풍산자
반복수학

공통수학 1

| 정답과 풀이 |

Ⅰ 다항식

Ⅰ-1 | 다항식의 연산 008-023쪽

01 답 (1) 3 (2) $5y^2$ (3) $-3y^4-1$ (4) 4 (5) $4x^3+5x-1$

풀이 (1) x에 대한 최고차항은 $\underline{4x^3}$이므로 차수는 $\underline{3}$이다.

(2) x에 대한 이차항은 $5x^2y^2$이므로 계수는 $5y^2$이다.

(3) x에 대한 상수항은 $-3y^4-1$이다.

(4) y에 대한 최고차항은 $-3y^4$이므로 차수는 4이다.

(5) y에 대한 상수항은 $4x^3+5x-1$이다.

02 답 (1) $(y^2+3)x^2+(7y-2)x+(5y^2-4y+6)$

(2) $(5y^2-4y+6)+(7y-2)x+(y^2+3)x^2$

(3) $(x^2+5)y^2+(7x-4)y+(3x^2-2x+6)$

(4) $(3x^2-2x+6)+(7x-4)y+(x^2+5)y^2$

풀이 (1) $x^2y^2+3x^2+7xy+5y^2-2x-4y+6$

$=(x^2y^2+3x^2)+(7xy-2x)+(5y^2-4y+6)$

$=(\underline{y^2+3})x^2+(\underline{7y-2})x+(\underline{5y^2-4y+6})$

(2) $x^2y^2+3x^2+7xy+5y^2-2x-4y+6$

$=(5y^2-4y+6)+(7xy-2x)+(x^2y^2+3x^2)$

$=(5y^2-4y+6)+(7y-2)x+(y^2+3)x^2$

(3) $x^2y^2+3x^2+7xy+5y^2-2x-4y+6$

$=(x^2y^2+5y^2)+(7xy-4y)+(3x^2-2x+6)$

$=(x^2+5)y^2+(7x-4)y+(3x^2-2x+6)$

(4) $x^2y^2+3x^2+7xy+5y^2-2x-4y+6$

$=(3x^2-2x+6)+(7xy-4y)+(x^2y^2+5y^2)$

$=(3x^2-2x+6)+(7x-4)y+(x^2+5)y^2$

03 답 (1) $3x^2+11$ (2) $4a^2-3a-4$

(3) $3x^2+xy+4y^2$ (4) $3a^2+4ab+b^2$

(5) $-x^2-4x+y^2+3y$

풀이 (1) $(x^2+3x+6)+(2x^2-3x+5)$

$=(x^2+2x^2)+\{3x+(-3x)\}+(6+5)$

$=(1+2)x^2+\{3+(-3)\}x+(6+5)$

$=\underline{3x^2+11}$

(2) $(a^2-5a-3)+(3a^2+2a-1)$

$=(a^2+3a^2)+(-5a+2a)+\{-3+(-1)\}$

$=(1+3)a^2+(-5+2)a+\{-3+(-1)\}$

$=4a^2-3a-4$

(3) $(x^2+3xy-y^2)+(2x^2-2xy+5y^2)$

$=(x^2+2x^2)+\{3xy+(-2xy)\}+(-y^2+5y^2)$

$=(1+2)x^2+\{3+(-2)\}xy+(-1+5)y^2$

$=3x^2+xy+4y^2$

(4) $(2a^2-ab+3b^2)+(a^2+5ab-2b^2)$

$=(2a^2+a^2)+(-ab+5ab)+\{3b^2+(-2b^2)\}$

$=(2+1)a^2+(-1+5)ab+\{3+(-2)\}b^2$

$=3a^2+4ab+b^2$

(5) $(x^2+x-2y^2+4y)+(-2x^2-5x+3y^2-y)$

$=\{x^2+(-2x^2)\}+\{x+(-5x)\}$
$\quad+(-2y^2+3y^2)+\{4y+(-y)\}$

$=\{1+(-2)\}x^2+\{1+(-5)\}x$
$\quad+(-2+3)y^2+\{4+(-1)\}y$

$=-x^2-4x+y^2+3y$

04 답 (1) $7x+4$ (2) $2a^2-5a+9$

(3) $x^2+6xy+y^2$ (4) $2a^2-6ab-4b^2$

(5) $-x^3+5x^2-x+9$

풀이 (1) $(x^2+5x+1)-(x^2-2x-3)$

$=(x^2+5x+1)+(-x^2+2x+3)$

$=\{x^2+(-x^2)\}+(5x+2x)+(1+3)$

$=\{1+(-1)\}x^2+(5+2)x+(1+3)$

$=\underline{7x+4}$

(2) $(3a^2-4a+6)-(a^2+a-3)$

$=(3a^2-4a+6)+(-a^2-a+3)$

$=\{3a^2+(-a^2)\}+\{-4a+(-a)\}+(6+3)$

$=\{3+(-1)\}a^2+\{-4+(-1)\}a+(6+3)$

$=2a^2-5a+9$

(3) $(2x^2+3xy+5y^2)-(x^2-3xy+4y^2)$

$=(2x^2+3xy+5y^2)+(-x^2+3xy-4y^2)$

$=\{2x^2+(-x^2)\}+(3xy+3xy)+\{5y^2+(-4y^2)\}$

$=\{2+(-1)\}x^2+(3+3)xy+\{5+(-4)\}y^2$

$=x^2+6xy+y^2$

(4) $(4a^2-5ab+b^2)-(2a^2+ab+5b^2)$

$=(4a^2-5ab+b^2)+(-2a^2-ab-5b^2)$

$=\{4a^2+(-2a^2)\}+\{-5ab+(-ab)\}$
$\quad+\{b^2+(-5b^2)\}$

$=\{4+(-2)\}a^2+\{-5+(-1)\}ab+\{1+(-5)\}b^2$

$=2a^2-6ab-4b^2$

(5) $(x^3+2x^2+3x+4)-(2x^3-3x^2+4x-5)$

$=(x^3+2x^2+3x+4)+(-2x^3+3x^2-4x+5)$

$=\{x^3+(-2x^3)\}+(2x^2+3x^2)$
$\quad+\{3x+(-4x)\}+(4+5)$

$=\{1+(-2)\}x^3+(2+3)x^2+\{3+(-4)\}x+(4+5)$

$=-x^3+5x^2-x+9$

05 답 (1) $3x^2+4x+5$ (2) x^2+2x+3 (3) $x+2$

풀이 (1) $A+B$

$=(2x^2+3x+4)+(x^2+x+1)$

$=(2+1)x^2+(3+1)x+(4+1)$

$=3x^2+4x+5$

(2) $A-B$

$=(2x^2+3x+4)-(x^2+x+1)$

$=(2x^2+3x+4)+(-x^2-x-1)$
$=\{2+(-1)\}x^2+\{3+(-1)\}x+\{4+(-1)\}$
$=x^2+2x+3$

(3) $2A-(A+2B)$
$=2A-A-2B$
$=A-2B$
$=(2x^2+3x+4)-2(x^2+x+1)$
$=(2x^2+3x+4)+(-2x^2-2x-2)$
$=\{2+(-2)\}x^2+\{3+(-2)\}x+\{4+(-2)\}$
$=\underline{x+2}$

06 답 (1) x^3 (2) $-3x^3+2x^2-2x$
(3) $5x^3-3x^2+3x$

풀이 (1) $A+B$
$=(-x^3+x^2-x)+(2x^3-x^2+x)$
$=(-1+2)x^3+\{1+(-1)\}x^2+(-1+1)x$
$=x^3$

(2) $A-B$
$=(-x^3+x^2-x)-(2x^3-x^2+x)$
$=(-x^3+x^2-x)+(-2x^3+x^2-x)$
$=\{-1+(-2)\}x^3+(1+1)x^2+\{-1+(-1)\}x$
$=-3x^3+2x^2-2x$

(3) $B-(A-B)$
$=B-A+B$
$=2B-A$
$=2(2x^3-x^2+x)-(-x^3+x^2-x)$
$=(4x^3-2x^2+2x)+(x^3-x^2+x)$
$=(4+1)x^3+\{-2+(-1)\}x^2+(2+1)x$
$=5x^3-3x^2+3x$

다른 풀이 (2)에서 $A-B=-3x^3+2x^2-2x$이므로
$B-(A-B)$
$=(2x^3-x^2+x)-(-3x^3+2x^2-2x)$
$=(2x^3-x^2+x)+(3x^3-2x^2+2x)$
$=(2+3)x^3+\{-1+(-2)\}x^2+(1+2)x$
$=5x^3-3x^2+3x$

07 답 (1) $2x^2-xy-3y^2$ (2) $-5xy-y^2$
(3) $4x^2-9xy+5y^2$ (4) $6xy-5y^2$

풀이 (1) $A+B+C$
$=(3x^2-5xy+y^2)+(x^2-y^2+2xy)$
$\quad+(-2x^2+2xy-3y^2)$
$=\{3+1+(-2)\}x^2+(-5+2+2)xy$
$\quad+\{1+(-1)+(-3)\}y^2$
$=\underline{2x^2-xy-3y^2}$

(2) $A-B+C$
$=(3x^2-5xy+y^2)-(x^2-y^2+2xy)$
$\quad+(-2x^2+2xy-3y^2)$
$=(3x^2-5xy+y^2)+(-x^2+y^2-2xy)$
$\quad+(-2x^2+2xy-3y^2)$
$=\{3+(-1)+(-2)\}x^2+\{(-5)+(-2)+2\}xy$
$\quad+\{1+1+(-3)\}y^2$
$=-5xy-y^2$

(3) $A-(B+C)$
$=A-B-C$
$=(3x^2-5xy+y^2)-(x^2-y^2+2xy)$
$\quad-(-2x^2+2xy-3y^2)$
$=(3x^2-5xy+y^2)+(-x^2+y^2-2xy)$
$\quad+(2x^2-2xy+3y^2)$
$=\{3+(-1)+2\}x^2+\{(-5)+(-2)+(-2)\}xy$
$\quad+(1+1+3)y^2$
$=4x^2-9xy+5y^2$

(4) $A+2C-(A-2B+C)$
$=A+2C-A+2B-C$
$=C+2B$
$=(-2x^2+2xy-3y^2)+2(x^2-y^2+2xy)$
$=(-2x^2+2xy-3y^2)+(2x^2-2y^2+4xy)$
$=(-2+2)x^2+(2+4)xy+\{-3+(-2)\}y^2$
$=6xy-5y^2$

08 답 (1) $x^3y-4x^2y^2+2xy^3$
(2) $4x^3y^2+2x^2y^3-6xy^4$
(3) $2a^3-3a^2-7a+10$
(4) $3x^3+8x^2+x+12$

풀이 (1) $xy(x^2-4xy+2y^2)$
$=xy\times x^2-xy\times 4xy+xy\times 2y^2$
$=\underline{x^3y-4x^2y^2+2xy^3}$

(2) $2xy^2(2x^2+xy-3y^2)$
$=2xy^2\times 2x^2+2xy^2\times xy-2xy^2\times 3y^2$
$=4x^3y^2+2x^2y^3-6xy^4$

(3) $(a-2)(2a^2+a-5)$
$=a(2a^2+a-5)-2(2a^2+a-5)$
$=(2a^3+a^2-5a)+(-4a^2-2a+10)$
$=2a^3+(1-4)a^2+(-5-2)a+10$
$=2a^3-3a^2-7a+10$

(4) $(x+3)(3x^2-x+4)$
$=x(3x^2-x+4)+3(3x^2-x+4)$
$=(3x^3-x^2+4x)+(9x^2-3x+12)$
$=3x^3+(-1+9)x^2+(4-3)x+12$
$=3x^3+8x^2+x+12$

09 답 (1) $3x^3+2x^2y+3x^2+3xy^2+2xy+2y^3$
(2) $4a^3+10a^2b-6ab^2+3ab+9b^2$
(3) x^3-x^2-4x+4
(4) $2x^3+3x^2y-8xy^2+3y^3$

풀이 (1) $(3x+2y)(x^2+x+y^2)$
$=3x(x^2+x+y^2)+2y(x^2+x+y^2)$
$=(3x^3+3x^2+3xy^2)+(2x^2y+2xy+2y^3)$
$=3x^3+2x^2y+3x^2+3xy^2+2xy+2y^3$

(2) $(a+3b)(4a^2-2ab+3b)$
$=a(4a^2-2ab+3b)+3b(4a^2-2ab+3b)$
$=(4a^3-2a^2b+3ab)+(12a^2b-6ab^2+9b^2)$
$=4a^3+(-2+12)a^2b-6ab^2+3ab+9b^2$
$=4a^3+10a^2b-6ab^2+3ab+9b^2$

(3) $(x-1)(x-2)(x+2)$
$=(x^2-3x+2)(x+2)$
$=x^2(x+2)-3x(x+2)+2(x+2)$
$=(x^3+2x^2)+(-3x^2-6x)+(2x+4)$
$=x^3+(2-3)x^2+(-6+2)x+4$
$=x^3-x^2-4x+4$

다른 풀이 $(x-1)(x-2)(x+2)$
$=(x-1)(x^2-4)$
$=x(x^2-4)-(x^2-4)$
$=(x^3-4x)+(-x^2+4)$
$=x^3-x^2-4x+4$

(4) $(x-y)(2x-y)(x+3y)$
$=(2x^2-3xy+y^2)(x+3y)$
$=2x^2(x+3y)-3xy(x+3y)+y^2(x+3y)$
$=(2x^3+6x^2y)+(-3x^2y-9xy^2)+(xy^2+3y^3)$
$=2x^3+(6-3)x^2y+(-9+1)xy^2+3y^3$
$=2x^3+3x^2y-8xy^2+3y^3$

10 답 (1) -1 (2) 7 (3) -3 (4) 13

풀이 (1) $(x-3)(x^2+2x+3)$
$=x(x^2+2x+3)-3(x^2+2x+3)$
$=(x^3+2x^2+3x)+(-3x^2-6x-9)$
$=x^3-x^2-3x-9$
따라서 x^2의 계수는 $\underline{-1}$이다.

(2) $(3a+1)(2a+1)^2$
$=(3a+1)(4a^2+4a+1)$
$=3a(4a^2+4a+1)+(4a^2+4a+1)$
$=(12a^3+12a^2+3a)+(4a^2+4a+1)$
$=12a^3+16a^2+7a+1$
따라서 a의 계수는 7이다.

(3) $(x-2y)(x^2+xy-y^2)$
$=x(x^2+xy-y^2)-2y(x^2+xy-y^2)$
$=(x^3+x^2y-xy^2)+(-2x^2y-2xy^2+2y^3)$
$=x^3-x^2y-3xy^2+2y^3$
따라서 xy^2의 계수는 -3이다.

(4) $(2x-3y)(x+y)+(x+4y)^2$
$=(2x^2-xy-3y^2)+(x^2+8xy+16y^2)$
$=3x^2+7xy+13y^2$
따라서 y^2의 계수는 13이다.

11 답 (1) -5 (2) -9 (3) 3

풀이 (1) $(x^2+2x+3)(2x^2+x-4)$를 전개했을 때 x의 항이 나타나는 부분만 계산하면
$2x\times(-4)+3\times x=-8x+3x=-5x$
이므로 x의 계수는 $\underline{-5}$이다.

(2) $(2a^3+4a-1)(a^2-2a-5)$를 전개했을 때 a^2의 항이 나타나는 부분만 계산하면
$4a\times(-2a)+(-1)\times a^2=-8a^2-a^2=-9a^2$
이므로 a^2의 계수는 -9이다.

(3) $(x^2+2xy-4y^2)(x^2+x+y)$를 전개했을 때 x^2y의 항이 나타나는 부분만 계산하면
$x^2\times y+2xy\times x=x^2y+2x^2y=3x^2y$
이므로 x^2y의 계수는 3이다.

12 답 (1) x^2+4x+4 (2) $4y^2-12y+9$
(3) a^2-16 (4) $25y^2-9x^2$

풀이 (1) $(x+2)^2=x^2+\underline{4}x+\underline{4}$
(4) $(5y-3x)(5y+3x)=(5y+3x)(5y-3x)=25y^2-9x^2$

13 답 (1) a^2+4a+3 (2) x^2-2x-8
(3) $2x^2-5x-3$ (4) $12x^2+11x-5$

풀이 (1) $(a+3)(a+1)=a^2+\underline{4}a+\underline{3}$

14 답 (1) $x^3+6x^2+11x+6$ (2) $a^3+11a^2+38a+40$
(3) $x^3-9x^2+23x-15$ (4) $x^3-3x^2-10x+24$

풀이 (1) $(x+1)(x+2)(x+3)$
$=x^3+(1+2+3)x^2+(1\times2+2\times3+3\times1)x$
$+1\times2\times3$
$=x^3+\underline{6}x^2+\underline{11}x+\underline{6}$

(2) $(a+2)(a+4)(a+5)$
$=a^3+(2+4+5)a^2+(2\times4+4\times5+5\times2)a$
$+2\times4\times5$
$=a^3+11a^2+38a+40$

(3) $(x-1)(x-3)(x-5)$
$=x^3-(1+3+5)x^2+(1\times3+3\times5+5\times1)x$
$-1\times3\times5$
$=x^3-9x^2+23x-15$

(4) $(x-2)(x+3)(x-4)$를
$(x-2)\{x-(-3)\}(x-4)$로 생각하여 구한다.
$(x-2)\{x-(-3)\}(x-4)$
$=x^3-\{2+(-3)+4\}x^2$
$+\{2\times(-3)+(-3)\times4+4\times2\}x-2\times(-3)\times4$
$=x^3-3x^2-10x+24$

15 답 (1) $a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca$
(2) $a^2+b^2+2ab+4a+4b+4$
(3) $4x^2+y^2+z^2+4xy+2yz+4zx$
(4) $x^2+4y^2+z^2-4xy-4yz+2zx$
(5) $a^2+4b^2+9c^2+4ab-12bc-6ca$

풀이 (1) $(a-b+c)^2$
$=a^2+(\underline{-b})^2+c^2+2a\times(\underline{-b})+2\times(-b)\times c+2ca$
$=\underline{a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca}$

(2) $(a+b+2)^2$
$=a^2+b^2+2^2+2ab+2b\times2+2\times2a$
$=a^2+b^2+2ab+4a+4b+4$

(3) $(2x+y+z)^2$

$=(2x)^2+y^2+z^2+2\times 2x\times y+2yz+2z\times 2x$

$=4x^2+y^2+z^2+4xy+2yz+4zx$

(4) $(x-2y+z)^2$

$=x^2+(-2y)^2+z^2+2x\times(-2y)+2\times(-2y)\times z$
$+2zx$

$=x^2+4y^2+z^2-4xy-4yz+2zx$

(5) $(a+2b-3c)^2$

$=a^2+(2b)^2+(-3c)^2+2a\times 2b+2\times 2b\times(-3c)$
$+2\times(-3c)\times a$

$=a^2+4b^2+9c^2+4ab-12bc-6ca$

16 답 (1) $x^3+6x^2+12x+8$

(2) $a^3-9a^2+27a-27$

(3) $8x^3+12x^2+6x+1$

(4) $64a^3-48a^2b+12ab^2-b^3$

(5) $27x^3+135x^2y+225xy^2+125y^3$

풀이 (1) $(x+2)^3=x^3+3\times x^2\times 2+3\times x\times 2^2+2^3$

$=x^3+\underline{6}x^2+\underline{12}x+\underline{8}$

(2) $(a-3)^3=a^3-3\times a^2\times 3+3\times a\times 3^2-3^3$

$=a^3-9a^2+27a-27$

(3) $(2x+1)^3=(2x)^3+3\times(2x)^2\times 1+3\times 2x\times 1^2+1^3$

$=8x^3+12x^2+6x+1$

(4) $(4a-b)^3=(4a)^3-3\times(4a)^2\times b+3\times 4a\times b^2-b^3$

$=64a^3-48a^2b+12ab^2-b^3$

(5) $(3x+5y)^3$

$=(3x)^3+3\times(3x)^2\times 5y+3\times 3x\times(5y)^2+(5y)^3$

$=27x^3+135x^2y+225xy^2+125y^3$

17 답 (1) x^3+27 (2) y^3-1 (3) a^3-8
(4) $8x^3+1$ (5) $27x^3-8y^3$

풀이 (1) $(x+3)(x^2-3x+9)$

$=(x+3)(x^2-x\times 3+3^2)$

$=\underline{x^3+27}$

(2) $(y-1)(y^2+y+1)$

$=(y-1)(y^2+y\times 1+1^2)$

$=y^3-1$

(3) $(a-2)(a^2+2a+4)$

$=(a-2)(a^2+a\times 2+2^2)$

$=a^3-8$

(4) $(2x+1)(4x^2-2x+1)$

$=(2x+1)\{(2x)^2-2x\times 1+1^2\}$

$=(2x)^3+1^3$

$=8x^3+1$

(5) $(3x-2y)(9x^2+6xy+4y^2)$

$=(3x-2y)\{(3x)^2+3x\times 2y+(2y)^2\}$

$=(3x)^3-(2y)^3$

$=27x^3-8y^3$

18 답 (1) $x^3+y^3-3xy+1$

(2) $a^3-b^3-c^3-3abc$

(3) $a^3-c^3+6ac+8$

(4) $8a^3+27b^3+c^3-18abc$

(5) $x^3-64y^3+36xy+27$

풀이 (1) $(x+y+1)(x^2+y^2+1-xy-y-x)$

$=(x+y+1)(x^2+y^2+1^2-xy-y\times 1-1\times x)$

$=\underline{x^3+y^3-3xy+1}$

(2) $(a-b-c)(a^2+b^2+c^2+ab-bc+ca)$

$=\{a+(-b)+(-c)\}\{a^2+(-b)^2+(-c)^2$
$-a\times(-b)-(-b)\times(-c)-(-c)\times a\}$

$=a^3+(-b)^3+(-c)^3-3a\times(-b)\times(-c)$

$=a^3-b^3-c^3-3abc$

(3) $(a-c+2)(a^2+c^2+ac+2c-2a+4)$

$=\{a+(-c)+2\}$
$\times\{a^2+(-c)^2+2^2-a\times(-c)-(-c)\times 2-2a\}$

$=a^3+(-c)^3+2^3-3a\times(-c)\times 2$

$=a^3-c^3+6ac+8$

(4) $(2a+3b+c)(4a^2+9b^2+c^2-6ab-3bc-2ca)$

$=(2a+3b+c)$
$\times\{(2a)^2+(3b)^2+c^2-2a\times 3b-3b\times c-c\times 2a\}$

$=(2a)^3+(3b)^3+c^3-3\times 2a\times 3b\times c$

$=8a^3+27b^3+c^3-18abc$

(5) $(x-4y+3)(x^2+16y^2+9-3x+12y+4xy)$

$=\{x+(-4y)+3\}$
$\times\{x^2+(-4y)^2+3^2-x\times(-4y)-(-4y)\times 3-3\times x\}$

$=x^3+(-4y)^3+3^3-3\times x\times(-4y)\times 3$

$=x^3-64y^3+36xy+27$

19 답 (1) x^4+x^2+1 (2) a^4+4a^2+16
(3) $81x^4+9x^2+1$ (4) $16x^4+36x^2y^2+81y^4$

풀이 (1) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

$=(x^2+x\times 1+1^2)(x^2-x\times 1+1^2)$

$=\underline{x^4+x^2+1}$

(2) $(a^2+2a+4)(a^2-2a+4)$

$=(a^2+a\times 2+2^2)(a^2-a\times 2+2^2)$

$=a^4+4a^2+16$

(3) $(9x^2+3x+1)(9x^2-3x+1)$

$=\{(3x)^2+3x\times 1+1^2\}\{(3x)^2-3x\times 1+1^2\}$

$=(3x)^4+(3x)^2\times 1^2+1^4$

$=81x^4+9x^2+1$

(4) $(4x^2+6xy+9y^2)(4x^2-6xy+9y^2)$

$=\{(2x)^2+2x\times 3y+(3y)^2\}\{(2x)^2-2x\times 3y+(3y)^2\}$

$=(2x)^4+(2x)^2\times(3y)^2+(3y)^4$

$=16x^4+36x^2y^2+81y^4$

20 답 (1) 11 (2) 15 (3) 29 (4) 12

풀이 (1) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$=3^2-2\times(-1)$

$=9+2=\underline{11}$

(2) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$
$=1^2-2\times(-7)$
$=1+14=15$

(3) $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$
$=(-5)^2+2\times2$
$=25+4=29$

(4) $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$
$=2^2+2\times4$
$=4+8=12$

21 답 (1) 21 (2) 16

풀이 (1) $(x+y)^2=(x-y)^2+4xy$
$=5^2+4\times(-1)$
$=25-4=\underline{21}$

(2) $(x+y)^2=(x-y)^2+4xy$
$=(-2)^2+4\times3$
$=4+12=16$

22 답 (1) 1 (2) 37

풀이 (1) $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$
$=3^2-4\times2$
$=9-8=\underline{1}$

(2) $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$
$=1^2-4\times(-9)$
$=1+36=37$

23 답 (1) 2 (2) -40 (3) -10 (4) 38

풀이 (1) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
$=2^3-3\times1\times2$
$=8-6=\underline{2}$

(2) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
$=(-4)^3-3\times2\times(-4)$
$=-64+24=-40$

(3) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
$=(-1)^3-3\times(-3)\times(-1)$
$=-1-9=-10$

(4) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
$=2^3-3\times(-5)\times2$
$=8+30=38$

24 답 (1) 80 (2) 54 (3) -427 (4) -52

풀이 (1) $x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$
$=5^3+3\times(-3)\times5$
$=125-45=\underline{80}$

(2) $x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$
$=3^3+3\times3\times3$
$=27+27=54$

(3) $x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$
$=(-7)^3+3\times4\times(-7)$
$=-343-84=-427$

(4) $x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$
$=(-4)^3+3\times(-1)\times(-4)$
$=-64+12=-52$

25 답 (1) 1 (2) 2 (3) -2 (4) 11 (5) -3 (6) -4

풀이 (1) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$이므로
$7=3^2-2ab$
따라서 $2ab=9-7=\underline{2}$이므로 $ab=\underline{1}$이다.

(2) $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$이므로
$8=(-2)^2+2ab$
따라서 $2ab=8-4=4$이므로 $ab=2$이다.

(3) $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$이므로
$1=(-3)^2+4ab$
따라서 $4ab=1-9=-8$이므로 $ab=-2$이다.

(4) $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$이므로
$5=7^2-4ab$
따라서 $4ab=49-5=44$이므로 $ab=11$이다.

(5) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$이므로
$-10=(-1)^3-3\times ab\times(-1)$
따라서 $3ab=-10+1=-9$이므로 $ab=-3$이다.

(6) $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$이므로
$16=4^3+3\times ab\times4$
따라서 $12ab=-64+16=-48$이므로 $ab=-4$이다.

26 답 (1) 2 (2) -3 (3) 1 (4) 4 (5) 2 (6) 4

풀이 (1) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$이므로
$5=(-3)^2-2xy$
따라서 $2xy=9-5=4$이므로 $xy=2$이다.

(2) $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$이므로
$10=4^2+2xy$
따라서 $2xy=10-16=-6$이므로 $xy=-3$이다.

(3) $(x+y)^2=(x-y)^2+4xy$이므로
$5=(-1)^2+4xy$
따라서 $4xy=5-1=4$이므로 $xy=1$이다.

(4) $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$이므로
$0=(-4)^2-4xy$
따라서 $4xy=16$이므로 $xy=4$이다.

(5) $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$이므로
$9=3^3-3\times xy\times3$
따라서 $9xy=27-9=18$이므로 $xy=2$이다.

(6) $x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$이므로
$13=1^3+3\times xy\times1$
따라서 $3xy=13-1=12$이므로 $xy=4$이다.

27 답 (1) 14 (2) 2 (3) 27 (4) 11

풀이 (1) $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$
$=4^2-2$
$=16-2=\underline{14}$

(2) $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$
$=(-2)^2-2$
$=4-2=2$

(3) $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$
$=5^2+2$
$=25+2=27$

(4) $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$
$=(-3)^2+2$
$=9+2=11$

28 답 (1) 29 (2) 5

풀이 (1) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4$
$=(-5)^2+4$
$=25+4=\underline{29}$

(2) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4$
$=1^2+4$
$=1+4=5$

29 답 (1) 45 (2) 12

풀이 (1) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4$
$=7^2-4$
$=49-4=\underline{45}$

(2) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4$
$=(-4)^2-4$
$=16-4=12$

30 답 (1) 2 (2) 4 (3) 19 (4) 114

풀이 (1) $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$
$=2^2-2\times1$
$=4-2=\underline{2}$

(2) $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$
$=(-4)^2-2\times6$
$=16-12=4$

(3) $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$
$=3^2-2\times(-5)$
$=9+10=19$

(4) $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$
$=(-10)^2-2\times(-7)$
$=100+14=114$

31 답 (1) -6 (2) 146 (3) 1 (4) -5

풀이 (1) $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$
$=(-3)^2-2\times2$
$=9-4=\underline{5}$

이므로
$a^3+b^3+c^3$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$
$=(-3)\times(\underline{5}-2)+3\times1$
$=-9+3=\underline{-6}$

(2) $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$
$=5^2-2\times(-1)$
$=25+2=27$

이므로
$a^3+b^3+c^3$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$
$=5\times(27+1)+3\times2$
$=140+6=146$

(3) $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에서
$6=(-2)^2-2(ab+bc+ca)$
이때 $2(ab+bc+ca)=4-6=-2$이므로
$ab+bc+ca=-1$이다.
따라서
$a^3+b^3+c^3$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$
$=(-2)\times(6+1)+3\times5$
$=-14+15=1$

(4) $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에서
$5=1^2-2(ab+bc+ca)$
이때 $2(ab+bc+ca)=1-5=-4$이므로
$ab+bc+ca=-2$이다.
따라서
$a^3+b^3+c^3$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$
$=1\times(5+2)+3\times(-4)$
$=7-12=-5$

32 답 (1) 1, $4x$, $-x$, $-x$, 2
몫: $2x-1$, 나머지: 2
(2) $4x^2$, 9, $-8x^2$, $9x$, 9, $9x$, 0
몫: $4x^2-8x+9$, 나머지: 0

풀이 (1)

$$\begin{array}{r} 2x-\boxed{1} \\ x-2\,\overline{)\,2x^2-5x+4} \\ 2x^2-\boxed{4x} \\ \hline \boxed{-x}+4 \\ \boxed{-x}+2 \\ \hline \boxed{2} \end{array}$$

이므로 $\square$ 안에 알맞은 수 또는 식은 1, $4x$, $-x$, $-x$, 2이다.
따라서 몫은 $2x-1$, 나머지는 2이다.

(2)
$$
\begin{array}{rr}
 & \boxed{4x^2}-8x+\boxed{9} \\
\cline{2-2}
x+1\big) & 4x^3-4x^2+x+9 \\
 & 4x^3+4x^2 \qquad\quad \\
\cline{2-2}
 & \boxed{-8x^2}+x+9 \\
 & -8x^2-8x \quad\; \\
\cline{2-2}
 & \boxed{9x}+\boxed{9} \\
 & \boxed{9x}+9 \\
\cline{2-2}
 & \boxed{0}
\end{array}
$$
이므로 $\boxed{}$ 안에 알맞은 수 또는 식은 $4x^2$, 9, $-8x^2$, $9x$, 9, $9x$, 0이다.
따라서 몫은 $4x^2-8x+9$, 나머지는 0이다.

33 답 (1) 몫: $x-4$, 나머지: -1
(2) 몫: $2x-3$, 나머지: 5
(3) 몫: $3x^2-2x+8$, 나머지: -25
(4) 몫: x^2-x-1, 나머지: -4

풀이 (1)
$$
\begin{array}{rr}
 & x-4 \\
\cline{2-2}
x-1\big) & x^2-5x+3 \\
 & \boxed{x^2-x} \quad\;\; \\
\cline{2-2}
 & -4x+3 \\
 & \boxed{-4x+4} \\
\cline{2-2}
 & \boxed{-1}
\end{array}
$$
따라서 몫은 $\underline{x-4}$, 나머지는 $\underline{-1}$이다.

(2)
$$
\begin{array}{rr}
 & 2x-3 \\
\cline{2-2}
2x+1\big) & 4x^2-4x+2 \\
 & 4x^2+2x \quad\; \\
\cline{2-2}
 & -6x+2 \\
 & -6x-3 \\
\cline{2-2}
 & 5
\end{array}
$$
따라서 몫은 $2x-3$, 나머지는 5이다.

(3)
$$
\begin{array}{rr}
 & 3x^2-2x+8 \\
\cline{2-2}
x+4\big) & 3x^3+10x^2\qquad+7 \\
 & 3x^3+12x^2 \qquad\quad\; \\
\cline{2-2}
 & -2x^2 \qquad\quad\; \\
 & -2x^2-8x \qquad \\
\cline{2-2}
 & 8x+7 \\
 & 8x+32 \\
\cline{2-2}
 & -25
\end{array}
$$
따라서 몫은 $3x^2-2x+8$, 나머지는 -25이다.

(4)
$$
\begin{array}{rr}
 & x^2-x-1 \\
\cline{2-2}
2x-3\big) & 2x^3-5x^2+x-1 \\
 & 2x^3-3x^2 \qquad\quad \\
\cline{2-2}
 & -2x^2+x \quad\; \\
 & -2x^2+3x \quad\; \\
\cline{2-2}
 & -2x-1 \\
 & -2x+3 \\
\cline{2-2}
 & -4
\end{array}
$$
따라서 몫은 x^2-x-1, 나머지는 -4이다.

34 답 (1) 몫: $x-3$, 나머지: $-x+1$
(2) 몫: $4x+11$, 나머지: $26x-24$
(3) 몫: $x+2$, 나머지: $-x$
(4) 몫: $3x+2$, 나머지: $-3x-6$

풀이 (1)
$$
\begin{array}{rr}
 & x-\boxed{3} \qquad\quad \\
\cline{2-2}
x^2+2x-1\big) & x^3-x^2-8x+4 \\
 & x^3+2x^2-x \quad\;\; \\
\cline{2-2}
 & -3x^2-7x+4 \\
 & -3x^2-6x+3 \\
\cline{2-2}
 & \boxed{-x}+1
\end{array}
$$
따라서 몫은 $\underline{x-3}$, 나머지는 $\underline{-x+1}$이다.

(2)
$$
\begin{array}{rr}
 & 4x+11 \qquad\quad \\
\cline{2-2}
x^2-3x+2\big) & 4x^3-x^2+x-2 \\
 & 4x^3-12x^2+8x \quad\;\; \\
\cline{2-2}
 & 11x^2-7x-2 \\
 & 11x^2-33x+22 \\
\cline{2-2}
 & 26x-24
\end{array}
$$
따라서 몫은 $4x+11$, 나머지는 $26x-24$이다.

(3)
$$
\begin{array}{rr}
 & x+2 \qquad\qquad \\
\cline{2-2}
x^2-2\big) & x^3+2x^2-3x-4 \\
 & x^3 \qquad -2x \quad\;\; \\
\cline{2-2}
 & 2x^2-x-4 \\
 & 2x^2 \qquad -4 \\
\cline{2-2}
 & -x \quad\;\;
\end{array}
$$
따라서 몫은 $x+2$, 나머지는 $-x$이다.

(4)
$$
\begin{array}{rr}
 & 3x+2 \qquad\qquad \\
\cline{2-2}
3x^2-x+1\big) & 9x^3+3x^2-2x-4 \\
 & 9x^3-3x^2+3x \quad\;\; \\
\cline{2-2}
 & 6x^2-5x-4 \\
 & 6x^2-2x+2 \\
\cline{2-2}
 & -3x-6
\end{array}
$$
따라서 몫은 $3x+2$, 나머지는 $-3x-6$이다.

35 답 (1) $x^2+4x+3=(x-2)(x+6)+15$
(2) $3x^2-4x+2=(3x+2)(x-2)+6$
(3) $2x^3+x^2-4x-5=(x+1)(2x^2-x-3)-2$
(4) $x^3-4x^2+x+1=(x^2-x+4)(x-3)-6x+13$

풀이 (1)
$$
\begin{array}{rr}
 & x+6 \\
\cline{2-2}
x-2\big) & x^2+4x+3 \\
 & x^2-2x \quad\; \\
\cline{2-2}
 & 6x+3 \\
 & 6x-12 \\
\cline{2-2}
 & 15
\end{array}
$$
따라서 $Q=x+6$, $R=15$이므로
$\underline{x^2+4x+3=(x-2)(x+6)+15}$

(2)
$$
\begin{array}{rr}
 & x-2 \\
\cline{2-2}
3x+2\big) & 3x^2-4x+2 \\
 & 3x^2+2x \quad\; \\
\cline{2-2}
 & -6x+2 \\
 & -6x-4 \\
\cline{2-2}
 & 6
\end{array}
$$

따라서 $Q=x-2$, $R=6$이므로

$3x^2-4x+2=(3x+2)(x-2)+6$

(3)

$$\begin{array}{r}
2x^2-x-3 \\
x+1\,\overline{)\,2x^3+x^2-4x-5} \\
\underline{2x^3+2x^2 } \\
-x^2-4x \\
\underline{-x^2-x } \\
-3x-5 \\
\underline{-3x-3} \\
-2
\end{array}$$

따라서 $Q=2x^2-x-3$, $R=-2$이므로

$2x^3+x^2-4x-5=(x+1)(2x^2-x-3)-2$

(4)

$$\begin{array}{r}
x-3 \\
x^2-x+4\,\overline{)\,x^3-4x^2+x+1} \\
\underline{x^3-x^2+4x } \\
-3x^2-3x+1 \\
\underline{-3x^2+3x-12} \\
-6x+13
\end{array}$$

따라서 $Q=x-3$, $R=-6x+13$이므로

$x^3-4x^2+x+1=(x^2-x+4)(x-3)-6x+13$

중단원 점검문제 | Ⅰ-1 다항식의 연산 024-025쪽

01 답 $-2x^3+3x^2-3x-2$

풀이 $A+B$

$=(-3x^3+x^2-4x+2)+(x^3+2x^2+x-4)$

$=(-3+1)x^3+(1+2)x^2+(-4+1)x+(2-4)$

$=-2x^3+3x^2-3x-2$

02 답 $3xy-y^2$

풀이 $2x^2-xy+y^2-2(x^2-2xy+y^2)$

$=2x^2-xy+y^2-2x^2+4xy-2y^2$

$=(2-2)x^2+(-1+4)xy+(1-2)y^2$

$=3xy-y^2$

03 답 $2x^2-2xy+4y^2$

풀이 $A-B-C$

$=(2x^2-2xy+5y^2)-(x^2-xy+3y^2)-(-x^2+xy-2y^2)$

$=2x^2-2xy+5y^2-x^2+xy-3y^2+x^2-xy+2y^2$

$=(2-1+1)x^2+(-2+1-1)xy+(5-3+2)y^2$

$=2x^2-2xy+4y^2$

04 답 $5x^2-7xy+11y^2$

풀이 $X+A=2B$에서

$X=2B-A$

$=2(4y^2-xy+2x^2)-(-x^2+5xy-3y^2)$

$=8y^2-2xy+4x^2+x^2-5xy+3y^2$

$=(4+1)x^2+(-2-5)xy+(8+3)y^2$

$=5x^2-7xy+11y^2$

05 답 $4x^3-16x^2y+5xy^2+25y^3$

풀이 $(x+y)(2x-5y)^2$

$=(x+y)(4x^2-20xy+25y^2)$

$=x(4x^2-20xy+25y^2)+y(4x^2-20xy+25y^2)$

$=4x^3-20x^2y+25xy^2+4x^2y-20xy^2+25y^3$

$=4x^3+(-20+4)x^2y+(25-20)xy^2+25y^3$

$=4x^3-16x^2y+5xy^2+25y^3$

06 답 $2x^4-x^3+9x^2-5x+9$

풀이 $B+AC$

$=(x^2-3x+1)+(2x^2-x+4)(x^2+2)$

$=(x^2-3x+1)+\{2x^2(x^2+2)-x(x^2+2)+4(x^2+2)\}$

$=(x^2-3x+1)+\{(2x^4+4x^2)+(-x^3-2x)+(4x^2+8)\}$

$=(x^2-3x+1)+\{2x^4-x^3+(4+4)x^2-2x+8\}$

$=(x^2-3x+1)+(2x^4-x^3+8x^2-2x+8)$

$=2x^4-x^3+(1+8)x^2+(-3-2)x+(1+8)$

$=2x^4-x^3+9x^2-5x+9$

07 답 -108

풀이 $(3x-4y)^3$

$=(3x)^3-3\times(3x)^2\times4y+3\times3x\times(4y)^2-(4y)^3$

$=27x^3-108x^2y+144xy^2-64y^3$

따라서 x^2y의 계수는 -108이다.

08 답 12

풀이 $(x^2-2x+5)(3x^2+2x-3)$을 전개했을 때 x^3의 항이 나타나는 부분만 계산하면

$x^2\times2x+(-2x)\times3x^2=2x^3-6x^3$

$=-4x^3$

이므로 x^3의 계수는 -4이다.

따라서 $a=-4$이다.

$(x^2-2x+5)(3x^2+2x-3)$을 전개했을 때 x의 항이 나타나는 부분만 계산하면

$(-2x)\times(-3)+5\times2x=6x+10x$

$=16x$

이므로 x의 계수는 16이다.

따라서 $b=16$이므로

$a+b=-4+16=12$

09 답 $27x^3+64y^3+72xy-8$

풀이 $(3x+4y-2)(9x^2+16y^2+4-12xy+6x+8y)$

$=(3x+4y-2)\{(3x)^2+(4y)^2+(-2)^2-3x\times4y$

$-4y\times(-2)-(-2)\times3x\}$

$=(3x)^3+(4y)^3+(-2)^3-3\times3x\times4y\times(-2)$

$=27x^3+64y^3+72xy-8$

10 답 a^8-1

풀이 $(a-1)(a+1)(a^2+1)(a^4+1)$

$=(a^2-1)(a^2+1)(a^4+1)$

$=(a^4-1)(a^4+1)$

$=a^8-1$

11 답 24

풀이 $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$

$=4^2-4\times(-2)$

$=16+8$

$=24$

12 답 5

풀이 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$=(-3)^2-2\times2$

$=9-4=5$

13 답 $10\sqrt{2}$

풀이 주어진 조건에 의하여 $a-b=2\sqrt{2}$, $ab=-1$이므로

$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

$=(2\sqrt{2})^3+3\times(-1)\times2\sqrt{2}$

$=16\sqrt{2}-6\sqrt{2}$

$=10\sqrt{2}$

14 답 19

풀이

$$
\begin{array}{rll}
 & bx+c & \\
x^2-a\big) & \overline{3x^3+5x^2+2} & \\
 & \underline{3x^3-3x} & \cdots\cdots ㉠ \\
 & 5x^2+3x+2 & \\
 & \underline{cx^2-ac} & \cdots\cdots ㉡ \\
 & dx+e &
\end{array}
$$

㉠에서 $3x^3-3x=bx(x^2-a)$이어야 하므로

$b=3$, $a=1$이다.

