cdots+(-1)+1$$
$$=(-1)+1+(-1)+1+\cdots+(-1)+1$$
$$=\{(-1)+1\}\times50=0$$

답 ③

04

$$f(x)=\int dx+2\int x\,dx+3\int x^2dx+4\int x^3dx+5\int x^4dx$$
$$=x+x^2+x^3+x^4+x^5+C$$

이때 $f(1)=5$이므로

$1+1+1+1+1+C=5$ $\quad\therefore C=0$

따라서 $f(x)=x+x^2+x^3+x^4+x^5$이므로

$f(-1)=-1+1-1+1-1=-1$

답 ①

05

$f'(1)=4$이므로 $12+6a+2b=4$에서

$3a+b=-4$ ⋯⋯ ㉠

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(12x^2+6ax+2b)dx$$
$$=4x^3+3ax^2+2bx+C_1$$

$f(0)=3$이므로 $C_1=3$

$f(1)=2$이므로 $4+3a+2b+3=2$에서

$3a+2b=-5$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=-1$

$\therefore f(x)=4x^3-3x^2-2x+3$

함수 $f(x)$의 한 부정적분이 $F(x)$이므로

$$F(x)=\int f(x)dx=\int(4x^3-3x^2-2x+3)dx$$
$$=x^4-x^3-x^2+3x+C_2$$

$$\therefore F(2)-F(1)=(16-8-4+6+C_2)-(1-1-1+3+C_2)$$
$$=(10+C_2)-(2+C_2)=8$$

답 ①

06

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq0$이어야 한다.

즉, $f'(x)=\{3x-f(1)\}(x-1)=3(x-1)^2$이어야 하므로

$f(1)=3$

이때

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int3(x-1)^2dx$$
$$=\int(3x^2-6x+3)dx=x^3-3x^2+3x+C$$

이고 $f(1)=3$이므로

$1-3+3+C=3$ $\quad\therefore C=2$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2+3x+2$이므로

$f(2)=8-12+6+2=4$

답 ②

07

$f(x)=ax^2+bx+c$ ($a\neq0$이고, a, b, c는 상수)라고 하면

$f(0)=0$이므로 $c=0$

$\therefore f(x)=ax^2+bx$

$$g(x)=\int\{x^2+f(x)\}dx$$
$$=\int(x^2+ax^2+bx)dx$$
$$=\int\{(a+1)x^2+bx\}dx$$
$$=\frac{1}{3}(a+1)x^3+\frac{b}{2}x^2+C$$

이때 $g(0)=0$이므로 $C=0$

$\therefore g(x)=\frac{1}{3}(a+1)x^3+\frac{b}{2}x^2$

$f(1)=6$이므로 $a+b=6$ ⋯⋯ ㉠

$g(-1)=1$이므로 $-\frac{1}{3}(a+1)+\frac{b}{2}=1$

$\therefore -2a+3b=8$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=4$

따라서 $g(x)=x^3+2x^2$이므로

$g(2)=8+8=16$

답 ②

08

문제 접근하기

$g(x)$가 이차함수이므로 $xg(x)$는 삼차함수이고, $\int xg(x)dx$, 즉 다항함수 $f(x)$는 사차함수이다.

조건 (나)에서 $f(x)=\int xg(x)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=xg(x)$ ⋯⋯ ㉠

조건 (다)에서 $\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}=8x^3-2x$이므로

$f'(x)-g'(x)=8x^3-2x$

$xg(x)-g'(x)=8x^3-2x$ ($\because$ ㉠) ⋯⋯ ㉡

이때 조건 (가)에서 $g(x)$는 이차함수이므로

$g(x)=ax^2+bx+c$ ($a\neq0$이고, a, b, c는 상수)라고 하면 ㉡에서

$x(ax^2+bx+c)-(2ax+b)=8x^3-2x$

$ax^3+bx^2+(c-2a)x-b=8x^3-2x$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$a=8$, $b=0$, $c-2a=-2$

$\therefore a=8$, $b=0$, $c=14$

즉, $g(x)=8x^2+14$이므로

$f(x)=\int xg(x)dx$

$=\int x(8x^2+14)dx$

$=\int (8x^3+14x)dx$

$=2x^4+7x^2+C$

이때 $f(0)=-5$이므로 $C=-5$

따라서 $f(x)=2x^4+7x^2-5$이므로

$f(1)=2+7-5=4$

답 ④

09

$f'(x)=3x^2+|2x|=\begin{cases}3x^2-2x & (x<0)\\ 3x^2+2x & (x\geq0)\end{cases}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로

$x=0$에서 연속

$f(x)=\begin{cases}x^3-x^2+C_1 & (x<0)\\ x^3+x^2+C_2 & (x\geq0)\end{cases}$ ⋯⋯ ㉠

이고, $f(0)=\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0+}f(x)$이다.

이때 $f(1)=4$이므로 ㉠에서

$1+1+C_2=4$　　$\therefore C_2=2$

또, $f(0)=\lim_{x\to0-}f(x)$이므로 ㉠에서

$C_1=2$

따라서 $f(x)=\begin{cases}x^3-x^2+2 & (x<0)\\ x^3+x^2+2 & (x\geq0)\end{cases}$이므로

$f(2)+f(-1)=(8+4+2)+(-1-1+2)=14$

답 ②

10

$f'(x)=\begin{cases}2x+1 & (|x|>1)\\ -2x+4 & (|x|<1)\end{cases}$

에서 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로

$f(x)=\begin{cases}x^2+x+C_1 & (x<-1)\\ -x^2+4x+C_2 & (-1\leq x<1)\\ x^2+x+C_3 & (x\geq1)\end{cases}$ ⋯⋯ ㉠

이때 $f(3)=7$이므로 ㉠에서

$9+3+C_3=7$　　$\therefore C_3=-5$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로 ㉠에서

$f(1)=\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)$

$1+1-5=-1+4+C_2$　　$\therefore C_2=-6$

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로 ㉠에서

$f(-1)=\lim_{x\to-1-}f(x)=\lim_{x\to-1+}f(x)$

$-1-4-6=1-1+C_1$　　$\therefore C_1=-11$

따라서 $f(x)=\begin{cases}x^2+x-11 & (x<-1)\\ -x^2+4x-6 & (-1\leq x<1)\\ x^2+x-5 & (x\geq1)\end{cases}$이므로

$f(-4)=16-4-11=1$

답 ③

11

$f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int (8x+a-1)dx$

$=4x^2+(a-1)x+C$

이차함수 $f(x)=4x^2+(a-1)x+C$의 그래프가 직선 $y=4x-2$와 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식

$4x^2+(a-1)x+C=4x-2$, 즉 $4x^2+(a-5)x+(C+2)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는다.

위 이차방정식의 두 근의 합이 -2이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{a-5}{4}=-2$, $a-5=8$

$\therefore a=13$

답 ④

12

함수 $f(x)$의 부정적분이 $F(x)$이므로

$F(x)=\int f(x)dx=\int 2x\,dx=x^2+C$

이때 $y=F_k(x)$의 그래프가 $y=F(x)$의 그래프 중에서 하나이므로 $F_k(x)=x^2+C_k$라고 하면 $F_k'(x)=2x$

$y=F_k(x)$의 그래프와 직선 $y=4x+5$가 접하므로 접점의 x좌표를 t라고 하면

$F_k'(t)=4$, $2t=4$

접선의 기울기

$\therefore t=2$

즉, 접점의 x좌표는 2이고, $y=8+5=13$이므로 접점의 좌표는 $(2, 13)$이다.

또, 함수 $y=F_k(x)$의 그래프도 점 $(2, 13)$을 지나므로

$F_k(2)=13$, $4+C_k=13$

$\therefore C_k=9$

따라서 $F_k(x)=x^2+9$이므로

$F_k(-3)=9+9=18$

답 ③

13

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1+2h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(1+h)-f(1)\}-\{f(1+2h)-f(1)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\times 2$$
$$=f'(1)-2f'(1)$$
$$=-f'(1)$$

$\int(x-1)f(x)dx=3x^4-2x^3-12x^2+18x+6$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$(x-1)f(x)=12x^3-6x^2-24x+18$$
$$=6(x-1)(2x^2+x-3)$$

이므로 $f(x)=12x^2+6x-18$

$\therefore f'(x)=24x+6$

따라서 구하는 값은

$-f'(1)=-(24+6)=-30$

답 -30

14

$$\lim_{x\to 1}\frac{xf(x)-f(1)}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{xf(x)-xf(1)+xf(1)-f(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+1}\right\}$$
$$=\lim_{x\to 1}\left[\frac{x\{f(x)-f(1)\}+(x-1)f(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+1}\right]$$
$$=\lim_{x\to 1}\left\{x\times\frac{f(x)-f(1)}{x-1}+f(1)\right\}\times\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}$$
$$=\frac{1}{2}\{f'(1)+f(1)\}$$

$$f(x)=\int(x-2)(x+2)(x^2+4)dx$$
$$=\int(x^4-16)dx$$
$$=\frac{1}{5}x^5-16x+C$$

이때 $f(0)=-\frac{1}{5}$이므로 $C=-\frac{1}{5}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{5}x^5-16x-\frac{1}{5},\ f'(x)=x^4-16$

따라서

$$p=\frac{1}{2}\{f'(1)+f(1)\}=\frac{1}{2}\left\{(1-16)+\left(\frac{1}{5}-16-\frac{1}{5}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}(-15-16)=-\frac{31}{2}$$

이므로 $2p=-31$

답 ①

15

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(x, y)$에서의 접선의 기울기가 $3x^2-12$이므로

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값을 갖고, $x=2$에서 극솟값 3을 갖는다.

이때

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2-12)dx$$
$$=x^3-12x+C$$

이므로 $f(2)=3$에서

$8-24+C=3 \qquad \therefore C=19$

따라서 $f(x)=x^3-12x+19$이므로 극댓값은

$f(-2)=-8+24+19=35$

답 35

16

문제 접근하기

삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이고 $x=k$ (k는 상수)에서 극값을 가지면 이 그래프는 원점을 지나면서 $x=-k$에서도 극값을 갖는다. 따라서 $f(x)$는 x를 인수로 갖고, $f'(x)$는 $x-k$, $x+k$를 인수로 갖는다.

삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이고, $x=1$에서 극값을 가지므로 $x=-1$에서도 극값을 갖는다.

즉, $f'(x)=a(x+1)(x-1)$ $(a\neq 0)$이라고 하면

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int a(x+1)(x-1)dx$$
$$=\int a(x^2-1)dx=a\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)+C$$

이때 $f(x)$가 원점에 대하여 대칭이므로 $f(0)=0$

$\therefore C=0$

$\therefore f(x)=a\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표는 방정식 $f(x)=0$의 실근이므로

$a\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)=0,\ \frac{1}{3}ax(x^2-3)=0$

$\frac{1}{3}ax(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})=0$

$\therefore x=\sqrt{3}$ $(\because x>0)$

답 ②

17

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극댓값, $x=-1$에서 극솟값을 가지므로 이를 만족시키도록 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

이때 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 -1, 1이므로

$f'(x)=a(x+1)(x-1)$ $(a<0)$이라고 하면

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int a(x+1)(x-1)dx$$

$$=\int a(x^2-1)dx=a\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)+C$$

$f(1)=1$에서 $-\frac{2}{3}a+C=1$

$\therefore -2a+3C=3$ ……… ㉠

$f(-1)=-3$에서 $\frac{2}{3}a+C=-3$

$\therefore 2a+3C=-9$ ……… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-3$, $C=-1$

$\therefore f(x)=-x^3+3x-1$

곡선 $f(x)=-x^3+3x-1$과 직선 $y=mx-1$이 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식 $-x^3+3x-1=mx-1$, 즉 $x\{x^2+(m-3)\}=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

이때 곡선과 직선이 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식 $x^2+(m-3)=0$이 $x=0$ 이외의 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

(판별식)>0

$-(m-3)>0$, $m-3<0$

$\therefore m<3$

답 $m<3$

18

$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+0$ $\quad\therefore f(0)=0$ ……… ㉠

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)+2xh-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(h)}{h}+2x\right\}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}+\lim_{h\to0}2x \ (\because ㉠)$$

$$=f'(0)+2x$$

$f'(0)=a$ (a는 상수)라고 하면

$f'(x)=2x+a$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(2x+a)dx$$

$$=x^2+ax+C$$

㉠에서 $f(0)=0$이므로 $C=0$

$\therefore f(x)=x^2+ax$

이때 $f(-2)=2$이므로

$4-2a=2$ $\quad\therefore a=1$

따라서 $f(x)=x^2+x=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$이므로 함수 $f(x)$는

$x=-\frac{1}{2}$일 때 최솟값 $-\frac{1}{4}$을 갖는다.

답 $-\frac{1}{4}$

08 정적분

기본을 다지는 유형

본문 125쪽

001

(1) $\int_0^1 2x\,dx=\left[x^2\right]_0^1=1-0=1$

(2) $\int_{-2}^0(3x^2+1)dx=\left[x^3+x\right]_{-2}^0=0-(-8-2)=10$

(3) $\int_{-1}^3(4x+2)dx=\left[2x^2+2x\right]_{-1}^3=(18+6)-(2-2)=24$

답 (1) 1 (2) 10 (3) 24

002

(1) $\int_1^1 f(x)dx=\int_1^1(3x^2-4x+3)dx=0$

(2) $\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_{-1}^1(3x^2-4x+3)dx=\left[x^3-2x^2+3x\right]_{-1}^1$

$=(1-2+3)-(-1-2-3)=2+6=8$

(3) $\int_1^{-1}f(x)dx=-\int_{-1}^1 f(x)dx=-8$

답 (1) 0 (2) 8 (3) -8

003

$$\int_0^1(x-1)(x+3)dx+\int_0^2(t+1)(-t+1)dt$$

$$=\int_0^1(x^2+2x-3)dx+\int_0^2(-t^2+1)dt$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+x^2-3x\right]_0^1+\left[-\frac{1}{3}t^3+t\right]_0^2$$

$$=\left(\frac{1}{3}+1-3\right)+\left(-\frac{8}{3}+2\right)$$

$$=-\frac{5}{3}-\frac{2}{3}=-\frac{7}{3}$$

답 ①

004

$$\int_0^2\frac{4x^2-1}{2x+1}dx=\int_0^2\frac{(2x+1)(2x-1)}{2x+1}dx$$

$$=\int_0^2(2x-1)dx$$

$$=\left[x^2-x\right]_0^2$$

$$=4-2=2$$

답 ③

005

$f(x)=ax+b$ ($a\neq0$, a, b는 상수)라고 하면

$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(ax+b)dx=\left[\frac{1}{2}ax^2+bx\right]_0^1=\frac{1}{2}a+b$

이므로

$\frac{1}{2}a+b=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore a+2b=1$ ……… ㉠

$$\int_{-2}^{0} xf(x)dx=\int_{-2}^{0} x(ax+b)dx$$
$$=\int_{-2}^{0}(ax^2+bx)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{2}bx^2\right]_{-2}^{0}$$
$$=0-\left(-\frac{8}{3}a+2b\right)=\frac{8}{3}a-2b$$

이므로

$\frac{8}{3}a-2b=10 \qquad \therefore 4a-3b=15$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-1$

따라서 $f(x)=3x-1$이므로

$f(2)=6-1=5$

답 ④

006

$\int_{0}^{k}(3x^2+8x-5)dx=\left[x^3+4x^2-5x\right]_{0}^{k}=k^3+4k^2-5k$

이때 $k^3+4k^2-5k=0$이므로

$k(k+5)(k-1)=0 \qquad \therefore k=1\ (\because k>0)$

답 ⑤

007

$\int_{0}^{2}x(3x+k)dx=\int_{0}^{2}(3x^2+kx)dx=\left[x^3+\frac{1}{2}kx^2\right]_{0}^{2}=8+2k$

이때 $8+2k>4$이므로

$2k>-4 \qquad \therefore k>-2$

따라서 정수 k의 최솟값은 -1이다.