㉡에서 $c=5$이므로

$(5x^2+3x+2)-(5x^2-5)=3x+7$

따라서 $d=3$, $e=7$이므로

$a+b+c+d+e=1+3+5+3+7=19$

15 답 $5x^2-9x+2=(5x+1)(x-2)+4$

풀이

$$
\begin{array}{rl}
 & x-2 \\
5x+1\big) & \overline{5x^2-9x+2} \\
 & \underline{5x^2+x} \\
 & -10x+2 \\
 & \underline{-10x-2} \\
 & 4
\end{array}
$$

따라서 $Q=x-2$, $R=4$이므로

$5x^2-9x+2=(5x+1)(x-2)+4$

16 답 x^2-x+3

풀이 주어진 조건에 의하여

$x^3+4x-3=A(x+1)+2x-6$이다.

이때

$x^3+4x-3-(2x-6)=A(x+1)$

$x^3+2x+3=A(x+1)$

이므로 다항식 x^3+2x+3은 $x+1$로 나누어떨어지고, 몫이 A이다.

$$
\begin{array}{rl}
 & x^2-x+3 \\
x+1\big) & \overline{x^3+2x+3} \\
 & \underline{x^3+x^2} \\
 & -x^2+2x \\
 & \underline{-x^2-x} \\
 & 3x+3 \\
 & \underline{3x+3} \\
 & 0
\end{array}
$$

따라서 $A=x^2-x+3$이다.

다른 풀이 $x^3+4x-3=A(x+1)+2x-6$이므로

$A=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)로 놓고 양변을 정리하여 구해도 된다. 즉,

$(ax^2+bx+c)(x+1)+2x-6$

$=ax^3+(a+b)x^2+(2+b+c)x+c-6$

$=x^3+4x-3$

이므로 $a=1$, $b=-1$, $c=3$

따라서 $A=x^2-x+3$이다.

Ⅰ-2 | 항등식과 나머지 정리 026-037쪽

01 답 (1) × (2) ○ (3) ○ (4) ○ (5) × (6) ○

풀이 (1) 등식이 $x=0$일 때만 성립하므로 항등식이 아니다.

(2) 우변을 전개하여 나타내면 $2x-4=2x-4$이므로 항등식이다.

(3) 좌변을 전개하여 나타내면 $x^2-x-2=x^2-x-2$이므로 항등식이다.

(4) 우변을 전개하여 나타내면 $x^2-2x+1=x^2-2x+1$이므로 항등식이다.

(5) 우변을 전개하여 나타내면 $x^3-1=x^3+x^2-x-1$이므로 항등식이 아니다.

(6) 좌변을 전개하여 나타내면 $x^4+x^2+1=x^4+x^2+1$이므로 항등식이다.

02 답 (1) $a=0,\ b=0$ (2) $a=3,\ b=5$

풀이 (1) $ax=b$에서 $ax-b=0$이므로 항등식의 성질에 의하여 $a=0,\ -b=0$이므로 $a=\underline{0},\ b=\underline{0}$이다.

(2) 항등식의 성질에 의하여 $3=a,\ -5=-b$이므로 $a=3$, $b=5$이다.

03 답 (1) $a=-1,\ b=0,\ c=2$ (2) $a=-1,\ b=2,\ c=4$

풀이 (1) 항등식의 성질에 의하여

$a+1=0,\ -b=0,\ c-2=0$

이므로 $a=\underline{-1},\ b=\underline{0},\ c=\underline{2}$이다.

(2) 항등식의 성질에 의하여

$a+3=2,\ 2b=4,\ -c-1=-5$

이므로 $a=-1,\ b=2,\ c=4$이다.

04 답 (1) $a=1,\ b=2$ (2) $a=-2,\ b=-3$
(3) $a=-2,\ b=-4$ (4) $a=-1,\ b=-2$

풀이 (1) (i) 계수비교법

양변의 동류항의 계수를 서로 비교하면

$a=\underline{1},\ b=\underline{2}$이다.

(ii) 수치대입법

주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로 $x=0$, $x=-2$일 때도 성립한다.

양변에 $x=0$을 대입하면 $b=2$

양변에 $x=-2$를 대입하면 $0=-2a+b$이므로

$2a=b$에서 $2a=2$이므로 $a=1$

따라서 $a=1,\ b=2$이다.

(2) (i) 계수비교법

양변의 동류항의 계수를 서로 비교하면

$a+4=2,\ 3=-b$

따라서 $a=-2,\ b=-3$이다.

(ii) 수치대입법

주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로 $x=0,\ x=1$일 때도 성립한다.

양변에 $x=0$을 대입하면 $3=-b$에서 $b=-3$

양변에 $x=1$을 대입하면 $a+4+3=2-b$에서

$a+7=2-(-3)$이므로 $a=-2$

따라서 $a=-2,\ b=-3$이다.

(3) (i) 계수비교법

양변의 동류항의 계수를 서로 비교하면

$-3=a-1,\ a-2=b$

$a=-2$이므로 $-2-2=b$

따라서 $a=-2,\ b=-4$이다.

(ii) 수치대입법

주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로 $x=0$, $x=-1$일 때도 성립한다.

양변에 $x=0$을 대입하면 $a-2=b$이므로

$a-b=2$ …… ㉠

양변에 $x=-1$을 대입하면

$3+a-2=-a+1+b$

$2a-b=0$ …… ㉡

㉠과 ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2,\ b=-4$이다.

(4) (i) 계수비교법

양변의 동류항의 계수를 서로 비교하면

$a-b=-a,\ -3=a+b$

$2a=b$를 $a+b=-3$에 대입하면

$3a=-3$이므로 $a=-1$

$2a=b$이므로 $b=-2$

따라서 $a=-1,\ b=-2$이다.

(ii) 수치대입법

주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로 $x=0,\ x=2$일 때도 성립한다.

양변에 $x=0$을 대입하면

$-3=a+b$ …… ㉠

양변에 $x=2$를 대입하면

$2a-2b-3=-2a+a+b$

$3a-3b=3$

$a-b=1$ …… ㉡

㉠과 ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1,\ b=-2$이다.

05 답 (1) $a=-3,\ b=2$ (2) $a=7,\ b=-7$
(3) $a=2,\ b=2$ (4) $a=-9,\ b=4$

풀이 (1) (i) 계수비교법

양변의 동류항의 계수를 서로 비교하면

$a=\underline{-3},\ b=\underline{2}$이다.

(ii) 수치대입법

주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로 $x=-1$, $x=1$일 때도 성립한다.

양변에 $x=-1$을 대입하면 $2+a+5=b-3+5$이므로

$a-b=-5$ …… ㉠

양변에 $x=1$을 대입하면 $2-a+5=b+3+5$이므로

$a+b=-1$ …… ㉡

㉠과 ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3,\ b=2$이다.

(2) (i) 계수비교법

좌변을 전개하면

$2x^2-7x-4=2x^2-ax+(b+3)$

위의 식의 양변의 동류항의 계수를 서로 비교하면

$a=7$, $b=-7$이다.

(ii) 수치대입법

주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로 $x=0$, $x=4$일 때도 성립한다.

양변에 $x=0$을 대입하면 $-4=b+3$이므로

$b=-7$

양변에 $x=4$를 대입하면 $0=32-4a+b+3$이므로

$4a=32+(-7)+3=28$에서 $a=7$

따라서 $a=7$, $b=-7$이다.

(3) (i) 계수비교법

우변을 전개하면

$x^2+3x+b=x^2+(a+1)x+a$

위의 식의 양변의 동류항의 계수를 서로 비교하면

$a+1=3$, $a=b$

따라서 $a=2$, $b=2$이다.

(ii) 수치대입법

주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로 $x=0$, $x=-1$일 때도 성립한다.

양변에 $x=0$을 대입하면

$a=b$ …… ㉠

양변에 $x=-1$을 대입하면 $1-3+b=0$이므로

$b=2$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $a=2$

따라서 $a=2$, $b=2$이다.

(4) (i) 계수비교법

우변을 전개하면

$4x^2-ax+2=bx^2+(2b+1)x+2$

위의 식의 양변의 동류항의 계수를 서로 비교하면

$b=4$, $-a=2b+1$

따라서 $a=-9$, $b=4$이다.

(ii) 수치대입법

주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로 $x=1$, $x=-2$일 때도 성립한다.

양변에 $x=1$을 대입하면 $4-a+2=3(b+1)$이므로

$a+3b=3$ …… ㉠

양변에 $x=-2$를 대입하면 $16+2a+2=0$이므로

$a=-9$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $b=4$

따라서 $a=-9$, $b=4$이다.

06 답 (1) $a=1$, $b=2$, $c=3$
(2) $a=8$, $b=3$, $c=-4$
(3) $a=4$, $b=-7$, $c=0$
(4) $a=1$, $b=0$, $c=1$
(5) $a=2$, $b=9$, $c=5$
(6) $a=-1$, $b=8$, $c=-6$
(7) $a=-2$, $b=7$, $c=-13$
(8) $a=4$, $b=1$, $c=-5$

풀이 (1) (i) 수치대입법

주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로 $x=0$, $x=-1$, $x=1$일 때도 성립한다.

양변에 $x=0$을 대입하면 $c=3$이므로 주어진 식은

$x^2-5x+3=ax(x-1)-2bx+3$

위의 식의 양변에 $x=-1$, $x=1$을 각각 대입하면

$a+b=3$ …… ㉠

$b=2$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $a=1$

따라서 $a=1$, $b=2$, $c=3$이다.

(ii) 계수비교법

우변을 전개하면

$x^2-5x+3=ax^2-(a+2b)x+c$

위의 식의 양변의 동류항의 계수를 서로 비교하면

$a=1$, $a+2b=5$, $c=3$

따라서 $a=1$, $b=2$, $c=3$이다.

(2) (i) 수치대입법

주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로 $x=0$, $x=1$, $x=3$일 때도 성립한다.

양변에 $x=0$을 대입하면 $c=-4$이므로 주어진 식은

$3x^2-ax+1=(bx+1)(x-3)+4$

위의 식의 양변에 $x=1$, $x=3$을 각각 대입하면

$a-2b=2$ …… ㉠

$a=8$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $b=3$

따라서 $a=8$, $b=3$, $c=-4$이다.

(ii) 계수비교법

우변을 전개하면

$3x^2-ax+1=bx^2-(3b-1)x-3+c+8$

위의 식의 양변의 동류항의 계수를 서로 비교하면

$b=3$, $a=3b-1$, $c+5=1$

따라서 $a=8$, $b=3$, $c=-4$이다.

(3) (i) 수치대입법

주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로 $x=-1$, $x=0$, $x=1$일 때도 성립한다.

양변에 $x=-1$을 대입하면 $c=0$이므로 주어진 식은

$4x^2+x-3=a(x+1)^2+b(x+1)$

위의 식의 양변에 $x=0$, $x=1$을 각각 대입하면

$a+b=-3$ …… ㉠

$2a+b=1$ …… ㉡

㉠과 ㉡을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=-7$

따라서 $a=4$, $b=-7$, $c=0$이다.

(ii) 계수비교법

우변을 전개하면

$4x^2+x-3=ax^2+(2a+b)x+a+b+c$

위의 식의 양변의 x^2의 계수를 서로 비교하면 $a=4$이므로
$4x^2+x-3=4x^2+(b+8)x+4+b+c$
위의 식의 양변의 동류항의 계수를 서로 비교하면
$b+8=1$, $4+b+c=-3$
따라서 $a=4$, $b=-7$, $c=0$이다.

(4) (i) 수치대입법
주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로 $x=1$, $x=0$, $x=-1$일 때도 성립한다.
양변에 $x=1$을 대입하면 $c=1$이므로 주어진 식은
$x^2-x+1=a(x-1)^2+b(x-1)(x+1)+x$
위의 식의 양변에 $x=0$, $x=-1$을 각각 대입하면
$a-b=1$ …… ㉠
$a=1$ …… ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면 $b=0$
따라서 $a=1$, $b=0$, $c=1$이다.
(ii) 계수비교법
우변을 전개하면
$x^2-x+1=(a+b)x^2+(-2a+c)x+a-b$
위의 식의 양변의 x^2의 계수와 상수항을 서로 비교하면 $a+b=1$, $a-b=1$에서 $a=1$, $b=0$이므로
$x^2-x+1=x^2+(c-2)x+1$
위의 식의 양변의 동류항의 계수를 서로 비교하면
$c-2=-1$
따라서 $a=1$, $b=0$, $c=1$이다.

(5) (i) 수치대입법
주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로 $x=2$, $x=0$, $x=1$일 때도 성립한다.
양변에 $x=2$를 대입하면 $c=5$이므로 주어진 식은
$2x^2+x-5=a(x-2)^2+b(x-2)+5$
위의 식의 양변에 $x=0$, $x=1$을 각각 대입하면
$2a-b=-5$ …… ㉠
$a-b=-7$ …… ㉡
㉠과 ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=9$
따라서 $a=2$, $b=9$, $c=5$이다.
(ii) 계수비교법
우변을 전개하면
$2x^2+x-5=ax^2+(-4a+b)x+4a-2b+c$
위의 식의 양변의 x^2의 계수를 서로 비교하면 $a=2$이므로
$2x^2+x-5=2x^2+(b-8)x-2b+c+8$
위의 식의 양변의 동류항의 계수를 서로 비교하면
$b-8=1$, $-2b+c+8=-5$
따라서 $a=2$, $b=9$, $c=5$이다.

(6) (i) 수치대입법
주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로 $x=0$, $x=1$, $x=-1$일 때도 성립한다.
양변에 $x=0$, $x=1$을 각각 대입하면
$b=8$ …… ㉠
$2b+c=10$ …… ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $c=-6$이므로 주어진 식은
$-x^2+3x+8=ax(x-1)+8(x+1)-6x$
위의 식의 양변에 $x=-1$을 대입하면 $a=-1$이다.
따라서 $a=-1$, $b=8$, $c=-6$이다.
(ii) 계수비교법
우변을 전개하면
$-x^2+3x+8=ax^2+(-a+b+c)x+b$
위의 식의 양변의 x^2의 계수와 상수항을 서로 비교하면 $a=-1$, $b=8$이므로
$-x^2+3x+8=-x^2+(c+9)x+8$
위의 식의 양변의 동류항의 계수를 서로 비교하면
$c+9=3$
따라서 $a=-1$, $b=8$, $c=-6$이다.

(7) (i) 수치대입법
주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로 $x=1$, $x=-1$, $x=0$일 때도 성립한다.
양변에 $x=1$을 대입하면 $c=-13$이므로 주어진 식은
$a(x-1)^3+b(x-1)(x+1)-13x^2=-2x^3-6x-5$
양변에 $x=0$, $x=-1$을 각각 대입하면
$a+b=5$ …… ㉠
$a=-2$ …… ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면 $b=7$
따라서 $a=-2$, $b=7$, $c=-13$이다.
(ii) 계수비교법
좌변을 전개하면
$ax^3+(-3a+b+c)x^2+3ax-a-b$
$=-2x^3-6x-5$
위의 식의 양변의 x^3의 계수와 상수항을 서로 비교하면 $a=-2$, $a+b=5$에서 $b=7$이므로
$-2x^3+(c+13)x^2-6x-5=-2x^3-6x-5$
위의 식의 양변의 동류항의 계수를 서로 비교하면
$c=-13$
따라서 $a=-2$, $b=7$, $c=-13$이다.

(8) (i) 수치대입법
주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로 $x=1$, $x=0$, $x=2$일 때도 성립한다.
양변에 $x=1$을 대입하면 $a=4$이므로 주어진 식은
$x^3+4x-5=(x-1)(x^2+bx-c)$
위의 식의 양변에 $x=0$, $x=2$를 각각 대입하면
$c=-5$ …… ㉠
$2b-c=7$ …… ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $b=1$
따라서 $a=4$, $b=1$, $c=-5$이다.
(ii) 계수비교법
우변을 전개하면
$x^3+ax-5=x^3+(b-1)x^2-(b+c)x+c$

앞의 식의 양변의 상수항을 서로 비교하면 $c=-5$이므로
$x^3+ax-5=x^3+(b-1)x^2-(b-5)x-5$
위의 식의 양변의 동류항의 계수를 서로 비교하면
$b-1=0,\ a=-b+5$
따라서 $a=4,\ b=1,\ c=-5$이다.

07 답 (1) $a=6,\ b=-4$ (2) $a=5,\ b=3$
(3) $a=-1,\ b=-7$ (4) $a=5,\ b=1$

풀이 (1) x^3-ax+b를 $(x+1)(x-3)$으로 나눈 몫을 $Q(x)$라고 하면 나머지가 $x+2$이므로
$x^3-ax+b=(x+1)(x-3)Q(x)+x+2$
위의 식의 양변에 $x=-1,\ x=3$을 각각 대입하면
$a+b=2$ …… ㉠
$3a-b=22$ …… ㉡
㉠과 ㉡을 연립하여 풀면 $a=6,\ b=-4$이다.

(2) $2x^3-ax^2+b$를 $(x-1)(x-2)$로 나눈 몫을 $Q(x)$라고 하면 나머지가 $-x+1$이므로
$2x^3-ax^2+b=(x-1)(x-2)Q(x)-x+1$
위의 식의 양변에 $x=1,\ x=2$를 각각 대입하면
$a-b=2$ …… ㉠
$4a-b=17$ …… ㉡
㉠과 ㉡을 연립하여 풀면 $a=5,\ b=3$이다.

(3) ax^3-6x^2-6x-b를 x^2+4x로 나눈 몫을 $Q(x)$라고 하면 나머지가 $2x+7$이므로
$ax^3-6x^2-6x-b=(x^2+4x)Q(x)+2x+7$
$=x(x+4)Q(x)+2x+7$
위의 식의 양변에 $x=0,\ x=-4$를 각각 대입하면
$b=-7,\ -64a-b=71$
따라서 $a=-1,\ b=-7$이다.

(4) $3x^3+ax^2-bx+2$를 $-x^2-x+2$로 나눈 몫을 $Q(x)$라고 하면 나머지가 $3x+6$이므로
$3x^3+ax^2-bx+2=(-x^2-x+2)Q(x)+3x+6$
$=-(x-1)(x+2)Q(x)+3x+6$
위의 식의 양변에 $x=1,\ x=-2$를 각각 대입하면
$a-b=4$ …… ㉠
$2a+b=11$ …… ㉡
㉠과 ㉡을 연립하여 풀면 $a=5,\ b=1$이다.

08 답 (1) $a=1,\ b=6$ (2) $a=-9,\ b=8$
(3) $a=1,\ b=0$ (4) $a=0,\ b=1$

풀이 (1) $2x^3+ax^2-13x+b$를 $(x-2)(x+3)$으로 나눈 몫을 $Q(x)$라고 하면
$2x^3+ax^2-13x+b=(x-2)(x+3)Q(x)$
위의 식의 양변에 $x=2,\ x=-3$을 각각 대입하면
$4a+b=10$ …… ㉠
$9a+b=15$ …… ㉡
㉠과 ㉡을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=6$이다.

(2) $x^4-2x^3+ax^2+2x+b$를 x^2-3x-4로 나눈 몫을 $Q(x)$라고 하면
$x^4-2x^3+ax^2+2x+b=(x^2-3x-4)Q(x)$
$=(x+1)(x-4)Q(x)$
위의 식의 양변에 $x=-1,\ x=4$를 각각 대입하면
$a+b=-1$ …… ㉠
$16a+b=-136$ …… ㉡
㉠과 ㉡을 연립하여 풀면 $a=-9,\ b=8$이다.

(3) x^8-ax^4+b를 $x(x+1)$로 나눈 몫을 $Q(x)$라고 하면
$x^8-ax^4+b=x(x+1)Q(x)$
위의 식의 양변에 $x=0,\ x=-1$을 각각 대입하면
$b=0,\ a-b=1$
따라서 $a=1,\ b=0$이다.

(4) $x^{10}-2ax^5-b$를 x^2-1로 나눈 몫을 $Q(x)$라고 하면
$x^{10}-2ax^5-b=(x^2-1)Q(x)$
$=(x+1)(x-1)Q(x)$
위의 식의 양변에 $x=-1,\ x=1$을 각각 대입하면
$2a-b=-1$ …… ㉠
$2a+b=1$ …… ㉡
㉠과 ㉡을 연립하여 풀면 $a=0,\ b=1$이다.

09 답 (1) $a=4,\ b=-1$ (2) $a=-6,\ b=-7$
(3) $a=1,\ b=-3$ (4) $a=5,\ b=-6$

풀이 (1) x^3+ax+b를 x^2+2로 나눈 몫을 $Q(x)$라고 하면 나머지가 $2x-1$이므로
$x^3+ax+b=(x^2+2)Q(x)+2x-1$
이때 좌변이 삼차식이고 삼차항의 계수가 1이므로
$Q(x)=x+k$ (k는 상수)로 놓으면
$x^3+ax+b=(x^2+2)(x+k)+2x-1$
$=x^3+kx^2+4x+2k-1$
위의 식의 양변의 동류항의 계수를 비교하면
$k=0,\ a=4,\ b=2k-1$
따라서 $a=4,\ b=-1$이다.

(2) $2x^3+ax^2-b$를 x^2-2x-2로 나눈 몫을 $Q(x)$라고 하면 나머지가 3이므로
$2x^3+ax^2-b=(x^2-2x-2)Q(x)+3$
이때 좌변이 삼차식이고 삼차항의 계수가 2이므로
$Q(x)=2x+k$ (k는 상수)로 놓으면
$2x^3+ax^2-b=(x^2-2x-2)(2x+k)+3$
$=2x^3+(k-4)x^2-(2k+4)x-2k+3$
위의 식의 양변의 동류항의 계수를 비교하면
$a=k-4,\ 2k+4=0,\ b=2k-3$
$k=-2$이므로 $a=-6,\ b=-7$이다.

(3) ax^3+bx^2-2를 x^2+1로 나눈 몫을 $Q(x)$라고 하면 나머지가 $-x+1$이므로
$ax^3+bx^2-2=(x^2+1)Q(x)-x+1$
이때 좌변이 삼차식이고 삼차항의 계수가 a이므로
$Q(x)=ax+k$ (k는 상수)로 놓으면

$ax^3+bx^2-2=(x^2+1)(ax+k)-x+1$

$=ax^3+kx^2+(a-1)x+k+1$

위의 식의 양변의 동류항의 계수를 비교하면

$b=k,\ a-1=0,\ -2=k+1$

$k=-3$이므로 $a=1,\ b=-3$이다.

(4) $4x^3-ax^2+bx+6$을 x^2-2로 나눈 몫을 $Q(x)$라고 하면 나머지가 $2x-4$이므로

$4x^3-ax^2+bx+6=(x^2-2)Q(x)+2x-4$

이때 좌변이 삼차식이고 삼차항의 계수가 4이므로

$Q(x)=4x+k$ (k는 상수)로 놓으면

$4x^3-ax^2+bx+6=(x^2-2)(4x+k)+2x-4$

$=4x^3+kx^2-6x-2k-4$

위의 식의 양변의 동류항의 계수를 비교하면

$-a=k,\ b=-6,\ 6=-2k-4$

$k=-5$이므로 $a=5,\ b=-6$이다.

10 답 (1) $a=3,\ b=0$ (2) $a=1,\ b=2$ (3) $a=0,\ b=-10$ (4) $a=-2,\ b=2$

풀이 (1) x^3-ax-b를 x^2-3으로 나눈 몫을 $Q(x)$라고 하면

$x^3-ax-b=(x^2-3)Q(x)$

이때 좌변이 삼차식이고 삼차항의 계수가 1이므로

$Q(x)=x+k$ (k는 상수)로 놓으면

$x^3-ax-b=(x^2-3)(x+k)$

$=x^3+kx^2-3x-3k$

위의 식의 양변의 동류항의 계수를 비교하면

$k=0,\ a=3,\ b=3k$

따라서 $a=3,\ b=0$이다.

(2) $3x^3-6x^2+ax-b$를 $3x^2+1$로 나눈 몫을 $Q(x)$라고 하면

$3x^3-6x^2+ax-b=(3x^2+1)Q(x)$

이때 좌변이 삼차식이고 삼차항의 계수가 3이므로

$Q(x)=x+k$ (k는 상수)로 놓으면

$3x^3-6x^2+ax-b=(3x^2+1)(x+k)$

$=3x^3+3kx^2+x+k$

위의 식의 양변의 동류항의 계수를 비교하면

$-6=3k,\ a=1,\ -b=k$

$k=-2$이므로 $a=1,\ b=2$이다.

(3) $2x^3-ax^2+bx+8$을 x^2+x-4로 나눈 몫을 $Q(x)$라고 하면

$2x^3-ax^2+bx+8=(x^2+x-4)Q(x)$

이때 좌변이 삼차식이고 삼차항의 계수가 2이므로

$Q(x)=2x+k$ (k는 상수)로 놓으면

$2x^3-ax^2+bx+8=(x^2+x-4)(2x+k)$

$=2x^3+(k+2)x^2+(k-8)x-4k$

위의 식의 양변의 동류항의 계수를 비교하면

$-a=k+2,\ b=k-8,\ 8=-4k$

$k=-2$이므로 $a=0,\ b=-10$이다.

(4) x^3+x^2-ax+2를 x^2+b로 나눈 몫을 $Q(x)$라고 하면

$x^3+x^2-ax+2=(x^2+b)Q(x)$

이때 좌변이 삼차식이고 삼차항의 계수가 1이므로

$Q(x)=x+k$ (k는 상수)로 놓으면

$x^3+x^2-ax+2=(x^2+b)(x+k)$

$=x^3+kx^2+bx+bk$

위의 식의 양변의 동류항의 계수를 비교하면

$k=1,\ -a=b,\ 2=bk$

따라서 $a=-2,\ b=2$이다.

11 답 (1) -2 (2) 10 (3) -7 (4) 26

풀이 (1) $f(x)=x^2-4x+1$로 놓으면 나머지 정리에 의하여

$f(1)=1-4+1=-2$

(2) $f(x)=2x^2+3x+1$로 놓으면 나머지 정리에 의하여

$f(-3)=18-9+1=10$

(3) $f(x)=x^3+4x^2-7$로 놓으면 나머지 정리에 의하여

$f(-4)=-64+64-7=-7$

(4) $f(x)=3x^3+x^2-4x+6$으로 놓으면 나머지 정리에 의하여

$f(2)=24+4-8+6=26$

참고 (1) $x^2-4x+1=(x-1)(x-3)-2$

(2) $2x^2+3x+1=(x+3)(2x-3)+10$

(3) $x^3+4x^2-7=(x+4)x^2-7$

(4) $3x^3+x^2-4x+6=(x-2)(3x^2+7x+10)+26$

12 답 (1) $\frac{11}{4}$ (2) $\frac{8}{3}$ (3) $\frac{29}{64}$ (4) $-\frac{24}{5}$

풀이 (1) $f(x)=x^2-3x+4$로 놓으면 나머지 정리에 의하여

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+4=\frac{11}{4}$

(2) $f(x)=3x^2-5x-2$로 놓으면 나머지 정리에 의하여

$f\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}+\frac{10}{3}-2=\frac{8}{3}$

(3) $f(x)=x^3-2x+1$로 놓으면 나머지 정리에 의하여

$f\left(\frac{5}{4}\right)=\frac{125}{64}-\frac{5}{2}+1=\frac{29}{64}$

(4) $f(x)=5x^3+2x^2+7x-2$로 놓으면 나머지 정리에 의하여

$f\left(-\frac{2}{5}\right)=-\frac{8}{25}+\frac{8}{25}-\frac{14}{5}-2=-\frac{24}{5}$

13 답 (1) 2 (2) $-\frac{1}{3}$ (3) 5 (4) $-\frac{5}{18}$ (5) 6

풀이 (1) $f(x)=x^2-ax+2$로 놓으면 나머지 정리에 의하여

$f(-2)=4+2a+2=10$

따라서 $a=2$이다.

(2) $f(x)=3x^2+x-a$로 놓으면 나머지 정리에 의하여

$f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-a=1$

따라서 $a=-\frac{1}{3}$이다.

(3) $f(x)=x^3+ax^2-4$로 놓으면 나머지 정리에 의하여

$f(1)=1+a-4=2$

따라서 $a=5$이다.

(4) $f(x)=x^3+ax^2-2x$로 놓으면 나머지 정리에 의하여

$f\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{27}{8}+\frac{9}{4}a+3=-1$

따라서 $a=-\frac{5}{18}$이다.

(5) $f(x)=2x^3+x^2-ax+1$로 놓으면 나머지 정리에 의하여

$f(2)=16+4-2a+1=9$

따라서 $a=6$이다.

14 답 $a=3,\ b=-1$

풀이 $f(x)=x^3+ax^2-bx-4$로 놓으면 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지가 1이므로

$f(1)=1+a-b-4=1$에서

$a-b=4$ …… ㉠

$f(x)$를 $x+2$로 나눈 나머지가 -2이므로

$f(-2)=-8+4a+2b-4=-2$에서

$2a+b=5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3,\ b=-1$이다.

15 답 $a=-22,\ b=-6$

풀이 $f(x)=4x^3+4x^2+ax-b$로 놓으면

$f(x)$는 $x+3$으로 나누어떨어지므로

$f(-3)=-108+36-3a-b=0$에서

$3a+b=-72$ …… ㉠

$f(x)$를 $2x-1$로 나눈 나머지가 $-\frac{7}{2}$이므로

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}a-b=-\frac{7}{2}$에서

$a-2b=-10$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-22,\ b=-6$이다.

16 답 (1) 8 (2) -1 (3) $\frac{1}{3}$ (4) -6

풀이 (1) $f(x)$를 x^2-2x-3으로 나눈 몫을 $Q(x)$라고 하면 나머지는 $x+5$이므로

$f(x)=(x^2-2x-3)Q(x)+x+5$

$\quad=(x+1)(x-3)Q(x)+x+5$

따라서 $f(x)$를 $x-3$으로 나눈 나머지는

$f(3)=3+5=8$

(2) $f(x)$를 x^2-x-6으로 나눈 몫을 $Q(x)$라고 하면 나머지는 $2x+3$이므로

$f(x)=(x^2-x-6)Q(x)+2x+3$

$\quad=(x+2)(x-3)Q(x)+2x+3$

따라서 $f(x)$를 $x+2$로 나눈 나머지는

$f(-2)=-4+3=-1$

(3) $f(x)$를 $3x^2-x-2$로 나눈 몫을 $Q(x)$라고 하면 나머지는 $x+1$이므로

$f(x)=(3x^2-x-2)Q(x)+x+1$

$\quad=(3x+2)(x-1)Q(x)+x+1$

따라서 $f(x)$를 $3x+2$로 나눈 나머지는

$f\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{2}{3}+1=\frac{1}{3}$

(4) $f(x)$를 x^3-1로 나눈 몫을 $Q(x)$라고 하면 나머지는 $4x-10$이므로

$f(x)=(x^3-1)Q(x)+4x-10$

$\quad=(x-1)(x^2+x+1)Q(x)+4x-10$

따라서 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는

$f(1)=4-10=-6$

17 답 -1

풀이 $f(x)$를 $x+2$로 나눈 나머지가 -1이므로

$f(-2)=-1$

이때 $f(x-1)$을 $x+1$로 나눈 나머지는

$f(-1-1)$이므로 $f(-2)$와 같다.

따라서 $f(x-1)$을 $x+1$로 나눈 나머지는 -1이다.

18 답 -60

풀이 $f(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지가 -5이므로

$f(2)=-5$

$f(x)$를 $x+3$으로 나눈 나머지가 12이므로

$f(-3)=12$

이때 $f(x+1)f(x-4)$를 $x-1$로 나눈 나머지는

$f(1+1)f(1-4)$이므로 $f(2)f(-3)$과 같다.

따라서 $f(x+1)f(x-4)$를 $x-1$로 나눈 나머지는

$-5\times12=-60$이다.

19 답 4

풀이 $f(x)$를 $x-4$로 나눈 나머지가 1이므로

$f(4)=1$

$f(x)$를 $2x+5$로 나눈 나머지가 4이므로

$f\left(-\frac{5}{2}\right)=4$

이때 $f(x+6)f\left(\frac{1}{4}x-2\right)$를 $x+2$로 나눈 나머지는

$f(-2+6)f\left(-\frac{1}{2}-2\right)$이므로 $f(4)f\left(-\frac{5}{2}\right)$와 같다.

따라서 $f(x+6)f\left(\frac{1}{4}x-2\right)$를 $x+2$로 나눈 나머지는

$1\times4=4$이다.

20 답 $x+2$

풀이 $f(x)$를 $(x-1)(x-3)$으로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라고 하면

$f(x)=(x-1)(x-3)Q(x)+ax+b$

이때 나머지 정리에 의하여 $f(1)=3,\ f(3)=5$이므로

$f(1)=a+b=3$ …… ㉠

$f(3)=3a+b=5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=2$이므로

구하는 나머지는 $x+2$이다.

21 답 $-4x+3$

풀이 $f(x)$를 $(x-2)(x+4)$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라고 하면

$f(x)=(x-2)(x+4)Q(x)+ax+b$

이때 나머지 정리에 의하여 $f(2)=-5$, $f(-4)=19$이므로

$f(2)=2a+b=-5$ …… ㉠

$f(-4)=-4a+b=19$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-4$, $b=3$이므로

구하는 나머지는 $-4x+3$이다.

22 답 $2x-2$

풀이 $f(x)$를 $(x-1)(x+2)$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라고 하면

$f(x)=(x-1)(x+2)Q(x)+ax+b$

이때 나머지 정리에 의하여 $f(1)=0$, $f(-2)=-6$이므로

$f(1)=a+b=0$ …… ㉠

$f(-2)=-2a+b=-6$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-2$이므로

구하는 나머지는 $2x-2$이다.

23 답 $4x+8$

풀이 $f(x)$를 x^2+3x로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라고 하면

$f(x)=(x^2+3x)Q(x)+ax+b$

$\quad=x(x+3)Q(x)+ax+b$

이때 나머지 정리에 의하여 $f(-3)=-4$, $f(0)=8$이므로

$f(-3)=-3a+b=-4$ …… ㉠

$f(0)=b=8$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=8$이므로

구하는 나머지는 $4x+8$이다.

24 답 $\frac{1}{7}x+\frac{3}{7}$

풀이 $f(x)$를 $2x^2-9x+4$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라고 하면

$f(x)=(2x^2-9x+4)Q(x)+ax+b$

$\quad=(2x-1)(x-4)Q(x)+ax+b$

이때 나머지 정리에 의하여 $f(4)=1$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$이므로

$f(4)=4a+b=1$ …… ㉠

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}a+b=\frac{1}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{7}$, $b=\frac{3}{7}$이므로

구하는 나머지는 $\frac{1}{7}x+\frac{3}{7}$이다.

25 답 (1) ○ (2) × (3) ○ (4) × (5) ○

풀이 (1) $f(1)=2+1-5+2=0$이므로 $x-1$은 $f(x)$의 인수이다.

(2) $f(-1)=-2+1+5+2=6\neq0$이므로 $x+1$은 $f(x)$의 인수가 아니다.

(3) $f(-2)=-16+4+10+2=0$이므로 $x+2$는 $f(x)$의 인수이다.

(4) $f(3)=54+9-15+2=50\neq0$이므로 $x-3$은 $f(x)$의 인수가 아니다.

(5) $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{5}{2}+2=0$이므로 $2x-1$은 $f(x)$의 인수이다.

참고 $f(x)=2x^3+x^2-5x+2$

$\quad=(x-1)(2x^2+3x-2)$

$\quad=(x-1)(x+2)(2x-1)$

26 답 (1) 1 (2) -4 (3) 3 (4) 7 (5) -5

풀이 (1) $f(-2)=0$이므로 $f(-2)=4+2a-6=0$에서 $a=1$이다.

(2) $f(1)=0$이므로 $f(1)=-3-1-a=0$에서 $a=-4$이다.

(3) $f(-1)=0$이므로 $f(-1)=-1+4-a=0$에서 $a=3$이다.

(4) $f(3)=0$이므로 $f(3)=54-9a+9=0$에서 $a=7$이다.

(5) $f(2)=0$이므로 $f(2)=8+4a+6-a+1=0$에서 $a=-5$이다.

27 답 (1) 1, 3, 12, 27, 30, 몫: x^2+4x+9, 나머지: 30

(2) -2, -5, 10, -4, -18, -7, 9, -8, 몫: $2x^2-7x+9$, 나머지: -8

풀이 (1)

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & \boxed{1} & -3 & 3 \\ & & \boxed{3} & \boxed{12} & \boxed{27} \\ \hline & 1 & 4 & 9 & \boxed{30} \end{array}$$

이므로 □ 안에 알맞은 수는 1, 3, 12, 27, 30이고

몫은 x^2+4x+9, 나머지는 30이다.

(2)

$$\begin{array}{r|rrrr} \boxed{-2} & 2 & -3 & \boxed{-5} & \boxed{10} \\ & & \boxed{-4} & 14 & \boxed{-18} \\ \hline & 2 & \boxed{-7} & \boxed{9} & \boxed{-8} \end{array}$$

이므로 □ 안에 알맞은 수는 -2, -5, 10, -4, -18, -7, 9, -8이고 몫은 $2x^2-7x+9$, 나머지는 -8이다.

28 답 (1) 몫: x^2-x+4, 나머지: 5

(2) 몫: $3x^2+6x+13$, 나머지: 20

풀이 (1)

$$\begin{array}{r|rrrr} \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{-2} & \boxed{5} & \boxed{1} \\ & & \boxed{1} & \boxed{-1} & \boxed{4} \\ \hline & \boxed{1} & \boxed{-1} & \boxed{4} & \boxed{5} \end{array}$$

따라서 몫은 x^2-x+4, 나머지는 5이다.

(2)

$$\begin{array}{r|rrrr} \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{-6} \\ & & \boxed{6} & \boxed{12} & \boxed{26} \\ \hline & \boxed{3} & \boxed{6} & \boxed{13} & \boxed{20} \end{array}$$

따라서 몫은 $3x^2+6x+13$, 나머지는 20이다.

29 답 (1) 몫: x^2-7x+9, 나머지: -12
(2) 몫: $4x^2+2x-1$, 나머지: -5
(3) 몫: $2x^2+3x+6$, 나머지: 8
(4) 몫: $3x^2-3x+4$, 나머지: -11

풀이 (1)

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -6 & 2 & -3 \\ & & -1 & 7 & -9 \\ \hline & 1 & -7 & 9 & \multicolumn{1}{|r}{-12} \end{array}$$

따라서 몫은 x^2-7x+9, 나머지는 -12이다.

(2)

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 4 & -10 & -7 & -2 \\ & & 12 & 6 & -3 \\ \hline & 4 & 2 & -1 & \multicolumn{1}{|r}{-5} \end{array}$$

따라서 몫은 $4x^2+2x-1$, 나머지는 -5이다.

(3)

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 2 & -1 & 0 & -4 \\ & & 4 & 6 & 12 \\ \hline & 2 & 3 & 6 & \multicolumn{1}{|r}{8} \end{array}$$

따라서 몫은 $2x^2+3x+6$, 나머지는 8이다.

(4)

$$\begin{array}{r|rrrr} -4 & 3 & 9 & -8 & 5 \\ & & -12 & 12 & -16 \\ \hline & 3 & -3 & 4 & \multicolumn{1}{|r}{-11} \end{array}$$

따라서 몫은 $3x^2-3x+4$, 나머지는 -11이다.

30 답 (1) 몫: x^2+3x, 나머지: 1
(2) 몫: x^2-x-2, 나머지: 0
(3) 몫: $2x^2-3x+6$, 나머지: -23
(4) 몫: x^2+1, 나머지: 6

풀이 (1)

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{2} & 2 & 5 & \boxed{-3} & 1 \\ & & 1 & \boxed{3} & 0 \\ \hline & 2 & \boxed{6} & 0 & \multicolumn{1}{|r}{\boxed{1}} \end{array}$$

따라서

$$2x^3+5x^2-3x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2+6x)+1$$
$$=(2x-1)(x^2+3x)+1$$

과 같이 나타낼 수 있으므로 몫은 x^2+3x, 나머지는 1이다.

(2)

$$\begin{array}{r|rrrr} -\frac{1}{3} & 3 & -2 & -7 & -2 \\ & & -1 & 1 & 2 \\ \hline & 3 & -3 & -6 & \multicolumn{1}{|r}{0} \end{array}$$

따라서

$$3x^3-2x^2-7x-2=\left(x+\frac{1}{3}\right)(3x^2-3x-6)$$
$$=(3x+1)(x^2-x-2)$$

와 같이 나타낼 수 있으므로 몫은 x^2-x-2, 나머지는 0이다.

(3)

$$\begin{array}{r|rrrr} -\frac{3}{2} & 4 & 0 & 3 & -5 \\ & & -6 & 9 & -18 \\ \hline & 4 & -6 & 12 & \multicolumn{1}{|r}{-23} \end{array}$$

따라서

$$4x^3+3x-5=\left(x+\frac{3}{2}\right)(4x^2-6x+12)-23$$
$$=(2x+3)(2x^2-3x+6)-23$$

과 같이 나타낼 수 있으므로 몫은 $2x^2-3x+6$, 나머지는 -23이다.

(4)

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{2}{5} & 5 & -2 & 5 & 4 \\ & & 2 & 0 & 2 \\ \hline & 5 & 0 & 5 & \multicolumn{1}{|r}{6} \end{array}$$

따라서

$$5x^3-2x^2+5x+4=\left(x-\frac{2}{5}\right)(5x^2+5)+6$$
$$=(5x-2)(x^2+1)+6$$

과 같이 나타낼 수 있으므로 몫은 x^2+1, 나머지는 6이다.

참고 x의 계수가 1이 아닌 일차식으로 나눈 몫과 나머지를 구할 때 식을 다시 정리하는 것을 잊지 않도록 한다.

다항식 $f(x)$를 $x+\frac{b}{a}$ $(a\neq0)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라고 하면

$$f(x)=\left(x+\frac{b}{a}\right)Q(x)+R$$
$$=\frac{1}{a}(ax+b)Q(x)+R$$
$$=(ax+b)\times\frac{1}{a}Q(x)+R$$

01 답 (1) 항등식이 아니다. (2) 항등식이다.

풀이 (1) 좌변을 전개하면 $6x^2-5x-4=6x^2+5x-4$이므로 항등식이 아니다.

(2) 우변을 전개하면

$x^3+8y^3+6xy-1=x^3+8y^3+6xy-1$

이므로 항등식이다.

참고 $(x+2y-1)\{x^2+(2y)^2+(-1)^2-2xy+2y+x\}$

$=x^3+(2y)^3+(-1)^3-3\times x\times 2y\times(-1)$

$=x^3+8y^3-1+6xy$

02 답 (1) $a=5$, $b=-7$ (2) $a=-1$, $b=-5$

풀이 (1) 우변을 전개하면

$x^2-ax+b-2=x^2-5x-9$

위의 식의 양변의 동류항의 계수를 서로 비교하면

$a=5$, $b-2=-9$이므로 $a=5$, $b=-7$이다.

(2) 주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로 $x=-1$, $x=0$일 때도 성립한다.

양변에 $x=-1$, $x=0$을 각각 대입하면

$b=-5$, $a+b=-6$

따라서 $a=-1$, $b=-5$이다.

03 답 -12

풀이 좌변을 전개하면

$bx^3+(ab-5)x^2+(9-5a)x+9a=2x^3+cx^2+24x-27$

위의 식의 양변의 동류항의 계수를 서로 비교하면

$b=2$, $ab-5=c$, $9-5a=24$, $9a=-27$

따라서 $a=-3$, $b=2$, $c=-11$이므로

$a+b+c=-3+2+(-11)=-12$

04 답 12

풀이 주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로 $x=2$, $x=1$, $x=0$일 때도 성립한다.

양변에 $x=2$를 대입하면 $c=4$이므로 주어진 식은

$a(x-1)(x-2)+b(x-2)+4=x^2$

위의 식의 양변에 $x=1$, $x=0$을 각각 대입하면

$b=3$, $a-b=-2$

따라서 $a=1$, $b=3$이므로

$abc=1\times3\times4=12$

05 답 $a=4$, $b=1$

풀이 x^4-ax^2+bx+2를 x^2+x-2로 나눈 몫을 $Q(x)$라고 하면

$x^4-ax^2+bx+2=(x^2+x-2)Q(x)$

$=(x-1)(x+2)Q(x)$

위의 식의 양변에 $x=1$, $x=-2$를 각각 대입하면

$a-b=3$ …… ㉠

$2a+b=9$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=1$이다.

06 답 -28

풀이 x^3+k를 x^2-3x+9로 나눈 몫을 $Q(x)$라고 하면 나머지가 $2k+1$이므로

$x^3+k=(x^2-3x+9)Q(x)+2k+1$

이때 좌변이 삼차식이고 삼차항의 계수가 1이므로

$Q(x)=x+l$ (l은 상수)로 놓으면

$x^3+k=(x^2-3x+9)(x+l)+2k+1$

$=x^3+(l-3)x^2+(9-3l)x+2k+9l+1$

위의 식의 양변의 동류항의 계수를 비교하면

$l-3=0$, $9-3l=0$, $k=2k+9l+1$

이므로

$l=3$, $k=-28$

07 답 -8

풀이 $f(x)=-4x^3+x^2-2x-3$으로 놓으면 나머지 정리에 의하여

$f(1)=-4+1-2-3=-8$

08 답 4

풀이 $f(x)=x^3+ax^2-20$으로 놓으면 나머지 정리에 의하여

$f(2)=8+4a-20=4$

따라서 $a=4$이다.

09 답 -2

풀이 $f(x)=x^3+ax^2+bx-2$로 놓고 $f(x)$를 $(x+1)(x+2)$로 나눈 몫을 $Q(x)$라고 하면

$f(x)=(x+1)(x+2)Q(x)$

즉, $f(x)$는 $x+1$과 $x+2$로 각각 나누어떨어지므로 나머지 정리에 의하여

$f(-1)=-1+a-b-2=0$에서

$a-b=3$ …… ㉠

$f(-2)=-8+4a-2b-2=0$에서

$2a-b=5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-1$이므로

$ab=2\times(-1)=-2$

10 답 47

풀이 $f(x)$를 $x-k$로 나눈 나머지는

$f(k)=k^3+2k^2+k-1$

$f(x)$를 $x+k$로 나눈 나머지는

$f(-k)=-k^3+2k^2-k-1$

이때 $f(k)+f(-k)=10$이므로

$4k^2-2=10$에서 $k^2=3$

따라서 $f(x)$를 $x-k^2$으로 나눈 나머지는

$f(x)=x^3+2x^2+x-1$을 $x-3$으로 나눈 나머지, 즉 $f(3)$과 같다.

따라서 $f(3)=27+18+3-1=47$이다.

11 답 2

풀이 $f(x)+1$을 x^2-3x+2로 나눈 몫을 $Q_1(x)$라고 하면

$f(x)+1=(x^2-3x+2)Q_1(x)$

$\quad\quad=(x-1)(x-2)Q_1(x)$

즉, $f(1)+1=0$이고 $f(2)+1=0$이므로

$f(1)=-1,\ f(2)=-1$

한편, $f(x)-1$을 x^2+3x+2로 나눈 몫을 $Q_2(x)$라고 하면

$f(x)-1=(x^2+3x+2)Q_2(x)$

$\quad\quad=(x+1)(x+2)Q_2(x)$

즉, $f(-1)-1=0$이고 $f(-2)-1=0$이므로

$f(-1)=1,\ f(-2)=1$

이때 $f(x-3)f(x-4)+f(x-1)f(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지는

$f(2-3)f(2-4)+f(2-1)f(2)$

$=f(-1)f(-2)+f(1)f(2)$

$=1\times1+(-1)\times(-1)=2$

12 답 2

풀이 $x^{10}+1$을 x^2-1로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라고 하면

$x^{10}+1=(x^2-1)Q(x)+ax+b$

$\quad\quad=(x+1)(x-1)Q(x)+ax+b$

이때 양변에 $x=-1$, $x=1$을 각각 대입하면

$(-1)^{10}+1=-a+b$이므로

$a-b=-2$ …… ㉠

$1^{10}+1=a+b$이므로

$a+b=2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=2$이므로 구하는 나머지는 2이다.

13 답 4

풀이 인수 정리에 의하여 $f(-2)=0$이므로

$f(-2)=-24+20+a=0$에서 $a=4$이다.

14 답 39

풀이

$$\begin{array}{r|rrrr} 4 & 2 & -5 & -8 & 4 \\ & & 8 & 12 & 16 \\ \hline & 2 & 3 & 4 & \boxed{20} \end{array}$$

이므로 $a=3$, $b=16$, $c=20$이다.

따라서 $a+b+c=3+16+20=39$이다.

15 답 몫: x^2-3x-8, 나머지: -12

풀이

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -6 & 1 & 12 \\ & & 3 & -9 & -24 \\ \hline & 1 & -3 & -8 & \boxed{-12} \end{array}$$

따라서 몫은 x^2-3x-8, 나머지는 -12이다.

16 답 몫: x^2-2x+1, 나머지: 3

풀이

$$\begin{array}{r|rrrr} -\frac{1}{3} & 3 & -5 & 1 & 4 \\ & & -1 & 2 & -1 \\ \hline & 3 & -6 & 3 & \boxed{3} \end{array}$$

따라서

$3x^3-5x^2+x+4=\left(x+\frac{1}{3}\right)(3x^2-6x+3)+3$

$\quad\quad=(3x+1)(x^2-2x+1)+3$

과 같이 나타낼 수 있으므로 몫은 x^2-2x+1, 나머지는 3이다.

Ⅰ-3 | 인수분해 040-050쪽

01 답 (1) $2xy(y+2)$ (2) $3abc(a-4b+2c)$
(3) $b(a+1)(a+b)$ (4) $(x-2)(x-8)$

풀이 (3) $ab(a+b)+b(b+a)=ab(a+b)+b(a+b)$
$=(ab+b)(a+b)$
$=b(a+1)(a+b)$

(4) $(x-2)^2-6(x-2)=(x-2)(x-2-6)$
$=(x-2)(x-8)$

02 답 (1) $(x-2)^2$ (2) $(3x+1)^2$
(3) $(y+2)(y-2)$ (4) $(3a+5b)(3a-5b)$

풀이 (1) $x^2-4x+4=x^2-2\times2\times x+2^2=(x-2)^2$
(2) $9x^2+6x+1=(3x)^2+2\times3x\times1+1^2=(3x+1)^2$
(3) $y^2-4=y^2-2^2=(y+2)(y-2)$
(4) $9a^2-25b^2=(3a)^2-(5b)^2=(3a+5b)(3a-5b)$

03 답 (1) $(x+3)(x-2)$ (2) $(a+4)(a-1)$
(3) $(y+2)(y-6)$ (4) $(3a+1)(a+1)$
(5) $(2y-3)(2y-5)$ (6) $(3x+2y)(x-2y)$

풀이 (1) $x^2+x-6=x^2+(3-2)x+3\times(-2)$
$=(x+3)(x-2)$
(2) $a^2+3a-4=a^2+(4-1)a+4\times(-1)$
$=(a+4)(a-1)$
(3) $y^2-4y-12=y^2+(2-6)y+2\times(-6)$
$=(y+2)(y-6)$
(4) $3a^2+4a+1=3\times1\times a^2+(3\times1+1\times1)a+1\times1$
$=(3a+1)(a+1)$
(5) $4y^2-16y+15$
$=2\times2\times y^2+\{2\times(-5)+(-3)\times2\}y$
$+(-3)\times(-5)$
$=(2y-3)(2y-5)$
(6) $3x^2-4xy-4y^2$
$=3\times1\times x^2+\{3\times(-2)+2\times1\}xy+2\times(-2)\times y^2$
$=(3x+2y)(x-2y)$

04 답 (1) $(x-y+z)^2$ (2) $(a-b-2)^2$
(3) $(a+b+2c)^2$ (4) $(2x-y+z)^2$
(5) $(3x+y-4)^2$

풀이 (1) $x^2+y^2+z^2-2xy-2yz+2zx$
$=x^2+(-y)^2+z^2+2\times x\times(-y)$
$+2\times(-y)\times z+2\times z\times x$
$=(x-y+z)^2$
(2) $a^2+b^2-2ab-4a+4b+4$
$=a^2+b^2+4-2ab+4b-4a$
$=a^2+(-b)^2+(-2)^2+2\times a\times(-b)$
$+2\times(-b)\times(-2)+2\times(-2)\times a$
$=(a-b-2)^2$
(3) $a^2+b^2+4c^2+2ab+4bc+4ca$
$=a^2+b^2+(2c)^2+2\times a\times b+2\times b\times2c+2\times2c\times a$
$=(a+b+2c)^2$
(4) $4x^2+y^2+z^2-4xy-2yz+4zx$
$=(2x)^2+(-y)^2+z^2+2\times2x\times(-y)$
$+2\times(-y)\times z+2\times z\times2x$
$=(2x-y+z)^2$
(5) $9x^2+y^2+16+6xy-24x-8y$
$=(3x)^2+y^2+(-4)^2+2\times3x\times y$
$+2\times y\times(-4)+2\times(-4)\times3x$
$=(3x+y-4)^2$

05 답 (1) $(a+1)^3$ (2) $(x-2)^3$
(3) $(3x+1)^3$ (4) $(a-5b)^3$
(5) $(2x-3y)^3$

풀이 (1) a^3+3a^2+3a+1
$=a^3+3\times a^2\times1+3\times a\times1^2+1^3$
$=(a+1)^3$
(2) $x^3-6x^2+12x-8$
$=x^3-3\times x^2\times2+3\times x\times2^2-2^3$
$=(x-2)^3$
(3) $27x^3+27x^2+9x+1$
$=(3x)^3+3\times(3x)^2\times1+3\times3x\times1^2+1^3$
$=(3x+1)^3$
(4) $a^3-15a^2b+75ab^2-125b^3$
$=a^3-3\times a^2\times5b+3\times a\times(5b)^2-(5b)^3$
$=(a-5b)^3$
(5) $8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3$
$=(2x)^3-3\times(2x)^2\times3y+3\times2x\times(3y)^2-(3y)^3$
$=(2x-3y)^3$

06 답 (1) $(a-1)(a^2+a+1)$
(2) $(x+2)(x^2-2x+4)$
(3) $(b-4)(b^2+4b+16)$
(4) $(2x-1)(4x^2+2x+1)$
(5) $(4a+3b)(16a^2-12ab+9b^2)$

풀이 (1) $a^3-1=a^3-1^3$
$=(a-1)(a^2+a\times1+1^2)$
$=(a-1)(a^2+a+1)$
(2) $x^3+8=x^3+2^3$
$=(x+2)(x^2-x\times2+2^2)$
$=(x+2)(x^2-2x+4)$
(3) $b^3-64=b^3-4^3$
$=(b-4)(b^2+b\times4+4^2)$
$=(b-4)(b^2+4b+16)$
(4) $8x^3-1=(2x)^3-1^3$
$=(2x-1)\{(2x)^2+2x\times1+1^2\}$
$=(2x-1)(4x^2+2x+1)$

(5) $64a^3+27b^3=(4a)^3+(3b)^3$

$=(4a+3b)\{(4a)^2-4a\times3b+(3b)^2\}$

$=(4a+3b)(16a^2-12ab+9b^2)$

07 답 (1) $(x+y-z)(x^2+y^2+z^2-xy+yz+zx)$

(2) $(a+b-1)(a^2+b^2+1-ab+b+a)$

(3) $(x-y-3)(x^2+y^2+9+xy-3y+3x)$

(4) $(2x-y+4z)(4x^2+y^2+16z^2+2xy+4yz-8zx)$

(5) $(3a-2b-1)(9a^2+4b^2+1+6ab-2b+3a)$

풀이 (1) $x^3+y^3-z^3+3xyz$

$=x^3+y^3+(-z)^3-3\times x\times y\times(-z)$

$=(x+y-z)$

$\times\{x^2+y^2+(-z)^2-x\times y-y\times(-z)-(-z)\times x\}$

$=\underline{(x+y-z)(x^2+y^2+z^2-xy+yz+zx)}$

(2) $a^3+b^3-1+3ab$

$=a^3+b^3+(-1)^3-3\times a\times b\times(-1)$

$=(a+b-1)$

$\times\{a^2+b^2+(-1)^2-a\times b-b\times(-1)-(-1)\times a\}$

$=(a+b-1)(a^2+b^2+1-ab+b+a)$

(3) $x^3-y^3-27-9xy$

$=x^3+(-y)^3+(-3)^3-3\times x\times(-y)\times(-3)$

$=(x-y-3)\times\{x^2+(-y)^2+(-3)^2-x\times(-y)$

$-(-y)\times(-3)-(-3)\times x\}$

$=(x-y-3)(x^2+y^2+9+xy-3y+3x)$

(4) $8x^3-y^3+64z^3+24xyz$

$=(2x)^3+(-y)^3+(4z)^3-3\times2x\times(-y)\times4z$

$=(2x-y+4z)\times\{(2x)^2+(-y)^2+(4z)^2$

$-2x\times(-y)-(-y)\times4z-4z\times2x\}$

$=(2x-y+4z)(4x^2+y^2+16z^2+2xy+4yz-8zx)$

(5) $27a^3-8b^3-18ab-1$

$=(3a)^3+(-2b)^3+(-1)^3-3\times3a\times(-2b)\times(-1)$

$=(3a-2b-1)\times\{(3a)^2+(-2b)^2+(-1)^2$

$-3a\times(-2b)-(-2b)\times(-1)-(-1)\times3a\}$

$=(3a-2b-1)(9a^2+4b^2+1+6ab-2b+3a)$

08 답 (1) $(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$

(2) $(a^2+3a+9)(a^2-3a+9)$

(3) $(16y^2+4y+1)(16y^2-4y+1)$

(4) $(9x^2+6xy+4y^2)(9x^2-6xy+4y^2)$

풀이 (1) x^4+4x^2+16

$=x^4+x^2\times2^2+2^4$

$=(x^2+x\times2+2^2)(x^2-x\times2+2^2)$

$=\underline{(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)}$

(2) a^4+9a^2+81

$=a^4+a^2\times3^2+3^4$

$=(a^2+a\times3+3^2)(a^2-a\times3+3^2)$

$=(a^2+3a+9)(a^2-3a+9)$

(3) $256y^4+16y^2+1$

$=(4y)^4+(4y)^2\times1^2+1^4$

$=\{(4y)^2+4y\times1+1^2\}\{(4y)^2-4y\times1+1^2\}$

$=(16y^2+4y+1)(16y^2-4y+1)$

(4) $81x^4+36x^2y^2+16y^4$

$=(3x)^4+(3x)^2\times(2y)^2+(2y)^4$

$=\{(3x)^2+3x\times2y+(2y)^2\}\{(3x)^2-3x\times2y+(2y)^2\}$

$=(9x^2+6xy+4y^2)(9x^2-6xy+4y^2)$

09 답 (1) $(x+2)^2(x+5)(x-1)$

(2) $x(x-2)(x^2-2x-2)$

(3) $(x^2-3x+6)(x^2-3x-2)$

(4) $(3x^2+6x-5)(x+1)^2$

풀이 (1) $(x^2+4x-2)(x^2+4x+1)-18$에서

$x^2+4x=t$로 놓으면

$(t-2)(t+1)-18=t^2-t-2-18$

$=t^2-t-20$

$=(t+4)(t-5)$

위의 식에 $t=x^2+4x$를 대입하면

$(x^2+4x+4)(x^2+4x-5)=\underline{(x+2)^2(x+5)(x-1)}$

(2) $(x^2-2x+2)(x^2-2x-4)+8$에서 $x^2-2x=t$로 놓으면

$(t+2)(t-4)+8=t^2-2t-8+8$

$=t^2-2t$

$=t(t-2)$

위의 식에 $t=x^2-2x$를 대입하면

$(x^2-2x)(x^2-2x-2)=x(x-2)(x^2-2x-2)$

(3) $(x^2-3x+1)(x^2-3x+3)-15$에서

$x^2-3x=t$로 놓으면

$(t+1)(t+3)-15=t^2+4t+3-15$

$=t^2+4t-12$

$=(t+6)(t-2)$

위의 식에 $t=x^2-3x$를 대입하면

$(x^2-3x+6)(x^2-3x-2)$

(4) $(x^2+2x-1)(3x^2+6x+1)-4$에서

$x^2+2x=t$로 놓으면

$(t-1)(3t+1)-4=3t^2-2t-1-4$

$=3t^2-2t-5$

$=(3t-5)(t+1)$

위의 식에 $t=x^2+2x$를 대입하면

$(3x^2+6x-5)(x^2+2x+1)=(3x^2+6x-5)(x+1)^2$

10 답 (1) $(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)$

(2) $(x+1)(x+3)(x^2+4x-2)$

(3) $(x^2+6x-2)(x+7)(x-1)$

(4) $(2x^2-6x+1)(x-1)(x-2)$

풀이 (1) $(x^2-x)^2-8(x^2-x)+12$에서 $x^2-x=t$로 놓으면

$t^2-8t+12=(t-2)(t-6)$

앞의 식에 $t=x^2-x$를 대입하면
$(x^2-x-2)(x^2-x-6)$
$=\underline{(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)}$

(2) $(x^2+4x)^2+x^2+4x-6$에서 $x^2+4x=t$로 놓으면
$t^2+t-6=(t+3)(t-2)$
위의 식에 $t=x^2+4x$를 대입하면
$(x^2+4x+3)(x^2+4x-2)$
$=(x+1)(x+3)(x^2+4x-2)$

(3) $(x^2+6x)^2-9(x^2+6x)+14$에서 $x^2+6x=t$로 놓으면
$t^2-9t+14=(t-2)(t-7)$
위의 식에 $t=x^2+6x$를 대입하면
$(x^2+6x-2)(x^2+6x-7)$
$=(x^2+6x-2)(x+7)(x-1)$

(4) $2(x^2-3x)^2+5(x^2-3x)+2$에서 $x^2-3x=t$로 놓으면
$2t^2+5t+2=(2t+1)(t+2)$
위의 식에 $t=x^2-3x$를 대입하면
$(2x^2-6x+1)(x^2-3x+2)$
$=(2x^2-6x+1)(x-1)(x-2)$

11 답 (1) $(x^2+x+4)(x+4)(x-3)$
(2) $(x^2+5x+5)^2$
(3) $(x-1)(x-2)(x^2-3x-6)$
(4) $(x^2-2x-10)(x^2-2x-13)$

풀이 (1) $(x-1)(x-2)(x+2)(x+3)-60$
$=\{(x-1)(x+2)\}\{(x-2)(x+3)\}-60$
$=(x^2+x-2)(x^2+x-6)-60$
$x^2+x=t$로 놓으면
$(t-2)(t-6)-60=t^2-8t+12-60=t^2-8t-48$
$=(t+4)(t-12)$
위의 식에 $t=x^2+x$를 대입하면
$(x^2+x+4)(x^2+x-12)$
$=\underline{(x^2+x+4)(x+4)(x-3)}$

(2) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$
$=\{(x+1)(x+4)\}\{(x+2)(x+3)\}+1$
$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+1$
$x^2+5x=t$로 놓으면
$(t+4)(t+6)+1=t^2+10t+24+1=t^2+10t+25$
$=(t+5)^2$
위의 식에 $t=x^2+5x$를 대입하면
$(x^2+5x+5)^2$

(3) $x(x-4)(x-3)(x+1)-12$
$=\{x(x-3)\}\{(x-4)(x+1)\}-12$
$=(x^2-3x)(x^2-3x-4)-12$
$x^2-3x=t$로 놓으면
$t(t-4)-12=t^2-4t-12$
$=(t+2)(t-6)$
위의 식에 $t=x^2-3x$를 대입하면
$(x^2-3x+2)(x^2-3x-6)$
$=(x-1)(x-2)(x^2-3x-6)$

(4) $(x-5)(x-4)(x+2)(x+3)+10$
$=\{(x-5)(x+3)\}\{(x-4)(x+2)\}+10$
$=(x^2-2x-15)(x^2-2x-8)+10$
$x^2-2x=t$로 놓으면
$(t-15)(t-8)+10=t^2-23t+120+10$
$=t^2-23t+130$
$=(t-10)(t-13)$
위의 식에 $t=x^2-2x$를 대입하면
$(x^2-2x-10)(x^2-2x-13)$

12 답 (1) $(x+2)(x-2)(x+4)(x-4)$
(2) $(x^2+2)(x+3)(x-3)$
(3) $(x^2+5)(x+1)(x-1)$
(4) $(x^2+4)(x^2+6)$

풀이 (1) x^4-20x^2+64에서 $x^2=t$로 놓으면
$t^2-20t+64=(t-4)(t-16)$
위의 식에 $t=x^2$을 대입하면
$(x^2-4)(x^2-16)$
$=\underline{(x+2)(x-2)(x+4)(x-4)}$

(2) x^4-7x^2-18에서 $x^2=t$로 놓으면
$t^2-7t-18=(t+2)(t-9)$
위의 식에 $t=x^2$을 대입하면
$(x^2+2)(x^2-9)$
$=(x^2+2)(x+3)(x-3)$

(3) x^4+4x^2-5에서 $x^2=t$로 놓으면
$t^2+4t-5=(t+5)(t-1)$
위의 식에 $t=x^2$을 대입하면
$(x^2+5)(x^2-1)$
$=(x^2+5)(x+1)(x-1)$

(4) x^4+10x^2+24에서 $x^2=t$로 놓으면
$t^2+10t+24=(t+4)(t+6)$
위의 식에 $t=x^2$을 대입하면
$(x^2+4)(x^2+6)$

13 답 (1) $(x+y+2)(x-y+2)$
(2) $(x+y-4)(x-y-4)$
(3) $(3x+y-3)(3x-y+3)$
(4) $(x-2y+5)(x-2y-5)$

풀이 (1) x^2-y^2+4x+4
$=(x^2+4x+4)-y^2$
$=(x+2)^2-y^2$
$=\underline{(x+y+2)(x-y+2)}$

(2) $x^2-y^2-8x+16$
$=(x^2-8x+16)-y^2$
$=(x-4)^2-y^2$
$=(x+y-4)(x-y-4)$

(3) $9x^2-9-y^2+6y$
$=9x^2-(y^2-6y+9)$
$=(3x)^2-(y-3)^2$
$=(3x+y-3)(3x-y+3)$

(4) $x^2+4y^2-4xy-25$
$=(x^2-4xy+4y^2)-25$
$=(x-2y)^2-5^2$
$=(x-2y+5)(x-2y-5)$

14 답 (1) $(x^2+x-1)(x^2-x-1)$
(2) $(x^2+2x-2)(x^2-2x-2)$
(3) $(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$
(4) $(x^2+3x+3)(x^2-3x+3)$

풀이 (1) x^4-3x^2+1
$=(x^4-2x^2+1)-x^2$
$=(x^2-1)^2-x^2$
$=\underline{(x^2+x-1)(x^2-x-1)}$

(2) x^4-8x^2+4
$=(x^4-4x^2+4)-4x^2$
$=(x^2-2)^2-(2x)^2$
$=(x^2+2x-2)(x^2-2x-2)$

(3) x^4+4x^2+16
$=(x^4+8x^2+16)-4x^2$
$=(x^2+4)^2-(2x)^2$
$=(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$

(4) x^4-3x^2+9
$=(x^4+6x^2+9)-9x^2$
$=(x^2+3)^2-(3x)^2$
$=(x^2+3x+3)(x^2-3x+3)$

15 답 (1) $(x+2)(x-y-3)$
(2) $(a-1)(a+2b-5)$
(3) $(a^2+a+3)(a-2b)$
(4) $(x^2-2x-1)(3x-y)$

풀이 (1) y에 대한 내림차순으로 정리하면
$x^2-x-2y-xy-6$
$=-xy-2y+x^2-x-6$
$=-(xy+2y)+(x^2-x-6)$
$=-y(x+2)+(x+2)(x-3)$
$=\underline{(x+2)(x-y-3)}$

(2) b에 대한 내림차순으로 정리하면
$a^2+2ab+5-6a-2b$
$=2ab-2b+a^2-6a+5$
$=(2ab-2b)+(a^2-6a+5)$
$=2b(a-1)+(a-1)(a-5)$
$=(a-1)(a+2b-5)$

(3) b에 대한 내림차순으로 정리하면
$a^3-2a^2b+a^2-2ab-6b+3a$
$=-2a^2b-2ab-6b+a^3+a^2+3a$
$=-(2a^2b+2ab+6b)+(a^3+a^2+3a)$
$=-2b(a^2+a+3)+a(a^2+a+3)$
$=(a^2+a+3)(a-2b)$

(4) y에 대한 내림차순으로 정리하면
$3x^3+y-x^2y-6x^2-3x+2xy$
$=-x^2y+2xy+y+3x^3-6x^2-3x$
$=-(x^2y-2xy-y)+(3x^3-6x^2-3x)$
$=-y(x^2-2x-1)+3x(x^2-2x-1)$
$=(x^2-2x-1)(3x-y)$

16 답 (1) $(x+y+4)(x-y-2)$
(2) $(x+3y+2)(x-y-1)$
(3) $(2a-b+3)(a+2b-1)$
(4) $-(a-b)(b-c)(c-a)$

풀이 (1) x에 대한 내림차순으로 정리하면
$x^2-y^2+2x-6y-8$
$=x^2+2x-(y^2+6y+8)$
$=x^2+2x-(y+2)(y+4)$
$=x^2+\{(y+4)-(y+2)\}x+(y+4)\times\{-(y+2)\}$
$=(x+y+4)(x-y-2)$

(2) x에 대한 내림차순으로 정리하면
$x^2-3y^2+2xy+x-5y-2$
$=x^2+2xy+x-3y^2-5y-2$
$=x^2+(2xy+x)-(3y^2+5y+2)$
$=x^2+(2y+1)x-(3y+2)(y+1)$
$=x^2+\{(3y+2)-(y+1)\}x+(3y+2)\times\{-(y+1)\}$
$=\underline{(x+3y+2)(x-y-1)}$

(3) a에 대한 내림차순으로 정리하면
$2a^2-2b^2+3ab+a+7b-3$
$=2a^2+3ab+a-2b^2+7b-3$
$=2a^2+(3ab+a)-(2b^2-7b+3)$
$=2a^2+(3b+1)a-(2b-1)(b-3)$
$=2a^2+\{2\times(2b-1)-(b-3)\times1\}a$
$\quad+\{-(b-3)\}\times(2b-1)$
$=(2a-b+3)(a+2b-1)$

(4) 전개하여 a에 대한 내림차순으로 정리하면
$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$
$=a^2b-a^2c+b^2c-ab^2+ac^2-bc^2$
$=a^2b-a^2c-ab^2+ac^2+b^2c-bc^2$
$=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+(b-c)bc$
$=(b-c)a^2-(b+c)(b-c)a+(b-c)bc$
$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$
$=(b-c)(a-b)(a-c)$
$=-(a-b)(b-c)(c-a)$

17 답 (1) $(x-1)(x+1)(x-2)$
(2) $(x+3)(x-3)^2$
(3) $(x-1)(x^2-2x+3)$
(4) $(2x+1)(x^2-x-1)$

풀이 (1) $f(x)=x^3-2x^2-x+2$로 놓으면
$f(1)=1-2-1+2=0$이므로 조립제법을 이용하여
$f(x)$를 $x-1$로 나누면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ & & 1 & -1 & -2 \\ \hline & \boxed{1} & \boxed{-1} & \boxed{-2} & 0 \end{array}$$

따라서

$f(x)=(x-1)\underline{(x^2-x-2)}$

$\quad=(x-1)\underline{(x+1)(x-2)}$

(2) $f(x)=x^3-3x^2-9x+27$로 놓으면

$f(-3)=-27-27+27+27=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 $x+3$으로 나누면

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 1 & -3 & -9 & 27 \\ & & -3 & 18 & -27 \\ \hline & 1 & -6 & 9 & 0 \end{array}$$

따라서

$f(x)=(x+3)(x^2-6x+9)$

$\quad=(x+3)(x-3)^2$

(3) $f(x)=x^3-3x^2+5x-3$으로 놓으면

$f(1)=1-3+5-3=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 $x-1$로 나누면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -3 & 5 & -3 \\ & & 1 & -2 & 3 \\ \hline & 1 & -2 & 3 & 0 \end{array}$$

따라서 $f(x)=(x-1)(x^2-2x+3)$

(4) $f(x)=2x^3-x^2-3x-1$로 놓으면

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}-1=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 $x+\frac{1}{2}$로 나누면

$$\begin{array}{r|rrrr} -\frac{1}{2} & 2 & -1 & -3 & -1 \\ & & -1 & 1 & 1 \\ \hline & 2 & -2 & -2 & 0 \end{array}$$

따라서

$f(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)(2x^2-2x-2)$

$\quad=(2x+1)(x^2-x-1)$

18 답 (1) $(x-1)(x+1)(x+2)(x-3)$
(2) $(x+2)^2(x^2-2x-1)$

풀이 (1) $f(x)=x^4-x^3-7x^2+x+6$으로 놓으면

$f(1)=1-1-7+1+6=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 $x-1$로 나누면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -1 & -7 & 1 & 6 \\ & & 1 & 0 & -7 & -6 \\ \hline & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{-7} & \boxed{-6} & 0 \end{array}$$

따라서 $f(x)=(x-1)\underline{(x^3-7x-6)}$

이고, $g(x)=\underline{x^3-7x-6}$으로 놓으면

$g(-1)=-1+7-6=0$이므로 조립제법을 이용하여 $g(x)$를 $x+1$로 나누면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{-7} & \boxed{-6} \\ & & -1 & 1 & 6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 \end{array}$$

따라서

$g(x)=(x+1)(x^2-x-6)$

$\quad=(x+1)(x+2)(x-3)$

이므로

$f(x)=\underline{(x-1)(x+1)(x+2)(x-3)}$

(2) $f(x)=x^4+2x^3-5x^2-12x-4$로 놓으면

$f(-2)=16-16-20+24-4=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 $x+2$로 나누면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 1 & 2 & -5 & -12 & -4 \\ & & -2 & 0 & 10 & 4 \\ \hline & 1 & 0 & -5 & -2 & 0 \end{array}$$

따라서 $f(x)=(x+2)(x^3-5x-2)$

이고, $g(x)=x^3-5x-2$로 놓으면

$g(-2)=-8+10-2=0$이므로 조립제법을 이용하여 $g(x)$를 $x+2$로 나누면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 0 & -5 & -2 \\ & & -2 & 4 & 2 \\ \hline & 1 & -2 & -1 & 0 \end{array}$$

따라서 $g(x)=(x+2)(x^2-2x-1)$이므로

$f(x)=(x+2)^2(x^2-2x-1)$

19 답 (1) 9600　(2) 1000　(3) 10000　(4) 10500

풀이 (1) 98^2-2^2에서 $98=x$로 놓으면

$x^2-2^2=(x+2)(x-2)=100\times\underline{96}=\underline{9600}$

(2) 55^2-45^2에서 $55=x$로 놓으면

$x^2-(x-10)^2=(x+x-10)(x-x+10)$

$\quad=10(2x-10)$

$\quad=10\times100=1000$

다른 풀이 55^2-45^2에서 $55=x$로 놓으면

$x^2-(x-10)^2=x^2-(x^2-20x+100)$

$\quad=20x-100$

$\quad=20\times55-100=1000$

(3) $99^2+2\times99+1$에서 $99=x$로 놓으면

$x^2+2x+1=(x+1)^2$

$\quad=(99+1)^2=100^2=10000$

(4) $103^2-103-6$에서 $103=x$로 놓으면

$x^2-x-6=(x+2)(x-3)$

$\quad=(103+2)(103-3)$

$\quad=105\times100=10500$

20 답 (1) 50　(2) 119　(3) 1000000　(4) 1000000

풀이 (1) $\frac{48^3+8}{48^2-2\times48+4}$에서 $48=x$로 놓으면

$\frac{x^3+8}{x^2-2x+4}=\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x^2-2x+4}$

$=\underline{x}+2$

$=\underline{48}+2=\underline{50}$

(2) $\frac{120^3-1}{120\times121+1}$에서 $120=x$로 놓으면

$\frac{x^3-1}{x(x+1)+1}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^2+x+1}$

$=x-1$

$=120-1=119$

(3) $101^3-3\times101^2+3\times101-1$에서 $101=x$로 놓으면

$x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3$

$=(101-1)^3=100^3=1000000$

(4) $98^3+6\times98^2+12\times98+8$에서 $98=x$로 놓으면

$x^3+6x^2+12x+8$

$=x^3+3\times2\times x^2+3\times2^2\times x+2^3$

$=(x+2)^3$

$=(98+2)^3=100^3=1000000$

21 답 (1) 25 (2) 352 (3) 1

풀이 (1) $(a+b)+(b+c)+(c+a)$

$=2(a+b+c)=1+4+5=10$

에서 $a+b+c=\underline{5}$이므로

$a^2+b^2+c^2+2(ab+ba+ca)$

$=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

$=(a+b+c)^2$

$=\underline{25}$

(2) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

$=25-2\times3=19$

따라서

$x^4+x^2y^2+y^4=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

$=(x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy)$

$=(19+3)(19-3)$

$=22\times16=352$

(3) $a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

이고 $a+b+c=0$이므로 $a^3+b^3+c^3-3abc=0$에서

$a^3+b^3+c^3=3abc$

따라서

$\frac{a^3+b^3+c^3}{3abc}=\frac{3abc}{3abc}=1$

22 답 (1) -1 (2) 52 (3) -10

풀이 (1) a^2+2a-b^2-2b

$=a^2-b^2+2a-2b$

$=(a+b)(a-b)+2(a-b)$

$=\underline{(a-b)(a+b+2)}$

$=1\times(-3+2)=\underline{-1}$

(2) $x^4+y^4-x^3y-xy^3$

$=x^4-x^3y-xy^3+y^4$

$=x^3(x-y)-y^3(x-y)$

$=(x^3-y^3)(x-y)$

$=\{(x-y)^3+3xy(x-y)\}(x-y)$

$=\{(-2)^3+3\times3\times(-2)\}\times(-2)$

$=-26\times(-2)=52$

(3) $a^2b+a^2c-ab^2-ac^2+b^2c+bc^2-2abc$

$=a^2(b+c)-a(b^2+c^2+2bc)+bc(b+c)$

$=a^2(b+c)-a(b+c)^2+bc(b+c)$

$=(b+c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$

$=(b+c)(a-b)(a-c)$

$=5\times1\times(-2)=-10$

다른 풀이 $a^2b+a^2c-ab^2-ac^2+b^2c+bc^2-2abc$

$=a^2(b+c)-a(b^2+c^2)+bc(b+c)-2abc$

$=\{a^2(b+c)+bc(b+c)\}-\{a(b^2+c^2)+2abc\}$

$=(b+c)(a^2+bc)-a(b^2+2bc+c^2)$

$=(b+c)(a^2+bc)-a(b+c)^2$

$=(b+c)\{a^2+bc-a(b+c)\}$

$=(b+c)(a^2+bc-ab-ac)$

$=(b+c)\{(a^2-ab)+(bc-ac)\}$

$=(b+c)\{a(a-b)-c(a-b)\}$

$=(b+c)(a-b)(a-c)$

$=5\times1\times(-2)=-10$

01 답 $(x+y+1)^2$

풀이 $x^2+y^2+2xy+2x+2y+1$

$=x^2+y^2+1+2xy+2y+2x$

$=x^2+y^2+1^2+2\times x\times y+2\times y\times 1+2\times 1\times x$

$=(x+y+1)^2$

02 답 $(x-3y)(x^2+3xy+9y^2)$

풀이 x^3-27y^3

$=x^3-(3y)^3$

$=(x-3y)\{x^2+x\times 3y+(3y)^2\}$

$=(x-3y)(x^2+3xy+9y^2)$

03 답 4

풀이 $x^4+4x^2y^2+16y^4$

$=x^4+x^2\times(2y)^2+(2y)^4$

$=\{x^2+x\times 2y+(2y)^2\}\{x^2-x\times 2y+(2y)^2\}$

$=(x^2+2xy+4y^2)(x^2-2xy+4y^2)$

따라서

$(x^2+axy+4y^2)(x^2-bxy+4y^2)$

$=(x^2+2xy+4y^2)(x^2-2xy+4y^2)$

이므로 $a=2$, $b=2$에서 $a+b=4$이다.

04 답 $(x+2)(x-1)(x+3)(x-2)$

풀이 $(x^2+x)(x^2+x-8)+12$에서 $x^2+x=t$로 놓으면

$t(t-8)+12=t^2-8t+12$

$=(t-2)(t-6)$

위의 식에 $t=x^2+x$를 대입하면

$(x^2+x-2)(x^2+x-6)$

$=(x+2)(x-1)(x+3)(x-2)$

05 답 $(x+1)(x-3)(x^2-2x-4)$

풀이 $(x^2-2x)^2-7(x^2-2x)+12$에서 $x^2-2x=t$로 놓으면

$t^2-7t+12=(t-3)(t-4)$

위의 식에 $t=x^2-2x$를 대입하면

$(x^2-2x-3)(x^2-2x-4)$

$=(x+1)(x-3)(x^2-2x-4)$

06 답 $(x+3)(x-2)(x^2+x-8)$

풀이 $(x-1)(x-3)(x+2)(x+4)+24$

$=\{(x-1)(x+2)\}\{(x-3)(x+4)\}+24$

$=(x^2+x-2)(x^2+x-12)+24$

$x^2+x=t$로 놓으면

$(t-2)(t-12)+24=t^2-14t+24+24$

$=t^2-14t+48$

$=(t-6)(t-8)$

위의 식에 $t=x^2+x$를 대입하면

$(x^2+x-6)(x^2+x-8)$

$=(x+3)(x-2)(x^2+x-8)$

07 답 $(4x+3y-2)(4x-3y+2)$

풀이 $16x^2-4-9y^2+12y$

$=16x^2-9y^2+12y-4$

$=16x^2-(9y^2-12y+4)$

$=(4x)^2-(3y-2)^2$

$=(4x+3y-2)(4x-3y+2)$

08 답 $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$

풀이 x^4+4

$=(x^4+4x^2+4)-4x^2$

$=(x^2+2)^2-(2x)^2$

$=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$

09 답 $-(a+b)(b+c)(c-a)$

풀이 a, b, c의 차수가 모두 같으므로 전개하여 a에 대한 내림차순으로 정리하면

$ab(a+b)-bc(b+c)-ca(c-a)$

$=a^2b+ab^2-b^2c-bc^2-c^2a+ca^2$

$=(b+c)a^2+(b^2-c^2)a-bc(b+c)$

$=(b+c)a^2+(b+c)(b-c)a-bc(b+c)$

$=(b+c)\{a^2+(b-c)a-bc\}$

$=(b+c)(a+b)(a-c)$

$=-(a+b)(b+c)(c-a)$

10 답 7

풀이 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$x^2+2y^2-3xy+4x-5y+3$

$=x^2-3xy+4x+2y^2-5y+3$

$=x^2+(-3y+4)x+(2y^2-5y+3)$

$=x^2+(-3y+4)x+(2y-3)(y-1)$

$=(x-2y+3)(x-y+1)$

따라서

$(ax-y+b)(x-cy+d)$

$=(x-2y+3)(x-y+1)$

$=(x-y+1)(x-2y+3)$

이므로 $a=1$, $b=1$, $c=2$, $d=3$에서

$a+b+c+d=7$이다.

11 답 $(x+2)(x-3)(x-5)$

풀이 $f(x)=x^3-6x^2-x+30$으로 놓으면

$f(-2)=-8-24+2+30=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 $x+2$로 나누면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & -6 & -1 & 30 \\ & & -2 & 16 & -30 \\ \hline & 1 & -8 & 15 & \boxed{0} \end{array}$$

따라서

$f(x)=(x+2)(x^2-8x+15)$

$=(x+2)(x-3)(x-5)$

12 답 x^2-x+4

풀이 $g(x)=x^4-x^3+3x^2+ax+b$로 놓으면 인수 정리에 의하여 $g(-1)=0$, $g(1)=0$이다.