답 ③

008

$f(x)=4x^3+x+k$이므로

$$\int_{0}^{2}f(x)dx=\int_{0}^{2}(4x^3+x+k)dx=\left[x^4+\frac{1}{2}x^2+kx\right]_{0}^{2}$$
$$=16+2+2k=18+2k$$

이때 $18+2k=0$이므로

$2k=-18 \qquad \therefore k=-9$

답 -9

009

$\int_{0}^{a}(2x+4)dx=\left[x^2+4x\right]_{0}^{a}=a^2+4a=(a+2)^2-4$

즉, 정적분 $\int_{0}^{a}(2x+4)dx$의 값은 $a=-2$일 때 최소이고, 그때의 정적분의 값은 -4이므로

$m=-2$, $n=-4$

$\therefore mn=(-2)\times(-4)=8$

답 ④

010

$f'(x)=-2x+1$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(-2x+1)dx$$
$$=-x^2+x+C \ \text{······ ❶}$$

$$\therefore \int_{-2}^{2}f(x)dx=\int_{-2}^{2}(-x^2+x+C)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+Cx\right]_{-2}^{2}$$
$$=\left(-\frac{8}{3}+2+2C\right)-\left(\frac{8}{3}+2-2C\right)=-\frac{16}{3}+4C$$

이때 $-\frac{16}{3}+4C=0$이므로

$4C=\frac{16}{3} \qquad \therefore C=\frac{4}{3}$ ······ ❷

따라서 $f(x)=-x^2+x+\frac{4}{3}$이므로

$3f(-1)=3\times\left(-1-1+\frac{4}{3}\right)=-2$ ······ ❸

답 -2

채점 기준	비율
❶ 정적분을 이용하여 $f(x)$의 식을 세울 수 있다.	40 %
❷ 적분상수를 구할 수 있다.	40 %
❸ $3f(-1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

011

(1) $$\int_{0}^{1}(x^2+x)dx+\int_{0}^{1}(3x+1)dx=\int_{0}^{1}(x^2+x+3x+1)dx$$
$$=\int_{0}^{1}(x^2+4x+1)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3+2x^2+x\right]_{0}^{1}$$
$$=\frac{1}{3}+2+1=\frac{10}{3}$$

(2) $$\int_{0}^{1}(x^2+x)dx+\int_{1}^{0}(3x+1)dx$$
$$=\int_{0}^{1}(x^2+x)dx-\int_{0}^{1}(3x+1)dx$$
$$=\int_{0}^{1}(x^2+x-3x-1)dx$$
$$=\int_{0}^{1}(x^2-2x-1)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2-x\right]_{0}^{1}$$
$$=\frac{1}{3}-1-1=-\frac{5}{3}$$

답 (1) $\frac{10}{3}$ (2) $-\frac{5}{3}$

012

$$\int_{0}^{-3}(x^2+1)dx+2\int_{-3}^{0}(x^2-2)dx$$
$$=-\int_{-3}^{0}(x^2+1)dx+\int_{-3}^{0}(2x^2-4)dx$$
$$=\int_{-3}^{0}(-x^2-1+2x^2-4)dx=\int_{-3}^{0}(x^2-5)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-5x\right]_{-3}^{0}$$
$$=-(-9+15)=-6$$

답 ②

013

$$\int_1^2 \frac{2x^3}{x+1}dx-\int_2^1 \frac{2}{x+1}dx$$
$$=\int_1^2 \frac{2x^3}{x+1}dx+\int_1^2 \frac{2}{x+1}dx=\int_1^2\left(\frac{2x^3}{x+1}+\frac{2}{x+1}\right)dx$$
$$=\int_1^2 \frac{2x^3+2}{x+1}dx=\int_1^2 \frac{2(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}dx$$
$$=\int_1^2 2(x^2-x+1)dx=2\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right]_1^2$$
$$=2\times\left\{\left(\frac{8}{3}-2+2\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1\right)\right\}=2\times\left(\frac{8}{3}-\frac{5}{6}\right)=\frac{11}{3}$$

따라서 $p=\frac{11}{3}$이므로 $3p=11$

답 ⑤

014

$$5\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 (5x+f(x))dx$$
$$=\int_0^1 5f(x)dx-\int_0^1 (5x+f(x))dx$$
$$=\int_0^1 (5f(x)-5x-f(x))dx=\int_0^1 (4f(x)-5x)dx$$
$$=\int_0^1 \{4(x^2+x)-5x\}dx=\int_0^1 (4x^2-x)dx$$
$$=\left[\frac{4}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{4}{3}-\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$$

답 ⑤

015

$$-\int_0^3 (x+k)^2dx+2\int_3^0 (x^2+kx-1)dx$$
$$=-\int_0^3 (x^2+2kx+k^2)dx-\int_0^3 (2x^2+2kx-2)dx$$
$$=-\int_0^3 (x^2+2kx+k^2+2x^2+2kx-2)dx$$
$$=-\int_0^3 (3x^2+4kx+k^2-2)dx$$
$$=-\left[x^3+2kx^2+k^2x-2x\right]_0^3$$
$$=-(27+18k+3k^2-6)=-3k^2-18k-21$$

이때 $-3k^2-18k-21=6$이므로

$3k^2+18k+27=0$, $3(k+3)^2=0$

$\therefore k=-3$

답 ①

016

(1) $\int_0^2 (2x+1)dx+\int_2^5 (2x+1)dx=\int_0^5 (2x+1)dx=\left[x^2+x\right]_0^5$

$=25+5=30$

(2) $\int_{-2}^{-1} (3x^2-1)dx+\int_{-1}^2 (3x^2-1)dx=\int_{-2}^2 (3x^2-1)dx$

$=\left[x^3-x\right]_{-2}^2$

$=(8-2)-(-8+2)$

$=6+6=12$

답 (1) 30 (2) 12

017

$$\int_0^4 (x-1)(x+3)dx+\int_4^2 (x^2+2x-3)dx$$
$$=\int_0^4 (x^2+2x-3)dx+\int_4^2 (x^2+2x-3)dx$$
$$=\int_0^2 (x^2+2x-3)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+x^2-3x\right]_0^2$$
$$=\frac{8}{3}+4-6=\frac{2}{3}$$

답 ②

018

$$\int_0^4 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx+\int_2^4 f(x)dx$$
$$6=3+\int_1^2 f(x)dx+5$$
$$\therefore \int_1^2 f(x)dx=-2$$

답 ②

019

$\int_{-2}^a f(x)dx=\int_{-2}^0 f(x)dx+\int_0^a f(x)dx$이므로 주어진 등식에서

$$\int_{-2}^0 f(x)dx+\int_0^a f(x)dx=\int_{-2}^0 f(x)dx$$
$$\therefore \int_0^a f(x)dx=0$$

이때 $f(x)=3x^2-16x-20$이므로

$\int_0^a (3x^2-16x-20)dx=0$, $\left[x^3-8x^2-20x\right]_0^a=0$

즉, $a^3-8a^2-20a=0$이므로

$a(a+2)(a-10)=0$

$\therefore a=10$ ($\because a>0$)

답 ④

020

$$\int_0^2 (-3x^2+5)dx-\int_a^2 (-3x^2+5)dx$$
$$=\int_0^2 (-3x^2+5)dx+\int_2^a (-3x^2+5)dx$$
$$=\int_0^a (-3x^2+5)dx$$
$$=\left[-x^3+5x\right]_0^a$$

$=-a^3+5a$ .... ❶

이때 $-a^3+5a=-100$이므로

$a^3-5a-100=0$, $(a-5)(a^2+5a+20)=0$

$\therefore a=5$ ($\because a^2+5a+20>0$) .... ❷

답 5

채점 기준	비율
❶ 주어진 등식의 좌변을 간단히 할 수 있다.	50 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	50 %

021

$$\int_{-1}^{2}f(x)dx=\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{2}f(x)dx$$
$$=\int_{-1}^{0}6x^2dx+\int_{0}^{2}(-3x^2)dx$$
$$=\Big[2x^3\Big]_{-1}^{0}+\Big[-x^3\Big]_{0}^{2}$$
$$=-(-2)+(-8)=-6$$

답 ①

022

$f(x)=\begin{cases} x+2 & (x<0) \\ -x+2 & (x\ge 0)\end{cases}$ 이므로

$$\int_{-2}^{0}f(x)dx-\int_{0}^{1}f(x)dx=\int_{-2}^{0}(x+2)dx-\int_{0}^{1}(-x+2)dx$$
$$=\Big[\frac{1}{2}x^2+2x\Big]_{-2}^{0}-\Big[-\frac{1}{2}x^2+2x\Big]_{0}^{1}$$
$$=-(2-4)-\Big(-\frac{1}{2}+2\Big)=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

023

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=1$에서도 연속이다.

즉, $f(1)=\lim\limits_{x\to 1-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1+}f(x)$이므로

$5=-1+k \qquad \therefore k=6$

따라서

$$\int_{0}^{2}f(x)dx=\int_{0}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{2}f(x)dx$$
$$=\int_{0}^{1}(-x^2+6)dx+\int_{1}^{2}(x+4)dx$$
$$=\Big[-\frac{1}{3}x^3+6x\Big]_{0}^{1}+\Big[\frac{1}{2}x^2+4x\Big]_{1}^{2}$$
$$=\Big(-\frac{1}{3}+6\Big)+(2+8)-\Big(\frac{1}{2}+4\Big)=\frac{67}{6}$$

이므로

$$6\int_{0}^{2}f(x)dx=6\times\frac{67}{6}=67$$

답 67

024

$$\int_{0}^{-1}f(x)dx-\int_{0}^{1}f(x)dx$$
$$=-\int_{-1}^{0}f(x)dx-\int_{0}^{1}f(x)dx$$
$$=-\int_{-1}^{0}(x^2+4x-2)dx-\int_{0}^{1}(3x^2-2ax+a)dx$$
$$=-\Big[\frac{1}{3}x^3+2x^2-2x\Big]_{-1}^{0}-\Big[x^3-ax^2+ax\Big]_{0}^{1}$$
$$=\Big(-\frac{1}{3}+2+2\Big)-(1-a+a)=\frac{8}{3}$$

답 ④

참고

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=0$에서도 연속이다. 즉,

$f(0)=\lim\limits_{x\to 0-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}f(x)$이므로

$a=-2$

025

$$\int_{-3}^{3}f'(x)dx=\int_{-3}^{0}f'(x)dx+\int_{0}^{3}f'(x)dx$$
$$=\Big[f(x)\Big]_{-3}^{0}+\Big[f(x)\Big]_{0}^{3}$$
$$=f(0)-f(-3)+f(3)-f(0)$$
$$=f(3)-f(-3)$$
$$=(27+9)-(-27+27)=36$$

답 ②

026

$|x-1|=\begin{cases} -x+1 & (x<1) \\ x-1 & (x\ge 1)\end{cases}$ 이므로

$$\int_{0}^{2}|x-1|dx=\int_{0}^{1}(-x+1)dx+\int_{1}^{2}(x-1)dx$$
$$=\Big[-\frac{1}{2}x^2+x\Big]_{0}^{1}+\Big[\frac{1}{2}x^2-x\Big]_{1}^{2}$$
$$=\Big(-\frac{1}{2}+1\Big)+(2-2)-\Big(\frac{1}{2}-1\Big)=1$$

답 ④

027

$|x^2(x-3)|=\begin{cases} -x^2(x-3) & (x<3) \\ x^2(x-3) & (x\ge 3)\end{cases}$ 이므로

$$\int_{0}^{4}|x^2(x-3)|dx=\int_{0}^{3}\{-x^2(x-3)\}dx+\int_{3}^{4}x^2(x-3)dx$$
$$=\int_{0}^{3}(-x^3+3x^2)dx+\int_{3}^{4}(x^3-3x^2)dx$$
$$=\Big[-\frac{1}{4}x^4+x^3\Big]_{0}^{3}+\Big[\frac{1}{4}x^4-x^3\Big]_{3}^{4}$$
$$=\Big(-\frac{81}{4}+27\Big)+(64-64)-\Big(\frac{81}{4}-27\Big)$$
$$=\frac{27}{2}$$

답 ①

028

$|x^2-1|=\begin{cases} x^2-1 & (x\le -1 \text{ 또는 } x\ge 1) \\ -x^2+1 & (-1<x<1)\end{cases}$ 이므로

$$\int_{-2}^{0}\frac{|x^2-1|}{x-1}dx$$
$$=\int_{-2}^{-1}\frac{x^2-1}{x-1}dx+\int_{-1}^{0}\frac{-x^2+1}{x-1}dx$$
$$=\int_{-2}^{-1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}dx+\int_{-1}^{0}\frac{-(x+1)(x-1)}{x-1}dx$$
$$=\int_{-2}^{-1}(x+1)dx-\int_{-1}^{0}(x+1)dx$$
$$=\Big[\frac{1}{2}x^2+x\Big]_{-2}^{-1}-\Big[\frac{1}{2}x^2+x\Big]_{-1}^{0}$$
$$=\Big(\frac{1}{2}-1\Big)-(2-2)-\Big\{-\Big(\frac{1}{2}-1\Big)\Big\}=-1$$

답 ①

029

$|x|=\begin{cases} -x & (x<0) \\ x & (x\ge 0)\end{cases}$ 이므로

$\int_{-3}^{2}(2x^3+6|x|)dx-\int_{-3}^{-2}(2x^3-6x)dx$

$=\int_{-3}^{0}(2x^3-6x)dx+\int_{0}^{2}(2x^3+6x)dx-\int_{-3}^{-2}(2x^3-6x)dx$

$=\int_{0}^{2}(2x^3+6x)dx+\int_{-2}^{-3}(2x^3-6x)dx+\int_{-3}^{0}(2x^3-6x)dx$

$=\int_{0}^{2}(2x^3+6x)dx+\int_{-2}^{0}(2x^3-6x)dx$

$=\left[\frac{1}{2}x^4+3x^2\right]_0^2+\left[\frac{1}{2}x^4-3x^2\right]_{-2}^0$

$=(8+12)+\{-(8-12)\}=24$

답 24

030

$|2x-6|=\begin{cases}-2x+6 & (x<3)\\ 2x-6 & (x\ge 3)\end{cases}$ ❶

이므로

$\int_0^a|2x-6|dx=\int_0^3(-2x+6)dx+\int_3^a(2x-6)dx$

$=\left[-x^2+6x\right]_0^3+\left[x^2-6x\right]_3^a$

$=(-9+18)+(a^2-6a)-(9-18)$

$=a^2-6a+18$ ❷

이때 $a^2-6a+18=10$이므로

$a^2-6a+8=0$, $(a-2)(a-4)=0$

$\therefore a=4\ (\because a>3)$ ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ 절댓값 기호를 포함한 식을 구간에 따라 정의할 수 있다.	20 %
❷ 주어진 등식의 좌변을 간단히 할 수 있다.	60 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20 %

031

(1) $\int_{-2}^{2}(2x+3)dx=2\int_0^2 3\,dx=2\left[3x\right]_0^2=2\times6=12$

(2) $\int_{-3}^{3}(x^2-2x)dx=2\int_0^3 x^2dx=2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^3=2\times9=18$

답 (1) 12 (2) 18

032

$\int_{-a}^{a}(x^2-3x)dx=2\int_0^a x^2dx=2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^a=\frac{2}{3}a^3$

이때 $\frac{2}{3}a^3=144$이므로

$a^3=216$ $\quad\therefore a=6$

답 ④

033

$f(x)=f(-x)$에서 $f(x)$는 우함수이므로

$\int_{-3}^{3}f(x)dx=2\int_0^3 f(x)dx=14$

$\therefore \int_0^3 f(x)dx=7$

$\int_0^3 f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx$에서

$\int_2^3 f(x)dx=\int_0^3 f(x)dx-\int_0^2 f(x)dx$

$=7-(-3)=10$

답 ④

034

$f(x)=f(-x)$에서 $f(x)$는 우함수이고, $g(x)=-g(-x)$에서 $g(x)$는 기함수이다.