$g(-1)=1+1+3-a+b=0$이므로

$a-b=5$ …… ㉠

$g(1)=1-1+3+a+b=0$이므로

$a+b=-3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-4$이므로

$g(x)=x^4-x^3+3x^2+x-4=(x+1)(x-1)f(x)$

조립제법을 이용하여 $g(x)$를 $x+1$로 나누면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & -1 & 3 & 1 & -4 \\ & & -1 & 2 & -5 & 4 \\ \hline & 1 & -2 & 5 & -4 & \boxed{0} \end{array}$$

따라서

$g(x)=(x+1)(x^3-2x^2+5x-4)=(x+1)(x-1)f(x)$

이고, x^3-2x^2+5x-4를 $x-1$로 나누면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -2 & 5 & -4 \\ & & 1 & -1 & 4 \\ \hline & 1 & -1 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

따라서

$g(x)=(x+1)(x-1)(x^2-x+4)$

$\quad\;\;=(x+1)(x-1)f(x)$

이므로 $f(x)=x^2-x+4$이다.

13 답 930

풀이 $32^2-3\times32+2$에서 $32=x$로 놓으면

$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

$\qquad\qquad=(32-1)(32-2)$

$\qquad\qquad=31\times30$

$\qquad\qquad=930$

14 답 50

풀이 $\dfrac{54^3-64}{54^2+4\times54+16}$에서 $54=x$로 놓으면

$\dfrac{x^3-64}{x^2+4x+16}=\dfrac{x^3-4^3}{x^2+4x+16}$

$\qquad\qquad=\dfrac{(x-4)(x^2+4x+16)}{x^2+4x+16}$

$\qquad\qquad=x-4$

$\qquad\qquad=54-4$

$\qquad\qquad=50$

15 답 -2

풀이 $x^3-y^3+x^2y-xy^2$

$=(x-y)(x^2+xy+y^2)+xy(x-y)$

$=(x-y)(x^2+2xy+y^2)$

$=(x-y)(x+y)^2$

$=(x-y)\{(x-y)^2+4xy\}$

이므로

$-3\times\{(-3)^2+4xy\}=-3$

$9+4xy=1$

따라서 $xy=-2$이다.

16 답 정삼각형

풀이 $a^3+b^3+c^3-3abc=0$에서

$a^3+b^3+c^3-3ab$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=\dfrac{1}{2}(a+b+c)(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$

$=\dfrac{1}{2}(a+b+c)\times\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad+(c^2-2ca+a^2)\}$

$=\dfrac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

이므로

$\dfrac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$

이때 a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이이므로

$a+b+c>0$

즉, $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$이므로

$a-b=0$, $b-c=0$, $c-a=0$에서

$a=b=c$

따라서 삼각형 ABC는 정삼각형이다.

Ⅱ 방정식과 부등식

Ⅱ-1 | 복소수와 이차방정식 056-078쪽

01 답 (1) 실수부분: 2, 허수부분: 3
(2) 실수부분: -1, 허수부분: -5
(3) 실수부분: 3, 허수부분: -8
(4) 실수부분: -4, 허수부분: 0
(5) 실수부분: 0, 허수부분: 10

02 답 (1) 실수부분: $\sqrt{2}$, 허수부분: -1
(2) 실수부분: -3, 허수부분: $\sqrt{5}$
(3) 실수부분: $\frac{3}{2}$, 허수부분: $-\frac{7}{2}$
(4) 실수부분: 1, 허수부분: 0
(5) 실수부분: 0, 허수부분: 2

풀이 (3) $\frac{3-7i}{2}=\frac{3}{2}-\frac{7}{2}i$이므로
실수부분은 $\underline{\frac{3}{2}}$, 허수부분은 $\underline{-\frac{7}{2}}$이다.
(4) $-i^2=-(-1)=1$이므로
실수부분은 1, 허수부분은 0이다.
(5) $(-\sqrt{2})^2i=2i$이므로
실수부분은 0, 허수부분은 2이다.

03 답 (1) ㄷ, ㅂ (2) ㄱ, ㄴ, ㄹ, ㅁ (3) ㄴ, ㄹ
풀이 ㄱ. $-4+5i$는 실수부분이 -4, 허수부분이 5인 순허수가 아닌 허수이다.
ㄴ. $-i$는 실수부분이 0, 허수부분이 -1인 순허수이다.
ㄷ. 2는 실수부분이 2, 허수부분이 0인 실수이다.
ㄹ. $\sqrt{3}i+i=(\sqrt{3}+1)i$이므로 $\sqrt{3}i+i$는 실수부분이 0, 허수부분이 $\sqrt{3}+1$인 순허수이다.
ㅁ. $-2+\sqrt{7}i$는 실수부분이 -2, 허수부분이 $\sqrt{7}$인 순허수가 아닌 허수이다.
ㅂ. $17+\sqrt{5}$는 실수부분이 $17+\sqrt{5}$, 허수부분이 0인 실수이다.
따라서 실수는 ㄷ, ㅂ, 허수는 ㄱ, ㄴ, ㄹ, ㅁ, 순허수는 ㄴ, ㄹ이다.

04 답 (1) ㄴ, ㅂ (2) ㄱ, ㄷ, ㄹ, ㅁ (3) ㄱ, ㄹ
풀이 ㄱ. $3i$는 실수부분이 0, 허수부분이 3인 순허수이다.
ㄴ. $2+i^2=2+(-1)=1$이므로 $2+i^2$은 실수부분이 1, 허수부분이 0인 실수이다.
ㄷ. $i+1$은 실수부분이 1, 허수부분이 1인 순허수가 아닌 허수이다.
ㄹ. $i-\sqrt{2}i=(1-\sqrt{2})i$이므로 $i-\sqrt{2}i$는 실수부분이 0, 허수부분이 $1-\sqrt{2}$인 순허수이다.
ㅁ. $4+2i$는 실수부분이 4, 허수부분이 2인 순허수가 아닌 허수이다.
ㅂ. $3+\pi$는 실수부분이 $3+\pi$, 허수부분이 0인 실수이다.
따라서 실수는 ㄴ, ㅂ, 허수는 ㄱ, ㄷ, ㄹ, ㅁ, 순허수는 ㄱ, ㄹ이다.

05 답 (1) $a=3$, $b=-3$ (2) $a=-2$, $b=1$
(3) $a=-5$, $b=4$ (4) $a=0$, $b=6$
(5) $a=-1$, $b=2$
풀이 (1) 두 복소수 $a+bi$, $3-3i$의 실수부분과 허수부분이 각각 같아야 하므로
$a=\underline{3}$, $b=\underline{-3}$
(2) 두 복소수 $a-bi$, $-2-i$의 실수부분과 허수부분이 각각 같아야 하므로
$a=-2$, $b=1$
(3) 두 복소수 $5+4i$, $-a+bi$의 실수부분과 허수부분이 각각 같아야 하므로
$a=-5$, $b=4$
(4) 두 복소수 $a-bi$, $-6i$의 실수부분과 허수부분이 각각 같아야 하므로
$a=0$, $b=6$
(5) 두 복소수 $a+2i$, $-1+bi$의 실수부분과 허수부분이 각각 같아야 하므로
$a=-1$, $b=2$

06 답 (1) $x=4$, $y=5$ (2) $x=-1$, $y=6$
(3) $x=-2$, $y=0$ (4) $x=1$, $y=2$
(5) $x=4$, $y=1$
풀이 (1) $x+1=5$, $y-2=3$이므로
$x=\underline{4}$, $y=\underline{5}$
(2) $2x-1=-3$, $y+3=9$이므로
$x=-1$, $y=6$
(3) $3x+5=-1$, $2y-1=-1$이므로
$x=-2$, $y=0$
(4) $5x-y=3$, $x+3y=7$이므로 연립하여 풀면
$x=1$, $y=2$
(5) $2x-y-2=5$, $x+2y-3=3$이므로
$2x-y=7$, $x+2y=6$
두 식을 연립하여 풀면
$x=4$, $y=1$

07 답 (1) $2+3i$ (2) $-11-10i$
(3) $-4i-6$ (4) $2+\sqrt{2}$
(5) $5i$

08 답 (1) $x=-4$, $y=1$ (2) $x=5$, $y=2$
(3) $x=3$, $y=-5$ (4) $x=4$, $y=-2$
(5) $x=7$, $y=-11$
풀이 (1) $\overline{x+yi}=x-yi$이므로
$x-yi=-4-i$
따라서 $x=\underline{-4}$, $y=\underline{1}$이다.

(2) $\overline{x-yi}=x+yi$이므로

$x+yi=2i+5$

따라서 $x=5$, $y=2$이다.

(3) $\overline{y-3i}=y+3i$이므로

$-5+xi=y+3i$

따라서 $x=3$, $y=-5$이다.

(4) $\overline{6+(y-2)i}=6-(y-2)i$이므로

$(2x-2)+4i=6-(y-2)i$

따라서 $2x-2=6$, $-(y-2)=4$이므로

$x=4$, $y=-2$이다.

(5) $\overline{(x-2)+4i}=(x-2)-4i$이므로

$5+(x+y)i=(x-2)-4i$

따라서 $x-2=5$, $x+y=-4$이므로

$x=7$, $y=-11$이다.

09 답 (1) $6+2i$ (2) $-3-5i$ (3) $15-i$ (4) $\sqrt{2}-3i$

풀이 (1) $(4+3i)+(2-i)=(4+2)+(3-1)i=\underline{6+2i}$

(2) $(-7i+1)+(2i-4)=(1-4)+(-7+2)i=-3-5i$

(3) $(5+2i)+(-3i+10)=(5+10)+(2-3)i=15-i$

(4) $(i-\sqrt{2})+(-4i+2\sqrt{2})=(-\sqrt{2}+2\sqrt{2})+(1-4)i$

$=\sqrt{2}-3i$

10 답 (1) $6+i$ (2) $2-8i$ (3) $1-\frac{3}{5}i$ (4) 4

풀이 (1) $(2i+5)-(i-1)=\{5-(-1)\}+(2-1)i$

$=\underline{6+i}$

(2) $(-5i-5)-(3i-7)=\{-5-(-7)\}+(-5-3)i$

$=2-8i$

(3) $\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{5}i\right)-\left(i-\frac{1}{2}\right)=\left\{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}+\left(\frac{2}{5}-1\right)i$

$=1-\frac{3}{5}i$

(4) $(\sqrt{3}i+1)-(-3+\sqrt{3}i)=\{1-(-3)\}+(\sqrt{3}-\sqrt{3})i$

$=4$

11 답 (1) $3+i$ (2) $-4-19i$ (3) $-2-14i$ (4) $2+25i$ (5) $-2+6i$ (6) $5-12i$ (7) -16 (8) 29

풀이 (1) $(1+i)(2-i)$

$=\{1\times2-1\times(-1)\}+\{1\times(-1)+1\times2\}i$

$=\underline{3+i}$

다른 풀이 $(1+i)(2-i)$

$=(2-i)+i(2-i)$

$=(2-i)+(2i+1)$

$=3+i$

(2) $(3-2i)(2-5i)$

$=\{3\times2-(-2)\times(-5)\}+\{3\times(-5)+(-2)\times2\}i$

$=-4-19i$

다른 풀이 $(3-2i)(2-5i)$

$=3(2-5i)-2i(2-5i)$

$=(6-15i)+(-4i-10)$

$=-4-19i$

(3) $(-3i-4)(2+2i)$

$=(-4-3i)(2+2i)$

$=\{(-4)\times2-(-3)\times2\}+\{(-4)\times2+(-3)\times2\}i$

$=-2-14i$

다른 풀이 $(-3i-4)(2+2i)$

$=-3i(2+2i)-4(2+2i)$

$=(-6i+6)+(-8-8i)$

$=-2-14i$

(4) $(i+6)(4i+1)$

$=(6+i)(1+4i)$

$=(6\times1-1\times4)+(6\times4+1\times1)i$

$=2+25i$

다른 풀이 $(i+6)(4i+1)$

$=i(4i+1)+6(4i+1)$

$=(-4+i)+(24i+6)$

$=2+25i$

(5) $(4-2i)(i-1)$

$=(4-2i)(-1+i)$

$=\{4\times(-1)-(-2)\times1\}+\{4\times1+(-2)\times(-1)\}i$

$=-2+6i$

다른 풀이 $(4-2i)(i-1)$

$=4(i-1)-2i(i-1)$

$=(4i-4)+(2+2i)$

$=-2+6i$

(6) $(3-2i)^2$

$=(3-2i)(3-2i)$

$=\{3\times3-(-2)\times(-2)\}+\{3\times(-2)+(-2)\times3\}i$

$=5-12i$

다른 풀이 $(3-2i)^2$

$=3^2-2\times3\times2i+(2i)^2$

$=5-12i$

(7) $(-4i)^2=(-4i)(-4i)$

$=(-4)\times(-4)\times i^2$

$=-16$

(8) $(2-5i)(2+5i)$

$=\{2\times2-(-5)\times5\}+\{2\times5+(-5)\times2\}i$

$=29$

다른 풀이 $(2-5i)(2+5i)$

$=2^2-(5i)^2$

$=4-(-25)$

$=29$

12 답 (1) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ (2) $\frac{3}{25}-\frac{4}{25}i$ (3) $-\frac{1}{2}i$ (4) $-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$ (5) $\frac{23}{29}+\frac{14}{29}i$ (6) $\frac{18}{13}-\frac{1}{13}i$ (7) $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ (8) $\frac{1}{3}+\frac{4\sqrt{2}}{3}i$

풀이 (1) $\frac{1}{1-i}=\frac{1+i}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+i}{1^2-i^2}$

$=\frac{1+i}{2}=\underline{\frac{1}{2}}+\underline{\frac{1}{2}}i$

(2) $\frac{1}{3+4i}=\frac{3-4i}{(3+4i)(3-4i)}=\frac{3-4i}{3^2-(4i)^2}$

$=\frac{3-4i}{25}=\frac{3}{25}-\frac{4}{25}i$

(3) $\frac{1-i}{2+2i}=\frac{(1-i)(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)}=\frac{(2-2)+(-2-2)i}{2^2-(2i)^2}$

$=\frac{-4i}{8}=-\frac{1}{2}i$

(4) $\frac{5i}{3-i}=\frac{5i(3+i)}{(3-i)(3+i)}=\frac{15i-5}{3^2-i^2}$

$=\frac{-5+15i}{10}=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$

(5) $\frac{4-3i}{2-5i}=\frac{(4-3i)(2+5i)}{(2-5i)(2+5i)}=\frac{(8+15)+(20-6)i}{2^2-(5i)^2}$

$=\frac{23+14i}{29}=\frac{23}{29}+\frac{14}{29}i$

(6) $\frac{3i-4}{2i-3}=\frac{-4+3i}{-3+2i}=\frac{(-4+3i)(-3-2i)}{(-3+2i)(-3-2i)}$

$=\frac{(12+6)+(8-9)i}{(-3)^2-(2i)^2}=\frac{18-i}{13}$

$=\frac{18}{13}-\frac{1}{13}i$

(7) $\frac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}=\frac{(1-\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}=\frac{1^2-2\sqrt{3}i+(\sqrt{3}i)^2}{1^2-(\sqrt{3}i)^2}$

$=\frac{-2-2\sqrt{3}i}{4}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

(8) $\frac{3+\sqrt{2}i}{1-\sqrt{2}i}=\frac{(3+\sqrt{2}i)(1+\sqrt{2}i)}{(1-\sqrt{2}i)(1+\sqrt{2}i)}=\frac{(3-2)+(3\sqrt{2}+\sqrt{2})i}{1^2-(\sqrt{2}i)^2}$

$=\frac{1+4\sqrt{2}i}{3}=\frac{1}{3}+\frac{4\sqrt{2}}{3}i$

13 답 (1) $14+4i$ (2) $\frac{13}{5}-\frac{6}{5}i$ (3) $3-i$ (4) $-\frac{40}{13}-\frac{44}{13}i$

풀이 (1) $2i-(1+3i)(4i-2)$

$=2i-(1+3i)(-2+4i)$

$=2i-\{(-2-12)+(4-6)i\}$

$=2i-(\underline{-14-2i})$

$=2i+14+2i$

$=\underline{14+4i}$

(2) $(-i+2)\div(4i-3)+(3-i)$

$=\frac{-i+2}{4i-3}+3-i$

$=\frac{-2+i}{3-4i}+3-i$

$=\frac{(-2+i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}+3-i$

$=\frac{(-6-4)+(-8+3)i}{3^2-(4i)^2}+3-i$

$=\frac{-10-5i}{25}+3-i$

$=-\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i+3-i$

$=\frac{13}{5}-\frac{6}{5}i$

(3) $\frac{2}{1-i}+\frac{4}{1+i}$

$=\frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}+\frac{4(1-i)}{(1+i)(1-i)}$

$=\frac{2+2i}{1^2-i^2}+\frac{4-4i}{1^2-i^2}$

$=\frac{2+2i}{2}+\frac{4-4i}{2}$

$=1+i+2-2i$

$=3-i$

(4) $\frac{1+2i}{3-2i}-(2+i)^2$

$=\frac{(1+2i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}-(2^2+4i+i^2)$

$=\frac{(3-4)+(2+6)i}{3^2-(2i)^2}-(3+4i)$

$=\frac{-1+8i}{13}-3-4i$

$=-\frac{40}{13}-\frac{44}{13}i$

14 답 (1) $a=-1$, $b=2$ (2) $a=5$, $b=19$ (3) $a=1$, $b=4$ (4) $a=2$, $b=-4$

풀이 (1) $a(1-i)+b(2i-3)=a-ai+2bi-3b$

$=(a-3b)+(-a+2b)i$

$=-7+5i$

이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a-3b=\underline{-7}$, $-a+2b=\underline{5}$

두 식을 연립하여 풀면

$a=\underline{-1}$, $b=\underline{2}$

(2) $(2-ai)(2+3i)=(4+3a)+(6-2a)i$

$=b-4i$

이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$3a+4=b$, $-2a+6=-4$

두 식을 연립하여 풀면

$a=5$, $b=19$

(3) $a(i+3)^2+(-4-2i)=a(i^2+6i+3^2)+(-4-2i)$

$=a(8+6i)-4-2i$

$=(8a-4)+(6a-2)i$

$=b+4ai$

이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$8a-4=b$, $6a-2=4a$

두 식을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=4$

(4) $3+i=\frac{a}{1+i}-\frac{b}{1-i}$

$=\frac{a(1-i)}{(1+i)(1-i)}-\frac{b(1+i)}{(1-i)(1+i)}$

$=\frac{a-ai}{1^2-i^2}-\frac{b+bi}{1^2-i^2}$

$=\frac{a}{2}-\frac{a}{2}i-\frac{b}{2}-\frac{b}{2}i$

$=\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\right)+\left(-\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\right)i$

이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$\frac{a}{2}-\frac{b}{2}=3,\ -\frac{a}{2}-\frac{b}{2}=1$

$a-b=6,\ -a-b=2$

두 식을 연립하여 풀면

$a=2,\ b=-4$

15 답 (1) $4+i$ (2) $5-i$ (3) $\frac{19}{26}+\frac{9}{26}i$

풀이 (1) $a+b=(1-i)+(3+2i)$

$=(1+3)+(-1+2)i$

$=\underline{4+i}$

(2) $ab=(1-i)(3+2i)=(3+2)+(2-3)i=5-i$

(3) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}=\frac{4+i}{5-i}$

$=\frac{(4+i)(5+i)}{(5-i)(5+i)}=\frac{(20-1)+(4+5)i}{5^2-i^2}$

$=\frac{19+9i}{26}=\frac{19}{26}+\frac{9}{26}i$

16 답 (1) $-3-4i$ (2) -1 (3) $\frac{12}{5}+\frac{4}{5}i$

풀이 (1) $a^2=(1-2i)^2=1^2-4i+(2i)^2=-3-4i$

(2) $b^2=(-i)^2=-1$

(3) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{a^2+b^2}{ab}$

이때 $ab=(1-2i)\times(-i)=-2-i$이므로

$\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{(-3-4i)+(-1)}{-2-i}=\frac{-4-4i}{-2-i}$

$=\frac{4+4i}{2+i}=\frac{(4+4i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}$

$=\frac{(8+4)+(-4+8)i}{2^2-i^2}$

$=\frac{12+4i}{5}=\frac{12}{5}+\frac{4}{5}i$

17 답 (1) $2+4i$ (2) 4 (3) 20

풀이 (1) $\bar{z}=\overline{2-4i}=\underline{2+4i}$

(2) $z+\bar{z}=(2-4i)+(2+4i)=4$

(3) $z\bar{z}=(2-4i)(2+4i)=2^2-(4i)^2=20$

18 답 (1) $-3i-3$ (2) $6i$ (3) 18

풀이 (1) $\bar{z}=\overline{3i-3}=-3i-3$

(2) $z-\bar{z}=(3i-3)-(-3i-3)=6i$

(3) $z\bar{z}=(3i-3)(-3i-3)=(-3+3i)(-3-3i)$

$=(-3)^2-(3i)^2=18$

19 답 (1) $\pm\sqrt{2}i$ (2) $\pm 2i$ (3) $\pm\sqrt{7}i$ (4) $\pm 3i$ (5) $\pm 2\sqrt{6}i$

20 답 (1) $-2\sqrt{3}+2i$ (2) 13 (3) $\frac{\sqrt{6}}{2}i$ (4) 0

풀이 (1) $\sqrt{-3}\sqrt{-4}+\sqrt{2}\sqrt{-2}$

$=\sqrt{3}i\times 2i+\sqrt{2}\times\sqrt{2}i$

$=\underline{-2\sqrt{3}+2i}$

(2) $(4-\sqrt{-2})(4+\sqrt{-2})+(\sqrt{-5})^2$

$=(4-\sqrt{2}i)(4+\sqrt{2}i)+(\sqrt{5}i)^2$

$=4^2-(\sqrt{2}i)^2-5$

$=16-(-2)-5$

$=13$

(3) $\sqrt{2}\sqrt{-3}+\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{-8}}=\sqrt{2}\sqrt{3}i+\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}i}$

$=\sqrt{6}i+\frac{\sqrt{3}\sqrt{2}i}{(\sqrt{2}i)^2}$

$=\sqrt{6}i-\frac{\sqrt{6}}{2}i$

$=\frac{\sqrt{6}}{2}i$

(4) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{-10}}{\sqrt{-2}}-\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{-2}}$

$=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{10}i}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{10}i}{\sqrt{2}i}-\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}i}$

$=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{10}i}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{10}i}{\sqrt{2}i^2}$

$=\sqrt{5}-\sqrt{5}i-\sqrt{5}+\sqrt{5}i$

$=0$

21 답 (1) -1 (2) $-i$ (3) i (4) 1

풀이 (1) $i^6=i^4\times i^2=i^2=\underline{-1}$

(2) $i^{15}=(i^4)^3\times i^3=i^3=-i$

(3) $i^{49}=(i^4)^{12}\times i=i$

(4) $i^{1000}=(i^4)^{250}=1$

22 답 (1) -1 (2) 0 (3) $1-i$ (4) $-i-1$

풀이 (1) $i^5+i^6+i^7=i+i^2+i^3$

$=i-1-i$

$=\underline{-1}$

(2) $i+i^2+i^3+i^4=i-1-i+1=0$이므로

$i+i^2+i^3+\cdots+i^{20}$

$=(i+i^2+i^3+i^4)+(i^5+i^6+i^7+i^8)+\cdots$

$+(i^{17}+i^{18}+i^{19}+i^{20})$

$=0$

(3) $\frac{1}{i^{100}}+\frac{1}{i^{101}}=\frac{1}{(i^4)^{25}}+\frac{1}{(i^4)^{25}\times i}$

$=1+\frac{1}{i}$

$=1+\frac{i}{i^2}$

$=1-i$

(4) $\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}=-i-1+i+1=0$이므로

$\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\cdots+\frac{1}{i^{50}}$

$=\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)+\left(\frac{1}{i^5}+\frac{1}{i^6}+\frac{1}{i^7}+\frac{1}{i^8}\right)+\cdots$

$+\left(\frac{1}{i^{45}}+\frac{1}{i^{46}}+\frac{1}{i^{47}}+\frac{1}{i^{48}}\right)+\frac{1}{i^{49}}+\frac{1}{i^{50}}$

$=\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)+\frac{1}{i^4}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)+\cdots$

$+\frac{1}{i^{44}}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)+\frac{1}{i^{49}}+\frac{1}{i^{50}}$

$=\frac{1}{i^{49}}+\frac{1}{i^{50}}=\frac{1}{(i^4)^{12}\times i}+\frac{1}{(i^4)^{12}\times i^2}$

$=\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}=-i-1$

23 답 (1) $-i$ (2) i (3) 1 (4) -1 (5) 1 (6) $-i$ (7) -1 (8) 0

풀이 (1) $\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$이므로

$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3=i^3=\underline{-i}$

(2) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^9=i^9=(i^4)^2\times i=i$

(3) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{72}=i^{72}=(i^4)^{18}=1$

(4) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{250}=i^{250}=(i^4)^{62}\times i^2=-1$

(5) $\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$이므로

$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4=(-i)^4=1$

(6) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{25}=(-i)^{25}=\{(-i)^4\}^6\times(-i)=-i$

(7) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{102}=(-i)^{102}=\{(-i)^4\}^{25}\times(-i)^2=-1$

(8) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{155}=(-i)^{155}=\{(-i)^4\}^{38}\times(-i)^3=i$,

$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{155}=i^{155}=(i^4)^{38}\times i^3=-i$이므로

$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{155}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{155}=i-i=0$

24 답 (1) $x=3$ (2) $x=2$ (3) $x=0$ (4) 해가 없다.

풀이 (2) $5x+1=11$에서 $5x=10$이므로 $x=2$이다.

(3) $-4(x-2)=3x+8$에서

$-4x+8=3x+8$

$-7x=0$

이므로 $x=0$이다.

(4) $3x+2(x-1)=4(x+1)+x$에서

$3x+2x-2=5x+4$

$0\times x=6$

이므로 해가 없다.

25 답 (1) $a=0$일 때 해가 없다., $a\neq0$일 때 $x=\frac{1}{a}$

(2) $a=-3$일 때 해가 없다., $a\neq-3$일 때 $x=\frac{a+5}{a+3}$

(3) $a=1$일 때 해가 무수히 많다., $a\neq1$일 때 $x=0$

풀이 (1) $ax+1=2$에서 $ax=1$

(i) $a=0$이면 $0\times x=1$이므로 해가 없다.

(ii) $a\neq0$이면 $x=\frac{1}{a}$

(2) $a(x-1)+3x=5$에서 $ax-a+3x=5$

$(a+3)x=a+5$

(i) $a=-3$이면 $0\times x=2$이므로 해가 없다.

(ii) $a\neq-3$이면 $x=\frac{a+5}{a+3}$

(3) $(a^2+1)x=2ax$에서 $(a^2-2a+1)x=0$

$(a-1)^2x=0$

(i) $a=1$이면 $0\times x=0$이므로 해가 무수히 많다.

(ii) $a\neq1$이면 $x=0$

26 답 (1) $x=7$ 또는 $x=-3$ (2) $x=4$ 또는 $x=2$ (3) $x=3$ 또는 $x=-5$ (4) $x=8$ (5) 해는 없다. (6) $x=4$ 또는 $x=-\frac{2}{3}$ (7) $x=3$ 또는 $x=-2$

풀이 (1) $x=2$를 기준으로 구간을 나누어 생각한다.

(i) $x\geq2$일 때

$x-2=5$이므로 $x=7$이다.

(ii) $x<2$일 때

$-(x-2)=5$

$-x+2=5$이므로 $x=-3$이다.

(i), (ii)에서 방정식의 해는 $x=7$ 또는 $x=-3$이다.

다른 풀이 $|x-2|=5$이면 $x-2=\pm5$이므로

$x=7$ 또는 $x=-3$이다.

(2) $x=3$을 기준으로 구간을 나누어 생각한다.

(i) $x\geq3$일 때

$x-3=1$이므로 $x=4$이다.

(ii) $x<3$일 때

$-(x-3)=1$

$-x+3=1$이므로 $x=2$이다.

(i), (ii)에서 방정식의 해는 $x=4$ 또는 $x=2$이다.

다른 풀이 $|x-3|=1$이면 $x-3=\pm1$이므로

$x=4$ 또는 $x=2$이다.

(3) $x=-1$을 기준으로 구간을 나누어 생각한다.

(i) $x\geq-1$일 때

$x+1-4=0$이므로 $x=3$이다.

(ii) $x<-1$일 때

$-(x+1)-4=0$

$-x-1-4=0$이므로 $x=-5$이다.

(i), (ii)에서 방정식의 해는 $x=3$ 또는 $x=-5$이다.

다른 풀이 $|x+1|-4=0$이면 $|x+1|=4$에서

$x+1=\pm4$이므로

$x=3$ 또는 $x=-5$이다.

(4) $x=1$을 기준으로 구간을 나누어 생각한다.

(ⅰ) $x\ge1$일 때

$x-1=2x-9$

$-x=-8$이므로 $x=8$이다.

(ⅱ) $x<1$일 때

$-(x-1)=2x-9$

$-x+1=2x-9$

$-3x=-10$이므로 $x=\frac{10}{3}$이다.

이때 $x=\frac{10}{3}$은 $x<1$에 속하지 않으므로 해가 아니다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 방정식의 해는 $x=8$이다.

(5) $x=-\frac{3}{2}$을 기준으로 구간을 나누어 생각한다.

(ⅰ) $x\ge-\frac{3}{2}$일 때

$2x+3=x-5$이므로 $x=-8$이다.

이때 $x=-8$은 $x\ge-\frac{3}{2}$에 속하지 않으므로 해가 아니다.

(ⅱ) $x<-\frac{3}{2}$일 때

$-(2x+3)=x-5$

$-2x-3=x-5$

$-3x=-2$이므로 $x=\frac{2}{3}$이다.

이때 $x=\frac{2}{3}$는 $x<-\frac{3}{2}$에 속하지 않으므로 해가 아니다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 방정식의 해는 없다.

(6) $x=-3$과 $x=\frac{1}{2}$을 기준으로 구간을 나누어 생각한다.

(ⅰ) $x\ge\frac{1}{2}$일 때

$x+3=2x-1$이므로 $x=4$이다.

(ⅱ) $-3\le x<\frac{1}{2}$일 때

$x+3=-(2x-1)$

$x+3=-2x+1$

$3x=-2$이므로 $x=-\frac{2}{3}$이다.

(ⅲ) $x<-3$일 때

$-(x+3)=-(2x-1)$

$x+3=2x-1$이므로 $x=4$이다.

이때 $x=4$는 $x<-3$에 속하지 않으므로 해가 아니다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 방정식의 해는 $x=4$ 또는 $x=-\frac{2}{3}$이다.

다른 풀이 $|x+3|=|2x-1|$이면 $x+3=\pm(2x-1)$

$x+3=2x-1$에서 $x=4$이고

$x+3=-(2x-1)$에서 $x=-\frac{2}{3}$이다.

(7) $x=0$과 $x=1$을 기준으로 구간을 나누어 생각한다.

(ⅰ) $x\ge1$일 때

$x+(x-1)=5$

$2x-1=5$

$2x=6$이므로 $x=3$이다.

(ⅱ) $0\le x<1$일 때

$x-(x-1)=5$

$0\times x+1=5$

$0\times x=4$이므로 해는 없다.

(ⅲ) $x<0$일 때

$-x-(x-1)=5$

$-2x+1=5$

$-2x=4$이므로 $x=-2$이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 방정식의 해는 $x=3$ 또는 $x=-2$이다.

27 답 (1) $x=1$ 또는 $x=2$ (2) $x=5$

(3) $x=-4$ 또는 $x=\frac{1}{2}$ (4) $x=-\frac{2}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{2}$

풀이 (1) $x^2-3x+2=0$에서 $(x-1)(x-2)=0$이므로

$x=1$ 또는 $x=2$

(2) $x^2-10x+25=0$에서 $(x-5)^2=0$이므로

$x=5$

(3) $2x^2+7x-4=0$에서 $(x+4)(2x-1)=0$이므로

$x=-4$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

(4) $6x^2-11x-10=0$에서 $(3x+2)(2x-5)=0$이므로

$x=-\frac{2}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{2}$

28 답 (1) $x=\frac{3\pm\sqrt{11}i}{2}$ (2) $x=2\pm\sqrt{6}$

(3) $x=\frac{-5\pm\sqrt{37}}{2}$ (4) $x=-3\pm\sqrt{2}i$

(5) $x=1\pm\sqrt{2}$ (6) $x=\frac{1\pm\sqrt{23}i}{4}$

(7) $x=\frac{2\pm2\sqrt{2}i}{3}$ (8) $x=\frac{-3\pm\sqrt{69}}{6}$

풀이 (1) 근의 공식을 이용하면

$$x=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\times1\times5}}{2\times1}=\frac{3\pm\sqrt{-11}}{2}$$

$$=\frac{3\pm\sqrt{11}i}{2}$$

(2) 근의 공식을 이용하면

$$x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\times1\times(-2)}}{2\times1}=\frac{4\pm\sqrt{24}}{2}$$

$$=\frac{4\pm2\sqrt{6}}{2}=2\pm\sqrt{6}$$

다른 풀이 $x=2\pm\sqrt{(-2)^2-1\times(-2)}=2\pm\sqrt{6}$

(3) 근의 공식을 이용하면

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times1\times(-3)}}{2\times1}=\frac{-5\pm\sqrt{37}}{2}$$

(4) 근의 공식을 이용하면

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\times1\times11}}{2\times1}=\frac{-6\pm\sqrt{-8}}{2}$$

$$=\frac{-6\pm2\sqrt{2}i}{2}=-3\pm\sqrt{2}i$$

다른 풀이 $x=-3\pm\sqrt{3^2-1\times11}=-3\pm\sqrt{-2}$

$=-3\pm\sqrt{2}i$

(5) 근의 공식을 이용하면

$$x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\times1\times(-1)}}{2\times1}=\frac{2\pm\sqrt{8}}{2}$$

$$=\frac{2\pm2\sqrt{2}}{2}=1\pm\sqrt{2}$$

다른 풀이 $x=1\pm\sqrt{(-1)^2-1\times(-1)}=1\pm\sqrt{2}$

(6) 근의 공식을 이용하면

$$x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\times2\times3}}{2\times2}=\frac{1\pm\sqrt{-23}}{4}$$

$$=\frac{1\pm\sqrt{23}i}{4}$$

(7) 근의 공식을 이용하면

$$x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\times3\times4}}{2\times3}=\frac{4\pm\sqrt{-32}}{6}$$

$$=\frac{4\pm4\sqrt{2}i}{6}=\frac{2\pm2\sqrt{2}i}{3}$$

다른 풀이 $x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-3\times4}}{3}=\frac{2\pm\sqrt{-8}}{3}$

$$=\frac{2\pm2\sqrt{2}i}{3}$$

(8) 근의 공식을 이용하면

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times3\times(-5)}}{2\times3}=\frac{-3\pm\sqrt{69}}{6}$$

29 답 (1) $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$, 허근 (2) $x=1\pm\sqrt{5}$, 실근

(3) $x=\frac{5\pm\sqrt{7}i}{2}$, 허근 (4) $x=\frac{-2\pm\sqrt{2}}{2}$, 실근

풀이 (1) 근의 공식을 이용하면

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times1\times1}}{2\times1}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

따라서 주어진 방정식의 근은 허근이다.

(2) 근의 공식을 이용하면

$$x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-1\times(-4)}}{1}=1\pm\sqrt{5}$$

따라서 주어진 방정식의 근은 실근이다.

(3) 근의 공식을 이용하면

$$x=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\times1\times8}}{2\times1}=\frac{5\pm\sqrt{-7}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{7}i}{2}$$

따라서 주어진 방정식의 근은 허근이다.

(4) 근의 공식을 이용하면

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-2\times1}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{2}}{2}$$

따라서 주어진 방정식의 근은 실근이다.

30 답 (1) 서로 다른 두 실근 (2) 서로 다른 두 허근
(3) 중근 (4) 서로 다른 두 실근
(5) 서로 다른 두 실근 (6) 서로 다른 두 허근
(7) 중근 (8) 서로 다른 두 허근
(9) 서로 다른 두 실근 (10) 서로 다른 두 허근
(11) 중근 (12) 서로 다른 두 실근

풀이 (1) $D=5^2-4\times1\times(-10)=65>0$이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(2) $D=3^2-4\times1\times6=-15<0$이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(3) $D=(-4)^2-4\times1\times4=0$이므로 중근을 갖는다.

다른 풀이 $\frac{D}{4}=(-2)^2-1\times4=0$이므로 중근을 갖는다.

(4) $D=(-3)^2-4\times1\times2=1>0$이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(5) $D=2^2-4\times1\times(-3)=16>0$이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

다른 풀이 $\frac{D}{4}=1^2-1\times(-3)=4>0$이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(6) $D=(-1)^2-4\times1\times8=-31<0$이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(7) $D=4^2-4\times4\times1=0$이므로 중근을 갖는다.

다른 풀이 $\frac{D}{4}=2^2-4\times1=0$이므로 중근을 갖는다.

(8) $D=2^2-4\times5\times1=-16<0$이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

다른 풀이 $\frac{D}{4}=1^2-5\times1=-4<0$이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(9) $D=6^2-4\times2\times(-3)=60>0$이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

다른 풀이 $\frac{D}{4}=3^2-2\times(-3)=15>0$이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(10) $D=(-1)^2-4\times4\times2=-31<0$이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(11) $D=12^2-4\times4\times9=0$이므로 중근을 갖는다.

다른 풀이 $\frac{D}{4}=6^2-4\times9=0$이므로 중근을 갖는다.

(12) $D=5^2-4\times3\times(-2)=49>0$이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

31 답 (1) $k>-4$ (2) $k<-\frac{3}{4}$

(3) $k<\frac{1}{2}$ (4) $-\frac{5}{4}<k<0$ 또는 $k>0$

풀이 (1) 이차방정식 $x^2+4x-k=0$의 판별식을 D라고 하면

$$\frac{D}{4}=2^2-1\times(-k)=4+k$$

이때 $\frac{D}{4}>0$이어야 하므로 $k+4>0$

따라서 $k>-4$이다.

(2) 이차방정식 $x^2-x+(k+1)=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=(-1)^2-4\times1\times(k+1)=-4k-3$

이때 $D>0$이어야 하므로 $-4k-3>0$

따라서 $k<-\frac{3}{4}$이다.

(3) 이차방정식 $x^2+2(k-1)x+k^2=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-1\times k^2=(k-1)^2-k^2$

$=-2k+1$

이때 $\frac{D}{4}>0$이어야 하므로 $-2k+1>0$

따라서 $k<\frac{1}{2}$이다.

(4) 이차방정식 $kx^2+5x-5=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=5^2-4\times k\times(-5)=20k+25$

이때 $D>0$이어야 하므로 $20k+25>0$

즉, $k>-\frac{5}{4}$이다.

따라서 $k\neq 0$이므로

$-\frac{5}{4}<k<0$ 또는 $k>0$

32 답 (1) $\frac{1}{4}$ (2) 2 (3) -9 (4) $\frac{1}{2}$

풀이 (1) 이차방정식 $x^2+x+k=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=1^2-4\times 1\times k=-4k+1$

이때 $D=0$이어야 하므로

$-4k+1=0$

따라서 $k=\frac{1}{4}$이다.

(2) 이차방정식 $x^2-4x+(k+2)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\times(k+2)=-k+2$

이때 $\frac{D}{4}=0$이어야 하므로

$-k+2=0$

따라서 $k=2$이다.

(3) 이차방정식 $kx^2+6x-1=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=3^2-k\times(-1)=k+9$

이때 $\frac{D}{4}=0$이어야 하므로

$k+9=0$

따라서 $k=-9$이다.

(4) 이차방정식 $(k-1)x^2+4(k-1)x-2=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=\{2(k-1)\}^2-(k-1)\times(-2)=4k^2-6k+2$

이때 $\frac{D}{4}=0$이어야 하므로

$2(2k^2-3k+1)=0$, $(2k-1)(k-1)=0$

따라서 $k=\frac{1}{2}$ 또는 $k=1$이다.

이때 $k\neq 1$이므로 $k=\frac{1}{2}$이다.

33 답 (1) $k>1$ (2) $k>\frac{4}{3}$ (3) $k<-\frac{1}{4}$ (4) $k<-\frac{1}{32}$

풀이 (1) 이차방정식 $x^2+2x+k=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=1^2-1\times k=-k+1$

이때 $\frac{D}{4}<0$이어야 하므로

$-k+1<0$

따라서 $k>1$이다.

(2) 이차방정식 $3x^2-2x+(k-1)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-3\times(k-1)=-3k+4$

이때 $\frac{D}{4}<0$이어야 하므로

$-3k+4<0$

따라서 $k>\frac{4}{3}$이다.

(3) 이차방정식 $x^2+(2k+1)x+k^2=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=(2k+1)^2-4\times 1\times k^2=4k+1$

이때 $D<0$이어야 하므로

$4k+1<0$

따라서 $k<-\frac{1}{4}$이다.

(4) 이차방정식 $kx^2-x-8=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=(-1)^2-4\times k\times(-8)=32k+1$

이때 $D<0$이어야 하므로

$32k+1<0$

따라서 $k<-\frac{1}{32}$이다.

34 답 (1) 두 근의 합: 5, 두 근의 곱: 4

(2) 두 근의 합: -6, 두 근의 곱: -3

(3) 두 근의 합: -12, 두 근의 곱: 36

(4) 두 근의 합: 4, 두 근의 곱: -1

(5) 두 근의 합: $-\frac{3}{2}$, 두 근의 곱: $-\frac{1}{2}$

(6) 두 근의 합: -2, 두 근의 곱: $\frac{9}{2}$

(7) 두 근의 합: $\frac{1}{2}$, 두 근의 곱: $\frac{2}{3}$

(8) 두 근의 합: 2, 두 근의 곱: $-\frac{2}{5}$

35 답 (1) 2 (2) -1 (3) -2 (4) 8 (5) 6 (6) -6

풀이 (3) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{2}{-1}=-2$

(4) $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=2^2-4\times(-1)$

$=8$

(5) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=2^2-2\times(-1)$

$=6$

(6) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{6}{-1}=-6$

36 답 (1) -4 (2) 3 (3) -1

(4) 10 (5) $\frac{10}{3}$ (6) -28

풀이 (3) $(\alpha+2)(\beta+2)=\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4$

$=\underline{3}+2\times(\underline{-4})+4$

$=\underline{-1}$

(4) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=(-4)^2-2\times3$

$=10$

(5) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{10}{3}$

(6) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=(-4)^3-3\times3\times(-4)$

$=-28$

37 답 (1) $x^2-4x+3=0$ (2) $x^2+6x-16=0$

(3) $x^2-x+\frac{2}{9}=0$ (4) $x^2+4x+2=0$

(5) $x^2-2x+17=0$

풀이 (1) 두 수의 합이 4, 곱이 3이므로 구하는 이차방정식은

$\underline{x^2-4x+3}=0$

(2) 두 수의 합이 -6, 곱이 -16이므로 구하는 이차방정식은

$x^2+6x-16=0$

(3) 두 수의 합이 1, 곱이 $\frac{2}{9}$이므로 구하는 이차방정식은

$x^2-x+\frac{2}{9}=0$

(4) 두 수의 합이 -4, 곱이 2이므로 구하는 이차방정식은

$x^2+4x+2=0$

(5) 두 수의 합이 2, 곱이 17이므로 구하는 이차방정식은

$x^2-2x+17=0$

38 답 (1) $x^2+3x+1=0$ (2) $x^2-5x+5=0$

(3) $x^2-3x+1=0$

풀이 이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=1$

(1) $-\alpha$, $-\beta$를 두 근으로 하는 이차방정식은

두 근의 합이 $-(\alpha+\beta)=\underline{-3}$,

두 근의 곱이 $(-\alpha)\times(-\beta)=\alpha\beta=\underline{1}$

이므로 구하는 이차방정식은

$\underline{x^2+3x+1}=0$

(2) $\alpha+1$, $\beta+1$을 두 근으로 하는 이차방정식은

두 근의 합이 $\alpha+\beta+2=5$,

두 근의 곱이

$(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+\alpha+\beta+1=1+3+1=5$

이므로 구하는 이차방정식은

$x^2-5x+5=0$

(3) $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$을 두 근으로 하는 이차방정식은

두 근의 합이 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{3}{1}=3$,

두 근의 곱이 $\frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=1$

이므로 구하는 이차방정식은

$x^2-3x+1=0$

39 답 (1) $1+\sqrt{2}$, $a=-2$, $b=-1$

(2) $3-\sqrt{5}$, $a=-6$, $b=4$

(3) $-\sqrt{3}-2$, $a=4$, $b=1$

풀이 (1) 계수가 유리수이고 한 근이 $1-\sqrt{2}$이므로 다른 한 근은 $\underline{1+\sqrt{2}}$이다.

따라서 두 근의 합은 $\underline{2}$, 두 근의 곱은 $\underline{-1}$이다.

이때 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 $-a$, 두 근의 곱은 b이므로 $a=\underline{-2}$, $b=\underline{-1}$이다.

(2) 계수가 유리수이고 한 근이 $3+\sqrt{5}$이므로 다른 한 근은 $3-\sqrt{5}$이다.

따라서 두 근의 합은 6, 두 근의 곱은 4이다.

이때 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 $-a$, 두 근의 곱은 b이므로 $a=-6$, $b=4$이다.

(3) 계수가 유리수이고 한 근이 $\sqrt{3}-2$이므로 다른 한 근은 $-\sqrt{3}-2$이다.

따라서 두 근의 합은 -4, 두 근의 곱은 1이다.

이때 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 $-a$, 두 근의 곱은 b이므로 $a=4$, $b=1$이다.

40 답 (1) $-i-1$, $a=2$, $b=-2$

(2) $2+3i$, $a=-4$, $b=-13$

(3) $-2i+\sqrt{2}$, $a=-2\sqrt{2}$, $b=-6$

풀이 (1) 계수가 실수이고 한 근이 $i-1$이므로 다른 한 근은 $-i-1$이다.

따라서 두 근의 합은 -2, 두 근의 곱은 2이다.

이때 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 $-a$, 두 근의 곱은 $-b$이므로 $a=2$, $b=-2$이다.

(2) 계수가 실수이고 한 근이 $2-3i$이므로 다른 한 근은 $2+3i$이다.

따라서 두 근의 합은 4, 두 근의 곱은 13이다.

이때 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 $-a$, 두 근의 곱은 $-b$이므로 $a=-4$, $b=-13$이다.

(3) 계수가 실수이고 한 근이 $2i+\sqrt{2}$이므로 다른 한 근은 $-2i+\sqrt{2}$이다.

따라서 두 근의 합은 $2\sqrt{2}$, 두 근의 곱은 6이다.

이때 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 $-a$, 두 근의 곱은 $-b$이므로 $a=-2\sqrt{2}$, $b=-6$이다.

01 답 실수부분: $\frac{1}{2}$, 허수부분: $\frac{3}{2}$

풀이 $\frac{i-3}{2i}=\frac{(i-3)i}{2i^2}=\frac{3i+1}{2}=\frac{3}{2}i+\frac{1}{2}$이므로

실수부분은 $\frac{1}{2}$, 허수부분은 $\frac{3}{2}$이다.

02 답 (1) ㄷ, ㄹ, ㅁ (2) ㄱ, ㄴ, ㅂ (3) ㄱ, ㅂ

풀이 ㄱ. $i^{25}=(i^4)^6\times i=i$이므로 i^{25}은 실수부분이 0, 허수부분이 1인 순허수이다.

ㄴ. $2-i$는 실수부분이 2, 허수부분이 -1인 순허수가 아닌 허수이다.

ㄷ. $9\sqrt{2}+(3\sqrt{2}i)^2=9\sqrt{2}-18$이므로 $9\sqrt{2}+(3\sqrt{2}i)^2$은 실수부분이 $9\sqrt{2}-18$, 허수부분이 0인 실수이다.

ㄹ. 3.5는 실수부분이 $3.5=\frac{7}{2}$, 허수부분이 0인 실수이다.

ㅁ. $-1-\sqrt{3}$은 실수부분이 $-1-\sqrt{3}$, 허수부분이 0인 실수이다.

ㅂ. $i+\sqrt{2}i=(1+\sqrt{2})i$이므로 $i+\sqrt{2}i$는 실수부분이 0, 허수부분이 $1+\sqrt{2}$인 순허수이다.

따라서 실수는 ㄷ, ㄹ, ㅁ, 허수는 ㄱ, ㄴ, ㅂ, 순허수는 ㄱ, ㅂ이다.

03 답 -1

풀이 $(i+1)x^2-(1-i)x-(2+6i)$

$=ix^2+x^2-x+ix-2-6i$

$=(x^2-x-2)+(x^2+x-6)i$

순허수가 되려면 실수부분이 0이고 허수부분이 0이 아니어야 하므로 $x^2-x-2=0$이고 $x^2+x-6\neq0$이어야 한다.

따라서

$x^2-x-2=0$, $(x+1)(x-2)=0$

에서 $x=-1$ 또는 $x=2$이고,

$x^2+x-6\neq0$, $(x-2)(x+3)\neq0$

에서 $x\neq2$이고 $x\neq-3$이므로

$x=-1$이다.

04 답 $x=2$, $y=3$

풀이 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$3x+1-y=4$, $x-2y+5=1$이므로

$3x-y=3$, $x-2y=-4$

두 식을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=3$

05 답 30

풀이 $(2+3i)(5-i)+\frac{2(-3+2i)}{1+i}$

$=(10+3)+(-2+15)i+\frac{2(-3+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$

$=13+13i+\frac{2\{(-3+2)+(3+2)i\}}{2}$

$=13+13i+(-1+5i)$

$=12+18i$

따라서 $a=12$, $b=18$이므로 $a+b=30$이다.

06 답 10

풀이 $z=1-2i$에서 $\bar{z}=1+2i$이므로

$z\bar{z}(z+\bar{z})=(1-2i)(1+2i)\{(1-2i)+(1+2i)\}$

$=5\times2$

$=10$

07 답 $-1+i$

풀이 $z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓으면

$\bar{z}=a-bi$이므로

$(2-i)z+4i\bar{z}=(2-i)(a+bi)+4i(a-bi)$

$=(2a+b)+(2b-a)i+4ai+4b$

$=(2a+5b)+(3a+2b)i=3-i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$2a+5b=3$, $3a+2b=-1$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=1$이므로 복소수 z는 $-1+i$이다.

08 답 4

풀이 $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}}+\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{-8}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{-8}}{\sqrt{-2}}$

$=\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}i}+\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{8}i}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{8}i}{\sqrt{2}i}$

$=\frac{2\sqrt{2}i}{\sqrt{2}i^2}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\frac{2\sqrt{2}i}{\sqrt{2}}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$=-2i+2+2i+2$

$=4$

09 답 -1

풀이 $\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}=-i-1+i+1=0$이므로

$\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\cdots+\frac{1}{i^{99}}$

$=\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)+\left(\frac{1}{i^5}+\frac{1}{i^6}+\frac{1}{i^7}+\frac{1}{i^8}\right)+\cdots$

$+\left(\frac{1}{i^{93}}+\frac{1}{i^{94}}+\frac{1}{i^{95}}+\frac{1}{i^{96}}\right)+\frac{1}{i^{97}}+\frac{1}{i^{98}}+\frac{1}{i^{99}}$

$=\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)+\frac{1}{i^4}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)+\cdots$

$+\frac{1}{i^{92}}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)+\frac{1}{i^{97}}+\frac{1}{i^{98}}+\frac{1}{i^{99}}$

$=\frac{1}{i^{97}}+\frac{1}{i^{98}}+\frac{1}{i^{99}}$

$=\frac{1}{(i^4)^{24}\times i}+\frac{1}{(i^4)^{24}\times i^2}+\frac{1}{(i^4)^{24}\times i^3}$

$=\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}$

$=-i-1+i$

$=-1=a+bi$

즉, 복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $a=-1$, $b=0$이므로 $a+b=-1+0=-1$이다.

10 답 0

풀이 $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2n}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2n}=\left\{\frac{(1+i)^2}{(\sqrt{2})^2}\right\}^n+\left\{\frac{(1-i)^2}{(\sqrt{2})^2}\right\}^n$

$=\left(\frac{2i}{2}\right)^n+\left(\frac{-2i}{2}\right)^n$

$=i^n+(-i)^n$

이때 n이 홀수이므로 $n=4k+1$일 때와 $n=4k+3$일 때로 나누어 생각한다.

(i) $n=4k+1$일 때

$i^n+(-i)^n$

$=i^{4k+1}+(-i)^{4k+1}$

$=(i^4)^k\times i+\{(-i)^4\}^k\times(-i)$

$=i+(-i)=0$

(ii) $n=4k+3$일 때

$i^n+(-i)^n$

$=i^{4k+3}+(-i)^{4k+3}$

$=(i^4)^k\times i^3+\{(-i)^4\}^k\times(-i)^3$

$=-i+i=0$

(i), (ii)에 의하여 $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2n}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2n}$의 값은 0이다.

11 답 0

풀이 $\frac{1+i}{1-i}=i$이고 $\frac{1-i}{1+i}=-i$이므로

$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{100}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{110}$

$=i^{100}+(-i)^{110}$

$=(i^4)^{25}+\{(-i)^4\}^{27}\times(-i)^2$

$=1+(-i)^2$

$=1+(-1)=0$

12 답 $x=4$ 또는 $x=0$

풀이 $x=-1$과 $x=2$를 기준으로 구간을 나누어 생각한다.

(i) $x\geq 2$일 때

$(x+1)+(x-2)=x+3$

$2x-1=x+3$

이므로 $x=4$이다.

(ii) $-1\leq x<2$일 때

$(x+1)-(x-2)=x+3$

$3=x+3$

이므로 $x=0$이다.

(iii) $x<-1$일 때

$-(x+1)-(x-2)=x+3$

$-2x+1=x+3$

$-3x=2$

이므로 $x=-\frac{2}{3}$이다.

이때 $x=-\frac{2}{3}$는 $x<-1$에 속하지 않으므로 해가 아니다.

(i), (ii), (iii)에서 방정식의 해는 $x=4$ 또는 $x=0$이다.

13 답 $x=\frac{5\pm\sqrt{15}i}{4}$, 허근

풀이 근의 공식을 이용하면

$x=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\times2\times5}}{2\times2}$

$=\frac{5\pm\sqrt{-15}}{4}$

$=\frac{5\pm\sqrt{15}i}{4}$

따라서 이차방정식 $2x^2-5x+5=0$의 근은 허근이다.

14 답 $x=1$ 또는 $x=3$ 또는 $x=2\pm\sqrt{7}$

풀이 $|x^2-4x|=3$이면 $x^2-4x=\pm3$이므로

(i) $x^2-4x=-3$일 때

$x^2-4x+3=0$

$(x-1)(x-3)=0$

이므로 $x=1$ 또는 $x=3$이다.

(ii) $x^2-4x=3$일 때

$x^2-4x-3=0$

근의 공식을 이용하면

$x=2\pm\sqrt{(-2)^2-1\times(-3)}=2\pm\sqrt{7}$

(i), (ii)에 의하여 $x=1$ 또는 $x=3$ 또는 $x=2\pm\sqrt{7}$이다.

15 답 서로 다른 두 실근

풀이 $\frac{D}{4}=2^2-2\times(-9)=22>0$이므로

서로 다른 두 실근을 갖는다.

16 답 0

풀이 이차방정식 $4x^2-2x+k=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-4\times k=-4k+1$

이때 $\frac{D}{4}>0$이어야 하므로

$-4k+1>0$

따라서 $k<\frac{1}{4}$이므로 정수 k의 최댓값은 0이다.

17 답 3, 7

풀이 이차방정식 $x^2+(k-5)x+1=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=(k-5)^2-4\times1\times1=k^2-10k+21$

이때 $D=0$이어야 하므로

$k^2-10k+21=0$

$(k-3)(k-7)=0$

따라서 $k=3$ 또는 $k=7$이다.

18 답 $k>\frac{9}{8}$

풀이 이차방정식 $kx^2-3x+2=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=(-3)^2-4\times k\times2=-8k+9$

이때 $D<0$이어야 하므로

$-8k+9<0$

따라서 $k>\frac{9}{8}$이다.

19 답 두 근의 합: 2, 두 근의 곱: $\frac{4}{3}$

풀이 $3x^2-6x+4=0$에서

두 근의 합은 $-\frac{-6}{3}=2$이고,

두 근의 곱은 $\frac{4}{3}$이다.

20 답 6

풀이 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=\frac{1}{2}$이므로

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$
$$=2^2-2\times\frac{1}{2}=3$$

따라서

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=3\div\frac{1}{2}=6$$

21 답 $x^2-8x+13=0$

풀이 두 근의 합이 8, 곱이 13이므로 구하는 이차방정식은

$x^2-8x+13=0$

22 답 $3x^2+7x+2=0$

풀이 두 근의 합이 $-\frac{1}{3}-2=-\frac{7}{3}$이고 곱이 $\frac{2}{3}$이므로 구하는 이차방정식은

$$3\left(x^2+\frac{7}{3}x+\frac{2}{3}\right)=0$$

따라서 $3x^2+7x+2=0$이다.

23 답 1

풀이 이차방정식 $x^2-6x+2=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=2$

이때 $\alpha+1$, $\beta+1$을 두 근으로 하는 이차방정식은

두 근의 합이 $\alpha+\beta+2=8$,

두 근의 곱이

$(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1=2+6+1=9$

이므로

$x^2-8x+9=0$

따라서 $p=-8$, $q=9$이므로 $p+q=1$이다.

24 답 20

풀이 계수가 실수이고 한 근이 $2-i$이므로 다른 한 근은 $2+i$이다.

따라서 두 근의 합은 4, 두 근의 곱은 5이다.

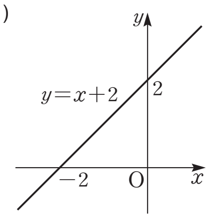
이때 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 a, 두 근의 곱은 b이므로 $a=4$, $b=5$이다.

따라서 $ab=4\times5=20$이다.

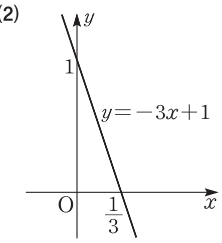
Ⅱ-2 | 이차방정식과 이차함수 082-095쪽

01 답 풀이 참조

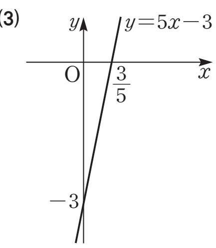
풀이 (1)



(2)

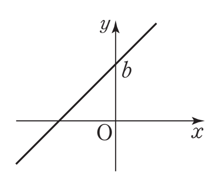


(3)



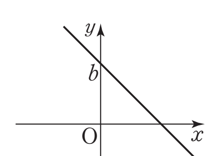
02 답 (1) 제4사분면 (2) 제3사분면 (3) 제1사분면

풀이 (1) $a>0$, $b>0$에서 기울기가 양수이고 y절편이 양수이므로 일차함수 $y=ax+b$의 그래프는 다음 그림과 같다.



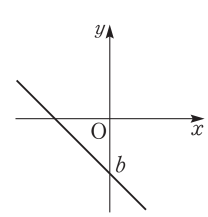
따라서 그래프가 지나지 않는 사분면은 제4사분면이다.

(2) $a<0$, $b>0$에서 기울기가 음수이고 y절편이 양수이므로 일차함수 $y=ax+b$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 그래프가 지나지 않는 사분면은 제3사분면이다.

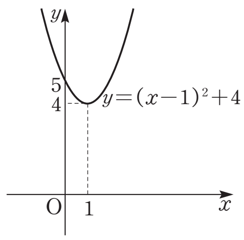
(3) $a<0$, $b<0$에서 기울기가 음수이고 y절편이 음수이므로 일차함수 $y=ax+b$의 그래프는 다음 그림과 같다.



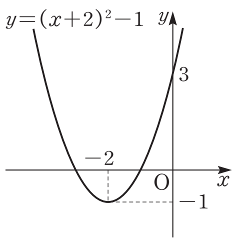
따라서 그래프가 지나지 않는 사분면은 제1사분면이다.

03 답 풀이 참조

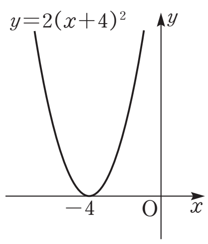
풀이 (1)



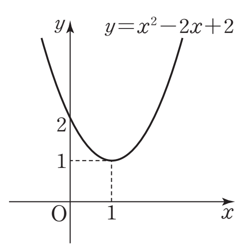
(2) $y=(x+2)^2-1$



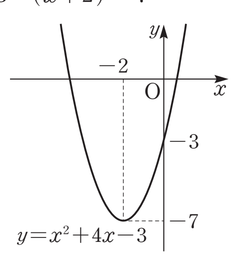
(3) $y=2(x+4)^2$



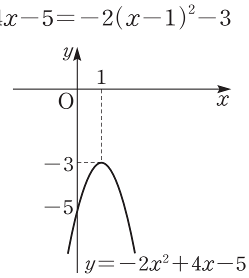
(4) $y=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$



(5) $y=x^2+4x-3=(x+2)^2-7$



(6) $y=-2x^2+4x-5=-2(x-1)^2-3$



04 답 (1) $x=2$ 또는 $x=3$ (2) $x=1$
(3) $x=-4$ 또는 $x=1$ (4) $x=0$ 또는 $x=5$

풀이 (1) 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 2, 3이므로 이차방정식의 실근은 $x=2$ 또는 $x=3$이다.

(2) 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 1이므로 이차방정식의 실근은 $x=1$이다.

(3) 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 -4, 1이므로 이차방정식의 실근은 $x=-4$ 또는 $x=1$이다.

(4) 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 0, 5이므로 이차방정식의 실근은 $x=0$ 또는 $x=5$이다.

05 답 (1) $(-2,\ 0)$, $(1,\ 0)$ (2) $(-3,\ 0)$, $(-1,\ 0)$
(3) 없다. (4) $\left(\frac{3-\sqrt{15}}{3},\ 0\right)$, $\left(\frac{3+\sqrt{15}}{3},\ 0\right)$
(5) $\left(\frac{1}{3},\ 0\right)$ (6) 없다.

풀이 (1) 이차함수 $y=x^2+x-2$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식 $x^2+x-2=0$의 실근이다.
$x^2+x-2=0$에서
$(x+2)(x-1)=0$
이므로 $x=-2$ 또는 $x=1$
따라서 교점의 좌표는 $(-2,\ 0)$, $(1,\ 0)$이다.

(2) 이차함수 $y=x^2+4x+3$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식 $x^2+4x+3=0$의 실근이다.
$x^2+4x+3=0$에서
$(x+3)(x+1)=0$
이므로 $x=-3$ 또는 $x=-1$
따라서 교점의 좌표는 $(-3,\ 0)$, $(-1,\ 0)$이다.

(3) 이차함수 $y=x^2-3x+8$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식 $x^2-3x+8=0$의 실근이다.
근의 공식에 의하여
$$x=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\times1\times8}}{2\times1}$$
$$=\frac{3\pm\sqrt{23}i}{2}$$
에서 $x^2-3x+8=0$은 허근을 가지므로 교점은 없다.

(4) 이차함수 $y=3x^2-6x-2$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식 $3x^2-6x-2=0$의 실근이다.
근의 공식에 의하여
$$x=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-3\times(-2)}}{3}$$
$$=\frac{3\pm\sqrt{15}}{3}$$
따라서 교점의 좌표는 $\left(\frac{3-\sqrt{15}}{3},\ 0\right)$, $\left(\frac{3+\sqrt{15}}{3},\ 0\right)$이다.

(5) 이차함수 $y=9x^2-6x+1$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식 $9x^2-6x+1=0$의 실근이다.
$9x^2-6x+1=0$
$(3x-1)^2=0$
이므로 $x=\frac{1}{3}$
따라서 교점은 $\left(\frac{1}{3},\ 0\right)$이다.

(6) 이차함수 $y=2x^2-2x+5$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식 $2x^2-2x+5=0$의 실근이다.

근의 공식에 의하여

$$x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-2\times5}}{2}$$

$$=\frac{1\pm3i}{2}$$

에서 $2x^2-2x+5=0$은 허근을 가지므로 교점은 없다.

06 답 (1) 2 (2) 1 (3) 0 (4) 0

풀이 (1) 이차방정식 $x^2-5x+4=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=(-5)^2-4\times1\times4=9>0$

이므로 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 개수는 2이다.

(2) 이차방정식 $4x^2-4x+1=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-4\times1=0$

이므로 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 개수는 1이다.

(3) 이차방정식 $2x^2-3x+9=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=(-3)^2-4\times2\times9=-63<0$

이므로 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 개수는 0이다.

(4) 이차방정식 $3x^2+5x+3=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=5^2-4\times3\times3=-11<0$

이므로 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 개수는 0이다.

07 답 (1) $k<\frac{9}{4}$ (2) $k>-\frac{1}{8}$ (3) $k<1$ (4) $-2<k<0$ 또는 $k>0$

풀이 (1) 이차방정식 $x^2+3x+k=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=3^2-4\times1\times k=-4k+9$

이때 $D>0$이어야 하므로

$-4k+9>0$

따라서 $k<\frac{9}{4}$이다.

(2) 이차방정식 $-x^2-x+2k=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=(-1)^2-4\times(-1)\times2k=8k+1$

이때 $D>0$이어야 하므로

$8k+1>0$

따라서 $k>-\frac{1}{8}$이다.

(3) 이차방정식 $x^2-(2k-4)x+k^2=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=\{-(2k-4)\}^2-4\times1\times k^2=-16k+16$

이때 $D>0$이어야 하므로

$-16k+16>0$

따라서 $k<1$이다.

(4) 이차방정식 $2kx^2-4x-1=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-2k\times(-1)=2k+4$

이때 $\frac{D}{4}>0$이어야 하므로 $2k+4>0$, 즉 $k>-2$

또, $k=0$이면 일차함수이므로 $k\neq0$

따라서 $-2<k<0$ 또는 $k>0$이다.

08 답 (1) 16 (2) $\frac{1}{2}$ (3) -1 또는 2 (4) -2

풀이 (1) 이차방정식 $x^2-8x+k=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-4)^2-1\times k=-k+16$

이때 $\frac{D}{4}=0$이어야 하므로

$-k+16=0$

따라서 $k=16$이다.

(2) 이차방정식 $2x^2-2x+k=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-2\times k=-2k+1$

이때 $\frac{D}{4}=0$이어야 하므로

$-2k+1=0$

따라서 $k=\frac{1}{2}$이다.

(3) 이차방정식 $x^2-2kx+(k+2)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-k)^2-1\times(k+2)=k^2-k-2$

이때 $\frac{D}{4}=0$이어야 하므로

$k^2-k-2=0$

$(k+1)(k-2)=0$

따라서 $k=-1$ 또는 $k=2$이다.

(4) 이차방정식 $kx^2-4x-2=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-k\times(-2)=2k+4$

이때 $\frac{D}{4}=0$이어야 하므로

$2k+4=0$

따라서 $k=-2$이다.

09 답 (1) $k>\frac{5}{4}$ (2) $k<-1$ (3) $k<-\frac{1}{2}$ (4) $k>3$

풀이 (1) 이차방정식 $x^2+x+(k-1)=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=1^2-4\times1\times(k-1)=-4k+5$

이때 $D<0$이어야 하므로

$-4k+5<0$

따라서 $k>\frac{5}{4}$이다.

(2) 이차방정식 $-4x^2-4x+k=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-(-4)\times k=4k+4$

이때 $\frac{D}{4}<0$이어야 하므로

$4k+4<0$

따라서 $k<-1$이다.

(3) 이차방정식 $x^2-2(k+1)x+k^2=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k+1)\}^2-1\times k^2=2k+1$

이때 $\frac{D}{4}<0$이어야 하므로

$2k+1<0$

따라서 $k<-\frac{1}{2}$이다.

(4) 이차방정식 $-kx^2+6x-3=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=3^2-(-k)\times(-3)=-3k+9$

이때 $\frac{D}{4}<0$이어야 하므로

$-3k+9<0$

따라서 $k>3$이다.

10 답 (1) 2, 3 (2) -7, -3 (3) 4 (4) $-\frac{5}{2}$, 2

풀이 (1) 이차함수 $y=x^2-3x+4$의 그래프와 직선 $y=2x-2$의 교점의 x좌표는 두 식을 연립한 이차방정식 $x^2-3x+4=2x-2$의 실근이다.

$x^2-3x+4=2x-2$에서

$x^2-5x+6=0$

$(x-2)(x-3)=0$

$x=2$ 또는 $x=3$

따라서 교점의 x좌표는 2, 3이다.

(2) 이차함수 $y=-x^2+5x-10$의 그래프와 직선 $y=15x+11$의 교점의 x좌표는 두 식을 연립한 이차방정식 $-x^2+5x-10=15x+11$의 실근이다.

$-x^2+5x-10=15x+11$에서

$x^2+10x+21=0$

$(x+7)(x+3)=0$

$x=-7$ 또는 $x=-3$

따라서 교점의 x좌표는 -7, -3이다.

(3) 이차함수 $y=x^2-7x+7$의 그래프와 직선 $y=x-9$의 교점의 x좌표는 두 식을 연립한 이차방정식 $x^2-7x+7=x-9$의 실근이다.

$x^2-7x+7=x-9$에서

$x^2-8x+16=0$

$(x-4)^2=0$

$x=4$

따라서 교점의 x좌표는 4이다.

(4) 이차함수 $y=2x^2-x-7$의 그래프와 직선 $y=-2x+3$의 교점의 x좌표는 두 식을 연립한 이차방정식 $2x^2-x-7=-2x+3$의 실근이다.

$2x^2-x-7=-2x+3$에서

$2x^2+x-10=0$

$(2x+5)(x-2)=0$

$x=-\frac{5}{2}$ 또는 $x=2$

따라서 교점의 x좌표는 $-\frac{5}{2}$, 2이다.

11 답 (1) 0 (2) 2 (3) 1 (4) 0

풀이 (1) 이차함수 $y=x^2-2x+4$와 직선 $y=-x+1$을 연립한 이차방정식 $x^2-x+3=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=(-1)^2-4\times1\times3=-11<0$

이므로 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 개수는 0이다.

(2) 이차함수 $y=x^2-6x+1$과 직선 $y=3x-3$을 연립한 이차방정식 $x^2-9x+4=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=(-9)^2-4\times1\times4=65>0$

이므로 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 개수는 2이다.

(3) 이차함수 $y=4x^2+5x+1$과 직선 $y=x$를 연립한 이차방정식 $4x^2+4x+1=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=2^2-4\times1=0$

이므로 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 개수는 1이다.

(4) 이차함수 $y=-3x^2+x-5$와 직선 $y=-2x+4$를 연립한 이차방정식 $-3x^2+3x-9=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=3^2-4\times(-3)\times(-9)=-99<0$

이므로 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 개수는 0이다.

12 답 (1) $k>-6$ (2) $k=-6$ (3) $k<-6$

풀이 이차함수 $y=x^2+3x-2$와 직선 $y=-x+k$를 연립한 이차방정식 $x^2+4x-(k+2)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=2^2-1\times\{-(k+2)\}=k+6$

(1) 서로 다른 두 점에서 만나려면 $\frac{D}{4}>0$이어야 하므로

$k+6>0$

따라서 $k>-6$이다.

(2) 한 점에서 만나려면 $\frac{D}{4}=0$이어야 하므로

$k+6=0$

따라서 $k=-6$이다.

(3) 만나지 않으려면 $\frac{D}{4}<0$이어야 하므로

$k+6<0$

따라서 $k<-6$이다.

13 답 (1) $k<8$ (2) $k=8$ (3) $k>8$

풀이 이차함수 $y=x^2-x+k$와 직선 $y=5x-1$을 연립한 이차방정식 $x^2-6x+(k+1)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-3)^2-1\times(k+1)=-k+8$

(1) 서로 다른 두 점에서 만나려면 $\frac{D}{4}>0$이어야 하므로

$-k+8>0$

따라서 $k<8$이다.

(2) 한 점에서 만나려면 $\frac{D}{4}=0$이어야 하므로

$-k+8=0$

따라서 $k=8$이다.

(3) 만나지 않으려면 $\frac{D}{4}<0$이어야 하므로

$-k+8<0$

따라서 $k>8$이다.

14 답 (1) $-\frac{4}{3}<k<0$ 또는 $k>0$

(2) $k=-\frac{4}{3}$　　(3) $k<-\frac{4}{3}$

풀이 이차함수 $y=kx^2-2x+1$과 직선 $y=2x+4$를 연립한 이차방정식 $kx^2-4x-3=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-k\times(-3)=3k+4$

이때 $y=kx^2-2x+1$은 이차함수이므로 $k\neq 0$

(1) 서로 다른 두 점에서 만나려면 $\frac{D}{4}>0$이어야 하므로

$3k+4>0$, $k>-\frac{4}{3}$

따라서 $-\frac{4}{3}<k<0$ 또는 $k>0$이다.

(2) 한 점에서 만나려면 $\frac{D}{4}=0$이어야 하므로

$3k+4=0$

따라서 $k=-\frac{4}{3}$이다.

(3) 만나지 않으려면 $\frac{D}{4}<0$이어야 하므로

$3k+4<0$

따라서 $k<-\frac{4}{3}$이다.

15 답 (1) 최댓값: 없다., 최솟값: 3

(2) 최댓값: 8, 최솟값: 없다.

(3) 최댓값: -7, 최솟값: 없다.

(4) 최댓값: 없다., 최솟값: 2

(5) 최댓값: $\frac{7}{2}$, 최솟값: 없다.

(6) 최댓값: 없다., 최솟값: -14

풀이 (1) $y=x^2-2x+4$
$=(x-1)^2+3$

이므로 최솟값은 3, 최댓값은 없다.

(2) $y=-x^2+6x-1$
$=-(x-3)^2+8$

이므로 최댓값은 8, 최솟값은 없다.

(3) $y=-x^2+2x-8$
$=-(x-1)^2-7$

이므로 최댓값은 -7, 최솟값은 없다.

(4) $y=5x^2+2$에서 최솟값은 2, 최댓값은 없다.

(5) $y=-2x^2-2x+3$
$=-2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{2}$

이므로 최댓값은 $\frac{7}{2}$, 최솟값은 없다.

(6) $y=3x^2+12x-2$
$=3(x+2)^2-14$

이므로 최솟값은 -14, 최댓값은 없다.

16 답 (1) 8　(2) 20　(3) $-\frac{9}{8}$　(4) 2 또는 -2

풀이 (1) $y=x^2-4x+k$
$=(x-2)^2+k-4$

이고, 최솟값이 4이므로 $k-4=4$이다.

따라서 $k=8$이다.

(2) $y=-2x^2+12x-k$
$=-2(x-3)^2-k+18$

이고, 최댓값이 -2이므로 $-k+18=-2$이다.

따라서 $k=20$이다.

(3) $y=-4x^2-6x+2k$
$=-4\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+2k+\frac{9}{4}$

이고, 최댓값이 0이므로 $2k+\frac{9}{4}=0$이다.

따라서 $k=-\frac{9}{8}$이다.

(4) $y=3x^2+6kx+8$
$=3(x+k)^2+8-3k^2$

이고, 최솟값이 -4이므로 $8-3k^2=-4$, $k^2=4$

따라서 $k=2$ 또는 $k=-2$이다.

17 답 (1) $a=2$, $b=2$　(2) $a=4$, $b=-4$

(3) $a=12$, $b=13$　(4) $a=-3$, $b=\frac{9}{2}$

풀이 (1) $y=x^2-ax+b$는 꼭짓점에서 최솟값을 가지므로 $y=(x-1)^2+1$과 같이 나타낼 수 있다. 즉,

$x^2-ax+b=(x-1)^2+1$
$=x^2-2x+2$

이므로 계수비교법에 의하여 $a=2$, $b=2$이다.

(2) $y=-x^2+ax+2b$는 꼭짓점에서 최댓값을 가지므로 $y=-(x-2)^2-4$와 같이 나타낼 수 있다. 즉,

$-x^2+ax+2b=-(x-2)^2-4$
$=-x^2+4x-8$

이므로 계수비교법에 의하여 $a=4$, $b=-4$이다.

(3) $y=2x^2+ax+b$는 꼭짓점에서 최솟값을 가지므로 $y=2(x+3)^2-5$와 같이 나타낼 수 있다. 즉,

$2x^2+ax+b=2(x+3)^2-5$
$=2x^2+12x+13$

이므로 계수비교법에 의하여 $a=12$, $b=13$이다.

(4) $y=-3x^2+2ax+2b$는 꼭짓점에서 최댓값을 가지므로 $y=-3(x+1)^2+12$와 같이 나타낼 수 있다. 즉,

$-3x^2+2ax+2b=-3(x+1)^2+12$
$=-3x^2-6x+9$

이므로 계수비교법에 의하여 $a=-3$, $b=\frac{9}{2}$이다.

18 답 (1) 최댓값: 4, 최솟값: -5

(2) 최댓값: 20, 최솟값: 16

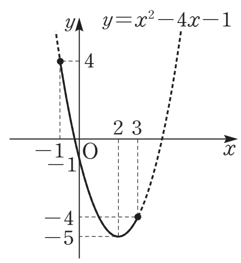
(3) 최댓값: 4, 최솟값: 1

(4) 최댓값: 5, 최솟값: 3

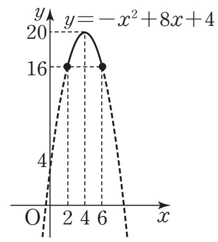
(5) 최댓값: 10, 최솟값: -2

(6) 최댓값: $-\frac{5}{4}$, 최솟값: -8

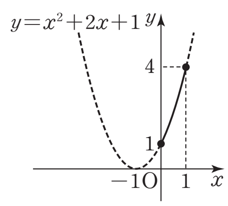
풀이 (1) $y=x^2-4x-1$
$=(x-2)^2-5$
이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 $x=-1$에서 최댓값 4, $x=2$에서 최솟값 -5를 갖는다.



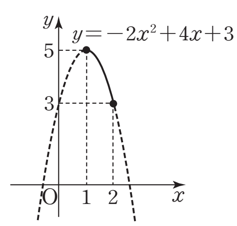
(2) $y=-x^2+8x+4$
$=-(x-4)^2+20$
이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 $x=4$에서 최댓값 20, $x=2$, $x=6$에서 최솟값 16을 갖는다.



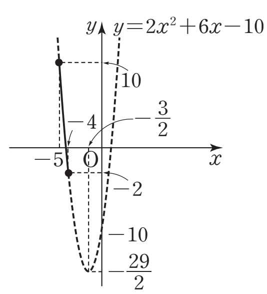
(3) $y=x^2+2x+1$
$=(x+1)^2$
이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 $x=1$에서 최댓값 4, $x=0$에서 최솟값 1을 갖는다.



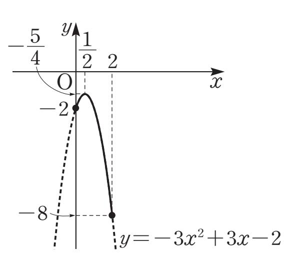
(4) $y=-2x^2+4x+3$
$=-2(x-1)^2+5$
이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 $x=1$에서 최댓값 5, $x=2$에서 최솟값 3을 갖는다.



(5) $y=2x^2+6x-10$
$=2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{29}{2}$
이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 $x=-5$에서 최댓값 10, $x=-4$에서 최솟값 -2를 갖는다.

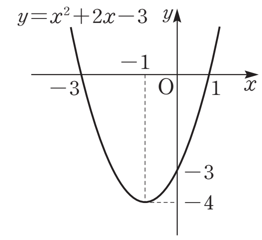


(6) $y=-3x^2+3x-2$
$=-3\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$
이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 $x=\frac{1}{2}$에서 최댓값 $-\frac{5}{4}$, $x=2$에서 최솟값 -8을 갖는다.



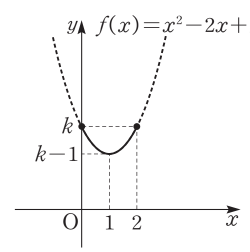
19 답 (1) 최댓값: 5, 최솟값: 0
(2) 최댓값: 0, 최솟값: -4
(3) 최댓값: -3, 최솟값: -4
(4) 최댓값: 0, 최솟값: -3

풀이 $y=x^2+2x-3=(x+1)^2-4$
이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



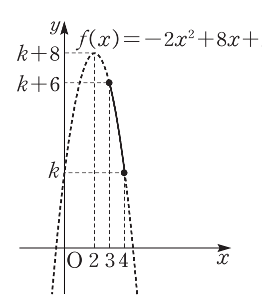
(1) $-4\le x\le -3$이므로 $x=-4$에서 최댓값 5, $x=-3$에서 최솟값 0을 갖는다.
(2) $-3\le x\le -1$이므로 $x=-3$에서 최댓값 0, $x=-1$에서 최솟값 -4를 갖는다.
(3) $-2\le x\le 0$이므로 $x=-2$, $x=0$에서 최댓값 -3, $x=-1$에서 최솟값 -4를 갖는다.
(4) $0\le x\le 1$이므로 $x=1$에서 최댓값 0, $x=0$에서 최솟값 -3을 갖는다.

20 답 6
풀이 $f(x)=x^2-2x+k$
$=(x-1)^2+k-1$
이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



$0\le x\le 2$에서 꼭짓점의 x좌표가 범위에 포함되므로 최솟값은 $f(1)=k-1=5$이다.
따라서 $k=6$이다.

21 답 9
풀이 $f(x)=-2x^2+8x+k$
$=-2(x-2)^2+k+8$
이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



$3\le x\le 4$에서 꼭짓점의 x좌표가 범위에 포함되지 않으므로 최댓값은 $f(3)=k+6=15$이다.
즉, $k=9$이므로 주어진 이차함수는
$f(x)=-2x^2+8x+9$
$=-2(x-2)^2+17$
따라서 최솟값은 $f(4)=9$이다.

22 답 20 m

풀이 $y=-5x^2+20x=-5(x-2)^2+20$

이고, $0\le x\le 4$이므로 함수 $y=-5x^2+20x$는 $x=\underline{2}$에서 최댓값 $\underline{20}$을 가진다.

따라서 물체가 도달하는 최고 높이는 $\underline{20}$ m이다.

23 답 3초, 85 m

풀이 $y=40+30x-5x^2=-5(x-3)^2+85$

이고, $0\le x\le 6$이므로 함수 $y=40+30x-5x^2$은 $x=3$에서 최댓값 85를 가진다.

따라서 물체가 최고 높이에 도달할 때까지 걸린 시간은 3초이고, 최고 높이는 85 m이다.

24 답 400 m^2

풀이 꽃밭의 가로의 길이를 x m, 세로의 길이를 y m라고 하면 $2x+2y=80$에서

$x+y=40$

따라서 $y=40-x$이고 $x>0$, $y>0$이므로

$0<x<40$

꽃밭의 넓이를 S m^2라고 하면

$S=xy$

$=x(40-x)$

$=-x^2+40x$

$=-(x-20)^2+400$

즉, $x=20$일 때 최댓값 400을 가지므로 꽃밭의 최대 넓이는 400 m^2이다.

25 답 10 cm

풀이 $\overline{AC}=x$ cm, $\overline{CB}=y$ cm라고 하면 $x+y=20$에서

$y=20-x$이고 $x>0$, $y>0$이므로

$0<x<20$

선분 AC, CB를 각각 한 변으로 하는 정사각형의 넓이의 합을 S cm^2라고 하면

$S=x^2+y^2$

$=x^2+(20-x)^2$

$=2x^2-40x+400$

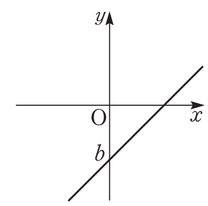
$=2(x-10)^2+200$

즉, $x=10$일 때 최솟값 200을 가지므로 두 개의 정사각형의 넓이의 합이 최소가 되도록 하는 선분 AC의 길이는 10 cm이다.

중단원 점검문제 | Ⅱ-2 이차방정식과 이차함수 096-097쪽

01 답 제2사분면

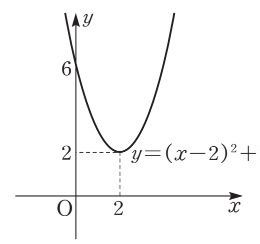
풀이 $a>0$, $b<0$에서 기울기가 양수이고 y절편이 음수이므로 일차함수 $y=ax+b$를 그래프로 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 그래프가 지나지 않는 사분면은 제2사분면이다.

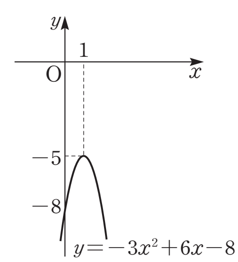
02 답 풀이 참조

풀이



03 답 풀이 참조

풀이 $y=-3x^2+6x-8=-3(x-1)^2-5$



04 답 $x=-1$ 또는 $x=3$

풀이 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 -1, 3이므로 이차방정식의 실근은 $x=-1$ 또는 $x=3$이다.