$g(x)$가 기함수이므로 0이다.

$\therefore \int_{-3}^{3}\{f(x)-g(x)\}dx=\int_{-3}^{3}f(x)dx-\int_{-3}^{3}g(x)dx$

$=2\int_0^3 f(x)dx$

$=2\times3=6$

답 ②

035

$f(x)=x+x^2+x^3+\cdots+x^{10}$에서

$f'(x)=1+2x+3x^2+\cdots+10x^9$이므로

$\int_{-1}^{1}f'(x)dx=\int_{-1}^{1}(1+2x+3x^2+\cdots+10x^9)dx$

$=2\int_0^1(1+3x^2+5x^4+7x^6+9x^8)dx$

$=2\left[x+x^3+x^5+x^7+x^9\right]_0^1$

$=2(1+1+1+1+1)$

$=2\times5=10$

답 ④

036

$\int_0^2 f(t)dt=k$ (k는 상수)라고 하면 ㉠

$f(x)=4x+k$

위 식을 ㉠에 대입하면 $\int_0^2(4t+k)dt=k$

$\left[2t^2+kt\right]_0^2=k$, $8+2k=k$

$\therefore k=-8$

따라서 $f(x)=4x-8$이므로

$f(1)=4-8=-4$

답 ①

037

$\int_0^3 tf'(t)dt=k$ (k는 상수)라고 하면 ㉠

$f(x)=x^2-2x+k$

$\therefore f'(x)=2x-2$

위 식을 ㉠에 대입하면 $\int_0^3 t(2t-2)dt=k$

$\int_0^3(2t^2-2t)dt=k$, $\left[\frac{2}{3}t^3-t^2\right]_0^3=k$

$\therefore k=9$

따라서 $f(x)=x^2-2x+9$이므로

$f(2)=4-4+9=9$

답 ⑤

038

$\int_0^1 tf(t)dt=k$ (k는 상수)라고 하면 ⋯⋯ ㉠

$f(x)=4x^2+6x+k$

위 식을 ㉠에 대입하면

$\int_0^1 t(4t^2+6t+k)dt=k$

$\int_0^1 (4t^3+6t^2+kt)dt=k$

$\left[t^4+2t^3+\frac{1}{2}kt^2\right]_0^1=k$

$3+\frac{1}{2}k=k,\ \frac{1}{2}k=3$

$\therefore\ k=6$

따라서 $f(x)=4x^2+6x+6$이므로

$f(2)=16+12+6=34$

답 ⑤

039

$f(x)=-3x^2+\int_0^2 (x+1)f(t)dt$에서

$f(x)=-3x^2+(x+1)\int_0^2 f(t)dt$

$\int_0^2 f(t)dt=k$ (k는 상수)라고 하면 ⋯⋯ ㉠

$f(x)=-3x^2+(x+1)k=-3x^2+kx+k$

위 식을 ㉠에 대입하면

$\int_0^2 (-3t^2+kt+k)dt=k$

$\left[-t^3+\frac{1}{2}kt^2+kt\right]_0^2=k$

$4k-8=k,\ 3k=8$

$\therefore\ k=\frac{8}{3}$

따라서 $f(x)=-3x^2+\frac{8}{3}x+\frac{8}{3}$이므로

$f(2)=-12+\frac{16}{3}+\frac{8}{3}=-4$

답 ②

040

$\int_0^3 f(t)dt=k$ (k는 상수)라고 하면 ⋯⋯ ㉠

$f(x)=\frac{16}{9}x^2+2kx+\frac{1}{3}k^2$ ⋯⋯ ❶

위 식을 ㉠에 대입하면

$\int_0^3 \left(\frac{16}{9}t^2+2kt+\frac{1}{3}k^2\right)dt=k$

$\left[\frac{16}{27}t^3+kt^2+\frac{1}{3}k^2t\right]_0^3=k$

$16+9k+k^2=k$

$k^2+8k+16=0$

$(k+4)^2=0$

$\therefore\ k=-4$ ⋯⋯ ❷

따라서 $f(x)=\frac{16}{9}x^2-8x+\frac{16}{3}$이므로

$\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_{-1}^1 \left(\frac{16}{9}x^2-8x+\frac{16}{3}\right)dx$

$=2\int_0^1 \left(\frac{16}{9}x^2+\frac{16}{3}\right)dx$ ⟶ 우함수와 기함수 이용 $\int_{-1}^1 (-8x)dx=0$이다.

$=2\left[\frac{16}{27}x^3+\frac{16}{3}x\right]_0^1$

$=\frac{320}{27}$ ⋯⋯ ❸

답 $\frac{320}{27}$

채점 기준	비율
❶ $\int_0^3 f(t)dt=k$로 놓고 $f(x)$를 k를 사용한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\int_{-1}^1 f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	40 %

041

$\int_0^x f(t)dt=3x^3+2x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=9x^2+2$

$\therefore\ f(1)=9+2=11$

답 ③

참고

$\int_a^x f(t)dt=g(x)$ (a는 상수)가 주어지면

① 양변에 $x=a$를 대입한다. ➡ $\int_a^a f(t)dt=g(a)$ ➡ $g(a)=0$

② 양변을 x에 대하여 미분한다. ➡ $f(x)=g'(x)$

042

$f(x)=\int_1^x (t^2-2t-1)dt$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=0$ ⟶ $\int_1^1 g(t)dt=0$

$f(x)=\int_1^x (t^2-2t-1)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2-2x-1$ ⟶ $\frac{d}{dx}\int_1^x g(t)dt=g(x)$

$\therefore\ f'(1)=1-2-1=-2$

$\therefore\ f(1)+f'(1)=0+(-2)=-2$

답 ①

043

$f(x)=\int_0^x (at+3)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=ax+3$

이때 $f'(3)=12$이므로

$3a+3=12,\ 3a=9$

$\therefore\ a=3$

답 ③

044

$f(x)=\int_0^x (6t^2+1)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=6x^2+1$

$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=24+1=25$

답 25

045

$f(x)=\int_0^x (t^2+3t-4)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2+3x-4=(x+4)(x-1)$

$f'(x)=0$에서

$x=-4$ 또는 $x=1$ ❶

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-4$에서 극댓값 a, $x=1$에서 극솟값 b를 가지므로

$a=f(-4)=\int_0^{-4}(t^2+3t-4)dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2-4t\right]_0^{-4}=-\frac{64}{3}+24+16$

$=\frac{56}{3}$

$b=f(1)=\int_0^1 (t^2+3t-4)dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2-4t\right]_0^1=\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-4$

$=-\frac{13}{6}$ ❷

$\therefore a+b=\frac{56}{3}+\left(-\frac{13}{6}\right)=\frac{33}{2}$ ❸

답 $\frac{33}{2}$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

046

$f'(x)=x^2-2x+3$이라고 하면

$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h (x^2-2x+3)dx=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h f'(x)dx$

$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big[f(x)\Big]_0^h$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$

$=f'(0)=3$

답 ④

047

$F'(x)=f(x)$라고 하면

$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_1^{1+2h} f(x)dx=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big[F(x)\Big]_1^{1+2h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{F(1+2h)-F(1)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{F(1+2h)-F(1)}{2h}\times 2$

$=2F'(1)=2f(1)$

$=2\times(2-1+3)=8$

답 ⑤

048

$F'(x)=f(x)$라고 하면

$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_2^x f(t)dt=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\Big[F(t)\Big]_2^x$

$=\lim_{x\to 2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}$

$=F'(2)=f(2)$

$=-16+12+1=-3$

답 ①

049

$f'(x)=3x+k$라고 하면

$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{1-h}^{1+h}(3x+k)dx$

$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{1-h}^{1+h} f'(x)dx$

$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big[f(x)\Big]_{1-h}^{1+h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(1+h)-f(1)\}-\{f(1-h)-f(1)\}}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}$

$=f'(1)+f'(1)=2f'(1)$

이때 $2f'(1)=4$이므로 $f'(1)=2$

$3+k=2 \qquad \therefore k=-1$

답 ③

050

$f'(x)=x^2-2x$라고 하면

$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2-1}\int_1^x (t^2-2t)dt$

$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2-1}\int_1^x f'(t)dt=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2-1}\Big[f(t)\Big]_1^x$

$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{(x+1)(x-1)}$

$=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+1}\right\}=\frac{1}{2}f'(1)$

$=\frac{1}{2}\times(1-2)=-\frac{1}{2}$

답 ②

실력을 높이는 연습 문제

본문 135쪽

01

$\int_1^2 f'(x)dx=\Big[f(x)\Big]_1^2=f(2)-f(1)$

$f(x)-f(1)=x^3+4x^2-5x$의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f(2)-f(1)=8+16-10=14$

$\therefore \int_1^2 f'(x)dx=f(2)-f(1)=14$

답 ③

02

$$\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1 x(2x^2-ax+3)dx$$
$$=\int_0^1 (2x^3-ax^2+3x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^4-\frac{a}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{a}{3}+\frac{3}{2}=-\frac{a}{3}+2$$

이때 $-\frac{a}{3}+2=\frac{2}{3}$이므로

$-\frac{a}{3}=-\frac{4}{3}\qquad\therefore a=4$

답 4

03

$f(x)=ax^2+bx+c$ ($a\neq0$, a, b, c는 상수)라고 하면

$$\int_{-1}^0 f(x)dx=\int_{-1}^0 (ax^2+bx+c)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{2}bx^2+cx\right]_{-1}^0$$
$$=-\left(-\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b-c\right)$$
$$=\frac{1}{3}a-\frac{1}{2}b+c$$

이때 $\frac{1}{3}a-\frac{1}{2}b+c=0$이므로

$2a-3b+6c=0$ ········ ㉠

함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $(0,\ 4)$, $(1,\ 7)$을 지나므로

$f(0)=4$에서 $c=4$

$f(1)=7$에서 $a+b+c=7$

$\therefore a+b=3$ ········ ㉡

$c=4$를 ㉠에 대입하면

$2a-3b+24=0$

$\therefore 2a-3b=-24$ ········ ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=6$

따라서 $f(x)=-3x^2+6x+4$이므로

$f(2)=-12+12+4=4$

답 4

04

$$f(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x (t^3-1)dt=x^3-1$$
$$g(x)=\frac{d}{dx}\int_{-1}^x (t-1)dt=x-1$$

$$\therefore \int_2^3 \frac{f(x)}{g(x)}dx=\int_2^3 \frac{x^3-1}{x-1}dx=\int_2^3 \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}dx$$
$$=\int_2^3 (x^2+x+1)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x\right]_2^3$$
$$=\left(9+\frac{9}{2}+3\right)-\left(\frac{8}{3}+2+2\right)=\frac{59}{6}$$

답 $\frac{59}{6}$

05

$$2\int_0^1 (x+k)^2dx-\int_1^0 (2x+k)^2dx$$
$$=2\int_0^1 (x^2+2kx+k^2)dx+\int_0^1 (4x^2+4kx+k^2)dx$$
$$=\int_0^1 (2x^2+4kx+2k^2+4x^2+4kx+k^2)dx$$
$$=\int_0^1 (6x^2+8kx+3k^2)dx$$
$$=\Big[2x^3+4kx^2+3k^2x\Big]_0^1$$
$$=2+4k+3k^2=3\left(k+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}$$

따라서 주어진 정적분은 $k=-\frac{2}{3}$일 때 최솟값 $\frac{2}{3}$를 갖는다.

답 $\frac{2}{3}$

06

$f(x)=2x(2x+1)(x-1)=4x^3-2x^2-2x$이므로

$$\int_{-1}^{-3} \frac{f(x)}{2x^2+3}dx+\int_0^{-1} \frac{f(y)}{2y^2+3}dy-\int_{-3}^0 \frac{8x-3}{2x^2+3}dx$$
$$=-\int_{-3}^{-1} \frac{f(x)}{2x^2+3}dx-\int_{-1}^0 \frac{f(x)}{2x^2+3}dx-\int_{-3}^0 \frac{8x-3}{2x^2+3}dx$$
$$=-\int_{-3}^0 \frac{f(x)}{2x^2+3}dx-\int_{-3}^0 \frac{8x-3}{2x^2+3}dx$$
$$=-\int_{-3}^0 \frac{f(x)+8x-3}{2x^2+3}dx$$
$$=-\int_{-3}^0 \frac{4x^3-2x^2-2x+8x-3}{2x^2+3}dx$$
$$=-\int_{-3}^0 \frac{4x^3-2x^2+6x-3}{2x^2+3}dx$$
$$=-\int_{-3}^0 \frac{(2x-1)(2x^2+3)}{2x^2+3}dx$$
$$=-\int_{-3}^0 (2x-1)dx=-\Big[x^2-x\Big]_{-3}^0$$
$$=9+3=12$$

답 ⑤

07

$$\int_{-2}^a f(x)dx=\int_{-2}^0 f(x)dx+\int_0^a f(x)dx$$
$$=\int_{-2}^0 (x+3)dx+\int_0^a (-x^2+x+3)dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2+3x\right]_{-2}^0+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+3x\right]_0^a$$
$$=-(2-6)+\left(-\frac{1}{3}a^3+\frac{1}{2}a^2+3a\right)$$
$$=-\frac{1}{3}a^3+\frac{1}{2}a^2+3a+4$$

이때 $-\frac{1}{3}a^3+\frac{1}{2}a^2+3a+4=\frac{43}{6}$이므로

$2a^3-3a^2-18a+19=0$

$(a-1)(2a^2-a-19)=0$

$\therefore a=1\ (\because a$는 정수)

답 1

08

(i) $a<-1$일 때

$$\int_{-2}^{a} f(x)dx=\int_{-2}^{a}(4x-1)dx$$
$$=\left[2x^2-x\right]_{-2}^{a}$$
$$=(2a^2-a)-(8+2)$$
$$=2a^2-a-10$$

이때 $2a^2-a-10=-13$이므로

$2a^2-a+3=0$

a는 정수이므로 조건을 만족시키는 a는 존재하지 않는다.