05 답 풀이 참조

풀이 두 수의 합이 -1, 곱이 -6이므로 구하는 이차방정식은 $x^2+x-6=0$

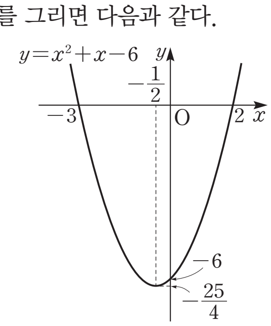
따라서 $a=1$, $b=-6$이고, 이차함수 $y=x^2+ax+b$는

$y=x^2+x-6$이므로

$y=x^2+x-6$

$=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$

따라서 그래프를 그리면 다음과 같다.



06 답 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{3}{4}, 0\right)$

풀이 이차함수 $y=8x^2-2x-3$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식 $8x^2-2x-3=0$의 실근이다.

$8x^2-2x-3=0$에서

$(2x+1)(4x-3)=0$

$x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{4}$

따라서 교점의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{3}{4}, 0\right)$이다.

07 답 2

풀이 이차방정식 $x^2+3x-3=0$의 판별식을 D_1이라고 하면

$D_1=3^2-4\times1\times(-3)=21>0$

따라서 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 개수는 2이므로 $a=2$이다.

이차방정식 $2x^2+2x+5=0$의 판별식을 D_2라고 하면

$\frac{D_2}{4}=1-2\times5=-9<0$

따라서 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 개수는 0이므로 $b=0$이다.

따라서 $a+b=2$이다.

08 답 $\frac{9}{4}$

풀이 이차방정식 $kx^2-3x+1=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=(-3)^2-4\times k\times1=-4k+9$

이때 $D=0$이어야 하므로

$-4k+9=0$

따라서 $k=\frac{9}{4}$이다.

09 답 -3, -1

풀이 이차함수 $y=-x^2-3x+1$의 그래프와 직선 $y=x+4$의 교점의 x좌표는 두 식을 연립한 이차방정식 $-x^2-3x+1=x+4$의 실근이다.

$-x^2-3x+1=x+4$에서

$x^2+4x+3=0$

$(x+3)(x+1)=0$

$x=-3$ 또는 $x=-1$

따라서 교점의 x좌표는 -3, -1이다.

10 답 6

풀이 이차함수 $y=ax^2+2bx$의 그래프가 점 $(-1, 3)$을 지나므로

$a-2b=3$ …… ㉠

또, 이차함수의 그래프와 직선이 접하므로 이차함수와 직선의 방정식을 연립한 이차방정식 $ax^2+2(b-2)x+\frac{b^2}{a}=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(b-2)^2-a\times\frac{b^2}{a}=0$

$-4b+4=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5$, $b=1$이므로 $a+b=6$이다.

11 답 최댓값: 없다., 최솟값: $-\frac{15}{2}$

풀이 $y=2x^2+6x-3$

$=2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{15}{2}$

이므로 최솟값은 $-\frac{15}{2}$, 최댓값은 없다.

12 답 21

풀이 $y=-x^2+10x-k$

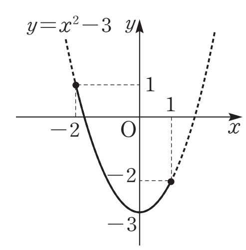
$=-(x-5)^2-k+25$

이고, 최댓값이 4이므로 $-k+25=4$이다.

따라서 $k=21$이다.

13 답 최댓값: 1, 최솟값: -3

풀이 $y=x^2-3$의 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.



따라서 $x=-2$에서 최댓값 1, $x=0$에서 최솟값 -3을 갖는다.

14 답 -3, 5

풀이 $y=-x^2+2kx$

$=-(x-k)^2+k^2$

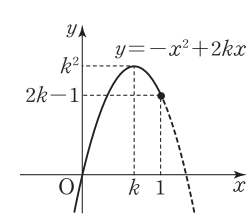
이므로 꼭짓점의 x좌표인 k가 1보다 작은 경우와 1보다 큰 경우로 나누어 구한다.

(i) $k\le1$일 때

$x\le1$에서 꼭짓점의 x좌표가 범위에 포함되므로 최댓값은

$f(k)=k^2=9$

이때 $k\le1$이므로 $k=-3$이다.

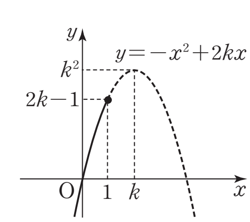


(ii) $k>1$일 때

$x\le1$에서 꼭짓점의 x좌표가 범위에 포함되지 않으므로 최댓값은

$f(1)=2k-1=9$

따라서 $k=5$이다.



(i), (ii)에 의하여 k의 값은 -3, 5이다.

15 답 5 m

풀이 $y=-5x^2+10x$

$=-5(x-1)^2+5$

이고, $0\le x\le 2$이므로 함수 $y=-5x^2+10x$는 $x=1$에서 최댓값 5를 가진다.

따라서 물체가 도달하는 최고 높이는 5 m이다.

16 답 36

풀이 직사각형의 가로의 길이를 x, 세로의 길이를 y라고 하면 $2x+2y=24$에서

$x+y=12$

따라서 $y=12-x$이고 $x>0$, $y>0$이므로

$0<x<12$

직사각형의 넓이를 S라고 하면

$S=xy$

$=x(12-x)$

$=-x^2+12x$

$=-(x-6)^2+36$

즉, $x=6$일 때 최댓값 36을 가지므로 직사각형의 최대 넓이는 36이다.

Ⅱ-3 | 여러 가지 방정식 098-115쪽

01 답 (1) $x=1$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(2) $x=-4$ 또는 $x=2\pm2\sqrt{3}i$

(3) $x=0$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=3$

(4) $x=0$ (중근) 또는 $x=\pm2\sqrt{2}$

(5) $x=\pm\dfrac{3}{2}i$ 또는 $x=\pm\dfrac{3}{2}$

(6) $x=0$ 또는 $x=3$ 또는 $x=\dfrac{-3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

풀이 (1) $x^3-1=0$의 좌변을 인수분해하면

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

이므로 $x=1$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$이다.

(2) $x^3+64=0$의 좌변을 인수분해하면

$(x+4)(x^2-4x+16)=0$

이므로 $x=-4$ 또는 $x=2\pm2\sqrt{3}i$이다.

(3) $x^3-2x^2-3x=0$의 좌변을 인수분해하면

$x(x^2-2x-3)=0$

$x(x+1)(x-3)=0$

이므로 $x=0$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=3$이다.

(4) $x^4-8x^2=0$의 좌변을 인수분해하면

$x^2(x^2-8)=0$

$x^2(x+2\sqrt{2})(x-2\sqrt{2})=0$

이므로 $x=0$ (중근) 또는 $x=\pm2\sqrt{2}$이다.

(5) $16x^4-81=0$의 좌변을 인수분해하면

$(4x^2+9)(4x^2-9)=0$

$(4x^2+9)(2x+3)(2x-3)=0$

이므로 $x=\pm\dfrac{3}{2}i$ 또는 $x=\pm\dfrac{3}{2}$이다.

(6) $x^4-27x=0$의 좌변을 인수분해하면

$x(x^3-27)=0$

$x(x-3)(x^2+3x+9)=0$

이므로 $x=0$ 또는 $x=3$ 또는 $x=\dfrac{-3\pm3\sqrt{3}i}{2}$이다.

02 답 (1) $x=1$ 또는 $x=-5$ 또는 $x=2$

(2) $x=-1$ 또는 $x=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$

(3) $x=-2$ 또는 $x=1\pm2i$

(4) $x=-3$ 또는 $x=\dfrac{1}{2}$ (중근)

(5) $x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=-\dfrac{2}{3}$ 또는 $x=2$

(6) $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

(7) $x=-1$ 또는 $x=3$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{15}i}{4}$

풀이 (1) $f(x)=x^3+2x^2-13x+10$으로 놓으면

$f(1)=1+2-13+10=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 $x-1$로 나누면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 2 & -13 & 10 \\ & & 1 & 3 & -10 \\ \hline & 1 & 3 & -10 & \multicolumn{1}{|r}{0} \end{array}$$

따라서

$f(x)=(x-1)(x^2+3x-10)$

$\quad=(x-1)(x+5)(x-2)$

에서 주어진 방정식은

$(x-1)(x+5)(x-2)=0$

이므로 $x=1$ 또는 $x=-5$ 또는 $x=2$이다.

(2) $f(x)=x^3-2x^2-4x-1$로 놓으면

$f(-1)=-1-2+4-1=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 $x+1$로 나누면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -2 & -4 & -1 \\ & & -1 & 3 & 1 \\ \hline & 1 & -3 & -1 & \multicolumn{1}{|r}{0} \end{array}$$

따라서

$f(x)=(x+1)(x^2-3x-1)$

에서 주어진 방정식은

$(x+1)(x^2-3x-1)=0$

이므로 $x=-1$ 또는 $x=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$이다.

(3) $f(x)=x^3+x+10$으로 놓으면

$f(-2)=-8-2+10=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 $x+2$로 나누면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 0 & 1 & 10 \\ & & -2 & 4 & -10 \\ \hline & 1 & -2 & 5 & \multicolumn{1}{|r}{0} \end{array}$$

따라서

$f(x)=(x+2)(x^2-2x+5)$

에서 주어진 방정식은

$(x+2)(x^2-2x+5)=0$

이므로 $x=-2$ 또는 $x=1\pm2i$이다.

(4) $f(x)=4x^3+8x^2-11x+3$으로 놓으면

$f(-3)=-108+72+33+3=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 $x+3$으로 나누면

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 4 & 8 & -11 & 3 \\ & & -12 & 12 & -3 \\ \hline & 4 & -4 & 1 & \multicolumn{1}{|r}{0} \end{array}$$

따라서

$f(x)=(x+3)(4x^2-4x+1)$

에서 주어진 방정식은

$(x+3)(4x^2-4x+1)=0$

$(x+3)(2x-1)^2=0$

이므로 $x=-3$ 또는 $x=\frac{1}{2}$ (중근)이다.

(5) $3x^4-7x^3+4x=0$에서

$x(3x^3-7x^2+4)=0$

이므로 $f(x)=3x^3-7x^2+4$로 놓으면

$f(1)=3-7+4=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 $x-1$로 나누면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 3 & -7 & 0 & 4 \\ & & 3 & -4 & -4 \\ \hline & 3 & -4 & -4 & \multicolumn{1}{|r}{0} \end{array}$$

따라서

$f(x)=(x-1)(3x^2-4x-4)$

$\quad=(x-1)(3x+2)(x-2)$

에서 주어진 방정식은

$x(x-1)(3x+2)(x-2)=0$

이므로 $x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=-\frac{2}{3}$ 또는 $x=2$이다.

(6) $f(x)=x^4-6x^3+12x^2-9x+2$로 놓으면

$f(1)=1-6+12-9+2=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 $x-1$로 나누면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -6 & 12 & -9 & 2 \\ & & 1 & -5 & 7 & -2 \\ \hline & 1 & -5 & 7 & -2 & \multicolumn{1}{|r}{0} \end{array}$$

따라서

$f(x)=(x-1)(x^3-5x^2+7x-2)$

이고, $g(x)=x^3-5x^2+7x-2$로 놓으면

$g(2)=8-20+14-2=0$이므로 조립제법을 이용하여 $g(x)$를 $x-2$로 나누면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -5 & 7 & -2 \\ & & 2 & -6 & 2 \\ \hline & 1 & -3 & 1 & \multicolumn{1}{|r}{0} \end{array}$$

따라서

$g(x)=(x-2)(x^2-3x+1)$

에서 주어진 방정식은

$(x-1)(x-2)(x^2-3x+1)=0$

이므로 $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$이다.

(7) $f(x)=2x^4-3x^3-6x^2-7x-6$으로 놓으면

$f(-1)=2+3-6+7-6=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 $x+1$로 나누면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 2 & -3 & -6 & -7 & -6 \\ & & -2 & 5 & 1 & 6 \\ \hline & 2 & -5 & -1 & -6 & \multicolumn{1}{|r}{0} \end{array}$$

따라서

$f(x)=(x+1)(2x^3-5x^2-x-6)$

이고, $g(x)=2x^3-5x^2-x-6$으로 놓으면

$g(3)=54-45-3-6=0$이므로 조립제법을 이용하여 $g(x)$를 $x-3$으로 나누면

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 2 & -5 & -1 & -6 \\ & & 6 & 3 & 6 \\ \hline & 2 & 1 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

따라서

$g(x)=(x-3)(2x^2+x+2)$

에서 주어진 방정식은

$(x+1)(x-3)(2x^2+x+2)=0$

이므로 $x=-1$ 또는 $x=3$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{15}i}{4}$이다.

03 답 (1) 1, $\dfrac{1}{2}$ (2) $\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{2}$

풀이 (1) 주어진 방정식에 $x=-2$를 대입하면

$-16+4(a-2)+2(2a-1)+2=0$

$8a-24=0$이므로 $a=3$

이 값을 주어진 방정식에 대입하면

$2x^3+x^2-5x+2=0$

한 근이 -2이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 2 & 1 & -5 & 2 \\ & & -4 & 6 & -2 \\ \hline & 2 & -3 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$(x+2)(2x^2-3x+1)=0$

$(x+2)(x-1)(2x-1)=0$

이므로 $x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=\dfrac{1}{2}$

따라서 나머지 두 근은 1, $\dfrac{1}{2}$이다.

(2) 주어진 방정식에 $x=1$을 대입하면

$1-3a+(5a-2)-a-1=0$

$a-2=0$이므로 $a=2$

이 값을 주어진 방정식에 대입하면

$x^3-6x^2+8x-3=0$

한 근이 1이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -6 & 8 & -3 \\ & & 1 & -5 & 3 \\ \hline & 1 & -5 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$(x-1)(x^2-5x+3)=0$

이므로 $x=1$ 또는 $x=\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{2}$

따라서 나머지 두 근은 $\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{2}$이다.

04 답 (1) 2, 3 (2) $1\pm2i$

풀이 (1) 주어진 방정식에 $x=-2$와 $x=1$을 각각 대입하면

$30a+b=-28$, $3a-2b=-7$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=2$

이 값을 주어진 방정식에 대입하면

$x^4-4x^3-x^2+16x-12=0$

두 근이 -2, 1이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 1 & -4 & -1 & 16 & -12 \\ & & -2 & 12 & -22 & 12 \\ \hline 1 & 1 & -6 & 11 & -6 & \boxed{0} \\ & & 1 & -5 & 6 & \\ \hline & 1 & -5 & 6 & \boxed{0} & \end{array}$$

$(x+2)(x-1)(x^2-5x+6)=0$

$(x+2)(x-1)(x-2)(x-3)=0$

이므로 $x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

따라서 나머지 두 근은 2, 3이다.

(2) 주어진 방정식에 $x=-1$과 $x=1$을 각각 대입하면

$2a-3b=-1$, $2a-b=1$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=1$

이 값을 주어진 방정식에 대입하면

$x^4-2x^3+4x^2+2x-5=0$

두 근이 -1, 1이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & -2 & 4 & 2 & -5 \\ & & -1 & 3 & -7 & 5 \\ \hline 1 & 1 & -3 & 7 & -5 & \boxed{0} \\ & & 1 & -2 & 5 & \\ \hline & 1 & -2 & 5 & \boxed{0} & \end{array}$$

$(x+1)(x-1)(x^2-2x+5)=0$

이므로 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=1\pm2i$

따라서 나머지 두 근은 $1\pm2i$이다.

05 답 (1) $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=4$

(2) $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{11}i}{2}$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=1$

(3) $x=1\pm\sqrt{2}$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}i$

풀이 (1) $(x^2-3x-5)(x^2-3x+3)+7=0$에서

$x^2-3x=t$로 놓으면

$(t-5)(t+3)+7=0$, $t^2-2t-8=0$

$(t+2)(t-4)=0$

위의 식에 $t=x^2-3x$를 대입하면

$(x^2-3x+2)(x^2-3x-4)=0$

$(x-1)(x-2)(x+1)(x-4)=0$

따라서 $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=4$이다.

(2) $(x^2+x-3)(x^2+x+4)+6=0$에서 $x^2+x=t$로 놓으면

$(t-3)(t+4)+6=0$, $t^2+t-6=0$

$(t+3)(t-2)=0$

위의 식에 $t=x^2+x$를 대입하면

$(x^2+x+3)(x^2+x-2)=0$

$(x^2+x+3)(x+2)(x-1)=0$

따라서 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{11}i}{2}$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=1$이다.

(3) $(x^2-2x)^2+3x^2-6x-4=0$에서

$(x^2-2x)^2+3(x^2-2x)-4=0$이므로

$x^2-2x=t$로 놓으면

$t^2+3t-4=0$

$(t-1)(t+4)=0$

위의 식에 $t=x^2-2x$를 대입하면

$(x^2-2x-1)(x^2-2x+4)=0$

따라서 $x=1\pm\sqrt{2}$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}i$이다.

06 답 (1) $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=2$

(2) $x=\pm2\sqrt{2}i$ 또는 $x=\pm\sqrt{6}$

(3) $x=\pm\sqrt{5}i$ 또는 $x=\pm\sqrt{2}i$

풀이 (1) $x^4-5x^2+4=0$에서 $x^2=t$로 놓으면

$t^2-5t+4=0$, $(t-1)(t-4)=0$

위의 식에 $t=x^2$을 대입하면

$(x^2-1)(x^2-4)=0$

$(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)=0$

따라서 $x=\underline{-1}$ 또는 $x=\underline{1}$ 또는 $x=\underline{-2}$ 또는 $x=\underline{2}$이다.

(2) $x^4+2x^2-48=0$에서 $x^2=t$로 놓으면

$t^2+2t-48=0$, $(t+8)(t-6)=0$

위의 식에 $t=x^2$을 대입하면

$(x^2+8)(x^2-6)=0$

$(x^2+8)(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})=0$

따라서 $x=\pm2\sqrt{2}i$ 또는 $x=\pm\sqrt{6}$이다.

(3) $x^4+7x^2+10=0$에서 $x^2=t$로 놓으면

$t^2+7t+10=0$, $(t+5)(t+2)=0$

위의 식에 $t=x^2$을 대입하면

$(x^2+5)(x^2+2)=0$

따라서 $x=\pm\sqrt{5}i$ 또는 $x=\pm\sqrt{2}i$이다.

07 답 (1) $x=-1\pm\sqrt{2}i$ 또는 $x=1\pm\sqrt{2}i$

(2) $x=-1\pm i$ 또는 $x=1\pm i$

(3) $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$

풀이 (1) $x^4+2x^2+9=0$에서

$(x^4+6x^2+9)-4x^2=0$

$(x^2+3)^2-(2x)^2=0$

$(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)=0$

따라서 $x=\underline{-1\pm\sqrt{2}i}$ 또는 $x=\underline{1\pm\sqrt{2}i}$이다.

(2) $x^4+4=0$에서

$(x^4+4x^2+4)-4x^2=0$

$(x^2+2)^2-(2x)^2=0$

$(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)=0$

따라서 $x=-1\pm i$ 또는 $x=1\pm i$이다.

(3) $x^4-11x^2+1=0$에서

$(x^4-2x^2+1)-9x^2=0$

$(x^2-1)^2-(3x)^2=0$

$(x^2+3x-1)(x^2-3x-1)=0$

따라서 $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$이다.

08 답 (1) $x=1$ (중근) 또는 $x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

(2) $x=-2\pm\sqrt{3}$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(3) $x=-1$ (사중근)

풀이 (1) $x\neq0$이므로 양변을 x^2으로 나누면

$x^2-5x+8-\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$

$\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+8=0$

이때 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$이므로

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+6=0$

$x+\dfrac{1}{x}=t$로 놓으면

$t^2-5t+6=0$, $(t-2)(t-3)=0$

이므로 $t=2$ 또는 $t=3$이다.

(i) $t=2$일 때

$x+\dfrac{1}{x}=2$, $x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$

따라서 $x=1$ (중근)이다.

(ii) $t=3$일 때

$x+\dfrac{1}{x}=3$, $x^2-3x+1=0$

따라서 $x=\underline{\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}}$이다.

(2) $x\neq0$이므로 양변을 x^2으로 나누면

$x^2+3x-2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$

$\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-2=0$

이때 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$이므로

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-4=0$

$x+\dfrac{1}{x}=t$로 놓으면

$t^2+3t-4=0$, $(t+4)(t-1)=0$

이므로 $t=-4$ 또는 $t=1$이다.

(i) $t=-4$일 때

$x+\dfrac{1}{x}=-4$, $x^2+4x+1=0$

따라서 $x=-2\pm\sqrt{3}$이다.

(ii) $t=1$일 때

$x+\dfrac{1}{x}=1$, $x^2-x+1=0$

따라서 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$이다.

(3) $x\neq0$이므로 양변을 x^2으로 나누면

$x^2+4x+6+\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$

$\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+4\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+6=0$

이때 $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$이므로

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+4\left(x+\frac{1}{x}\right)+4=0$

$x+\frac{1}{x}=t$로 놓으면

$t^2+4t+4=0$

$(t+2)^2=0$이므로 $t=-2$이다.

즉, $x+\frac{1}{x}=-2$이므로

$x^2+2x+1=0$

$(x+1)^2=0$

따라서 $x=-1$ (사중근)이다.

09 답 (1) $\alpha+\beta+\gamma=6$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=4$, $\alpha\beta\gamma=2$

(2) $\alpha+\beta+\gamma=-1$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-1$, $\alpha\beta\gamma=-7$

(3) $\alpha+\beta+\gamma=-4$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-3$, $\alpha\beta\gamma=1$

(4) $\alpha+\beta+\gamma=5$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0$, $\alpha\beta\gamma=-7$

(5) $\alpha+\beta+\gamma=2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{3}{2}$, $\alpha\beta\gamma=4$

(6) $\alpha+\beta+\gamma=-\frac{4}{3}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2$, $\alpha\beta\gamma=\frac{1}{3}$

(7) $\alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-\frac{2}{3}$, $\alpha\beta\gamma=2$

10 답 (1) 3 (2) 2 (3) 1

(4) 7 (5) 2 (6) 5

풀이 (4) $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$

$=(\alpha\beta+\alpha+\beta+1)(\gamma+1)$

$=\alpha\beta\gamma+\alpha\gamma+\beta\gamma+\gamma+\alpha\beta+\alpha+\beta+1$

$=\alpha\beta\gamma+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)+1$

$=\underline{1}+\underline{2}+\underline{3}+1$

$=\underline{7}$

(5) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma}+\frac{\alpha\gamma}{\alpha\beta\gamma}+\frac{\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}$

$=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}$

$=\frac{2}{1}=2$

(6) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$=3^2-2\times2=9-4=5$

11 답 (1) -1 (2) -2 (3) 3

(4) 3 (5) 5 (6) -1

풀이 (4) $(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)$

$=(\alpha\beta-\alpha-\beta+1)(\gamma-1)$

$=\alpha\beta\gamma-\alpha\gamma-\beta\gamma+\gamma-\alpha\beta+\alpha+\beta-1$

$=\alpha\beta\gamma-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)-1$

$=3-(-2)+(-1)-1$

$=3$

(5) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$=(\underline{-1})^2-2\times(-2)$

$=\underline{5}$

(6) $\alpha+\beta+\gamma=-1$이므로

$\alpha+\beta=-1-\gamma$, $\beta+\gamma=-1-\alpha$, $\gamma+\alpha=-1-\beta$이다.

즉,

$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$

$=(-1-\gamma)(-1-\alpha)(-1-\beta)$

$=-(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$

$=-(\alpha\beta+\alpha+\beta+1)(\gamma+1)$

$=-(\alpha\beta\gamma+\alpha\gamma+\beta\gamma+\gamma+\alpha\beta+\alpha+\beta+1)$

$=-\{\alpha\beta\gamma+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)+1\}$

$=-\{3+(-2)+(-1)+1\}$

$=-1$

12 답 (1) $x^3-6x^2+11x-6=0$

(2) $x^3-4x=0$

(3) $x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{9}x+\frac{1}{18}=0$

(4) $x^3+x^2-18x-18=0$

(5) $x^3-7x^2+20x-24=0$

풀이 (1) 주어진 세 수를 α, β, γ라고 하면

$\alpha+\beta+\gamma=6$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=11$

$\alpha\beta\gamma=6$

이므로 구하는 삼차방정식은

$\underline{x^3-6x^2+11x-6=0}$

(2) 주어진 세 수를 α, β, γ라고 하면

$\alpha+\beta+\gamma=0$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-4$

$\alpha\beta\gamma=0$

이므로 구하는 삼차방정식은

$x^3-4x=0$

(3) 주어진 세 수를 α, β, γ라고 하면

$\alpha+\beta+\gamma=\frac{1}{2}$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-\frac{1}{9}$

$\alpha\beta\gamma=-\frac{1}{18}$

이므로 구하는 삼차방정식은

$x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{9}x+\frac{1}{18}=0$

(4) 주어진 세 수를 α, β, γ라고 하면

$\alpha+\beta+\gamma=-1$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-18$

$\alpha\beta\gamma=18$

이므로 구하는 삼차방정식은

$x^3+x^2-18x-18=0$

(5) 주어진 세 수를 α, β, γ라고 하면

$\alpha+\beta+\gamma=7$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=20$

$\alpha\beta\gamma=24$

이므로 구하는 삼차방정식은

$x^3-7x^2+20x-24=0$

13 답 (1) $x^3+2x^2+3x-1=0$

(2) $x^3-5x^2+10x-5=0$

(3) $x^3+3x^2-2x+1=0$

풀이 삼차방정식 $x^3-2x^2+3x+1=0$의 세 근이 α, β, γ이므로

$\alpha+\beta+\gamma=2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$, $\alpha\beta\gamma=-1$

(1) $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$를 세 근으로 하는 삼차방정식은

세 근의 합이 $-(\alpha+\beta+\gamma)=-2$

두 근끼리의 곱의 합이 $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$

세 근의 곱이 $-\alpha\beta\gamma=1$

이므로 구하는 삼차방정식은

$\underline{x^3+2x^2+3x-1=0}$

(2) $\alpha+1$, $\beta+1$, $\gamma+1$을 세 근으로 하는 삼차방정식은

세 근의 합이 $\alpha+\beta+\gamma+3=5$

두 근끼리의 곱의 합이

$(\alpha+1)(\beta+1)+(\beta+1)(\gamma+1)+(\gamma+1)(\alpha+1)$

$=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+2(\alpha+\beta+\gamma)+3$

$=3+2\times2+3=10$

세 근의 곱이

$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$

$=\alpha\beta\gamma+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)+1$

$=-1+3+2+1=5$

이므로 구하는 삼차방정식은

$x^3-5x^2+10x-5=0$

(3) $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$을 세 근으로 하는 삼차방정식은

세 근의 합이

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\frac{3}{-1}=-3$$

두 근끼리의 곱의 합이

$$\frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta}\times\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma}\times\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}$$
$$=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}$$
$$=\frac{2}{-1}=-2$$

세 근의 곱이 $\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=-1$

이므로 구하는 삼차방정식은

$x^3+3x^2-2x+1=0$

14 답 (1) $a=\frac{1}{3}$, $b=-3$ (2) $a=3$, $b=1$

(3) $a=-3$, $b=-5$

풀이 (1) 계수가 유리수이고 한 근이 $-\sqrt{3}$이므로 다른 한 근은 $\sqrt{3}$이다.

이때 나머지 한 근을 α라고 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(-\sqrt{3})+\sqrt{3}=\alpha=-a$ …… ㉠

$-\alpha\sqrt{3}+\alpha\sqrt{3}+(-\sqrt{3})\times\sqrt{3}=-3=b$ …… ㉡

$\alpha\times(-\sqrt{3})\times\sqrt{3}=-3\alpha=1$ …… ㉢

㉡에서 $\underline{b=-3}$, ㉢에서 $\alpha=-\frac{1}{3}$이므로 ㉠에 대입하면

$\underline{a=\frac{1}{3}}$이다.

(2) 계수가 유리수이고 한 근이 $\sqrt{2}-1$이므로 다른 한 근은 $-\sqrt{2}-1$이다.

이때 나머지 한 근을 α라고 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\sqrt{2}-1)+(-\sqrt{2}-1)$

$=-2+\alpha=-a$ …… ㉠

$\alpha(\sqrt{2}-1)+\alpha(-\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}-1)(-\sqrt{2}-1)$

$=-2\alpha-1=b$ …… ㉡

$\alpha(\sqrt{2}-1)(-\sqrt{2}-1)=-\alpha=1$ …… ㉢

㉢에서 $\alpha=-1$이므로 ㉠, ㉡에 대입하면 $a=3$, $b=1$이다.

(3) 계수가 유리수이고 한 근이 $2+\sqrt{5}$이므로 다른 한 근은 $2-\sqrt{5}$이다.

이때 나머지 한 근을 α라고 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(2+\sqrt{5})+(2-\sqrt{5})$

$=\alpha+4=-a$ …… ㉠

$\alpha(2+\sqrt{5})+\alpha(2-\sqrt{5})+(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})$

$=4\alpha-1=b$ …… ㉡

$\alpha(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})=-\alpha=1$ …… ㉢

㉢에서 $\alpha=-1$이므로 ㉠, ㉡에 대입하면 $a=-3$, $b=-5$이다.

15 답 (1) $a=1$, $b=-2$ (2) $a=5$, $b=0$

(3) $a=-11$, $b=52$

풀이 (1) 계수가 실수이고 한 근이 $-i$이므로 다른 한 근은 i이다.

이때 나머지 한 근을 α라고 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(-i)+i=\alpha=2$ …… ㉠

$\alpha\times(-i)+\alpha\times i+(-i)\times i=1=a$ …… ㉡

$\alpha\times(-i)\times i=\alpha=-b$ …… ㉢

㉠에서 $\alpha=2$이므로 ㉢에 대입하면 $b=-2$, ㉡에서 $a=1$이다.

(2) 계수가 실수이고 한 근이 $1+2i$이므로 다른 한 근은 $1-2i$이다.

이때 나머지 한 근을 α라고 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(1+2i)+(1-2i)=\alpha+2=2$ …… ㉠

$\alpha(1+2i)+\alpha(1-2i)+(1+2i)(1-2i)$

$=2\alpha+5=a$ …… ㉡

$\alpha(1+2i)(1-2i)=5\alpha=-b$ …… ㉢

㉠에서 $\alpha=0$이므로 ㉡, ㉢에 대입하면 $a=5$, $b=0$이다.

(3) 계수가 실수이고 한 근이 $2i+3$이므로 다른 한 근은 $-2i+3$이다.

이때 나머지 한 근을 α라고 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(2i+3)+(-2i+3)=\alpha+6=2$ …… ㉠

$\alpha(2i+3)+\alpha(-2i+3)+(2i+3)(-2i+3)$

$=6\alpha+13=a$ …… ㉡

$\alpha(2i+3)(-2i+3)=13\alpha=-b$ …… ㉢

㉠에서 $\alpha=-4$이므로 ㉡, ㉢에 대입하면 $a=-11$, $b=52$이다.

16 답 (1) 1 (2) 0 (3) -1 (4) 1 (5) 1 (6) -1 (7) -1

풀이 (5) $\omega^9=(\omega^3)^3=\underline{1}$

(6) $\omega\neq0$이므로 $\omega^2+\omega+1=0$의 양변을 ω로 나누면

$\omega+1+\dfrac{1}{\omega}=0$

따라서 $\omega+\dfrac{1}{\omega}=-1$이다.

(7) $\omega^{20}+\omega^{10}+\omega^3+\omega+\overline{\omega}$

$=(\omega^3)^6\times\omega^2+(\omega^3)^3\times\omega+\omega^3+\omega+\overline{\omega}$

$=(\omega^2+\omega+1)+\omega+\overline{\omega}$

$=0+(-1)=-1$

17 답 (1) 0 (2) 1 (3) 3 (4) -1 (5) 0 (6) -1 (7) -1

풀이 (3) $3\omega^2-3\omega+6=3(\omega^2-\omega+1)+3=\underline{3}$

(4) $\omega^{15}=(\omega^3)^5=-1$

(5) $1-\omega+\omega^2+\omega^3-\omega^4+\omega^5$

$=1-\omega+\omega^2+\omega^3-(\omega^3\times\omega)+(\omega^3\times\omega^2)$

$=(\omega^2-\omega+1)-(\omega^2-\omega+1)$

$=0$

(6) $\omega\neq0$이므로 $\omega^2-\omega+1=0$의 양변을 ω^2으로 나누면

$1-\dfrac{1}{\omega}+\dfrac{1}{\omega^2}=0$

이때 $\dfrac{1}{\omega}=-\omega^2$이므로 $1+\omega^2+\dfrac{1}{\omega^2}=0$

따라서 $\omega^2+\dfrac{1}{\omega^2}=-1$이다.

(7) $\overline{\omega}=-\omega^2$이므로

$\dfrac{\overline{\omega}}{\omega^2}=\dfrac{-\omega^2}{\omega^2}=-1$

18 답 (1) $x=4$, $y=1$ (2) $x=-2$, $y=-3$ (3) $x=3$, $y=1$

풀이 (1) $\begin{cases}x+y=5 & \cdots\cdots ㉠\\ x-y=3 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

으로 놓고 ㉠+㉡을 하면

$2x=8$에서 $x=\underline{4}$

$x=4$를 ㉠에 대입하면 $y=\underline{1}$이다.

(2) $\begin{cases}y=2x+1 & \cdots\cdots ㉠\\ 4x-y=-5 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

으로 놓고 ㉠을 ㉡에 대입하면

$2x=-4$에서 $x=-2$

$x=-2$를 ㉠에 대입하면 $y=-3$이다.

(3) $\begin{cases}3x+y=10 & \cdots\cdots ㉠\\ 2x-3y=3 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

으로 놓고 $3\times$㉠+㉡을 하면

$11x=33$에서 $x=3$

$x=3$을 ㉠에 대입하면 $y=1$이다.

다른 풀이 $\begin{cases}3x+y=10 & \cdots\cdots ㉠\\ 2x-3y=3 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

으로 놓고 ㉠을 $y=-3x+10$으로 정리하여 ㉡에 대입하면 $11x=33$에서 $x=3$

$x=3$을 $y=-3x+10$에 대입하여 구하면 $y=1$이다.

19 답 (1) 해가 없다. (2) 해가 무수히 많다. (3) 해가 없다.

풀이 (1) $\begin{cases}x+y=5\\ x+y=4\end{cases}$에서 $\dfrac{1}{1}=\dfrac{1}{1}\neq\dfrac{5}{4}$이므로 해가 없다.

(2) $\begin{cases}y=x+2\\ 3x-3y=-6\end{cases}$의 $y=x+2$에서 $x-y=-2$이다.

즉, $\dfrac{1}{3}=\dfrac{-1}{-3}=\dfrac{-2}{-6}$이므로 해가 무수히 많다.

(3) $\begin{cases}x-4y=3\\ 3x-12y=8\end{cases}$에서 $\dfrac{1}{3}=\dfrac{-4}{-12}\neq\dfrac{3}{8}$이므로 해가 없다.

20 답 (1) $\begin{cases}x=1\\ y=3\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x=-3\\ y=-2\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=2\\ y=3\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x=-\dfrac{1}{3}\\ y=-\dfrac{5}{3}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-1\\ y=-1\end{cases}$

(4) $\begin{cases}x=-5\\ y=-9\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=4\\ y=9\end{cases}$

(5) $\begin{cases}x=3\\ y=0\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-3\\ y=3\end{cases}$

풀이 (1) $\begin{cases}y=x+2 & \cdots\cdots ㉠\\ x^2-y^2=-8 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

으로 놓고 ㉠을 ㉡에 대입하면

$x^2-(x+2)^2=-8$

$-4x-4=-8$

즉, $x=1$이므로 ㉠에 대입하면 $y=3$

따라서 연립방정식의 해는 $\begin{cases}x=\underline{1}\\ y=\underline{3}\end{cases}$이다.

(2) $\begin{cases}x-y=-1 & \cdots\cdots ㉠\\ x^2+y^2=13 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

으로 놓고 ㉠을 $x=y-1$로 정리하여 ㉡에 대입하면

$(y-1)^2+y^2=13$

$2y^2-2y-12=0$

$y^2-y-6=0$

$(y+2)(y-3)=0$

즉, $y=-2$ 또는 $y=3$이므로 각각 ㉠에 대입하여 x의 값을 구하면 $y=-2$일 때 $x=-3$, $y=3$일 때 $x=2$

따라서 연립방정식의 해는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$이다.

(3) $\begin{cases} x+y=-2 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ 2x^2+y^2=3 & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$

으로 놓고 ㉠을 $y=-x-2$로 정리하여 ㉡에 대입하면

$2x^2+(-x-2)^2=3$

$3x^2+4x+1=0$

$(3x+1)(x+1)=0$

즉, $x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=-1$이므로 각각 ㉠에 대입하여 y의 값을 구하면 $x=-\frac{1}{3}$일 때 $y=-\frac{5}{3}$, $x=-1$일 때 $y=-1$

따라서 연립방정식의 해는 $\begin{cases} x=-\frac{1}{3} \\ y=-\frac{5}{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$이다.

(4) $\begin{cases} y=2x+1 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ x^2-xy=-20 & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$

으로 놓고 ㉠을 ㉡에 대입하면

$x^2-x(2x+1)=-20$

$x^2+x-20=0$

$(x+5)(x-4)=0$

즉, $x=-5$ 또는 $x=4$이므로 각각 ㉠에 대입하여 y의 값을 구하면 $x=-5$일 때 $y=-9$, $x=4$일 때 $y=9$

따라서 연립방정식의 해는 $\begin{cases} x=-5 \\ y=-9 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=9 \end{cases}$이다.

(5) $\begin{cases} x+2y=3 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ x^2-xy-y^2=9 & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$

으로 놓고 ㉠을 $x=-2y+3$으로 정리하여 ㉡에 대입하면

$(-2y+3)^2-(-2y+3)y-y^2=9$

$4y^2-12y+9+2y^2-3y-y^2=9$

$5y^2-15y=0$

$5y(y-3)=0$

즉, $y=0$ 또는 $y=3$이므로 각각 ㉠에 대입하여 x의 값을 구하면 $y=0$일 때 $x=3$, $y=3$일 때 $x=-3$

따라서 연립방정식의 해는 $\begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=3 \end{cases}$이다.

21 답 (1) $\begin{cases} x=2\sqrt{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{2} \end{cases}$ 또는

$\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x=0 \\ y=\sqrt{6} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=0 \\ y=-\sqrt{6} \end{cases}$ 또는

$\begin{cases} x=-2\sqrt{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{2} \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x=-\sqrt{5}i \\ y=\sqrt{5}i \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{5}i \\ y=-\sqrt{5}i \end{cases}$ 또는

$\begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x=\sqrt{5} \\ y=\sqrt{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{5} \\ y=-\sqrt{5} \end{cases}$ 또는

$\begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-4 \\ y=-1 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-4 \end{cases}$ 또는

$\begin{cases} x=\sqrt{7} \\ y=\sqrt{7} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{7} \\ y=-\sqrt{7} \end{cases}$

풀이 (1) $\begin{cases} x^2-5xy+6y^2=0 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ x^2+y^2=10 & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$

으로 놓고 ㉠의 좌변을 인수분해하면

$(x-2y)(x-3y)=0$

따라서 $x=2y$ 또는 $x=3y$이다.

(i) $x=2y$일 때

$x=2y$를 ㉡에 대입하면

$(2y)^2+y^2=10$

$5y^2=10$

$y^2=2$

따라서 $y=\sqrt{2}$일 때 $x=2\sqrt{2}$, $y=-\sqrt{2}$일 때 $x=-2\sqrt{2}$이다.

(ii) $x=3y$일 때

$x=3y$를 ㉡에 대입하면

$(3y)^2+y^2=10$

$10y^2=10$

$y^2=1$

따라서 $y=1$일 때 $x=3$, $y=-1$일 때 $x=-3$이다.

(i), (ii)에서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=2\sqrt{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases}$

이다.

(2) $\begin{cases} x^2+2xy=0 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ x^2+2y^2=12 & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$

으로 놓고 ㉠의 좌변을 인수분해하면

$x(x+2y)=0$

따라서 $x=0$ 또는 $x=-2y$이다.

(i) $x=0$일 때

$x=0$을 ㉡에 대입하면

$2y^2=12$

$y^2=6$

따라서 $y=\sqrt{6}$일 때 $x=0$, $y=-\sqrt{6}$일 때 $x=0$이다.

(ii) $x=-2y$일 때

$x=-2y$를 ㉡에 대입하면

$(-2y)^2+2y^2=12$

$6y^2=12$

$y^2=2$

따라서 $y=\sqrt{2}$일 때 $x=-2\sqrt{2}$, $y=-\sqrt{2}$일 때 $x=2\sqrt{2}$이다.

(i), (ii)에서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=0 \\ y=\sqrt{6} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=0 \\ y=-\sqrt{6} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2\sqrt{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases}$

또는 $\begin{cases} x=2\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{2} \end{cases}$이다.

(3) $\begin{cases} x^2-y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x^2+4xy-y^2=15 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

으로 놓고 ㉠의 좌변을 인수분해하면

$(x+y)(x-y)=0$

따라서 $x=-y$ 또는 $x=y$이다.

(ⅰ) $x=-y$일 때

$x=-y$를 ㉡에 대입하면

$2y^2-4y^2-y^2=15$

$-3y^2=15$

$y^2=-5$

따라서 $y=\sqrt{5}i$일 때 $x=-\sqrt{5}i$, $y=-\sqrt{5}i$일 때 $x=\sqrt{5}i$이다.

(ⅱ) $x=y$일 때

$x=y$를 ㉡에 대입하면

$2y^2+4y^2-y^2=15$

$5y^2=15$

$y^2=3$

따라서 $y=\sqrt{3}$일 때 $x=\sqrt{3}$, $y=-\sqrt{3}$일 때 $x=-\sqrt{3}$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-\sqrt{5}i \\ y=\sqrt{5}i \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{5}i \\ y=-\sqrt{5}i \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=\sqrt{3} \end{cases}$

또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases}$이다.

(4) $\begin{cases} x^2+3xy+2y^2=30 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-5xy+4y^2=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

으로 놓고 ㉡의 좌변을 인수분해하면

$(x-y)(x-4y)=0$

따라서 $x=y$ 또는 $x=4y$이다.

(ⅰ) $x=y$일 때

$x=y$를 ㉠에 대입하면

$y^2+3y^2+2y^2=30$

$6y^2=30$

$y^2=5$

따라서 $y=\sqrt{5}$일 때 $x=\sqrt{5}$, $y=-\sqrt{5}$일 때 $x=-\sqrt{5}$이다.