(ii) $a\geq-1$일 때

$$\int_{-2}^{a} f(x)dx=\int_{-2}^{-1} f(x)dx+\int_{-1}^{a} f(x)dx$$
$$=\int_{-2}^{-1}(4x-1)dx+\int_{-1}^{a}(-2x-7)dx$$
$$=\left[2x^2-x\right]_{-2}^{-1}+\left[-x^2-7x\right]_{-1}^{a}$$
$$=(2+1)-(8+2)+(-a^2-7a)-(-1+7)$$
$$=-a^2-7a-13$$

이때 $-a^2-7a-13=-13$이므로

$a^2+7a=0$

$a(a+7)=0$

$\therefore a=0\ (\because a\geq-1)$

(i), (ii)에서 $a=0$

답 0

09

$$f(g(x))=x^2-x+|x^2-x|$$
$$=\begin{cases}2x^2-2x & (x\leq0 \text{ 또는 } x\geq1)\\ 0 & (0<x<1)\end{cases}$$

$$\therefore \int_{-2}^{2} f(g(x))dx$$
$$=\int_{-2}^{0} f(g(x))dx+\int_{0}^{1} f(g(x))dx+\int_{1}^{2} f(g(x))dx$$
$$=\int_{-2}^{0}(2x^2-2x)dx+\int_{0}^{1}0\,dx+\int_{1}^{2}(2x^2-2x)dx$$
$$=\left[\frac{2}{3}x^3-x^2\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{2}{3}x^3-x^2\right]_{1}^{2}$$
$$=-\left(-\frac{16}{3}-4\right)+\left(\frac{16}{3}-4\right)-\left(\frac{2}{3}-1\right)$$
$$=11$$

답 ④

10

$|x-1|=\begin{cases}-x+1 & (x<1)\\ x-1 & (x\geq1)\end{cases}$, $|x-2|=\begin{cases}-x+2 & (x<2)\\ x-2 & (x\geq2)\end{cases}$이므로

$$\int_{0}^{3}(2|x-1|+4|x-2|)dx$$
$$=\int_{0}^{1}\{2(-x+1)+4(-x+2)\}dx$$
$$+\int_{1}^{2}\{2(x-1)+4(-x+2)\}dx$$
$$+\int_{2}^{3}\{2(x-1)+4(x-2)\}dx$$
$$=\int_{0}^{1}(-6x+10)dx+\int_{1}^{2}(-2x+6)dx+\int_{2}^{3}(6x-10)dx$$
$$=\left[-3x^2+10x\right]_{0}^{1}+\left[-x^2+6x\right]_{1}^{2}+\left[3x^2-10x\right]_{2}^{3}$$
$$=(-3+10)+(-4+12)-(-1+6)+(27-30)-(12-20)$$
$$=15$$

답 ③

11

문제 접근하기

$f(x)$가 우함수이면 $\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$이고, $f(x)$가 기함수이면 $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$임을 이용하여 $\int_{-1}^{1} f(x)dx$를 간단히 한다.

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{1}(1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1})dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

(i) n이 짝수이면

$$(㉠)=2\int_{0}^{1}\{1+3x^2+\cdots+(n-1)x^{n-2}\}dx$$
$$=2\left[x+x^3+\cdots+x^{n-1}\right]_{0}^{1}$$
$$=2(1+1+\cdots+1)$$
$$=2\times\frac{(n-1)+1}{2}=n$$

$n=2k$라고 하면 $n-1=2k-1$

$\therefore k=\frac{(n-1)+1}{2}$

$\therefore n=20$

(ii) n이 홀수이면

$$(㉠)=2\int_{0}^{1}(1+3x^2+\cdots+nx^{n-1})dx$$
$$=2\left[x+x^3+\cdots+x^{n}\right]_{0}^{1}$$
$$=2(1+1+\cdots+1)$$
$$=2\times\frac{n+1}{2}=n+1$$

$n=2k-1$이라고 하면 $k=\frac{n+1}{2}$

이때 $n+1=20$이므로 $n=19$

(i), (ii)에서 자연수 n의 최댓값은 20이다.

답 20

12

$f(x)=f(-x)$이므로 $f(x)$는 우함수이고, $-xf(-x)=-xf(x)$이므로 $xf(x)$는 기함수이다.

$$\therefore \int_{-1}^{1}(x+1)f(x)dx=\int_{-1}^{1}xf(x)dx+\int_{-1}^{1}f(x)dx$$
$$=0+2\int_{0}^{1}f(x)dx=2\times3=6$$

답 6

참고

(1) (우함수) × (우함수) ➡ (우함수)

(2) (우함수) × (기함수) ➡ (기함수)

(3) (기함수) × (기함수) ➡ (우함수)

13

문제 접근하기

$f(x)=f(x+4)$에서 함수 $f(x)$는 주기가 4인 함수이므로

$$\int_6^9 f(x)dx=\int_2^5 f(x)dx=\int_2^4 f(x)dx+\int_4^5 f(x)dx$$
$$=\int_2^4 f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx$$

이다.

$f(x)=f(x+4)$이므로 $f(0)=f(4)$
이때 $f(0)=9$, $f(4)=a+12$이므로
$9=a+12 \qquad \therefore a=-3$
따라서

$$\int_6^9 f(x)dx=\int_2^5 f(x)dx$$
$$=\int_2^4 f(x)dx+\int_4^5 f(x)dx$$
$$=\int_2^4 f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx$$
$$=\int_2^4 (x^2-x-3)dx+\int_0^1 (-5x+9)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-3x\right]_2^4+\left[-\frac{5}{2}x^2+9x\right]_0^1$$
$$=\left(\frac{64}{3}-8-12\right)-\left(\frac{8}{3}-2-6\right)+\left(-\frac{5}{2}+9\right)=\frac{79}{6}$$

이므로

$$6\int_6^9 f(x)dx=6\times\frac{79}{6}=79$$

답 79

| 다른 풀이 |
함수 $f(x)$가 연속함수이므로 $x=2$에서도 연속이다.
즉, $f(2)=\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2+} f(x)$이므로
$4-2+a=-10+9 \qquad \therefore a=-3$

14

$$f(x)=6x-\int_0^2 f(t)dt+\int_0^4 f(t)dt=6x+\int_2^4 f(t)dt$$

$\int_2^4 f(t)dt=k$ (k는 상수)라고 하면 ······ ㉠
$f(x)=6x+k$
위 식을 ㉠에 대입하면
$\int_2^4 (6t+k)dt=k$
$\left[3t^2+kt\right]_2^4=k$, $(48+4k)-(12+2k)=k$
$2k+36=k \qquad \therefore k=-36$
따라서 $f(x)=6x-36$이므로
$f(6)=36-36=0$

답 ③

15

$\int_0^x (x-t)f(t)dt=-x^4+2x^3+3x^2$에서
$x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt=-x^4+2x^3+3x^2$
앞 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면
$\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=-4x^3+6x^2+6x$
$\therefore \int_0^x f(t)dt=-4x^3+6x^2+6x$
위 등식의 양변을 다시 x에 대하여 미분하면
$f(x)=-12x^2+12x+6=-12\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+9$
따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{2}$일 때 최댓값 9를 갖는다.

답 ④

16

$\int_1^x f(t)dt=xf(x)+2x^3-3x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f(x)=f(x)+xf'(x)+6x^2-6x$
$xf'(x)=-6x^2+6x$
이때 함수 $f(x)$가 다항함수이므로
$f'(x)=-6x+6$
$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(-6x+6)dx$
$\qquad =-3x^2+6x+C$ ······ ㉠
$\int_1^x f(t)dt=xf(x)+2x^3-3x^2$의 양변에 $x=1$을 대입하면
$0=f(1)+2-3 \qquad \therefore f(1)=1$
㉠에 $x=1$을 대입하면
$1=-3+6+C \qquad \therefore C=-2$
따라서 $f(x)=-3x^2+6x-2$이므로
$f(2)=-12+12-2=-2$

답 ③

17

$xf(x)=2x^3+ax^2+3a+\int_1^x f(t)dt$ ······ ㉠
㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면
$f(1)=2+a+3a+\int_1^1 f(t)dt=2+4a$
㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면
$0=3a+\int_1^0 f(t)dt$, 즉 $0=3a-\int_0^1 f(t)dt$
이때 $f(1)=\int_0^1 f(t)dt$이고, $f(1)=2+4a$이므로
$0=3a-(2+4a)$
$\therefore a=-2$, $f(1)=-6$
㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f(x)+xf'(x)=6x^2+2ax+f(x)$
$xf'(x)=6x^2-4x$ ($\because a=-2$)
이때 함수 $f(x)$가 다항함수이므로
$f'(x)=6x-4$
$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=3x^2-4x+C$
$f(1)=-6$에서 $3-4+C=-6$이므로 $C=-5$
따라서 $f(x)=3x^2-4x-5$이므로
$f(3)=27-12-5=10$
$\therefore a+f(3)=-2+10=8$

답 ④

18

$f(x)=\int_0^x (3t^2+at+b)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3x^2+ax+b$

함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 극댓값 28을 가지므로

$f(-2)=28$, $f'(-2)=0$

$f(-2)=28$에서 $\int_0^{-2}(3t^2+at+b)dt=28$

$-\int_{-2}^0 (3t^2+at+b)dt=28$, $-\left[t^3+\frac{1}{2}at^2+bt\right]_{-2}^0=28$

$-8+2a-2b=28$

$\therefore a-b=18$ ········· ㉠

$f'(-2)=0$에서 $12-2a+b=0$

$\therefore 2a-b=12$ ········· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-6$, $b=-24$

따라서 $f(x)=\int_0^x (3t^2-6t-24)dt$이므로

$$f(2)=\int_0^2 (3t^2-6t-24)dt$$
$$=\left[t^3-3t^2-24t\right]_0^2$$
$$=8-12-48=-52$$

답 -52

19

문제 접근하기

함수 $g(x)$의 한 부정적분을 $G(x)$라고 하면

$\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x g(x)dx=\lim_{x\to a}\frac{G(x)-G(a)}{x-a}=G'(a)=g(a)$

임을 이용한다.

$G(x)=\int_1^x (x-t)f(t)dt$라고 하면 $G(x)$는 다항함수이고

$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_1^x (x-t)f(t)dt=\lim_{x\to 2}\frac{G(x)}{x-2}$

이때 $\lim_{x\to 2}\frac{G(x)}{x-2}=3$에서 $x\longrightarrow 2$일 때 극한값이 존재하고

(분모) $\longrightarrow$ 0이므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 2}G(x)=0$이므로 $G(2)=0$

$\lim_{x\to 2}\frac{G(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{G(x)-G(2)}{x-2}=G'(2)=3$

$G(x)=\int_1^x (x-t)f(t)dt=x\int_1^x f(t)dt-\int_1^x tf(t)dt$에서

$G'(x)=\int_1^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=\int_1^x f(t)dt$

$G'(2)=3$에서 $\int_1^2 f(t)dt=3$

$G(2)=0$에서 $2\int_1^2 f(t)dt-\int_1^2 tf(t)dt=0$이므로

$\int_1^2 tf(t)dt=2\int_1^2 f(t)dt=2\times 3=6$

$$\therefore \int_1^2 (4x+1)f(x)dx=4\int_1^2 xf(x)dx+\int_1^2 f(x)dx$$
$$=4\times 6+3=27$$

답 ⑤

09 정적분의 활용

기본을 다지는 유형

본문 139쪽

001

$$\int_0^2 \{-x^2(x-2)\}dx=\int_0^2 (-x^3+2x^2)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3\right]_0^2=\frac{4}{3}$$

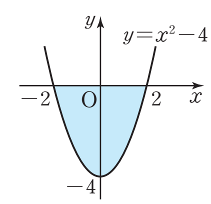
답 $\frac{4}{3}$

002

곡선 $y=x^2-4$와 x축의 교점의 x좌표는

$x^2-4=0$, $(x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^2 |x^2-4|dx=\int_{-2}^2 (-x^2+4)dx$$
$$=2\int_0^2 (-x^2+4)dx$$
$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_0^2$$
$$=2\times\frac{16}{3}=\frac{32}{3}$$

답 $\frac{32}{3}$

| 다른 풀이 ❶ |

함수 $f(x)=x^2-4$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로

$\int_{-2}^0 |x^2-4|dx=\int_0^2 |x^2-4|dx$

$$\therefore \int_{-2}^2 |x^2-4|dx=2\int_0^2 (-x^2+4)dx=2\left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_0^2$$
$$=2\times\frac{16}{3}=\frac{32}{3}$$

| 다른 풀이 ❷ |

함수 $f(x)=x^2-4$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 -2, 2이므로 구하는 넓이는

$\frac{\{2-(-2)\}^3}{6}=\frac{64}{6}=\frac{32}{3}$

참고

포물선 $y=ax^2+bx+c$와 x축의 교점의 x좌표가 α, β $(\alpha<\beta)$일 때, 이 포물선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$

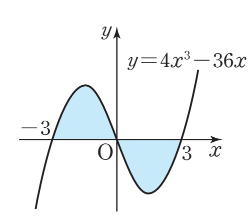
003

곡선 $y=4x^3-36x$와 x축의 교점의 x좌표는

$4x^3-36x=0$

$4x(x+3)(x-3)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-3}^{3}|4x^3-36x|dx$$
$$=\int_{-3}^{0}(4x^3-36x)dx+\int_{0}^{3}(-4x^3+36x)dx$$
$$=\Big[x^4-18x^2\Big]_{-3}^{0}+\Big[-x^4+18x^2\Big]_{0}^{3}$$
$$=81+81=162$$

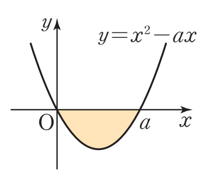
답 162

|다른 풀이|

함수 $y=4x^3-36x$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로

$$\int_{-3}^{0}|4x^3-36x|dx=\int_{0}^{3}|4x^3-36x|dx$$
$$\therefore \int_{-3}^{3}|4x^3-36x|dx=2\int_{0}^{3}(-4x^3+36x)dx$$
$$=2\Big[-x^4+18x^2\Big]_{0}^{3}$$
$$=2\times 81=162$$

004



곡선 $y=x^2-ax$와 x축의 교점의 x좌표는

$x^2-ax=0$, $x(x-a)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=a$ ($\because a>0$)

따라서 곡선 $y=x^2-ax$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{0}^{a}|x^2-ax|dx=\int_{0}^{a}(-x^2+ax)dx$$
$$=\Big[-\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2\Big]_{0}^{a}$$
$$=\frac{a^3}{6}$$

이때 $\frac{a^3}{6}=\frac{4}{3}$이므로 $a^3=8$

$\therefore a=2$ ($\because a>0$)

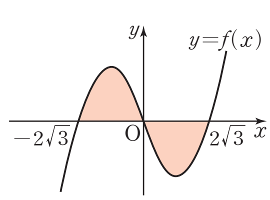
답 ②

005

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(x^2-4)dx=\frac{1}{3}x^3-4x+C$$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(0, 0)$을 지나므로 $f(0)=0$에서 $C=0$

$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x$



함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는

$\frac{1}{3}x^3-4x=0$

$\frac{1}{3}x(x+2\sqrt{3})(x-2\sqrt{3})=0$

$\therefore x=-2\sqrt{3}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2\sqrt{3}$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}|f(x)|dx=\int_{-2\sqrt{3}}^{0}\Big(\frac{1}{3}x^3-4x\Big)dx+\int_{0}^{2\sqrt{3}}\Big(-\frac{1}{3}x^3+4x\Big)dx$$
$$=\Big[\frac{1}{12}x^4-2x^2\Big]_{-2\sqrt{3}}^{0}+\Big[-\frac{1}{12}x^4+2x^2\Big]_{0}^{2\sqrt{3}}$$
$$=12+12=24$$

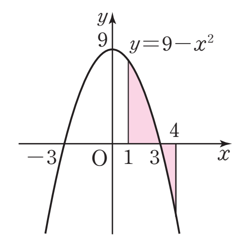
답 ④

|다른 풀이|

함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로

$$\int_{-2\sqrt{3}}^{0}|f(x)|dx=\int_{0}^{2\sqrt{3}}|f(x)|dx$$
$$\therefore \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}|f(x)|dx=2\int_{0}^{2\sqrt{3}}\Big(-\frac{1}{3}x^3+4x\Big)dx$$
$$=2\Big[-\frac{1}{12}x^4+2x^2\Big]_{0}^{2\sqrt{3}}$$
$$=2\times 12=24$$

006



곡선 $y=9-x^2$과 x축의 교점의 x좌표는

$9-x^2=0$, $-(x+3)(x-3)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=3$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{1}^{4}|9-x^2|dx$$
$$=\int_{1}^{3}(9-x^2)dx+\int_{3}^{4}(-9+x^2)dx$$
$$=\Big[9x-\frac{1}{3}x^3\Big]_{1}^{3}+\Big[-9x+\frac{1}{3}x^3\Big]_{3}^{4}$$
$$=\frac{28}{3}+\frac{10}{3}=\frac{38}{3}$$

답 ③

007

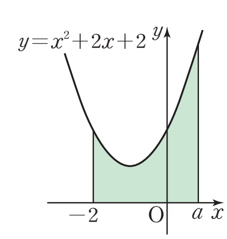
$$y=|x^2-2x|+1$$
$$=\begin{cases} x^2-2x+1 & (x\le 0 \text{ 또는 } x\ge 2) \\ -x^2+2x+1 & (0\le x\le 2) \end{cases}$$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{0}^{2}(|x^2-2x|+1)dx=\int_{0}^{2}(-x^2+2x+1)dx$$
$$=\Big[-\frac{1}{3}x^3+x^2+x\Big]_{0}^{2}$$
$$=\frac{10}{3}$$

답 ③

008



곡선 $y=x^2+2x+2$와 x축 및 두 직선 $x=-2$, $x=a$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{-2}^{a}|x^2+2x+2|dx$$
$$=\int_{-2}^{a}(x^2+2x+2)dx$$
$$=\Big[\frac{1}{3}x^3+x^2+2x\Big]_{-2}^{a}$$
$$=\frac{1}{3}a^3+a^2+2a+\frac{8}{3}$$

이때 $\frac{1}{3}a^3+a^2+2a+\frac{8}{3}=6$이므로

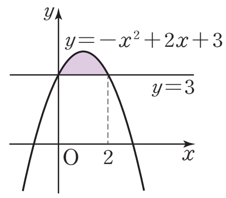
$a^3+3a^2+6a-10=0$, $(a-1)(a^2+4a+10)=0$

$\therefore a=1$ ($\because a^2+4a+10>0$)

답 ①

009

곡선 $y=-x^2+2x+3$과 직선 $y=3$의 교점의 x좌표는



$-x^2+2x+3=3$, $-x^2+2x=0$

$-x(x-2)=0$

$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^2 \{(-x^2+2x+3)-3\}dx=\int_0^2 (-x^2+2x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2=\frac{4}{3}$$

답 ②

| 다른 풀이 |

곡선 $y=-x^2+2x+3$과 직선 $y=3$의 교점의 x좌표가 0, 2이므로 구하는 넓이는

$$\frac{|-1|}{6}(2-0)^3=\frac{4}{3}$$

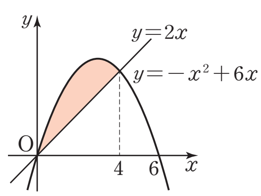
참고

포물선 $y=ax^2+bx+c$와 직선 $y=mx+n$의 교점의 x좌표가 α, β $(\alpha<\beta)$일 때, 이 포물선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$$

010

곡선 $y=-x^2+6x$와 직선 $y=2x$의 교점의 x좌표는



$-x^2+6x=2x$, $x^2-4x=0$

$x(x-4)=0$

$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=4$

따라서 구하는 넓이는

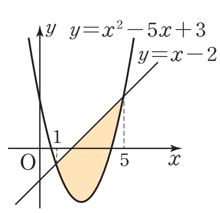
$$\int_0^4 \{(-x^2+6x)-2x\}dx=\int_0^4 (-x^2+4x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_0^4=\frac{32}{3}$$

답 ①

011

곡선 $y=x^2-5x+3$과 직선 $y=x-2$의 교점의 x좌표는



$x^2-5x+3=x-2$, $x^2-6x+5=0$

$(x-1)(x-5)=0$

$\therefore$ $x=1$ 또는 $x=5$

따라서 주어진 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_1^5 \{(x-2)-(x^2-5x+3)\}dx$$

$$=\int_1^5 (-x^2+6x-5)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+3x^2-5x\right]_1^5=\frac{32}{3}$$

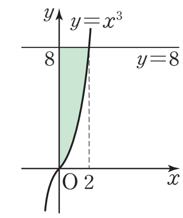
이므로

$$3S=3\times\frac{32}{3}=32$$

답 32

012

곡선 $y=x^3$과 직선 $y=8$의 교점의 x좌표는



$x^3=8$ $\quad\therefore$ $x=2$ ($\because$ x는 실수)

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^2 (8-x^3)dx=\left[8x-\frac{1}{4}x^4\right]_0^2$$

$$=12$$

답 ⑤

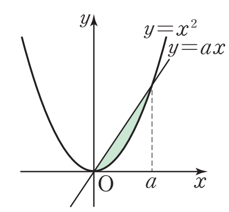
013

곡선 $y=x^2$과 직선 $y=ax$의 교점의 x좌표는

$x^2=ax$, $x^2-ax=0$, $x(x-a)=0$

$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=a$

이때 a가 양수이므로 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=ax$는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이는

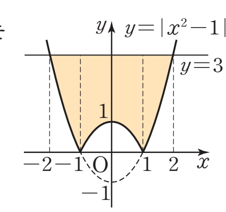
$$\int_0^a (ax-x^2)dx=\left[\frac{1}{2}ax^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^a$$

$$=\frac{a^3}{6}$$

답 ③

014

곡선 $y=|x^2-1|$과 x축의 교점의 x좌표는



$|x^2-1|=0$, $|(x+1)(x-1)|=0$

$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=1$

$$y=|x^2-1|=\begin{cases} x^2-1 & (x\le -1 \text{ 또는 } x\ge 1) \\ -x^2+1 & (-1<x<1) \end{cases}$$

이고, 곡선 $y=|x^2-1|$과 직선 $y=3$의 교점의 x좌표는

$x^2-1=3$, $x^2-4=0$, $(x+2)(x-2)=0$

$\therefore$ $x=-2$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^{-1} \{3-(x^2-1)\}dx+\int_{-1}^{1} \{3-(-x^2+1)\}dx+\int_1^2 \{3-(x^2-1)\}dx$$

$$=\int_{-2}^{-1} (-x^2+4)dx+\int_{-1}^{1} (x^2+2)dx+\int_1^2 (-x^2+4)dx$$

$$=2\int_0^1 (x^2+2)dx+2\int_1^2 (-x^2+4)dx$$

↳ 피적분함수가 y축에 대하여 대칭이므로 정적분의 값이 서로 같다.

$$=2\left[\frac{1}{3}x^3+2x\right]_0^1+2\left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_1^2$$

$$=2\times\frac{7}{3}+2\times\frac{5}{3}=8$$

답 ②

015

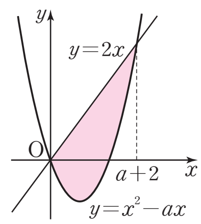
곡선 $y=x^2-ax$와 직선 $y=2x$의 교점의 x좌표는

$x^2-ax=2x$, $x^2-(a+2)x=0$

$x\{x-(a+2)\}=0$

$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=a+2$

이때 a가 양수이므로 곡선 $y=x^2-ax$와 직선 $y=2x$는 오른쪽 그림과 같다.



곡선 $y=x^2-ax$와 직선 $y=2x$로 둘러싸인 도형의 넓이가 36이므로

$\int_0^{a+2}\{2x-(x^2-ax)\}dx=36$

$\int_0^{a+2}(2x-x^2+ax)dx=36$

$\int_0^{a+2}\{-x^2+(a+2)x\}dx=36$

$\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}(a+2)x^2\right]_0^{a+2}=36,\ \frac{1}{6}(a+2)^3=36$

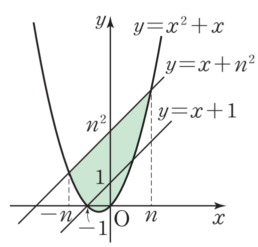
$(a+2)^3=6^3$

$\therefore a=4\ (\because a>0)$

답 ④

016

곡선 $y=x^2+x$와 직선 $y=x+n^2$의 교점의 x좌표는



$x^2+x=x+n^2$

$x^2-n^2=0$

$(x+n)(x-n)=0$

$\therefore x=-n$ 또는 $x=n$ ······ ❶

따라서 도형의 넓이 S_n은

$S_n=\int_{-n}^{n}\{(x+n^2)-(x^2+x)\}dx$

$=\int_{-n}^{n}(n^2-x^2)dx$

$=2\int_0^n(n^2-x^2)dx$

$=2\left[n^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^n$

$=2\times\frac{2}{3}n^3$

$=\frac{4}{3}n^3$ ······ ❷

$\therefore S_1+S_2+S_3+S_4+S_5$

$=\frac{4}{3}(1^3+2^3+3^3+4^3+5^3)$

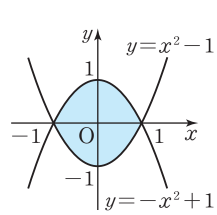
$=\frac{4}{3}\times225=300$ ······ ❸

답 300

채점 기준	비율
❶ 곡선과 직선의 교점의 x좌표를 n을 사용하여 나타낼 수 있다.	30 %
❷ S_n을 n에 대한 식으로 정리할 수 있다.	40 %
❸ $S_1+S_2+S_3+S_4+S_5$의 값을 구할 수 있다.	30 %

017

두 곡선 $y=x^2-1$과 $y=-x^2+1$의 교점의 x좌표는



$x^2-1=-x^2+1,\ 2x^2-2=0$

$2(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이는

$\int_{-1}^{1}\{(-x^2+1)-(x^2-1)\}dx=\int_{-1}^{1}(-2x^2+2)dx$

$=2\int_0^1(-2x^2+2)dx$

$=2\left[-\frac{2}{3}x^3+2x\right]_0^1$

$=2\times\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$

답 $\frac{8}{3}$

| 다른 풀이 |

두 곡선 $y=x^2-1$과 $y=-x^2+1$의 교점의 x좌표가 -1, 1이므로 구하는 넓이는

$\frac{|1-(-1)|}{6}\{1-(-1)\}^3=\frac{2}{6}\times8=\frac{8}{3}$

참고

두 포물선 $y=ax^2+bx+c$와 $y=a'x^2+b'x+c'$의 교점의 x좌표가 α, β $(\alpha<\beta)$일 때, 두 포물선으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\frac{|a-a'|}{6}(\beta-\alpha)^3$

018

두 곡선 $y=x^3-2x+1$과 $y=-x^2+1$의 교점의 x좌표가

$x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

이므로 두 도형 S_1, S_2의 넓이는

$S_1=\int_{-2}^{0}\{(x^3-2x+1)-(-x^2+1)\}dx$

$=\int_{-2}^{0}(x^3+x^2-2x)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-2}^{0}=\frac{8}{3}$

$S_2=\int_0^1\{(-x^2+1)-(x^3-2x+1)\}dx$

$=\int_0^1(-x^3-x^2+2x)dx$

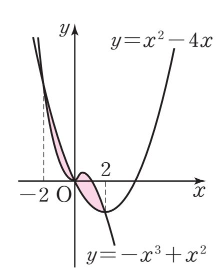
$=\left[-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^1=\frac{5}{12}$

$\therefore S_1-S_2=\frac{8}{3}-\frac{5}{12}=\frac{9}{4}$

답 $\frac{9}{4}$

019

두 곡선 $y=x^2-4x$와 $y=-x^3+x^2$의 교점의 x좌표는



$x^2-4x=-x^3+x^2,\ x^3-4x=0$

$x(x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이는

$\int_{-2}^{2}|(x^2-4x)-(-x^3+x^2)|dx$

$=\int_{-2}^{0}\{(x^2-4x)-(-x^3+x^2)\}dx$

$+\int_0^2\{(-x^3+x^2)-(x^2-4x)\}dx$

$=\int_{-2}^{0}(x^3-4x)dx+\int_0^2(-x^3+4x)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^2\right]_{-2}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4+2x^2\right]_0^2=4+4=8$