(ⅱ) $x=4y$일 때

$x=4y$를 ㉠에 대입하면

$(4y)^2+12y^2+2y^2=30$

$30y^2=30$

$y^2=1$

따라서 $y=1$일 때 $x=4$, $y=-1$일 때 $x=-4$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=\sqrt{5} \\ y=\sqrt{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{5} \\ y=-\sqrt{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-4 \\ y=-1 \end{cases}$이다.

(5) $\begin{cases} 2x^2-3xy+y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x^2+y^2=28 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

으로 놓고 ㉠의 좌변을 인수분해하면

$(2x-y)(x-y)=0$

따라서 $y=2x$ 또는 $y=x$이다.

(ⅰ) $y=2x$일 때

$y=2x$를 ㉡에 대입하면

$3x^2+(2x)^2=28$

$7x^2=28$

$x^2=4$

따라서 $x=2$일 때 $y=4$, $x=-2$일 때 $y=-4$이다.

(ⅱ) $y=x$일 때

$y=x$를 ㉡에 대입하면

$4x^2=28$

$x^2=7$

따라서 $x=\sqrt{7}$일 때 $y=\sqrt{7}$, $x=-\sqrt{7}$일 때 $y=-\sqrt{7}$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{7} \\ y=\sqrt{7} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{7} \\ y=-\sqrt{7} \end{cases}$

이다.

22 답 $a=-7$, $b=-5$ 또는 $a=7$, $b=-5$

풀이 $\begin{cases} x+y=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x^2-y^2=-1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

으로 놓고 ㉠을 $y=-x+5$로 정리하여 ㉡에 대입하면

$2x^2-(-x+5)^2=-1$

$x^2+10x-24=0$

$(x+12)(x-2)=0$

즉, $x=-12$ 또는 $x=2$이므로 각각 ㉠에 대입하여 y의 값을 구하면 $x=-12$일 때 $y=17$, $x=2$일 때 $y=3$이다.

(ⅰ) $x=-12$, $y=17$일 때

$\begin{cases} x=-12 \\ y=17 \end{cases}$을 $\begin{cases} 2x+y=a \\ ax+by=-1 \end{cases}$에 대입하면

$\begin{cases} a=-7 \\ -12a+17b=-1 \end{cases}$

따라서 $a=-7$, $b=-5$이다.

(ⅱ) $x=2$, $y=3$일 때

$\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$을 $\begin{cases} 2x+y=a \\ ax+by=-1 \end{cases}$에 대입하면

$\begin{cases} a=7 \\ 2a+3b=-1 \end{cases}$

따라서 $a=7$, $b=-5$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=-7$, $b=-5$ 또는 $a=7$, $b=-5$이다.

23 답 $a=-3$, $b=7$ 또는 $a=2$, $b=2$

풀이 $\begin{cases} x+y=3 & \cdots\cdots ㉠ \\ ax+y=7 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

$\begin{cases} x+2y=b & \cdots\cdots ㉢ \\ x^2+y^2=17 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$

로 놓고 ㉠을 $y=-x+3$으로 정리하여 ㉣에 대입하면

$x^2+(-x+3)^2=17$, $2x^2-6x-8=0$

$x^2-3x-4=0$, $(x+1)(x-4)=0$

즉, $x=-1$ 또는 $x=4$이므로 각각 ㉠에 대입하여 y의 값을 구하면 $x=-1$일 때 $y=4$, $x=4$일 때 $y=-1$이다.

(i) $x=-1$, $y=4$일 때

㉡에 $x=-1$, $y=4$를 대입하면

$-a+4=7$에서 $a=-3$

㉢에 $x=-1$, $y=4$를 대입하면

$-1+8=b$에서 $b=7$

(ii) $x=4$, $y=-1$일 때

㉡에 $x=4$, $y=-1$을 대입하면

$4a-1=7$에서 $a=2$

㉢에 $x=4$, $y=-1$을 대입하면

$4+2\times(-1)=b$에서 $b=2$

(i), (ii)에서 $a=-3$, $b=7$ 또는 $a=2$, $b=2$이다.

24 답 (1) $\pm2\sqrt{5}$ (2) $\frac{4}{5}$

풀이 (1) $\begin{cases} x-y=a & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=10 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

으로 놓고 ㉠을 $y=x-a$로 정리하여 ㉡에 대입하면

$x^2+(x-a)^2=10$

$2x^2-2ax+a^2-10=0$

이때 오직 한 쌍의 해를 가지려면 위의 이차방정식이 중근을 가져야 한다.

$2x^2-2ax+a^2-10=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(\underline{-a})^2-2\times(a^2-10)$

$=\underline{-a^2+20}=0$

$a^2=20$에서 $a=\underline{\pm2\sqrt{5}}$이다.

(2) $\begin{cases} 2x+y=-2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=a & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

으로 놓고 ㉠을 $y=-2x-2$로 정리하여 ㉡에 대입하면

$x^2+(-2x-2)^2=a$

$5x^2+8x+4-a=0$

이때 오직 한 쌍의 해를 가지려면 위의 이차방정식이 중근을 가져야 한다.

$5x^2+8x+4-a=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=4^2-5\times(4-a)=5a-4=0$

따라서 $a=\frac{4}{5}$이다.

25 답 (1) $\begin{cases} x=-4 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-4 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x=-6 \\ y=9 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=9 \\ y=-6 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=-5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-5 \\ y=-3 \end{cases}$

풀이 (1) $x+y=-2$, $xy=-8$이므로 x, y를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 t에 대한 이차방정식은

$t^2+2t-8=0$

으로 놓을 수 있다.

$t^2+2t-8=0$에서

$(t+4)(t-2)=0$

이므로 $t=-4$ 또는 $t=2$이다.

따라서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-4 \\ y=\underline{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=\underline{-4} \end{cases}$이다.

(2) $x+y=5$, $xy=6$이므로 x, y를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 t에 대한 이차방정식은

$t^2-5t+6=0$

으로 놓을 수 있다.

$t^2-5t+6=0$에서

$(t-2)(t-3)=0$

이므로 $t=2$ 또는 $t=3$이다.

따라서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$이다.

(3) $x+y=3$, $xy=-54$이므로 x, y를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 t에 대한 이차방정식은

$t^2-3t-54=0$

으로 놓을 수 있다.

$t^2-3t-54=0$에서

$(t+6)(t-9)=0$

이므로 $t=-6$ 또는 $t=9$이다.

따라서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-6 \\ y=9 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=9 \\ y=-6 \end{cases}$이다.

(4) $x+y=a$, $xy=b$로 놓으면

$x^2+y^2=a^2-2b$

이므로 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} b=15 & \cdots\cdots ㉠ \\ a^2-2b=34 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

으로 놓을 수 있다.

㉠을 ㉡에 대입하면 $a^2=64$에서 $a=\pm8$이므로

$a=8$일 때 $b=15$, $a=-8$일 때 $b=15$이다.

(i) $a=8$, $b=15$일 때

$x+y=8$, $xy=15$이므로 x, y를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 t에 대한 이차방정식은

$t^2-8t+15=0$

으로 놓을 수 있다.

$t^2-8t+15=0$에서

$(t-3)(t-5)=0$

이므로 $t=3$ 또는 $t=5$이다.

따라서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases}$이다.

(ⅱ) $a=-8$, $b=15$일 때

$x+y=-8$, $xy=15$이므로 x, y를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 t에 대한 이차방정식은

$t^2+8t+15=0$

으로 놓을 수 있다.

$t^2+8t+15=0$에서

$(t+3)(t+5)=0$

이므로 $t=-3$ 또는 $t=-5$이다.

따라서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-3 \\ y=-5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-5 \\ y=-3 \end{cases}$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=-5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-5 \\ y=-3 \end{cases}$이다.

26 답 (1) -2 또는 1 (2) 0 또는 -4

풀이 (1) $x+y=2a-2$, $xy=2a^2-a-1$이므로 x, y를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 t에 대한 이차방정식은

$t^2-2(a-1)t+2a^2-a-1=0$ …… ㉠

으로 놓을 수 있다.

이때 오직 한 쌍의 해를 가지려면 이차방정식 ㉠이 중근을 가져야 한다.

이차방정식 ㉠의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a-1)\}^2-1\times(2a^2-a-1)$

$=-a^2-a+2=0$

$a^2+a-2=0$에서 $(a+2)(a-1)=0$이므로

$a=-2$ 또는 $a=1$이다.

(2) $x+y=4a+2$, $xy=3a^2+1$이므로 x, y를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 t에 대한 이차방정식은

$t^2-2(2a+1)t+3a^2+1=0$ …… ㉠

으로 놓을 수 있다.

이때 오직 한 쌍의 해를 가지려면 이차방정식 ㉠이 중근을 가져야 한다.

이차방정식 ㉠의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=\{-(2a+1)\}^2-1\times(3a^2+1)$

$=a^2+4a=0$

$a^2+4a=0$에서 $a(a+4)=0$이므로

$a=0$ 또는 $a=-4$이다.

27 답 (1) $\begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=0 \\ y=-4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x=6 \\ y=7 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=8 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-8 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-4 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x=-1 \\ y=8 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=0 \\ y=6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=0 \end{cases}$

또는 $\begin{cases} x=-4 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-6 \\ y=3 \end{cases}$

풀이 (1) $xy+2x-y-2=2$에서

$x(y+2)-(y+2)=2$

$(x-1)(y+2)=2$

1 2 ➡ $x-1=1$, $y+2=2$이므로 $x=2$, $y=0$

2 1 ➡ $x-1=2$, $y+2=1$이므로 $x=3$, $y=-1$

-1 -2 ➡ $x-1=-1$, $y+2=-2$이므로 $x=0$, $y=-4$

-2 -1 ➡ $x-1=-2$, $y+2=-1$이므로 $x=-1$, $y=-3$

따라서 $\begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=0 \\ y=-4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \end{cases}$

이다.

(2) $xy-6x-5y+29=0$에서

$x(y-6)-5(y-6)=1$

$(x-5)(y-6)=1$

1 1 ➡ $x-5=1$, $y-6=1$이므로 $x=6$, $y=7$

-1 -1 ➡ $x-5=-1$, $y-6=-1$이므로 $x=4$, $y=5$

따라서 $\begin{cases} x=6 \\ y=7 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases}$이다.

(3) $xy+3x-3y-6=8$에서

$x(y+3)-3(y+3)=5$

$(x-3)(y+3)=5$

1 5 ➡ $x-3=1$, $y+3=5$이므로 $x=4$, $y=2$이다.

5 1 ➡ $x-3=5$, $y+3=1$이므로 $x=8$, $y=-2$이다.

-1 -5 ➡ $x-3=-1$, $y+3=-5$이므로 $x=2$, $y=-8$이다.

-5 -1 ➡ $x-3=-5$, $y+3=-1$이므로 $x=-2$, $y=-4$이다.

따라서 $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=8 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-8 \end{cases}$

또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-4 \end{cases}$이다.

(4) $xy-4x+2y-12=0$에서

$x(y-4)+2(y-4)=4$

$(x+2)(y-4)=4$

1 4 ➡ $x+2=1$, $y-4=4$이므로 $x=-1$, $y=8$

2 2 ➡ $x+2=2$, $y-4=2$이므로 $x=0$, $y=6$

4 1 ➡ $x+2=4$, $y-4=1$이므로 $x=2$, $y=5$

-1 -4 ➡ $x+2=-1$, $y-4=-4$이므로 $x=-3$, $y=0$

-2 -2 ➡ $x+2=-2$, $y-4=-2$이므로

$x=-4$, $y=2$

-4 -1 ➡ $x+2=-4$, $y-4=-1$이므로

$x=-6$, $y=3$

따라서 $\begin{cases} x=-1 \\ y=8 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=0 \\ y=6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases}$ 또는

$\begin{cases} x=-3 \\ y=0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-4 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-6 \\ y=3 \end{cases}$ 이다.

28 답 (1) 0 또는 4 (2) $-\frac{1}{2}$ 또는 1 또는 $\frac{5}{2}$

풀이 (1) $x^2-ax+a=0$의 정수인 두 근을 α, β $(\alpha \geq \beta)$라고 하면 $\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=a$이다.

이때 $\alpha\beta-(\alpha+\beta)=a-a=0$이므로

$\alpha\beta-\alpha-\beta=0$

$\alpha(\beta-1)-(\beta-1)=1$

$(\alpha-1)(\beta-1)=1$

1 1 ➡ $\alpha-1=1$, $\beta-1=1$이므로

$\alpha=2$, $\beta=2$

-1 -1 ➡ $\alpha-1=-1$, $\beta-1=-1$이므로

$\alpha=0$, $\beta=0$

(i) $\alpha=2$, $\beta=2$일 때

$\alpha+\beta=a$에 $\alpha=2$, $\beta=2$를 대입하면

$a=4$

(ii) $\alpha=0$, $\beta=0$일 때

$\alpha+\beta=a$에 $\alpha=0$, $\beta=0$을 대입하면

$a=0$

(i), (ii)에서 $a=\underline{4}$ 또는 $a=\underline{0}$이다.

(2) $x^2-2ax+2a-5=0$의 정수인 두 근을 α, β $(\alpha \geq \beta)$라고 하면 $\alpha+\beta=2a$, $\alpha\beta=2a-5$이다.

이때 $\alpha\beta-(\alpha+\beta)=2a-5-2a=-5$이므로

$\alpha\beta-\alpha-\beta=-5$

$\alpha(\beta-1)-(\beta-1)=-4$

$(\alpha-1)(\beta-1)=-4$

1 -4 ➡ $\alpha-1=1$, $\beta-1=-4$이므로

$\alpha=2$, $\beta=-3$

2 -2 ➡ $\alpha-1=2$, $\beta-1=-2$이므로

$\alpha=3$, $\beta=-1$

4 -1 ➡ $\alpha-1=4$, $\beta-1=-1$이므로

$\alpha=5$, $\beta=0$

(i) $\alpha=2$, $\beta=-3$일 때

$\alpha+\beta=2a$에 $\alpha=2$, $\beta=-3$을 대입하면 $a=-\frac{1}{2}$

(ii) $\alpha=3$, $\beta=-1$일 때

$\alpha+\beta=2a$에 $\alpha=3$, $\beta=-1$을 대입하면 $a=1$

(iii) $\alpha=5$, $\beta=0$일 때

$\alpha+\beta=2a$에 $\alpha=5$, $\beta=0$을 대입하면 $a=\frac{5}{2}$

(i), (ii), (iii)에서 $a=-\frac{1}{2}$ 또는 $a=1$ 또는 $a=\frac{5}{2}$이다.

29 답 (1) $x=-3$, $y=1$ (2) $x=-4$, $y=2$

(3) $x=3$, $y=\frac{3}{2}$ (4) $x=2$, $y=-7$

풀이 (1) $x^2+y^2+6x-2y+10=0$에서

$(x^2+6x+9)+(y^2-2y+1)=0$

$(x+3)^2+(y-1)^2=0$

이때 x, y가 실수이므로

$x+3=0$, $y-1=0$

따라서 $x=\underline{-3}$, $y=\underline{1}$이다.

(2) $x^2+5y^2+4xy-4y+4=0$에서

$(x^2+4xy+4y^2)+(y^2-4y+4)=0$

$(x+2y)^2+(y-2)^2=0$

이때 x, y가 실수이므로

$x+2y=0$, $y-2=0$

따라서 $x=-4$, $y=2$이다.

(3) $2x^2+4y^2-6x-4xy+9=0$에서

$(x^2-4xy+4y^2)+(x^2-6x+9)=0$

$(x-2y)^2+(x-3)^2=0$

이때 x, y가 실수이므로

$x-2y=0$, $x-3=0$

따라서 $x=3$, $y=\frac{3}{2}$이다.

(4) y에 대한 내림차순으로 정리하면

$y^2+2xy+10y+2x^2+6x+29=0$

$y^2+2(x+5)y+2x^2+6x+29=0$

$y^2+2(x+5)y+(x^2+10x+25)+(x^2-4x+4)=0$

$\{y^2+2(x+5)y+(x+5)^2\}+(x^2-4x+4)=0$

$(y+x+5)^2+(x-2)^2=0$

이때 x, y는 실수이므로

$x+y+5=0$, $x-2=0$

따라서 $x=2$, $y=-7$이다.

다른 풀이 y에 대한 내림차순으로 정리하면

$y^2+2(x+5)y+2x^2+6x+29=0$ ⋯⋯ ㉠

y가 실수이므로 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(x+5)^2-1\times(2x^2+6x+29)\geq 0$

이어야 한다.

$x^2+10x+25-2x^2-6x-29\geq 0$

$-x^2+4x-4\geq 0$

$x^2-4x+4\leq 0$, $(x-2)^2\leq 0$

이때 x는 실수이므로 $x-2=0$에서

$x=2$

$x=2$를 ㉠에 대입하면

$y^2+14y+49=0$, $(y+7)^2=0$

$y=-7$

따라서 $x=2$, $y=-7$이다.

01 답 $x=-3$ 또는 $x=\frac{3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

풀이 $x^3+27=0$에서

$(x+3)(x^2-3x+9)=0$

이므로 $x=-3$ 또는 $x=\frac{3\pm3\sqrt{3}i}{2}$이다.

02 답 $x=1$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=2$

풀이 $f(x)=2x^4-3x^3-4x^2+3x+2$로 놓으면

$f(1)=2-3-4+3+2=0$이므로 조립제법을 이용하여

$f(x)$를 $x-1$로 나누면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 2 & -3 & -4 & 3 & 2 \\ & & 2 & -1 & -5 & -2 \\ \hline & 2 & -1 & -5 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

따라서

$f(x)=(x-1)(2x^3-x^2-5x-2)$

이고, $g(x)=2x^3-x^2-5x-2$로 놓으면

$g(-1)=-2-1+5-2=0$이므로 조립제법을 이용하여

$g(x)$를 $x+1$로 나누면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & -1 & -5 & -2 \\ & & -2 & 3 & 2 \\ \hline & 2 & -3 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

따라서

$g(x)=(x+1)(2x^2-3x-2)$

$\quad=(x+1)(2x+1)(x-2)$

에서 주어진 방정식은

$(x-1)(x+1)(2x+1)(x-2)=0$

이므로 $x=1$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=2$이다.

03 답 5

풀이 $\{(x+1)(x+4)\}\{(x+2)(x+3)\}-24=0$

$(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-24=0$

$x^2+5x=t$로 놓으면

$(t+4)(t+6)-24=0$

$t^2+10t=0$

$t(t+10)=0$

위의 식에 $t=x^2+5x$를 대입하면

$(x^2+5x)(x^2+5x+10)=0$

즉, $x(x+5)(x^2+5x+10)=0$과 같이 나타낼 수 있다.

이때 $x^2+5x+10=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=5^2-4\times1\times10=-15<0$이므로 α, β는

$x^2+5x+10=0$의 두 근이다.

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-5$, $\alpha\beta=10$이므로

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$\quad=(-5)^2-2\times10=5$

04 답 $\alpha+\beta+\gamma=\frac{5}{2}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2$, $\alpha\beta\gamma=5$

05 답 1

풀이 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-a$이므로

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$\quad=2^2-2\times(-a)$

$\quad=4+2a=6$

즉, $2a=2$이므로 $a=1$이다.

06 답 -1

풀이 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-1$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2$, $\alpha\beta\gamma=-2$이므로

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$\quad=(-1)^2-2\times2=-3$

따라서

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$

$=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma$

$=(-1)\times(-3-2)+3\times(-2)$

$=-1$

07 답 $x^3+2x^2+5x+3=0$

풀이 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=1$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=4$, $\alpha\beta\gamma=1$

$\alpha-1$, $\beta-1$, $\gamma-1$을 세 근으로 하는 삼차방정식은

세 근의 합이 $\alpha+\beta+\gamma-3=-2$,

두 근끼리의 곱의 합이

$(\alpha-1)(\beta-1)+(\beta-1)(\gamma-1)+(\gamma-1)(\alpha-1)$

$=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-2(\alpha+\beta+\gamma)+3$

$=4-2\times1+3=5$,

세 근의 곱이

$(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)$

$=\alpha\beta\gamma-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)-1$

$=1-4+1-1=-3$

이므로 구하는 삼차방정식은

$x^3+2x^2+5x+3=0$

08 답 $x=-1$ 또는 $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

풀이 계수가 유리수이고 한 근이 $\sqrt{2}$이므로 다른 한 근은 $-\sqrt{2}$이다.

이때 나머지 한 근을 α라고 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=\alpha=-2a$ …… ㉠

$\alpha\sqrt{2}-\alpha\sqrt{2}+\sqrt{2}\times(-\sqrt{2})=-2=-b$ …… ㉡

$\alpha\times\sqrt{2}\times(-\sqrt{2})=-2\alpha=-8$ …… ㉢

㉡에서 $b=2$, ㉢에서 $\alpha=4$이므로 ㉠에 대입하면 $a=-2$이다.

따라서 $x^3+bx^2-ax+1=0$은 $x^3+2x^2+2x+1=0$이다.

$f(x)=x^3+2x^2+2x+1$로 놓으면

$f(-1)=-1+2-2+1=0$이므로 조립제법을 이용하여

$f(x)$를 $x+1$로 나누면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ & & -1 & -1 & -1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

따라서 $f(x)=(x+1)(x^2+x+1)$이므로 주어진 방정식

$(x+1)(x^2+x+1)=0$의 해는 $x=-1$ 또는

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$이다.

09 답 -1

풀이 ω는 $x^2-x+1=0$의 근이므로

$\omega^2-\omega+1=0$

$1-\omega=-\omega^2$

따라서 $\dfrac{1-\omega}{\omega^2}=\dfrac{-\omega^2}{\omega^2}=-1$이다.

다른 풀이 $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이므로 $\overline{\omega}^2-\overline{\omega}+1=0$이 성립한다.

$\overline{\omega}\neq0$이므로 $\overline{\omega}^2-\overline{\omega}+1=0$의 양변을 $\overline{\omega}^2$으로 나누면

$1-\dfrac{1}{\overline{\omega}}+\dfrac{1}{\overline{\omega}^2}=0$

이때 $\overline{\omega}=-\omega^2$이므로

$1+\dfrac{1}{\omega^2}+\dfrac{1}{\omega^4}=0$

$1+\dfrac{1}{\omega^2}-\dfrac{1}{\omega}=0$

$\dfrac{1}{\omega^2}-\dfrac{1}{\omega}=-1$

따라서 $\dfrac{1-\omega}{\omega^2}=-1$이다.

10 답 $a=-2,\ b=6$

풀이 연립방정식의 해가 무수히 많으려면

$\dfrac{1}{2}=\dfrac{-1}{a}=\dfrac{3}{b}$

이어야 한다.

따라서 $a=-2,\ b=6$이다.

11 답 $\dfrac{5}{2}$

풀이 $\begin{cases} 2x^2-2y^2+x+y=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x^2+xy-2y^2=-1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

으로 놓고 ㉠의 좌변을 인수분해하면

$2(x^2-y^2)+(x+y)=0$

$2(x+y)(x-y)+(x+y)=0$

$(x+y)\{2(x-y)+1\}=0$

$(x+y)(2x-2y+1)=0$

따라서 $y=-x$ 또는 $y=x+\dfrac{1}{2}$이다.

(i) $y=-x$일 때

$y=-x$를 ㉡에 대입하면

$2x^2-x^2-2x^2=-1$

$x^2=1$

따라서 $x=1$일 때 $y=-1$, $x=-1$일 때 $y=1$이다.

(ii) $y=x+\dfrac{1}{2}$일 때

$y=x+\dfrac{1}{2}$을 ㉡에 대입하면

$2x^2+x\left(x+\dfrac{1}{2}\right)-2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2=-1$

$2x^2+x^2+\dfrac{1}{2}x-2\left(x^2+x+\dfrac{1}{4}\right)=-1$

$x^2-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2}=0$

$2x^2-3x+1=0$

$(2x-1)(x-1)=0$

따라서 $x=\dfrac{1}{2}$일 때 $y=1$, $x=1$일 때 $y=\dfrac{3}{2}$이다.

(i), (ii)에서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

이므로 $\alpha+\beta$의 최댓값은 $\dfrac{5}{2}$이다.

12 답 -2

풀이 $\begin{cases} x+y=b & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-y^2=-21 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

$\begin{cases} ax^2+y^2=5 & \cdots\cdots ㉢ \\ x+y=3 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$

로 놓고 ㉣을 $y=-x+3$으로 정리하여 ㉡에 대입하면

$x^2-(-x+3)^2=-21$

$6x+12=0$

즉, $x=-2$이므로 ㉣에 대입하면 $y=5$이다.

$x=-2,\ y=5$를 ㉠에 대입하면 $-2+5=b$에서

$b=3$

$x=-2,\ y=5$를 ㉢에 대입하면 $4a+25=5$에서

$a=-5$

따라서 $a=-5,\ b=3$이므로 $a+b=-2$이다.

13 답 $\pm3\sqrt{5}$

풀이 $\begin{cases} -2x+y=a & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=9 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

으로 놓고 ㉠을 $y=2x+a$로 정리하여 ㉡에 대입하면

$x^2+(2x+a)^2=9$

$5x^2+4ax+a^2-9=0$ $\cdots\cdots$ ㉢

이때 오직 한 쌍의 해를 가지려면 이차방정식 ㉢이 중근을 가져야 한다.

이차방정식 ㉢의 판별식을 D라고 하면

$$\frac{D}{4}=(2a)^2-5(a^2-9)$$
$$=-a^2+45=0$$
$a^2=45$에서 $a=\pm3\sqrt{5}$이다.

14 답 $\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}$

풀이 $x+y=a$, $xy=b$로 놓으면 $x^2+y^2=a^2-2b$이므로 주어진 연립방정식은

$\begin{cases}a^2-2b=13 \cdots\cdots ㉠\\a+b=11 \quad\cdots\cdots ㉡\end{cases}$

으로 놓을 수 있다.

㉡을 $b=11-a$로 정리하여 ㉠에 대입하면

$a^2-2(11-a)=13$

$a^2+2a-35=0$

$(a+7)(a-5)=0$

즉, $a=-7$ 또는 $a=5$이므로 ㉡에 대입하여 b의 값을 구하면 $a=-7$일 때 $b=18$, $a=5$일 때 $b=6$이다.

(i) $a=-7$, $b=18$일 때

$x+y=-7$, $xy=18$이므로 x, y를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 t에 대한 이차방정식은

$t^2+7t+18=0$

으로 놓을 수 있다.

이때 $t^2+7t+18=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=7^2-4\times18=-23<0$이므로 실근을 갖지 않는다.

(ii) $a=5$, $b=6$일 때

$x+y=5$, $xy=6$이므로 x, y를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 t에 대한 이차방정식은

$t^2-5t+6=0$

으로 놓을 수 있다.

$t^2-5t+6=0$

$(t-2)(t-3)=0$

이므로 $t=2$ 또는 $t=3$이다.

따라서 연립방정식의 해는 $\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}$이다.

(i), (ii)에서 연립방정식의 실근은 $\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}$이다.

15 답 $\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=0\\y=-1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-2\\y=5\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-4\\y=3\end{cases}$

풀이 $xy-2x+y+1=0$에서

$x(y-2)+(y-2)=-3$

$(x+1)(y-2)=-3$

3 $\quad$ -1 ➡ $x+1=3$, $y-2=-1$이므로
$x=2$, $y=1$

1 $\quad$ -3 ➡ $x+1=1$, $y-2=-3$이므로
$x=0$, $y=-1$

-1 $\quad$ 3 ➡ $x+1=-1$, $y-2=3$이므로
$x=-2$, $y=5$

-3 $\quad$ 1 ➡ $x+1=-3$, $y-2=1$이므로
$x=-4$, $y=3$

따라서 $\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=0\\y=-1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-2\\y=5\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-4\\y=3\end{cases}$ 이다.

16 답 $x=\frac{3}{2}$, $y=-1$

풀이 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$4x^2+4xy-8x+2y^2-2y+5=0$

$4x^2+4(y-2)x+2y^2-2y+5=0$

$4x^2+4(y-2)x+(y^2-4y+4)+y^2+2y+1=0$

$\{(2x)^2+2(y-2)\times2x+(y-2)^2\}+(y^2+2y+1)=0$

$(2x+y-2)^2+(y+1)^2=0$

이때 x, y는 실수이므로

$2x+y-2=0$, $y+1=0$

따라서 $x=\frac{3}{2}$, $y=-1$이다.

다른 풀이 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$4x^2+4(y-2)x+2y^2-2y+5=0 \quad\cdots\cdots ㉠$

x가 실수이므로 위의 방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=\{2(y-2)\}^2-4\times(2y^2-2y+5)\ge0$

이어야 한다.

$4y^2-16y+16-8y^2+8y-20\ge0$

$-4y^2-8y-4\ge0$

$y^2+2y+1\le0$, $(y+1)^2\le0$

이때 y는 실수이므로 $y+1=0$에서

$y=-1$

$y=-1$을 ㉠에 대입하면

$4x^2-12x+9=0$

$(2x-3)^2=0$

$x=\frac{3}{2}$

따라서 $x=\frac{3}{2}$, $y=-1$이다.

01 답 (1) $<$ (2) $<$ (3) $>$ (4) $<$ (5) $>$

02 답 (1) $5\le 2x+3\le 13$

(2) $-\frac{5}{2}\le -\frac{x}{2}\le -\frac{1}{2}$

(3) $\frac{1}{10}\le \frac{1}{x+5}\le \frac{1}{6}$

풀이 (1) $1\le x\le 5$의 각 변에 2를 곱하면

$2\le 2x\le 10$

위의 부등식의 각 변에 3을 더하면

$\underline{5}\le 2x+3\le \underline{13}$

(2) $1\le x\le 5$의 각 변을 -2로 나누면

$-\frac{1}{2}\ge -\frac{x}{2}\ge -\frac{5}{2}$

$\underline{-\frac{5}{2}}\le -\frac{x}{2}\le \underline{-\frac{1}{2}}$

(3) $1\le x\le 5$의 각 변에 5를 더하면

$6\le x+5\le 10$

위의 부등식의 각 변의 역수를 취하면

$\frac{1}{6}\ge \frac{1}{x+5}\ge \frac{1}{10}$

$\underline{\frac{1}{10}}\le \frac{1}{x+5}\le \underline{\frac{1}{6}}$

03 답 (1) $1\le x+y\le 5$ (2) $-5\le x-y\le -1$

(3) $-4\le xy\le 4$ (4) $-\frac{1}{2}\le \frac{x}{y}\le \frac{1}{2}$

풀이 (1) $-1+2\le x+y\le 1+4$이므로

$\underline{1}\le x+y\le \underline{5}$

(2) $-1-4\le x-y\le 1-2$이므로

$-5\le x-y\le -1$

(3) x의 최솟값, 최댓값을 y의 최솟값, 최댓값과 각각 곱하면

$-2,\ -4,\ 2,\ 4$

이므로 xy의 최솟값은 -4, 최댓값은 4이다.

따라서 $-4\le xy\le 4$이다.

(4) x의 최솟값, 최댓값을 y의 최솟값, 최댓값으로 각각 나누면

$-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4}$

이므로 $\frac{x}{y}$의 최솟값은 $-\frac{1}{2}$, 최댓값은 $\frac{1}{2}$이다.

따라서 $-\frac{1}{2}\le \frac{x}{y}\le \frac{1}{2}$이다.

다른 풀이 $\frac{1}{4}\le \frac{1}{y}\le \frac{1}{2}$이므로 x의 최솟값과 최댓값을 $\frac{1}{y}$의 최솟값과 최댓값과 각각 곱하면

$-\frac{1}{4},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2}$

이므로 $\frac{x}{y}$의 최솟값은 $-\frac{1}{2}$, 최댓값은 $\frac{1}{2}$이다.

따라서 $-\frac{1}{2}\le \frac{x}{y}\le \frac{1}{2}$이다.

04 답 (1) $-8\le 2x+y\le 3$ (2) $-15\le 3x-2y\le 4$

(3) $-6\le -xy\le 9$ (4) $-\frac{3}{4}\le \frac{x}{y+6}\le 0$

풀이 (1) $-6\le 2x\le 0$이므로

$-6+(-2)\le 2x+y\le 0+3$

따라서 $\underline{-8}\le 2x+y\le \underline{3}$이다.

(2) $-9\le 3x\le 0$이고 $-4\le 2y\le 6$이므로

$-9-6\le 3x-2y\le 0-(-4)$

따라서 $-15\le 3x-2y\le 4$이다.

(3) x의 최솟값과 최댓값을 y의 최솟값과 최댓값과 각각 곱하면

$6,\ -9,\ 0,\ 0$

이므로 xy의 최솟값은 -9, 최댓값은 6이다.

따라서 $-9\le xy\le 6$이므로

$-6\le -xy\le 9$이다.

(4) $4\le y+6\le 9$이므로 x의 최솟값과 최댓값을 $y+6$의 최솟값과 최댓값으로 각각 나누면

$-\frac{3}{4},\ -\frac{1}{3},\ 0,\ 0$

이므로 $\frac{x}{y+6}$의 최솟값은 $-\frac{3}{4}$, 최댓값은 0이다.

따라서 $-\frac{3}{4}\le \frac{x}{y+6}\le 0$이다.

05 답 (1) $x\ge 1$ (2) $x\ge 11$ (3) 해는 모든 실수

(4) $x\ge -2$ (5) $x>\frac{5}{2}$ (6) 해는 없다.

풀이 (1) $4x+1\ge 5$에서

$4x\ge 4$

$x\ge \underline{1}$

(2) $x+3\le 2x-8$에서

$-x\le -11$

$x\ge 11$

(3) $-(x-2)<3-x$에서 $-x+2<3-x$

$0\times x<1$

따라서 해는 모든 실수이다.

(4) $5(x+2)-1\ge x-1+2(x+3)$에서

$5x+10-1\ge 3x+5$

$2x\ge -4$

$x\ge -2$

(5) $\frac{3x+1}{2}>\frac{x}{2}+3$에서 양변에 2를 곱하면

$3x+1>x+6$

$2x>5$

$x>\frac{5}{2}$

(6) $x+\frac{5-x}{3}\le \frac{2}{3}x-\frac{1}{6}$에서 양변에 6을 곱하면

$6x+2(5-x)\le 4x-1$

$4x+10\le 4x-1$

$0\times x\le -11$

따라서 해는 없다.

06 답 (1) $a>0$일 때 $x\le\frac{1}{a}$

$a<0$일 때 $x\ge\frac{1}{a}$

$a=0$일 때 해는 모든 실수

(2) $a>0$일 때 $x>\frac{3a-1}{a}$

$a<0$일 때 $x<\frac{3a-1}{a}$

$a=0$일 때 해는 모든 실수

(3) $a>0$일 때 $x>\frac{1}{a}$

$a<0$일 때 $x<\frac{1}{a}$

$a=0$일 때 해는 없다.

(4) $a>-1$일 때 $x<2a-6$

$a<-1$일 때 $x>2a-6$

$a=-1$일 때 해는 없다.

(5) $a>2$일 때 $x\ge a+2$

$a<2$일 때 $x\le a+2$

$a=2$일 때 해는 모든 실수

(6) $a>0$일 때 $x\le5$

$a<0$일 때 $x\ge5$

$a=0$일 때 해는 모든 실수

풀이 (1) $ax\le1$에서

(i) $a>0$일 때 $x\le\frac{1}{a}$

(ii) $a<0$일 때 $x\ge\frac{1}{a}$

(iii) $a=0$일 때 $0\le1$이므로 해는 모든 실수이다.

(2) $a(x-1)>2a-1$에서

$ax-a>2a-1$

$ax>3a-1$

(i) $a>0$일 때 $x>\frac{3a-1}{a}$

(ii) $a<0$일 때 $x<\frac{3a-1}{a}$

(iii) $a=0$일 때 $0>-1$이므로 해는 모든 실수이다.

(3) $a(2x-1)+4>-a+6$에서

$2ax-a+4>-a+6$

$ax>1$

(i) $a>0$일 때 $x>\frac{1}{a}$

(ii) $a<0$일 때 $x<\frac{1}{a}$

(iii) $a=0$일 때 $0>1$이므로 해는 없다.

(4) $ax+x<2a^2-4a-6$에서

$(a+1)x<2(a-3)(a+1)$

(i) $a>-1$일 때 $x<2a-6$

(ii) $a<-1$일 때 $x>2a-6$

(iii) $a=-1$일 때 $0<0$이므로 해는 없다.

(5) $a(x-a)+4\ge2x$에서

$ax-a^2+4\ge2x$

$ax-2x\ge a^2-4$

$(a-2)x\ge(a+2)(a-2)$

(i) $a>2$일 때 $x\ge a+2$

(ii) $a<2$일 때 $x\le a+2$

(iii) $a=2$일 때 $0\ge0$이므로 해는 모든 실수이다.

(6) $ax+2(6-a)\le3(a+4)$에서

$ax+12-2a\le3a+12$

$ax\le5a$

(i) $a>0$일 때 $x\le5$

(ii) $a<0$일 때 $x\ge5$

(iii) $a=0$일 때 $0\le0$이므로 해는 모든 실수이다.

07 답 (1) $x>1$ (2) $1<x<4$ (3) $x\le2$

(4) $-1<x\le2$ (5) $-3<x<4$

풀이 (1) $\begin{cases}3x+5>8 & \cdots\cdots ㉠\\ x\ge-2 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

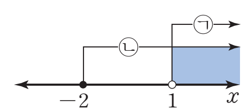
으로 놓으면

㉠에서 $3x>3$

$x>1$

㉡에서 $x\ge-2$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립일차부등식의 해는 $x>1$이다.

(2) $\begin{cases}2x+3<11 & \cdots\cdots ㉠\\ 4x-1>3 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

으로 놓으면

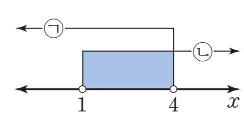
㉠에서 $2x<8$

$x<4$

㉡에서 $4x>4$

$x>1$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립일차부등식의 해는 $1<x<4$이다.

(3) $\begin{cases}-x\ge-12+3x & \cdots\cdots ㉠\\ 2(x-1)\le x & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

으로 놓으면

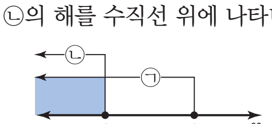
㉠에서 $-4x\ge-12$

$x\le3$

㉡에서 $2x-2\le x$

$x\le2$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립일차부등식의 해는 $x\le2$이다.

(4) $\begin{cases} -x < x+2 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3(x-2) \le 2(x-2) & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

으로 놓으면

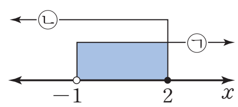
㉠에서 $-2x < 2$

$x > -1$

㉡에서 $3x-6 \le 2x-4$

$x \le 2$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립일차부등식의 해는 $-1 < x \le 2$이다.

(5) $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x < 2 & \cdots\cdots ㉠ \\ -0.1x-0.35 < 0.55+0.2x & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

으로 놓으면

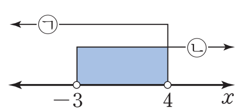
㉠에서 $x < 4$

㉡에서 $-10x-35 < 55+20x$

$-30x < 90$

$x > -3$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립일차부등식의 해는 $-3 < x < 4$이다.

08 답 (1) $-8 \le x \le 2$ (2) $-2 \le x < 3$ (3) $x > 7$ (4) $x \ge -\dfrac{3}{2}$ (5) $x < -3$

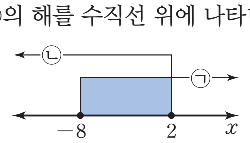
풀이 (1) 주어진 부등식을 $\begin{cases} -5 \le x+3 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+3 \le 5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

으로 놓으면

㉠에서 $x \ge -8$

㉡에서 $x \le 2$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립부등식의 해는 $-8 \le x \le 2$이다.

(2) 주어진 부등식을 $\begin{cases} -3 \le 2x+1 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x+1 < 7 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

으로 놓으면

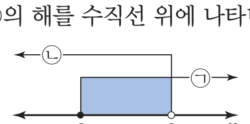
㉠에서 $-2x \le 4$

$x \ge -2$

㉡에서 $2x < 6$

$x < 3$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립부등식의 해는 $-2 \le x < 3$이다.

(3) 주어진 부등식을 $\begin{cases} 2 < x-5 & \cdots\cdots ㉠ \\ x-5 \le 3x+1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

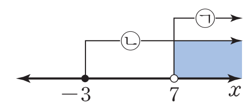
으로 놓으면

㉠에서 $x > 7$

㉡에서 $-2x \le 6$

$x \ge -3$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립부등식의 해는 $x > 7$이다.

(4) 주어진 부등식을 $\begin{cases} x \le 3x+3 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x+3 \le 5x+10 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

으로 놓으면

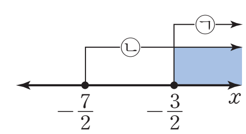
㉠에서 $-2x \le 3$

$x \ge -\dfrac{3}{2}$

㉡에서 $-2x \le 7$

$x \ge -\dfrac{7}{2}$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립부등식의 해는 $x \ge -\dfrac{3}{2}$이다.

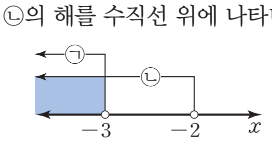
(5) 주어진 부등식을 $\begin{cases} 3x+2 < 2x-1 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x-1 < x-3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

으로 놓으면

㉠에서 $x < -3$

㉡에서 $x < -2$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립부등식의 해는 $x < -3$이다.

09 답 5

풀이 $\begin{cases} x+a \ge -x+3 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x-1 < 7 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

으로 놓으면

㉠에서 $2x \ge -a+3$

$x \ge \dfrac{-a+3}{2}$

㉡에서 $2x < 8$

$x < 4$

주어진 연립부등식의 해가 $-1 \le x < 4$이므로 ㉠의 해는 $x \ge -1$이다.

따라서 $\dfrac{-a+3}{2} = -1$이므로 $a=5$이다.

10 답 $-\frac{1}{2}$

풀이 $\begin{cases} -5+3x<2(x-a) & \cdots\cdots ㉠ \\ x+2\le 5(x-2) & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

으로 놓으면

㉠에서 $-5+3x<2x-2a$

$x<-2a+5$

㉡에서 $x+2\le 5x-10$

$-4x\le -12$

$x\ge 3$

주어진 연립부등식의 해가 $3\le x<6$이므로 ㉠의 해는 $x<6$이다.

따라서 $-2a+5=6$이므로 $a=-\frac{1}{2}$이다.