답 ⑤

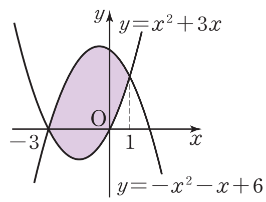
020

두 곡선 $y=-x^2+ax+6$과 $y=x^2+bx$가 모두 점 $(-3, 0)$을 지나므로

$-9-3a+6=0$에서 $3a=-3$ $\quad\therefore a=-1$

$9-3b=0$에서 $3b=9$ $\quad\therefore b=3$

두 곡선 $y=-x^2-x+6$과 $y=x^2+3x$의 교점의 x좌표는



$-x^2-x+6=x^2+3x$

$2x^2+4x-6=0$

$2(x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이는

$\int_{-3}^{1}\{(-x^2-x+6)-(x^2+3x)\}dx$

$=\int_{-3}^{1}(-2x^2-4x+6)dx$

$=\left[-\frac{2}{3}x^3-2x^2+6x\right]_{-3}^{1}=\frac{64}{3}$

답 ②

021

두 곡선 $y=x^2$과 $y=-x^2+2a^2$의 교점의 x좌표는

$x^2=-x^2+2a^2$, $2x^2-2a^2=0$

$2(x+a)(x-a)=0$

$\therefore x=-a$ 또는 $x=a$

주어진 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이가 9이므로

$\int_{-a}^{a}\{(-x^2+2a^2)-x^2\}dx=9$

$\int_{-a}^{a}(-2x^2+2a^2)dx=9$, $2\int_{0}^{a}(-2x^2+2a^2)dx=9$

$2\left[-\frac{2}{3}x^3+2a^2x\right]_{0}^{a}=9$, $\frac{8}{3}a^3=9$

$a^3=\frac{27}{8}=\left(\frac{3}{2}\right)^3$

$\therefore a=\frac{3}{2}$ ($\because a>0$)

답 ③

022

$y=3x^2-6x$에서 $y'=6x-6$

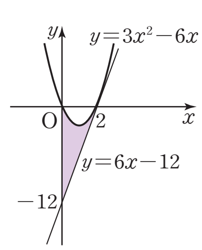
곡선 위의 점 $(2, 0)$에서의 접선의 기울기는

$6\times2-6=6$

이므로 접선의 방정식은

$y=6(x-2)$ $\quad\therefore y=6x-12$

곡선 $y=3x^2-6x$와 직선 $y=6x-12$의 교점의 x좌표는



$3x^2-6x=6x-12$, $3x^2-12x+12=0$

$3(x-2)^2=0$

$\therefore x=2$

따라서 구하는 넓이는

$\int_{0}^{2}\{(3x^2-6x)-(6x-12)\}dx=\int_{0}^{2}(3x^2-12x+12)dx$

$=\left[x^3-6x^2+12x\right]_{0}^{2}=8$

답 ④

023

$y=x^3-3x^2+x$에서 $y'=3x^2-6x+1$

곡선 위의 점 $(2, -2)$에서의 접선의 기울기는

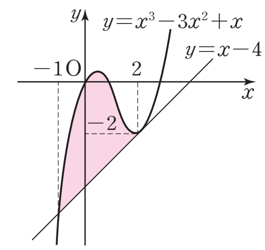
$3\times2^2-6\times2+1=1$

이므로 접선의 방정식은

$y-(-2)=x-2$

$\therefore y=x-4$

곡선 $y=x^3-3x^2+x$와 직선 $y=x-4$의 교점의 x좌표는



$x^3-3x^2+x=x-4$

$x^3-3x^2+4=0$

$(x+1)(x-2)^2=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이는

$\int_{-1}^{2}\{(x^3-3x^2+x)-(x-4)\}dx$

$=\int_{-1}^{2}(x^3-3x^2+4)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-x^3+4x\right]_{-1}^{2}=\frac{27}{4}$

답 $\frac{27}{4}$

024

$y=x^3+2x^2-x$에서 $y'=3x^2+4x-1$

접점의 좌표를 (t, t^3+2t^2-t)라고 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$3t^2+4t-1$

이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+2t^2-t)=(3t^2+4t-1)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2+4t-1)x-2t^3-2t^2$ ......… ㉠

이 직선이 점 $(0, 8)$을 지나므로

$8=-2t^3-2t^2$, $2t^3+2t^2+8=0$

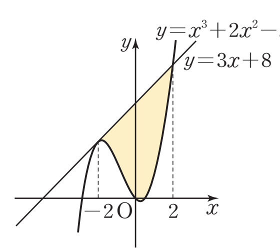
$2(t+2)(t^2-t+2)=0$

$\therefore t=-2$ ($\because t^2-t+2>0$)

따라서 접선의 방정식은 ㉠에서

$y=3x+8$

곡선 $y=x^3+2x^2-x$와 접선 $y=3x+8$의 교점의 x좌표는



$x^3+2x^2-x=3x+8$

$x^3+2x^2-4x-8=0$

$(x-2)(x+2)^2=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이는

$\int_{-2}^{2}\{(3x+8)-(x^3+2x^2-x)\}dx$

$=\int_{-2}^{2}(-x^3-2x^2+4x+8)dx$

$=\left[-\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+2x^2+8x\right]_{-2}^{2}$

$=\frac{64}{3}$

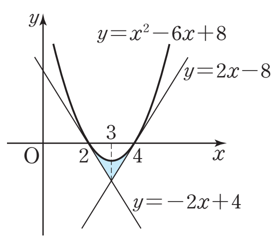
답 ③

참고
우함수와 기함수의 정적분을 이용할 수도 있다.

$$\int_{-2}^{2}\{(3x+8)-(x^3+2x^2-x)\}dx$$
$$=\int_{-2}^{2}(-2x^2+8)dx$$
$$=2\int_{0}^{2}(-2x^2+8)dx$$
$$=2\left[-\frac{2}{3}x^3+8x\right]_0^2$$
$$=2\times\frac{32}{3}=\frac{64}{3}$$

025

$y=x^2-6x+8$에서 $y'=2x-6$
곡선 위의 점 $(2,\ 0)$에서의 접선의 기울기는
$2\times2-6=-2$
이므로 접선의 방정식은
$y=-2(x-2)$ $\quad\therefore\ y=-2x+4$
곡선 위의 점 $(4,\ 0)$에서의 접선의 기울기는
$2\times4-6=2$
이므로 접선의 방정식은
$y=2(x-4)$ $\quad\therefore\ y=2x-8$
두 직선 $y=-2x+4$와 $y=2x-8$의 교점의 x좌표는
$-2x+4=2x-8,\ 4x=12$
$\therefore\ x=3$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_{2}^{3}\{(x^2-6x+8)-(-2x+4)\}dx+\int_{3}^{4}\{(x^2-6x+8)-(2x-8)\}dx$$

직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로 정적분의 값이 서로 같다.

$$=2\int_{2}^{3}(x^2-4x+4)dx$$
$$=2\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right]_2^3$$
$$=2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

답 ⑤

026

곡선 $y=ax^2+b$가 점 $(1,\ 3)$을 지나므로
$a+b=3$ ········ ㉠
········ ❶
$y=ax^2+b$에서 $y'=2ax$
곡선 위의 점 $(1,\ 3)$에서의 접선의 기울기는
$2a\times1=2a$
이므로 접선의 방정식은
$y-3=2a(x-1)$
$\therefore\ y=2ax-2a+3$ ········ ❷
이때 곡선과 접선 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 $\frac{1}{3}$이므로

$$\int_{0}^{1}\{(ax^2+b)-(2ax-2a+3)\}dx=\frac{1}{3}$$
$$\int_{0}^{1}(ax^2-2ax+2a+b-3)dx=\frac{1}{3}$$
$$\left[\frac{1}{3}ax^3-ax^2+2ax+bx-3x\right]_0^1=\frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{3}a-a+2a+b-3=\frac{1}{3}$$
$$\frac{4}{3}a+b=\frac{10}{3}$$

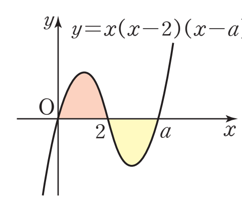
$\therefore\ 4a+3b=10$ ········ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=1,\ b=2$ ········ ❸

답 $a=1,\ b=2$

채점 기준	비율
❶ 곡선이 지나는 점의 좌표를 이용하여 a, b에 대한 식을 세울 수 있다.	20 %
❷ 접선의 방정식을 세울 수 있다.	30 %
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %

027

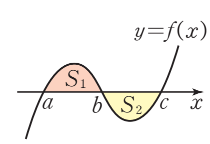
오른쪽 그림에서 색칠한 두 부분의 넓이가 서로 같으므로



$$\int_{0}^{a}x(x-2)(x-a)dx=0$$
$$\int_{0}^{a}\{x^3-(a+2)x^2+2ax\}dx=0$$
$$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}(a+2)x^3+ax^2\right]_0^a=0$$
$$-\frac{1}{12}a^3(a-4)=0$$
$\therefore\ a=4\ (\because\ a>2)$

답 ④

참고
오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이를 각각 S_1, S_2라고 할 때, $S_1=S_2$이면



$$\int_{a}^{c}f(x)dx=0$$

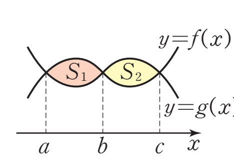
028

색칠한 두 부분의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_{0}^{3}\{(-x^2+9)-a\}dx=0$$
$$\int_{0}^{3}(-x^2+9-a)dx=0$$
$$\left[-\frac{1}{3}x^3+9x-ax\right]_0^3=0$$
$-9+27-3a=0,\ 3a=18$
$\therefore\ a=6$

답 6

참고
오른쪽 그림과 같이 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 두 도형의 넓이를 각각 S_1, S_2라고 할 때, $S_1=S_2$이면



$$\int_{a}^{c}\{f(x)-g(x)\}dx=0$$

029

색칠한 두 부분의 넓이가 서로 같으므로

$\int_0^a \{x(a-x)-x^2(a-x)\}dx=0$

$\int_0^a \{x^3-(a+1)x^2+ax\}dx=0$

$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}(a+1)x^3+\frac{1}{2}ax^2\right]_0^a=0$

$\frac{1}{4}a^4-\frac{1}{3}(a+1)a^3+\frac{1}{2}a^3=0$

$-\frac{1}{12}a^3(a-2)=0$

$\therefore a=2\ (\because a>1)$

답 ②

030

$A=B$이므로

$\int_0^2 \{(x^3+x^2)-(-x^2+k)\}dx=0$

$\int_0^2 (x^3+2x^2-k)dx=0,\ \left[\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-kx\right]_0^2=0$

$\frac{28}{3}-2k=0 \qquad \therefore k=\frac{14}{3}$

답 ④

031

$y=x(x-2)+a=x^2-2x+a=(x-1)^2+a-1$

이므로 이차함수 $y=x(x-2)+a$의 그래프의 축의 방정식은

$x=1$

이때 $S_1+S_3=S_2$이므로

$S_1=S_3=\frac{1}{2}S_2$

즉, $\int_0^1 \{x(x-2)+a\}dx=0$이므로

$\int_0^1 (x^2-2x+a)dx=0,\ \left[\frac{1}{3}x^3-x^2+ax\right]_0^1=0$

$-\frac{2}{3}+a=0 \qquad \therefore a=\frac{2}{3}$

답 $\frac{2}{3}$

032

$x<0$에서 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=k^2$의 교점의 x좌표는

$x^2=k^2 \qquad \therefore x=-k\ (\because k>0)$

곡선 $y=x^2$과 직선 $y=k^2$ 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\int_{-k}^0 (k^2-x^2)dx=\left[k^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-k}^0$

$=-\left(-k^3+\frac{1}{3}k^3\right)=\frac{2}{3}k^3$ .... ㉠

$x\geq0$에서 직선 $y=x$와 직선 $y=k^2$의 교점의 x좌표는

$x=k^2$

직선 $y=x$와 직선 $y=k^2$ 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times k^2\times k^2=\frac{1}{2}k^4$ .... ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{2}{3}k^3=\frac{1}{2}k^4$이므로 $\frac{1}{2}k^3\left(k-\frac{4}{3}\right)=0$

$\therefore k=\frac{4}{3}\ (\because k>0)$

답 ④

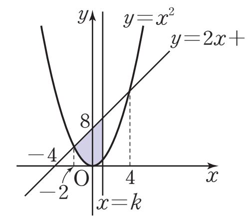
033

곡선 $y=x^2$과 직선 $y=2x+8$의 교점의 x좌표는

$x^2=2x+8,\ x^2-2x-8=0$

$(x+2)(x-4)=0 \qquad \therefore x=-2$ 또는 $x=4$

오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는



$\int_{-2}^k \{(2x+8)-x^2\}dx$

$=\int_{-2}^k (-x^2+2x+8)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+8x\right]_{-2}^k$

$=-\frac{1}{3}k^3+k^2+8k+\frac{28}{3}$ .... ㉠

곡선 $y=x^2$과 직선 $y=2x+8$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\int_{-2}^4 \{(2x+8)-x^2\}dx=\int_{-2}^4 (-x^2+2x+8)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+8x\right]_{-2}^4=36$ .... ㉡

㉠, ㉡에서 $-\frac{1}{3}k^3+k^2+8k+\frac{28}{3}=\frac{1}{2}\times36$이므로

$k^3-3k^2-24k+26=0,\ (k-1)(k^2-2k-26)=0$

$\therefore k=1\ (\because 0<k<4)$

답 1

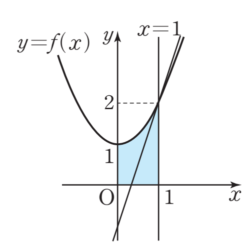
참고

$k^2-2k-26=0$에서 $k=1\pm3\sqrt{3}$

이때 $1-3\sqrt{3}=-4.\times\times\times$, $1+3\sqrt{3}=6.\times\times\times$이므로 $0<k<4$를 만족시키지 않는다.

034

함수 $f(x)=x^2+1$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 A라고 하면



$A=\int_0^1 (x^2+1)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1=\frac{4}{3}$

점 $(1, f(1))$, 즉 점 $(1, 2)$를 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$y-2=m(x-1) \qquad \therefore y=mx-m+2$

직선 $y=mx-m+2$가 x축과 만나는 점의 좌표는

$\left(1-\frac{2}{m},\ 0\right)$ $m\geq2$이므로 $1-\frac{2}{m}\geq0$

세 점 $(1, 2)$, $(1, 0)$, $\left(1-\frac{2}{m},\ 0\right)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{2}{m}\times2=\frac{2}{m}$

이때 $\frac{2}{m}=\frac{A}{2}$이므로 $\frac{2}{m}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}$

$\therefore m=3$

답 ②

참고

$f'(x)=2x$이므로 점 $(1, f(1))$에서의 함수 $f(x)$의 접선의 기울기는

$f'(1)=2$

이때 $m\geq2$이므로 직선 $y=mx-m+2$의 기울기는 점 $(1, f(1))$에서의 접선의 기울기보다 크다.

035

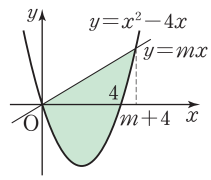
곡선 $y=x^2-4x$와 직선 $y=mx$의 교점의 x좌표는

$x^2-4x=mx$, $x^2-(m+4)x=0$

$x(x-m-4)=0$

$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=m+4$ ······ ❶

오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는



$$\int_0^{m+4}\{mx-(x^2-4x)\}dx$$

$$=\int_0^{m+4}\{-x^2+(m+4)x\}dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}(m+4)x^2\right]_0^{m+4}$$

$$=-\frac{1}{3}(m+4)^3+\frac{1}{2}(m+4)^3$$

$$=\frac{1}{6}(m+4)^3 \quad \cdots\cdots ㉠$$

······ ❷

곡선 $y=x^2-4x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^4\{-(x^2-4x)\}dx=\int_0^4(-x^2+4x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_0^4$$

$$=\frac{32}{3} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}(m+4)^3=\frac{32}{3}$이므로

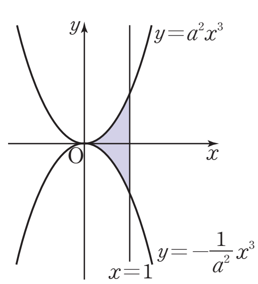
$(m+4)^3=128$ ······ ❸

답 128

채점 기준	비율
❶ 곡선과 직선의 교점의 x좌표를 구할 수 있다.	20 %
❷ 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.	40 %
❸ $(m+4)^3$의 값을 구할 수 있다.	40 %

036

두 곡선 $y=a^2x^3$, $y=-\frac{1}{a^2}x^3$과 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이는



$$\int_0^1\left\{a^2x^3-\left(-\frac{1}{a^2}x^3\right)\right\}dx$$

$$=\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)\int_0^1 x^3dx$$

$$=\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{4}\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)$$

이때 $a^2>0$, $\frac{1}{a^2}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{1}{4}\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)\ge\frac{1}{4}\times2\sqrt{a^2\times\frac{1}{a^2}}=\frac{1}{2}$$

(단, 등호는 $a^2=\frac{1}{a^2}$, 즉 $a=-1$ 또는 $a=1$일 때 성립한다.)

따라서 $a=-1$ 또는 $a=1$일 때 구하는 도형의 넓이의 최솟값은 $\frac{1}{2}$이다.

답 $\frac{1}{2}$

풍쌤 개념 CHECK

산술평균과 기하평균의 관계_高 공통수학 2

$a>0$, $b>0$이면

$\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립한다.)

037

(1) 곡선 $f(x)=x^2$과 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는

$x^2=x$, $x^2-x=0$, $x(x-1)=0$

$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이는

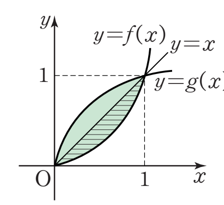
$$\int_0^1\{x-f(x)\}dx=\int_0^1(x-x^2)dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{6}$$

(2) 함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 즉, 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이다.

따라서 구하는 넓이는



$$\int_0^1\{g(x)-f(x)\}dx$$

$$=2\int_0^1\{x-f(x)\}dx$$

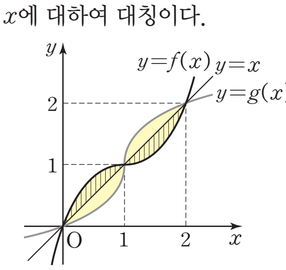
$$=2\times\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

답 (1) $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{1}{3}$

038

함수 $f(x)=(x-1)^3+1$의 역함수가 $g(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

곡선 $f(x)=(x-1)^3+1$과 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는



$(x-1)^3+1=x$, $x^3-3x^2+2x=0$

$x(x-1)(x-2)=0$

$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

이때 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이다.

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$2\int_0^1\{f(x)-x\}dx+2\int_1^2\{x-f(x)\}dx$$

$$=2\int_0^1(x^3-3x^2+2x)dx+2\int_1^2(-x^3+3x^2-2x)dx$$

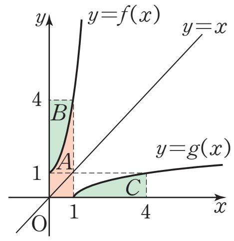
$$=2\left[\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2\right]_0^1+2\left[-\frac{1}{4}x^4+x^3-x^2\right]_1^2$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

답 ①

039

함수 $f(x)=3x^2+1$의 역함수가 $g(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
즉, 오른쪽 그림에서



$(B$의 넓이$)=(C$의 넓이$)$이므로

$\int_1^4 g(x)dx=(C$의 넓이$)=(B$의 넓이$)$

$=(A+B$의 넓이$)-(A$의 넓이$)$

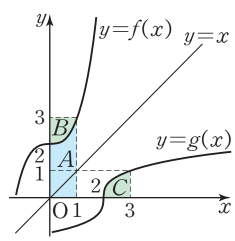
$=1\times4-\int_0^1 f(x)dx=4-\int_0^1(3x^2+1)dx$

$=4-\Big[x^3+x\Big]_0^1=4-2=2$

답 ①

040

함수 $f(x)=x^3+2$의 역함수가 $g(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
즉, 오른쪽 그림에서



$(B$의 넓이$)=(C$의 넓이$)$이므로

$\int_0^1 f(x)dx+\int_2^3 g(x)dx$

$=(A$의 넓이$)+(C$의 넓이$)$

$=(A$의 넓이$)+(B$의 넓이$)$

$=1\times3=3$

답 ③

041

(1) 시각 $t=0$에서의 점 P의 위치가 -3이므로 시각 $t=2$에서의 점 P의 위치는

$-3+\int_0^2 v(t)dt=-3+\int_0^2(6-2t)dt$

$=-3+\Big[-t^2+6t\Big]_0^2$

$=-3+8=5$

(2) $\int_2^4 v(t)dt=\int_2^4(6-2t)dt=\Big[-t^2+6t\Big]_2^4=8-8=0$

(3) $\int_2^4 |v(t)|dt=\int_2^4|6-2t|dt$

$=\int_2^3(6-2t)dt+\int_3^4(-6+2t)dt$

$=\Big[-t^2+6t\Big]_2^3+\Big[t^2-6t\Big]_3^4$

$=1+1=2$

답 (1) 5 (2) 0 (3) 2

참고

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t_0에서의 위치가 x_0이고, 시각 t에서의 속도가 $v(t)$일 때

(1) 시각 t에서의 점 P의 위치 ➡ $x_0+\int_{t_0}^t v(t)dt$

(2) 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P의 위치의 변화량 ➡ $\int_a^b v(t)dt$

(3) 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리 ➡ $\int_a^b |v(t)|dt$

042

(1) 시각 $t=0$에서의 물체의 높이는 45 m이므로 시각 $t=2$에서의 지면으로부터의 높이는

$45+\int_0^2 v(t)dt=45+\int_0^2(40-10t)dt$

$=45+\Big[-5t^2+40t\Big]_0^2$

$=45+60=105\,(\mathrm{m})$

(2) $\int_2^5|v(t)|dt=\int_2^5|40-10t|dt$

$=\int_2^4(40-10t)dt+\int_4^5(-40+10t)dt$

$=\Big[-5t^2+40t\Big]_2^4+\Big[5t^2-40t\Big]_4^5$

$=20+5=25\,(\mathrm{m})$

(3) 최고 지점에서의 물체의 속도는 0 m/s이므로

$v(t)=0$에서 $40-10t=0$ $\quad\therefore t=4$

이때의 지면으로부터의 높이는

$45+\int_0^4 v(t)dt=45+\int_0^4(40-10t)dt$

$=45+\Big[-5t^2+40t\Big]_0^4$

$=45+80=125\,(\mathrm{m})$

답 (1) 105 m (2) 25 m (3) 125 m

참고

물체가 최고 높이에 도달하면 물체가 운동 방향을 바꾸는 것이므로 이때의 속도는 0이다.

043

자동차가 정지하면 속도가 0 m/s이므로

$v(t)=0$에서 $20-4t=0$ $\quad\therefore t=5$

따라서 자동차는 제동을 건 지 5초 후에 정지하므로 정지할 때까지 달린 거리는

$\int_0^5|v(t)|dt=\int_0^5(20-4t)dt=\Big[-2t^2+20t\Big]_0^5=50\,(\mathrm{m})$

답 ⑤

044

점 P가 움직이는 방향이 바뀔 때의 속도는 0이므로

$v(t)=0$에서 $12-2t=0$ $\quad\therefore t=6$

따라서 좌표가 3인 점에서 출발한 점 P의 시각 $t=6$에서의 위치는

$3+\int_0^6 v(t)dt=3+\int_0^6(12-2t)dt=3+\Big[-t^2+12t\Big]_0^6$

$=3+36=39$

답 ④

045

점 P가 움직이는 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로

$v(t)=0$에서 $3t^2-12t=0$

$3t(t-4)=0$ $\quad\therefore t=4\ (\because t>0)$

점 P가 움직이는 방향을 바꾸어 원점으로 돌아올 때의 시각을 $t=a\ (a>0)$라고 하면 이때의 점 P의 위치는 0이므로

$\int_0^a v(t)dt=0$에서

$\int_0^a (3t^2-12t)dt=0$

$\left[t^3-6t^2\right]_0^a=0,\ a^3-6a^2=0$

$a^2(a-6)=0 \qquad \therefore a=6\ (\because a>0)$

따라서 점 P가 움직이는 방향을 바꾼 후부터 다시 원점으로 돌아오는 데 걸린 시간은

$6-4=2$

답 ②

046

점 P가 시각 $t=0$에서 $t=6$까지 움직인 거리는

$$\int_0^6 |v(t)|dt=\int_0^4 (4t-t^2)dt+\int_4^6 (2t-8)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+2t^2\right]_0^4+\left[t^2-8t\right]_4^6$$
$$=\frac{32}{3}+4=\frac{44}{3}$$

답 ④

047

점 P의 시각 t에서의 가속도를 $a(t)$라고 하면

$a(t)=v'(t)=12t^2-48$

시각 $t=k$에서 점 P의 가속도가 0이므로

$a(k)=0$에서 $12k^2-48=0$

$k^2=4 \qquad \therefore k=2\ (\because k>0)$

$0\le k\le 2$일 때 $v(t)\le 0$이므로 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^2 |v(t)|dt=\int_0^2 |4t^3-48t|dt=\int_0^2 (-4t^3+48t)dt$$
$$=\left[-t^4+24t^2\right]_0^2=80$$

답 80

048

최고 높이에서의 물체의 속도는 0 m/s이므로

$v(t)=0$에서 $10-10t=0 \qquad \therefore t=1$

이때의 지면으로부터의 높이는

$$15+\int_0^1 v(t)dt=15+\int_0^1 (10-10t)dt$$
$$=15+\left[-5t^2+10t\right]_0^1$$
$$=15+5=20\,(\mathrm{m})$$

$\therefore p=20$ ······························ ❶

물체가 최고 높이에 도달한 후 2초 동안 움직인 거리는

$$\int_1^3 |v(t)|dt=\int_1^3 |10-10t|dt=\int_1^3 (-10+10t)dt$$
$$=\left[5t^2-10t\right]_1^3=20\,(\mathrm{m})$$

$\therefore q=20$ ······························ ❷

$\therefore p+q=20+20=40$ ······························ ❸

답 40

채점 기준	비율
❶ p의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ q의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $p+q$의 값을 구할 수 있다.	20 %

참고

시각 t에서의 속도가 $v(t)$이고, $a\le t\le c$일 때 $v(t)\ge 0$, $c\le t\le b$일 때 $v(t)\le 0$인 점 P가 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 움직인 거리 (단, $a<c<b$)

➡ $\int_a^b |v(t)|dt=\int_a^c v(t)dt+\int_c^b \{-v(t)\}dt$

049

(1) $\int_0^4 v(t)dt=\frac{1}{2}\times(2+4)\times 2=6$

(2) $\int_0^4 |v(t)|dt=\int_0^4 v(t)dt=\frac{1}{2}\times(2+4)\times 2=6$

답 (1) 6 (2) 6

050

(1) $$\int_0^5 v(t)dt=\int_0^3 v(t)dt+\int_3^5 v(t)dt$$
$$=\frac{1}{2}\times 3\times 2+\frac{1}{2}\times(5-3)\times(-2)$$
$$=3-2=1$$

(2) $$\int_0^5 |v(t)|dt=\int_0^3 v(t)dt+\int_3^5 \{-v(t)\}dt$$
$$=\frac{1}{2}\times 3\times 2+\frac{1}{2}\times 2\times 2$$
$$=3+2=5$$

답 (1) 1 (2) 5

051

점 P는 $t=4$일 때 원점으로부터 가장 멀리 떨어져 있으므로 이때의 점 P의 위치는

$t=4$를 기준으로 운동 방향을 바꾼다.

$\int_0^4 v(t)dt=\frac{1}{2}\times 4\times 6=12$

답 ⑤

052

물체가 시각 $t=a$에서 원점을 다시 지난다고 하면

$\int_0^a v(t)dt=0$이어야 한다.

이때 $\int_0^4 v(t)dt=-\int_4^8 v(t)dt$이므로 물체가 다시 원점을 지나는 시각은 $t=8$이다.

답 ⑤

053

점 P가 처음으로 운동 방향을 바꾸는 순간은 $v(t)=0$인 $t=3$일 때이므로 구하는 위치는

$2+\int_0^3 v(t)dt=2+\frac{1}{2}\times 3\times(-2)=2-3=-1$

답 ②

본문 150쪽

01

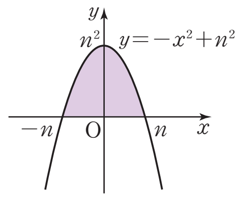
곡선 $y=-x^2+n^2$과 x축의 교점의 x좌표는

$-x^2+n^2=0$

$-(x+n)(x-n)=0$

$\therefore x=-n$ 또는 $x=n$

따라서 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이 $S(n)$은



$$S(n)=\int_{-n}^{n}|-x^2+n^2|dx$$
$$=\int_{-n}^{n}(-x^2+n^2)dx$$
$$=2\int_{0}^{n}(-x^2+n^2)dx$$
$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+n^2x\right]_0^n$$
$$=2\times\frac{2}{3}n^3=\frac{4}{3}n^3$$
$$\therefore \int_0^{\sqrt{3}}S(n)dn=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{4}{3}n^3dn$$
$$=\left[\frac{1}{3}n^4\right]_0^{\sqrt{3}}=3$$

답 3

02

$$f(x)=\int f'(x)dx$$
$$=\int(3x^2-3)dx$$
$$=x^3-3x+C$$

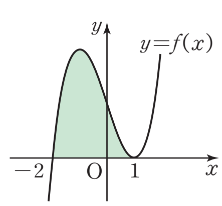
함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(2,\ 4)$를 지나므로

$f(2)=4$에서

$8-6+C=4\qquad \therefore C=2$

$\therefore f(x)=x^3-3x+2$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는



$x^3-3x+2=0$

$(x+2)(x-1)^2=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^{1}(x^3-3x+2)dx=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{1}=\frac{27}{4}$$

답 ⑤

03

$f(x)=x^2-4x=(x-2)^2-4$

$$g(x)=\begin{cases}-x^2+2x & (x<2)\\ -x^2+6x-8 & (x\geq 2)\end{cases}$$
$$=\begin{cases}-(x-1)^2+1 & (x<2)\\ -(x-3)^2+1 & (x\geq 2)\end{cases}$$

이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 각각 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.

따라서 $0\leq x\leq 2$인 부분과 $2\leq x\leq 4$인 부분의 넓이가 같으므로 구하는 넓이는

$$\int_0^4\{g(x)-f(x)\}dx$$
$$=2\int_0^2\{(-x^2+2x)-(x^2-4x)\}dx$$
$$=2\int_0^2(-2x^2+6x)dx$$
$$=2\left[-\frac{2}{3}x^3+3x^2\right]_0^2$$
$$=2\times\frac{20}{3}=\frac{40}{3}$$

답 ①

04

$y=3x^2+1$에서 $y'=6x$

접점의 좌표를 $(t,\ 3t^2+1)$이라고 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $6t$이므로 접선의 방정식은

$y-(3t^2+1)=6t(x-t)$

$\therefore y=6tx-3t^2+1$

이 접선이 점 $(0,\ -2)$를 지나므로

$-2=-3t^2+1$

$3t^2=3,\ t^2=1$

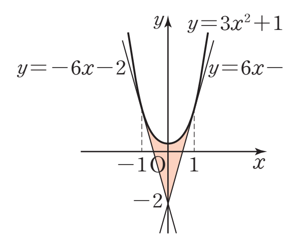
$\therefore t=-1$ 또는 $t=1$

$t=-1$일 때의 접선의 방정식은

$y=-6x-2$

$t=1$일 때의 접선의 방정식은

$y=6x-2$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{0}\{(3x^2+1)-(-6x-2)\}dx+\int_{0}^{1}\{(3x^2+1)-(6x-2)\}dx$$

그래프가 y축에 대하여 대칭이므로 정적분의 값이 서로 같다.

$$=2\int_0^1(3x^2-6x+3)dx$$
$$=2\left[x^3-3x^2+3x\right]_0^1$$
$$=2\times 1=2$$

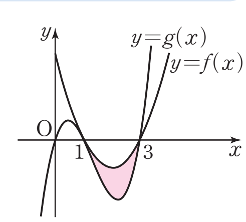
답 2

05

문제 접근하기

구하는 넓이는 $\int_1^3|g(x)-f(x)|dx$이다. 이때 두 함수의 그래프가 점 $(1,\ 0)$에서 접하고 점 $(3,\ 0)$에서 만나므로 방정식 $g(x)-f(x)=0$은 중근 1과 한 실근 3을 갖는다.

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 삼차함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $(1,\ 0)$에서 접하고 점 $(3,\ 0)$에서 만나므로



$g(x)-f(x)=(x-1)^2(x-3)$

$x=3$에서 만난다.

$x^3-4x^2+3x-f(x)$

$=x^3-5x^2+7x-3$

$x=1$에서 접한다.

$\therefore f(x)=x^2-4x+3$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_1^3 \{f(x)-g(x)\}dx=\int_1^3 \{(x^2-4x+3)-(x^3-4x^2+3x)\}dx$$
$$=\int_1^3 (-x^3+5x^2-7x+3)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{5}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2+3x\right]_1^3$$
$$=\frac{4}{3}$$

답 ③

참고

$g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고, $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로 $g(x)-f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다.

06

곡선 $y=-x^2+6x$와 직선 $y=ax$의 교점의 x좌표는

$-x^2+6x=ax$

$x^2+(a-6)x=0$

$x(x+a-6)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=-a+6$

$$S_1=\int_0^{-a+6} \{(-x^2+6x)-ax\}dx$$
$$=\int_0^{-a+6} \{-x^2+(-a+6)x\}dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}(-a+6)x^2\right]_0^{-a+6}$$
$$=\frac{1}{6}(-a+6)^3$$

$S_1=S_2$에서 $2S_1=S_1+S_2$이고,

$$S_1+S_2=\int_0^6 (-x^2+6x)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+3x^2\right]_0^6=36$$

이므로 $2\times\frac{1}{6}(-a+6)^3=36$

$\therefore (-a+6)^3=108$

답 ⑤

07

곡선 $y=f(x)$가 x축과 만나는 점의 x좌표는

$-x^3-3x^2-3x+7=0$

$-(x-1)(x^2+4x+7)=0$

$\therefore x=1$ ($\because x^2+4x+7>0$)

따라서 점 P(1, 0)이므로 점 P를 지나고 x축에 수직인 직선의 방정식은

$x=1 \qquad \therefore a=1$

이때 $S_1=S_2$이므로

$$\int_0^1 \{f(x)-b\}dx=0$$
$$\int_0^1 (-x^3-3x^2-3x+7-b)dx=0$$
$$\left[-\frac{1}{4}x^4-x^3-\frac{3}{2}x^2+(7-b)x\right]_0^1=0$$
$$-\frac{1}{4}-1-\frac{3}{2}+7-b=0$$

$\therefore b=\frac{17}{4}$

$\therefore a+4b=1+17=18$

답 18

08

곡선 $y=a^2x^2$과 직선 $y=1$의 교점의 x좌표는

$a^2x^2=1,\ x^2=\frac{1}{a^2}$

$\therefore x=-\frac{1}{a}$ 또는 $x=\frac{1}{a}$

곡선 $y=a^2x^2$과 직선 $y=1$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{-\frac{1}{a}}^{\frac{1}{a}} (1-a^2x^2)dx=2\int_0^{\frac{1}{a}} (1-a^2x^2)dx$$
$$=2\left[-\frac{1}{3}a^2x^3+x\right]_0^{\frac{1}{a}}$$
$$=2\times\frac{2}{3a}$$
$$=\frac{4}{3a} \quad \cdots\cdots ㉠$$

곡선 $y=x^2$과 직선 $y=1$의 교점의 x좌표는

$x^2=1 \qquad \therefore x=-1$ 또는 $x=1$

곡선 $y=x^2$과 직선 $y=1$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)dx=2\int_0^1 (1-x^2)dx$$
$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1$$
$$=2\times\frac{2}{3}=\frac{4}{3} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\frac{4}{3a}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}$이므로

$a=2$

답 2

09

곡선 $y=\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x$와 직선 $y=mx+2$의 교점의 x좌표를 k라고 하면

$$B-A=\int_k^2 \left\{\left(\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x\right)-(mx+2)\right\}dx -\int_0^k \left\{(mx+2)-\left(\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x\right)\right\}dx$$
$$=\int_k^2 \left\{\left(\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x\right)-(mx+2)\right\}dx +\int_0^k \left\{\left(\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x\right)-(mx+2)\right\}dx$$
$$=\int_0^2 \left\{\left(\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x\right)-(mx+2)\right\}dx$$
$$=\left[\frac{1}{16}x^4+\frac{1}{4}x^2-\frac{m}{2}x^2-2x\right]_0^2$$
$$=-2m-2$$

이때 $-2m-2=\frac{2}{3}$이므로

$m=-\frac{4}{3}$

답 ③

10

문제 접근하기

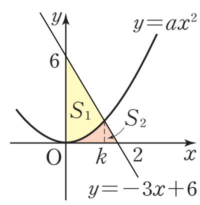
S_1+S_2는 직각삼각형의 넓이를 이용하여 구할 수 있다. 이때 $S_1:S_2=7:5$를 이용하여 S_1을 구한다.

직선 $y=-3x+6$이 x축, y축과 만나는 점의 좌표는 각각
$(2, 0)$, $(0, 6)$
이므로

$S_1+S_2=\frac{1}{2}\times2\times6=6$

이때 $S_1:S_2=7:5$이므로

$S_1=\frac{7}{7+5}\times6=\frac{7}{2}$ ······ ㉠



오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=ax^2$과 직선 $y=-3x+6$이 만나는 교점의 x좌표를 k $(0<k<2)$라고 하면

$ak^2=-3k+6$ ······ ㉡

한편, S_1을 정적분을 이용해서 구하면

$$S_1=\int_0^k\{(-3x+6)-ax^2\}dx$$
$$=\int_0^k(-ax^2-3x+6)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}ax^3-\frac{3}{2}x^2+6x\right]_0^k$$
$$=-\frac{1}{3}ak^3-\frac{3}{2}k^2+6k$$
$$=-\frac{1}{3}k(-3k+6)-\frac{3}{2}k^2+6k \ (\because ㉡)$$
$$=-\frac{1}{2}k^2+4k$$

이때 ㉠에 의하여 $-\frac{1}{2}k^2+4k=\frac{7}{2}$이므로

$k^2-8k+7=0$

$(k-1)(k-7)=0$

$\therefore k=1 \ (\because 0<k<2)$

$k=1$을 ㉡에 대입하면

$a=-3+6=3$

답 3

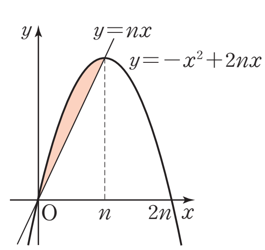
11

곡선 $y=-x^2+2nx$와 직선 $y=nx$의 교점의 x좌표는

$-x^2+2nx=nx$, $x^2-nx=0$

$x(x-n)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=n$



오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이 S_n은

$$S_n=\int_0^n\{(-x^2+2nx)-nx\}dx$$
$$=\int_0^n(-x^2+nx)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}nx^2\right]_0^n$$
$$=\frac{1}{6}n^3$$

이때 $S_n>36$이므로 $\frac{1}{6}n^3>36$, $n^3>6^3$

$n^3-6^3>0$, $(n-6)(n^2+12n+36)>0$

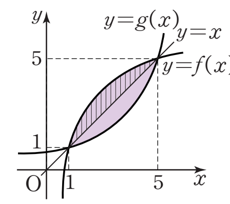
$\therefore n>6$ $(\because n^2+12n+36\geq0)$

따라서 자연수 n의 최솟값은 7이다.

답 7

12

함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



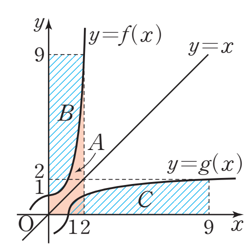
함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표와 같으므로 1, 5이다.

따라서 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_1^5\{f(x)-g(x)\}dx=2\int_1^5\{f(x)-x\}dx$$
$$=2\left\{\int_1^5 f(x)dx-\int_1^5 x\,dx\right\}$$
$$=2\int_1^5 f(x)dx-2\int_1^5 x\,dx$$
$$=2\times15-2\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^5$$
$$=30-24=6$$

답 ④

13



함수 $f(x)=x^3+1$의 역함수가 $g(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

즉, 오른쪽 그림에서

$(B$의 넓이$)=(C$의 넓이$)$이므로

$\int_0^2 f(x)dx+\int_1^9 g(x)dx$

$=(A$의 넓이$)+(C$의 넓이$)$

$=(A$의 넓이$)+(B$의 넓이$)$

$=2\times9=18$

답 18

14

문제 접근하기

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 두 교점을 이용하여 $f(x)$의 식을 구한 후, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용하여 $A-B$를 구한다.

함수 $f(x)=ax^2+b$의 역함수가 $g(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 좌표가 $(1, 1)$, $(2, 2)$이므로

$f(1)=1$에서 $a+b=1$

$f(2)=2$에서 $4a+b=2$

위 두 식을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{2}{3}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}$

두 부분의 넓이 A, B는 각각 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이므로

$$\begin{aligned}A-B&=2\int_0^1\{f(x)-x\}dx-2\int_1^2\{x-f(x)\}dx\\&=2\int_0^1\{f(x)-x\}dx+2\int_1^2\{f(x)-x\}dx\\&=2\int_0^2\{f(x)-x\}dx\\&=2\int_0^2\left\{\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}\right)-x\right\}dx\\&=2\left[\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x\right]_0^2\\&=2\times\frac{2}{9}=\frac{4}{9}\end{aligned}$$

답 ④

15

시각 $t=a$에서 점 P의 위치를 $\mathrm{P}(a)$라고 하면

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(a)&=\int_0^a(3t^2+6t-6)dt\\&=\left[t^3+3t^2-6t\right]_0^a\\&=a^3+3a^2-6a\end{aligned}$$

시각 $t=a$에서 점 Q의 위치를 $\mathrm{Q}(a)$라고 하면

$$\begin{aligned}\mathrm{Q}(a)&=\int_0^a(10t-6)dt\\&=\left[5t^2-6t\right]_0^a\\&=5a^2-6a\end{aligned}$$

두 점 P, Q가 출발 후 $t=a$에서 다시 만나면

$\mathrm{P}(a)=\mathrm{Q}(a)$이므로

$a^3+3a^2-6a=5a^2-6a$

$a^3-2a^2=0$, $a^2(a-2)=0$

$\therefore a=2\ (\because a>0)$

답 ③

16

시각 $t=6$에서 점 P의 위치는 0이므로

$$\int_0^6 v(t)dt=0$$

$$\int_0^3(-t^2)dt+\int_3^6\{a(t-3)-9\}dt=0$$

$$\left[-\frac{1}{3}t^3\right]_0^3+\left[\frac{1}{2}at^2-3at-9t\right]_3^6=0$$

$$-9+\left(\frac{9}{2}a-27\right)=0,\ \frac{9}{2}a=36$$

$\therefore a=8$

답 8

17

ㄱ. 시각 $t=4$의 좌우에서 속도는 모두 양이고, 시각 $t=6$의 좌우에서 처음으로 속도가 양에서 음으로 바뀌므로 점 P가 처음으로 운동 방향을 바꾸는 것은 시각 $t=6$일 때이다. (거짓)

ㄴ. 점 P가 처음 출발할 때의 위치는 원점인 0이고, 시각 $t=6$에서의 점 P의 위치는

$$0+\int_0^6 v(t)dt=\frac{1}{2}\times(2+6)\times2=8$$

이므로 원점에 있지 않다.

즉, 시각 $t=6$일 때 점 P는 처음 출발한 위치에 있지 않다.

(거짓)

ㄷ. 점 P가 시각 $t=0$에서 시각 $t=9$까지 실제로 움직인 거리는

$$\begin{aligned}\int_0^9|v(t)|dt&=\int_0^6 v(t)dt+\int_6^9\{-v(t)\}dt\\&=\frac{1}{2}\times(2+6)\times2+\frac{1}{2}\times(3+1)\times2\\&=8+4=12\ (\text{참})\end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

답 ②

18

원점을 출발한 점 P의 시각 $t=6$에서의 위치가 4이므로

$$\int_0^6 v(t)dt=4$$

$$\int_0^4 v(t)dt+\int_4^6 v(t)dt=4$$

$$6+\int_4^6 v(t)dt=4$$

$$\therefore \int_4^6 v(t)dt=-2$$

따라서 시각 $t=6$에서 시각 $t=8$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned}\int_6^8|v(t)|dt&=\int_4^8|v(t)|dt-\int_4^6|v(t)|dt\\&=6-2=4\end{aligned}$$

답 4