11 답 -2

풀이 $\begin{cases} 2(1-x)>3(x+4)-10 & \cdots\cdots ㉠ \\ x<a-1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

으로 놓으면

㉠에서 $2-2x>3x+2$

$-5x>0$

$x<0$

㉡에서 $x<a-1$

주어진 연립부등식의 해가 $x<-3$이므로 ㉡의 해는 $x<-3$이다.

따라서 $a-1=-3$이므로 $a=-2$이다.

12 답 -5

풀이 $\begin{cases} 3x+4\le 2x & \cdots\cdots ㉠ \\ -(2x-a)+3>-x+1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

으로 놓으면

㉠에서 $x\le -4$

㉡에서 $-2x+a+3>-x+1$, $-x>-a-2$

$x<a+2$

주어진 연립부등식의 해가 $x\le -4$이므로 ㉡에서 $a+2>-4$, 즉 $a>-6$이어야 한다.

따라서 정수 a의 최솟값은 -5이다.

13 답 (1) $x=2$ (2) 해는 없다. (3) 해는 없다.

14 답 (1) $x=-3$ (2) 해는 없다. (3) 해는 없다. (4) 해는 없다. (5) 해는 없다. (6) 해는 없다. (7) $x=9$

풀이 (1) $\begin{cases} x+5\ge 2 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x\ge 3(x+1) & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

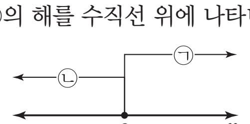
으로 놓으면

㉠에서 $x\ge -3$

㉡에서 $2x\ge 3x+3$, $-x\ge 3$

$x\le -3$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립부등식의 해는 $x=-3$이다.

(2) $\begin{cases} x+2\ge 3 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x-2\ge 3x+9 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

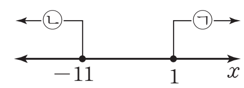
으로 놓으면

㉠에서 $x\ge 1$

㉡에서 $-x\ge 11$

$x\le -11$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립부등식의 해는 없다.

(3) $\begin{cases} 2(x+1)\ge 3x-1 & \cdots\cdots ㉠ \\ -x<x-6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

으로 놓으면

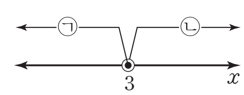
㉠에서 $2x+2\ge 3x-1$, $-x\ge -3$

$x\le 3$

㉡에서 $-2x<-6$, $2x>6$

$x>3$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립부등식의 해는 없다.

(4) $\begin{cases} x-4<4(x-2) & \cdots\cdots ㉠ \\ 5x\le x+4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

으로 놓으면

㉠에서 $x-4<4x-8$

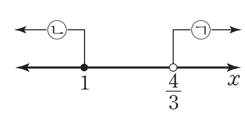
$-3x<-4$

$x>\frac{4}{3}$

㉡에서 $4x\le 4$

$x\le 1$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립부등식의 해는 없다.

(5) $\begin{cases} \frac{1}{3}x>\frac{1}{6}(x-1) & \cdots\cdots ㉠ \\ 10x\le 9(x-1)+8 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

으로 놓으면

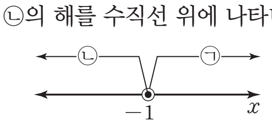
㉠에서 $2x>x-1$

$x>-1$

㉡에서 $10x\le 9x-1$

$x\le -1$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립부등식의 해는 없다.

(6) 주어진 부등식을 $\begin{cases} -x+1 \le 4x-4 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x-4 < -7(x+2)-1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

으로 놓으면

㉠에서 $-5x \le -5$

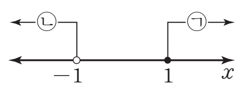
$x \ge 1$

㉡에서 $4x-4 < -7x-15$

$11x < -11$

$x < -1$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립부등식의 해는 없다.

(7) 주어진 부등식을 $\begin{cases} 2(x-5) \le x-1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x-1 \le 3(x-1)-16 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

으로 놓으면

㉠에서 $2x-10 \le x-1$

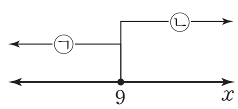
$x \le 9$

㉡에서 $x-1 \le 3x-19$

$-2x \le -18$

$x \ge 9$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립부등식의 해는 $x=9$이다.

15 답 $a \le -5$

풀이 $\begin{cases} 5x > 4(x-4)+1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x \le a-10 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

으로 놓으면

㉠에서 $5x > 4x-16+1$

즉, $x > -15$이므로 주어진 연립부등식의 해가 없으려면 ㉡에서 $a-10 \le -15$이어야 한다.

따라서 $a \le -5$이다.

16 답 $a > 6$

풀이 $\begin{cases} 3x+2a \le x+4 & \cdots\cdots ㉠ \\ -4-x \le 2x+8 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

으로 놓으면

㉠에서 $2x \le -2a+4$

$x \le -a+2$

㉡에서 $-3x \le 12$

$x \ge -4$

이므로 주어진 연립부등식의 해가 없으려면 ㉠에서 $-a+2 < -4$이어야 한다.

따라서 $a > 6$이다.

17 답 $a=7$, $b=0$

풀이 $\begin{cases} -x \le 2(x+1)+a & \cdots\cdots ㉠ \\ -\frac{1}{2}x \ge -\frac{1}{2}(b-3) & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

으로 놓으면

㉠에서 $-x \le 2x+2+a$

$-3x \le a+2$

$x \ge \frac{-a-2}{3}$

㉡에서 $x \le b-3$

이때 주어진 연립부등식의 해가 $x=-3$이므로

$\frac{-a-2}{3}=b-3=-3$이다.

따라서 $a=7$, $b=0$이다.

18 답 (1) $-4 < x < 4$

(2) $x \le -8$ 또는 $x \ge 4$

(3) $-1 \le x < 0$ 또는 $1 < x \le 2$

(4) $-18 < x \le -10$ 또는 $0 \le x < 8$

(5) $-2 < x < 1$

(6) $x \ge 5$ 또는 $x \le -\frac{7}{3}$

풀이 (2) $|x+2| \ge 6$이므로

$x+2 \le -6$ 또는 $x+2 \ge 6$

따라서 $x \le -8$ 또는 $x \ge 4$이다.

(3) $1 < |2x-1| \le 3$이므로

$-3 \le 2x-1 < -1$ 또는 $1 < 2x-1 \le 3$

따라서 $-1 \le x < 0$ 또는 $1 < x \le 2$이다.

(4) $2 \le |x+5|-3 < 10$에서

$5 \le |x+5| < 13$이므로

$-13 < x+5 \le -5$ 또는 $5 \le x+5 < 13$

따라서 $-18 < x \le -10$ 또는 $0 \le x < 8$이다.

(5) $x=0$과 $x=-1$을 기준으로 구간을 나누어 생각한다.

(i) $x \ge 0$일 때

$x+x+1 < 3$

이므로 $x < 1$이다.

이때 $x < 1$과 $x \ge 0$의 공통부분은 $0 \le x < 1$이다.

(ii) $-1 \le x < 0$일 때

$-x+(x+1) < 3$

이므로 $1 < 3$이다.

따라서 해는 모든 실수이므로 $-1 \le x < 0$과의 공통부분은 $-1 \le x < 0$이다.

(iii) $x < -1$일 때

$-x-(x+1) < 3$, $-2x < 4$

이므로 $x > -2$이다.

이때 $x > -2$와 $x < -1$의 공통부분은 $-2 < x < -1$이다.

(i), (ii), (iii)에서 부등식의 해는 $-2 < x < 1$이다.

(6) $x=1$과 $x=-2$를 기준으로 구간을 나누어 생각한다.

(i) $x\ge1$일 때

$(x-1)+(x+2)\ge x+6$

이므로 $x\ge5$이다.

이때 $x\ge5$와 $x\ge1$의 공통부분은 $x\ge5$이다.

(ii) $-2\le x<1$일 때

$-(x-1)+(x+2)\ge x+6$

이므로 $x\le-3$이다.

이때 $x\le-3$과 $-2\le x<1$의 공통부분은 없다.

(iii) $x<-2$일 때

$-(x-1)-(x+2)\ge x+6$

$-2x-1\ge x+6$, $-3x\ge7$

따라서 $x\le-\frac{7}{3}$이다.

이때 $x\le-\frac{7}{3}$과 $x<-2$의 공통부분은

$x\le-\frac{7}{3}$이다.

(i), (ii), (iii)에서 부등식의 해는 $x\ge5$ 또는 $x\le-\frac{7}{3}$이다.

19 답 (1) $b<x<c$ (2) $x<e$
(3) $a\le x\le d$ (4) $x<a$ 또는 $x>d$

풀이 (1) $f(x)>0$의 해는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위이므로

$b<x<c$

(2) $g(x)<0$의 해는 함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위이므로

$x<e$

(3) $f(x)\ge g(x)$의 해는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있거나 두 함수의 그래프가 만나는 x의 값의 범위이므로

$a\le x\le d$

(4) $f(x)<g(x)$의 해는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위이므로

$x<a$ 또는 $x>d$

20 답 (1) $x\le c$ 또는 $x\ge f$
(2) $x\le a$ 또는 $x\ge d$
(3) $b\le x\le e$
(4) $x<a$ 또는 $x>f$ 또는 $c<x<d$

풀이 (1) $f(x)\ge0$의 해는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있거나 x축과 만나는 x의 값의 범위이므로

$x\le c$ 또는 $x\ge f$

(2) $g(x)\le0$의 해는 함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축보다 아래쪽에 있거나 x축과 만나는 x의 값의 범위이므로

$x\le a$ 또는 $x\ge d$

(3) $f(x)\le g(x)$의 해는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 아래쪽에 있거나 두 함수의 그래프가 만나는 x의 값의 범위이므로

$b\le x\le e$

(4) $f(x)g(x)<0$의 해는 $f(x)>0$, $g(x)<0$ 또는 $f(x)<0$, $g(x)>0$을 만족시키는 x의 값의 범위이다.

(i) $f(x)>0$, $g(x)<0$일 때

$f(x)>0$에서 $x<c$ 또는 $x>f$

$g(x)<0$에서 $x<a$ 또는 $x>d$

따라서 공통부분을 구하면 $x<a$ 또는 $x>f$

(ii) $f(x)<0$, $g(x)>0$일 때

$f(x)<0$에서 $c<x<f$

$g(x)>0$에서 $a<x<d$

따라서 공통부분을 구하면 $c<x<d$

(i), (ii)에서 $x<a$ 또는 $x>f$ 또는 $c<x<d$이다.

21 답 (1) $x<2$ 또는 $x>3$ (2) $-1\le x\le2$
(3) $x\le-5$ 또는 $x\ge-2$ (4) $-4<x<3$
(5) $-12\le x\le5$ (6) $x\le-3$ 또는 $x\ge\frac{1}{2}$
(7) $x<-\frac{3}{2}$ 또는 $x>1$ (8) $-\frac{1}{3}<x<\frac{5}{2}$

풀이 (1) $x^2-5x+6>0$에서

$(x-2)(x-3)>0$

따라서 $x<2$ 또는 $x>3$이다.

(2) $x^2-x-2\le0$에서

$(x+1)(x-2)\le0$

따라서 $-1\le x\le2$이다.

(3) $x^2+7x+10\ge0$에서

$(x+2)(x+5)\ge0$

따라서 $x\le-5$ 또는 $x\ge-2$이다.

(4) $x^2+x-12<0$에서

$(x+4)(x-3)<0$

따라서 $-4<x<3$이다.

(5) $x^2+7x-60\le0$에서

$(x+12)(x-5)\le0$

따라서 $-12\le x\le5$이다.

(6) $2x^2+5x-3\ge0$에서

$(2x-1)(x+3)\ge0$

따라서 $x\le-3$ 또는 $x\ge\frac{1}{2}$이다.

(7) $2x^2+x-3>0$에서

$(2x+3)(x-1)>0$

따라서 $x<-\frac{3}{2}$ 또는 $x>1$이다.

(8) $6x^2-13x-5<0$에서

$(3x+1)(2x-5)<0$

따라서 $-\frac{1}{3}<x<\frac{5}{2}$이다.

22 답 (1) $\frac{-1-\sqrt{13}}{2}<x<\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$
(2) $x\le\frac{-5-\sqrt{29}}{2}$ 또는 $x\ge\frac{-5+\sqrt{29}}{2}$
(3) $3-\sqrt{5}\le x\le3+\sqrt{5}$

(4) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

(5) $x<1-\sqrt{6}$ 또는 $x>1+\sqrt{6}$

(6) $-2-\sqrt{10}\le x\le -2+\sqrt{10}$

(7) $\frac{1-\sqrt{7}}{3}<x<\frac{1+\sqrt{7}}{3}$

(8) $x\le\frac{3-\sqrt{15}}{2}$ 또는 $x\ge\frac{3+\sqrt{15}}{2}$

풀이 (1) 이차방정식 $x^2+x-3=0$의 근이

$x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$이므로

$x^2+x-3<0$의 해는

$\left\{x-\left(\frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right)\right\}\left\{x-\left(\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)\right\}<0$

따라서 $\frac{-1-\sqrt{13}}{2}<x<\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$이다.

(2) 이차방정식 $x^2+5x-1=0$의 근이

$x=\frac{-5\pm\sqrt{29}}{2}$이므로

$x^2+5x-1\ge 0$의 해는

$\left\{x-\left(\frac{-5-\sqrt{29}}{2}\right)\right\}\left\{x-\left(\frac{-5+\sqrt{29}}{2}\right)\right\}\ge 0$

따라서 $x\le\frac{-5-\sqrt{29}}{2}$ 또는 $x\ge\frac{-5+\sqrt{29}}{2}$이다.

(3) 이차방정식 $x^2-6x+4=0$의 근이 $x=3\pm\sqrt{5}$이므로

$x^2-6x+4\le 0$의 해는

$\{x-(3-\sqrt{5})\}\{x-(3+\sqrt{5})\}\le 0$

따라서 $3-\sqrt{5}\le x\le 3+\sqrt{5}$이다.

(4) 이차방정식 $2x^2-2x-1=0$의 근이

$x=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$이므로

$2x^2-2x-1<0$의 해는

$2\left\{x-\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\right\}\left\{x-\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\right\}<0$

따라서 $\frac{1-\sqrt{3}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{3}}{2}$이다.

(5) $-x^2+2x+5<0$에서

$x^2-2x-5>0$

이차방정식 $x^2-2x-5=0$의 근이 $x=1\pm\sqrt{6}$이므로

$x^2-2x-5>0$의 해는

$\{x-(1-\sqrt{6})\}\{x-(1+\sqrt{6})\}>0$

따라서 $x<1-\sqrt{6}$ 또는 $x>1+\sqrt{6}$이다.

(6) $x^2\le -4x+6$에서

$x^2+4x-6\le 0$

이차방정식 $x^2+4x-6=0$의 근이 $x=-2\pm\sqrt{10}$이므로

$x^2+4x-6\le 0$의 해는

$\{x-(-2-\sqrt{10})\}\{x-(-2+\sqrt{10})\}\le 0$

따라서 $-2-\sqrt{10}\le x\le -2+\sqrt{10}$이다.

(7) 이차방정식 $3x^2-2x-2=0$의 근이

$x=\frac{1\pm\sqrt{7}}{3}$이므로

$3x^2-2x-2<0$의 해는

$3\left\{x-\left(\frac{1-\sqrt{7}}{3}\right)\right\}\left\{x-\left(\frac{1+\sqrt{7}}{3}\right)\right\}<0$

따라서 $\frac{1-\sqrt{7}}{3}<x<\frac{1+\sqrt{7}}{3}$이다.

(8) $2(x^2-3x)\ge 3$에서

$2x^2-6x-3\ge 0$

이차방정식 $2x^2-6x-3=0$의 근이

$x=\frac{3\pm\sqrt{15}}{2}$이므로

$2x^2-6x-3\ge 0$의 해는

$2\left\{x-\left(\frac{3-\sqrt{15}}{2}\right)\right\}\left\{x-\left(\frac{3+\sqrt{15}}{2}\right)\right\}\ge 0$

따라서 $x\le\frac{3-\sqrt{15}}{2}$ 또는 $x\ge\frac{3+\sqrt{15}}{2}$이다.

23 답 (1) 해는 없다. (2) 해는 모든 실수 (3) 해는 $x\ne 3$인 모든 실수 (4) $x=-7$ (5) 해는 모든 실수 (6) 해는 없다. (7) $x=\frac{5}{3}$

풀이 (1) $x^2-4x+4<0$에서

$(x-2)^2<0$

따라서 해는 없다.

(2) $x^2+10x+25\ge 0$에서

$(x+5)^2\ge 0$

따라서 해는 모든 실수이다.

(3) $x^2-6x+9>0$에서

$(x-3)^2>0$

따라서 해는 $x\ne 3$인 모든 실수이다.

(4) $x^2+14x+49\le 0$에서

$(x+7)^2\le 0$

따라서 해는 $x=-7$이다.

(5) $4x^2-4x+1\ge 0$에서

$(2x-1)^2\ge 0$

따라서 해는 모든 실수이다.

(6) $x^2+x+\frac{1}{4}<0$에서

$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2<0$

따라서 해는 없다.

(7) $9x^2-30x+25\le 0$에서

$(3x-5)^2\le 0$

따라서 해는 $x=\frac{5}{3}$이다.

24 답 (1) 해는 모든 실수 (2) 해는 없다. (3) 해는 모든 실수 (4) 해는 없다. (5) 해는 모든 실수 (6) 해는 없다. (7) 해는 없다.

풀이 (1) $x^2+2x+3\geq 0$에서

$(x^2+2x+1)+2\geq 0$

$(x+1)^2+2\geq 0$

따라서 해는 모든 실수이다.

(2) $x^2-6x+15<0$에서

$(x^2-6x+9)+6<0$

$(x-3)^2+6<0$

따라서 해는 없다.

(3) $x^2+4x+9>0$에서

$(x^2+4x+4)+5>0$

$(x+2)^2+5>0$

따라서 해는 모든 실수이다.

(4) $x^2-10x+45\leq 0$에서

$(x^2-10x+25)+20\leq 0$

$(x-5)^2+20\leq 0$

따라서 해는 없다.

(5) $9x^2-6x+16>0$에서

$(9x^2-6x+1)+15>0$

$(3x-1)^2+15>0$

따라서 해는 모든 실수이다.

(6) $4x^2+8x<-7$에서

$4x^2+8x+7<0$

$(4x^2+8x+4)+3<0$

$4(x+1)^2+3<0$

따라서 해는 없다.

(7) $-2x^2+4x-6\geq -x^2$에서

$2x^2-4x+6\leq x^2$

$(x^2-4x+4)+2\leq 0$

$(x-2)^2+2\leq 0$

따라서 해는 없다.

25 답 (1) $x^2-4<0$ (2) $x^2-4x+3\geq 0$ (3) $x^2+11x+30>0$ (4) $x^2+x-12\leq 0$

풀이 (1) 해가 $-2<x<2$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$x^2-(-2+2)x+\{(-2)\times 2\}<0$

$x^2-4<0$

(2) 해가 $x\leq 1$ 또는 $x\geq 3$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$x^2-(1+3)x+(1\times 3)\geq 0$

$x^2-4x+3\geq 0$

(3) 해가 $x<-6$ 또는 $x>-5$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$x^2-(-6-5)x+\{(-6)\times(-5)\}>0$

$x^2+11x+30>0$

(4) 해가 $-4\leq x\leq 3$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$x^2-(-4+3)x+\{(-4)\times 3\}\leq 0$

$x^2+x-12\leq 0$

26 답 (1) $a=1,\ b=3$ (2) $a=-4,\ b=-1$ (3) $a=-1,\ b=-2$

풀이 (1) 해가 $-2<x<b$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$x^2-(b-2)x-2b<0$

이므로 $x^2-ax-6<0$과 계수를 비교하면

$b-2=a,\ 2b=6$에서 $a=1,\ b=3$이다.

(2) 해가 $x\leq b$ 또는 $x\geq 5$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$x^2-(b+5)x+5b\geq 0$

이므로 $x^2+ax-5\geq 0$과 계수를 비교하면

$-b-5=a,\ 5b=-5$에서 $a=-4,\ b=-1$이다.

(3) 이차부등식 $ax^2+bx+3\leq 0$의 해가 $x\leq -3$ 또는 $x\geq 1$이므로 $a<0$이다.

따라서 해가 $x\leq -3$ 또는 $x\geq 1$이고 x^2의 계수가 a인 이차부등식은

$a\{x^2-(1-3)x+1\times(-3)\}\leq 0$

$ax^2+2ax-3a\leq 0$

이므로 $ax^2+bx+3\leq 0$과 계수를 비교하면

$2a=b,\ -3a=3$에서 $a=-1,\ b=-2$이다.

27 답 (1) $k>1$ (2) $k\leq -9$ (3) $k\geq 4$ (4) $-\frac{\sqrt{2}}{2}<k<\frac{\sqrt{2}}{2}$ (5) $0<k<4$ (6) $k\geq \frac{1}{3}$ (7) $-10\leq k<0$

풀이 (1) 이차부등식 $x^2-2x+k>0$이 항상 성립하려면 이차방정식 $x^2-2x+k=0$의 판별식을 D라고 할 때 $D<0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\times k<0$

$1-k<0$

따라서 $k>1$이다.

(2) 이차부등식 $-x^2+6x+k\leq 0$이 항상 성립하려면 이차방정식 $-x^2+6x+k=0$의 판별식을 D라고 할 때 $D\leq 0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=3^2-(-1)\times k\leq 0$

$9+k\leq 0$

따라서 $k\leq -9$이다.

(3) 이차부등식 $-x^2+4x\leq k$가 항상 성립하려면 이차방정식 $-x^2+4x-k=0$의 판별식을 D라고 할 때 $D\leq 0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=2^2-(-1)\times(-k)\leq 0$

$4-k\leq 0$

따라서 $k\geq 4$이다.

(4) 이차부등식 $2x^2-4kx+1>0$이 항상 성립하려면 이차방정식 $2x^2-4kx+1=0$의 판별식을 D라고 할 때 $D<0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=(-2k)^2-2\times1<0$

$4k^2-2<0$, $k^2<\frac{1}{2}$

따라서 $-\frac{\sqrt{2}}{2}<k<\frac{\sqrt{2}}{2}$이다.

(5) 이차부등식 $-x^2+kx-k<0$이 항상 성립하려면 이차방정식 $-x^2+kx-k=0$의 판별식을 D라고 할 때 $D<0$이어야 한다.

$D=k^2-4\times(-1)\times(-k)<0$

$k^2-4k<0$, $k(k-4)<0$

따라서 $0<k<4$이다.

(6) 이차부등식 $kx^2-2x+3\geq0$이 항상 성립하려면 $k>0$이고, 이차방정식 $kx^2-2x+3=0$의 판별식을 D라고 할 때 $D\leq0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=(-1)^2-k\times3\leq0$

$1-3k<0$

따라서 $k\geq\frac{1}{3}$이고, $k>0$이므로 공통부분은 $k\geq\frac{1}{3}$이다.

(7) 이차부등식 $2kx^2+2kx-5\leq0$이 항상 성립하려면 $k<0$이고, 이차방정식 $2kx^2+2kx-5=0$의 판별식을 D라고 할 때 $D\leq0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=k^2-2k\times(-5)\leq0$

$k^2+10k\leq0$, $k(k+10)\leq0$

따라서 $-10\leq k\leq0$이고, $k<0$이므로 공통부분은 $-10\leq k<0$이다.

28 답 (1) $k\geq4$ (2) $k>\frac{25}{4}$ (3) $k<-\frac{9}{2}$ (4) $-4\leq k\leq4$ (5) $0<k<8$ (6) $k\geq4$ (7) $-4<k<-1$

풀이 (1) 이차부등식 $x^2+4x+k<0$의 해가 없으려면 이차방정식 $x^2+4x+k=0$의 판별식을 D라고 할 때 $D\leq0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=2^2-1\times k\leq0$

$4-k\leq0$

따라서 $k\geq4$이다.

(2) 이차부등식 $-x^2+5x-k\geq0$의 해가 없으려면 이차방정식 $-x^2+5x-k=0$의 판별식을 D라고 할 때 $D<0$이어야 한다.

$D=5^2-4\times(-1)\times(-k)<0$

$25-4k<0$

따라서 $k>\frac{25}{4}$이다.

(3) 이차부등식 $2x^2-6x-k\leq0$의 해가 없으려면 이차방정식 $2x^2-6x-k=0$의 판별식을 D라고 할 때 $D<0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=(-3)^2-2\times(-k)<0$

$9+2k<0$

따라서 $k<-\frac{9}{2}$이다.

(4) 이차부등식 $-x^2+kx-4>0$의 해가 없으려면 이차방정식 $-x^2+kx-4=0$의 판별식을 D라고 할 때 $D\leq0$이어야 한다.

$D=k^2-4\times(-1)\times(-4)\leq0$

$k^2-16\leq0$

$(k+4)(k-4)\leq0$

따라서 $-4\leq k\leq4$이다.

(5) 이차부등식 $-x^2+kx-2k\geq0$의 해가 없으려면 이차방정식 $-x^2+kx-2k=0$의 판별식을 D라고 할 때 $D<0$이어야 한다.

$D=k^2-4\times(-1)\times(-2k)<0$

$k^2-8k<0$

$k(k-8)<0$

따라서 $0<k<8$이다.

(6) 이차부등식 $kx^2+4x+1<0$의 해가 없으려면 $k>0$이고, 이차방정식 $kx^2+4x+1=0$의 판별식을 D라고 할 때 $D\leq0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=2^2-k\times1\leq0$

$4-k\leq0$

따라서 $k\geq4$이고, $k>0$이므로 공통부분은 $k\geq4$이다.

(7) 이차부등식 $kx^2+2(k+2)x-1\geq0$의 해가 없으려면 $k<0$이고, 이차방정식 $kx^2+2(k+2)x-1=0$의 판별식을 D라고 할 때 $D<0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=(k+2)^2-k\times(-1)<0$

$k^2+5k+4<0$

$(k+1)(k+4)<0$

따라서 $-4<k<-1$이고, $k<0$이므로 공통부분은 $-4<k<-1$이다.

29 답 $-2<k<1$

풀이 이차함수 $y=x^2-2kx+3$의 그래프가 직선 $y=2x-k$보다 항상 위쪽에 있으려면

$x^2-2kx+3>2x-k$

이어야 한다.

$x^2-2(k+1)x+k+3>0$

이므로 이차방정식 $x^2-2(k+1)x+k+3=0$의 판별식을 D라고 할 때 $D<0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=\{-(k+1)\}^2-1\times(k+3)<0$

$k^2+k-2<0$

$(k+2)(k-1)<0$

따라서 $-2<k<1$이다.

30 답 $-2<k<2$

풀이 이차함수 $y=(k+2)x^2-(k+3)x+5$의 그래프가 직선 $y=-x+4$보다 항상 위쪽에 있으려면

$(k+2)x^2-(k+3)x+5>-x+4$이고 $k+2>0$이어야 한다.

$(k+2)x^2-(k+2)x+1>0$이므로 이차방정식 $(k+2)x^2-(k+2)x+1=0$의 판별식을 D라고 할 때 $D<0$이어야 한다.

$D=\{-(k+2)\}^2-4\times(k+2)\times1<0$

$k^2-4<0$

$(k+2)(k-2)<0$

따라서 $-2<k<2$이고, $k>-2$이므로 $-2<k<2$이다.

31 답 $a=-5$, $b=-5$

풀이 이차함수 $y=-x^2-ax+b$의 그래프가 직선 $y=x-2$보다 위쪽에 있으므로

$-x^2-ax+b>x-2$

$x^2+(a+1)x-b-2<0$

이때 해가 $1<x<3$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$x^2-(1+3)x+3<0$

$x^2-4x+3<0$

이므로 $x^2+(a+1)x-b-2<0$과 계수를 비교하면

$a+1=-4$, $-b-2=3$

에서 $a=\underline{-5}$, $b=\underline{-5}$이다.

32 답 $a=\frac{1}{5}$, $b=-\frac{7}{5}$

풀이 이차함수 $y=ax^2-bx+1$의 그래프가 직선 $y=2x+3$보다 위쪽에 있으므로

$ax^2-bx+1>2x+3$

$ax^2-(b+2)x-2>0$

이때 해가 $x<-2$ 또는 $x>5$이므로 $a>0$이다.

해가 $x<-2$ 또는 $x>5$이고 x^2의 계수가 a인 이차부등식은

$a\{x^2-(-2+5)x+(-2)\times5\}>0$

$ax^2-3ax-10a>0$

이므로 $ax^2-(b+2)x-2>0$과 계수를 비교하면

$b+2=3a$, $10a=2$

에서 $a=\frac{1}{5}$, $b=-\frac{7}{5}$이다.

33 답 (1) $1\le x\le 3$　(2) $x>2$
(3) $-4\le x\le 3$　(4) $-2\le x<0$
(5) $4<x\le 5$　(6) $x<-3$ 또는 $x>2$

풀이 (1) $\begin{cases} 2x+3\ge 5 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-x-6\le 0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

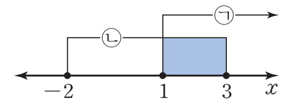
으로 놓으면

㉠에서 $x\ge 1$

㉡에서 $(x+2)(x-3)\le 0$

$-2\le x\le 3$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립부등식의 해는 $\underline{1}\le x\le\underline{3}$이다.

(2) $\begin{cases} -x+1<2x-5 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-1>0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

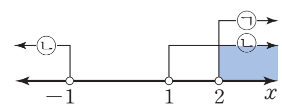
으로 놓으면

㉠에서 $-3x<-6$, $x>2$

㉡에서 $(x+1)(x-1)>0$

$x<-1$ 또는 $x>1$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립부등식의 해는 $x>2$이다.

(3) $\begin{cases} x^2+x-12\le 0 & \cdots\cdots ㉠ \\ -x-1<-2(x-2) & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

으로 놓으면

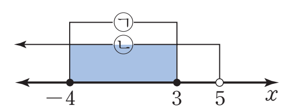
㉠에서 $(x+4)(x-3)\le 0$

$-4\le x\le 3$

㉡에서 $-x-1<-2x+4$

$x<5$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립부등식의 해는 $-4\le x\le 3$이다.

(4) $\begin{cases} x^2+6x<0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-2x-8\le 0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

으로 놓으면

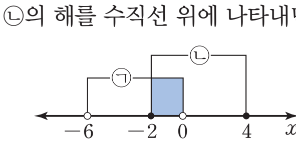
㉠에서 $x(x+6)<0$

$-6<x<0$

㉡에서 $(x+2)(x-4)\le 0$

$-2\le x\le 4$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립부등식의 해는 $-2\le x<0$이다.

(5) $\begin{cases} x^2-5x+1>-2x+5 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-7x+10\le 0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

으로 놓으면

㉠에서 $x^2-3x-4>0$

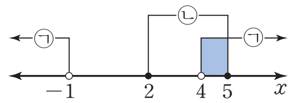
$(x+1)(x-4)>0$

$x<-1$ 또는 $x>4$

㉡에서 $(x-2)(x-5)\le 0$

$2\le x\le 5$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립부등식의 해는 $4<x\le5$이다.

(6) $\begin{cases} x^2-2x+1<2x^2-x-5 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x^2-4>2x^2-x-2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

으로 놓으면

㉠에서 $x^2+x-6>0$

$(x+3)(x-2)>0$

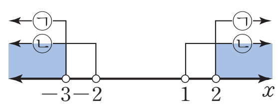
$x<-3$ 또는 $x>2$

㉡에서 $x^2+x-2>0$

$(x+2)(x-1)>0$

$x<-2$ 또는 $x>1$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립부등식의 해는 $x<-3$ 또는 $x>2$이다.

34 답 (1) $-3<x<-1$　　(2) $x<1$

(3) 해는 없다.　　(4) $-\frac{1}{2}<x<1$

(5) $-4\le x<-2$ 또는 $3<x\le5$

(6) $-\frac{1}{3}\le x\le1$

풀이 (1) 주어진 부등식을 $\begin{cases} -3\le1-2x & \cdots\cdots ㉠ \\ 1-2x<-x^2-6x-2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

으로 놓으면

㉠에서 $2x\le4$

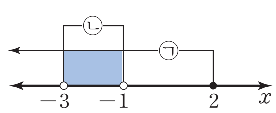
$x\le2$

㉡에서 $x^2+4x+3<0$

$(x+1)(x+3)<0$

$-3<x<-1$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립부등식의 해는 $-3<x<-1$이다.

(2) 주어진 부등식을 $\begin{cases} x^2-3<x^2-x & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-x<2x^2-7x+5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

으로 놓으면

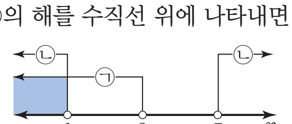
㉠에서 $x<3$

㉡에서 $x^2-6x+5>0$

$(x-1)(x-5)>0$

$x<1$ 또는 $x>5$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립부등식의 해는 $x<1$이다.

(3) 주어진 부등식을 $\begin{cases} 3x^2+10\le2x^2-7x & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x^2-7x\le x^2-4x-2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

으로 놓으면

㉠에서 $x^2+7x+10\le0$

$(x+2)(x+5)\le0$

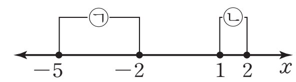
$-5\le x\le-2$

㉡에서 $x^2-3x+2\le0$

$(x-1)(x-2)\le0$

$1\le x\le2$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립부등식의 해는 없다.

(4) 주어진 부등식을 $\begin{cases} 2x^2-4x+1<x+4 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+4<x^2-4x+8 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

으로 놓으면

㉠에서 $2x^2-5x-3<0$

$(2x+1)(x-3)<0$

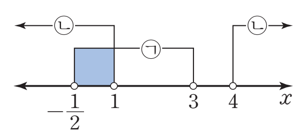
$-\frac{1}{2}<x<3$

㉡에서 $x^2-5x+4>0$

$(x-1)(x-4)>0$

$x<1$ 또는 $x>4$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립부등식의 해는 $-\frac{1}{2}<x<1$이다.

(5) 주어진 부등식을 $\begin{cases} 6<x^2-x & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-x\le20 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

으로 놓으면

㉠에서 $x^2-x-6>0$

$(x+2)(x-3)>0$

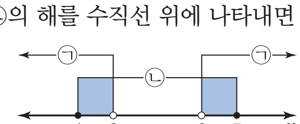
$x<-2$ 또는 $x>3$

㉡에서 $x^2-x-20\le0$

$(x+4)(x-5)\le0$

$-4\le x\le5$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립부등식의 해는 $-4\le x<-2$ 또는 $3<x\le5$이다.

(6) 주어진 부등식을 $\begin{cases} -5\le-2x^2-3x & \cdots\cdots ㉠ \\ -2x^2-3x\le-5x^2+5x+3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

으로 놓으면

㉠에서 $2x^2+3x-5\le0$

$(2x+5)(x-1)\le 0$

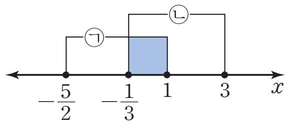
$-\frac{5}{2}\le x\le 1$

㉡에서 $3x^2-8x-3\le 0$

$(3x+1)(x-3)\le 0$

$-\frac{1}{3}\le x\le 3$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립부등식의 해는 $-\frac{1}{3}\le x\le 1$이다.

35 답 (1) $x\le -4$ 또는 $x\ge 4$　(2) $-1<x<3$
(3) 해는 모든 실수　(4) $x<1$ 또는 $x>3$
(5) $x<-5$ 또는 $x>5$　(6) $-\frac{1}{2}\le x\le \frac{1}{2}$

풀이 (1) $|x^2-6|\ge 10$에서

$x^2-6\le -10$ 또는 $x^2-6\ge 10$

(i) $x^2-6\le -10$이면 $x^2\le -4$이므로 해는 없다.

(ii) $x^2-6\ge 10$이면 $x^2\ge 16$이므로

$x\le -4$ 또는 $x\ge 4$이다.

(i), (ii)에서 해는 $x\le -4$ 또는 $x\ge 4$이다.

(2) $|x^2-2x|<3$에서

$-3<x^2-2x<3$

주어진 부등식을 $\begin{cases} -3<x^2-2x & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-2x<3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

으로 놓으면

㉠에서 $x^2-2x+3>0$

$(x-1)^2+2>0$

이므로 해는 모든 실수이다.　$\cdots\cdots$ ㉢

㉡에서

$x^2-2x-3<0$

$(x+1)(x-3)<0$

이므로 $-1<x<3$이다.　$\cdots\cdots$ ㉣

㉢, ㉣에서 연립부등식의 해는 $-1<x<3$이다.

(3) $x^2+|2x-2|\ge x$에서 $x^2+2|x-1|\ge x$

$x=1$을 기준으로 구간을 나누어 생각하면

(i) $x\ge 1$일 때

$x^2+2x-2\ge x$

$x^2+x-2\ge 0$

$(x+2)(x-1)\ge 0$

이므로 $x\le -2$ 또는 $x\ge 1$이고, $x\ge 1$과의 공통부분은 $x\ge 1$이다.

(ii) $x<1$일 때

$x^2-2x+2\ge x$

$x^2-3x+2\ge 0$

$(x-1)(x-2)\ge 0$

이므로 $x\le 1$ 또는 $x\ge 2$이고, $x<1$과의 공통부분은 $x<1$이다.

(i), (ii)에서 해는 $x<1$ 또는 $x\ge 1$이므로 모든 실수이다.

(4) $x=3$을 기준으로 구간을 나누어 생각하면

(i) $x\ge 3$일 때

$-x^2+3x<x-3$

$x^2-2x-3>0$

$(x+1)(x-3)>0$

이므로 $x<-1$ 또는 $x>3$이고, $x\ge 3$과의 공통부분은 $x>3$이다.

(ii) $x<3$일 때

$-x^2+3x<-x+3$

$x^2-4x+3>0$

$(x-1)(x-3)>0$

이므로 $x<1$ 또는 $x>3$이고, $x<3$과의 공통부분은 $x<1$이다.

(i), (ii)에서 해는 $x<1$ 또는 $x>3$이다.

(5) $x^2-4|x|-5>0$에서 $|x|^2-4|x|-5>0$과 같이 생각하면

$(|x|+1)(|x|-5)>0$

이때 $|x|+1>0$이므로

$|x|-5>0$

따라서 $|x|>5$에서 $x<-5$ 또는 $x>5$이다.

(6) $2x^2+5|x|-3\le 0$에서 $2|x|^2+5|x|-3\le 0$과 같이 생각하면

$(2|x|-1)(|x|+3)\le 0$

이때 $|x|+3>0$이므로

$2|x|-1\le 0$

따라서 $|x|\le \frac{1}{2}$에서 $-\frac{1}{2}\le x\le \frac{1}{2}$이다.

중단원 점검문제 | Ⅱ-4 여러 가지 부등식 140-142쪽

01 답 $\frac{1}{2}\le\frac{4}{x+1}\le1$

풀이 $3\le x\le7$의 각 변에서 1을 더하면

$4\le x+1\le8$

위의 부등식의 각 변의 역수를 취하면

$\frac{1}{8}\le\frac{1}{x+1}\le\frac{1}{4}$

위의 부등식의 각 변에 4를 곱하면

$\frac{1}{2}\le\frac{4}{x+1}\le1$

02 답 $-16\le-2xy\le8$

풀이 x의 최솟값, 최댓값을 y의 최솟값, 최댓값과 각각 곱하면

$-2,\ -4,\ 4,\ 8$

이므로 xy의 최솟값은 -4, 최댓값은 8이다.

따라서 $-4\le xy\le8$이고, 양변에 -2를 곱하면

$-16\le-2xy\le8$이다.

03 답 $a=2,\ b=5$

풀이 $-4\le2x\le2a$이고 $2\le y\le b$이므로

$-4-b\le2x-y\le2a-2$

이때 $-9\le2x-y\le2$이므로

$-4-b=-9,\ 2a-2=2$에서 $a=2,\ b=5$이다.

04 답 $x\le\frac{9}{7}$

풀이 $\frac{2x-4}{3}\le-\frac{x}{2}+\frac{1}{6}$의 양변에 6을 곱하면

$2(2x-4)\le-3x+1$

$4x-8\le-3x+1$

$7x\le9$

따라서 $x\le\frac{9}{7}$이다.

05 답 $x>-4$

풀이 $bx-(a+b)<0$의 해가 $x>3$이므로 $b<0$이다.

$bx<a+b$에서

$x>\frac{a+b}{b}$

이때 $\frac{a+b}{b}=3$이므로 $a+b=3b$에서 $a=2b$

따라서 $ax+2a+4b<0$에 $a=2b$를 대입하면

$2bx+4b+4b<0$

$bx<-4b$

이때 $b<0$이므로 $x>-4$이다.

06 답 $a>2$일 때 $x\ge3a+3$

$a<2$일 때 $x\le3a+3$

$a=2$일 때 해는 모든 실수

풀이 $ax-2x\ge3(a^2-a-2)$에서

$(a-2)x\ge3(a+1)(a-2)$

(ⅰ) $a>2$일 때 $x\ge3a+3$

(ⅱ) $a<2$일 때 $x\le3a+3$

(ⅲ) $a=2$일 때 $0\ge0$이므로 해는 모든 실수이다.

07 답 2

풀이 $a^2x-a\le x-1$에서

$(a^2-1)x\le a-1$

$(a+1)(a-1)x\le a-1$

(ⅰ) $a<-1$일 때 $x\le\frac{1}{a+1}$

(ⅱ) $a=-1$일 때 (좌변)$=0$, (우변)$=-2$이므로 해는 없다.

(ⅲ) $-1<a<1$일 때 $x\ge\frac{1}{a+1}$

(ⅳ) $a=1$일 때 $0\le0$이므로 해는 모든 실수이다.

(ⅴ) $a>1$일 때 $x\le\frac{1}{a+1}$

따라서 $m=1,\ n=-1$이므로 $m-n=2$이다.

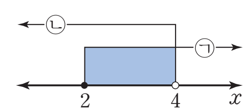
08 답 2, 3

풀이 $\begin{cases}x+1\ge3 & \cdots\cdots ㉠\\ 2x-1<x+3 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

으로 놓으면

㉠에서 $x\ge2$, ㉡에서 $x<4$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립일차부등식의 해는 $2\le x<4$이므로 이를 만족시키는 정수는 2, 3이다.

09 답 7

풀이 $\begin{cases}3x>2(x-1) & \cdots\cdots ㉠\\ 2x+3\ge a & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

으로 놓으면

㉠에서 $x>-2$

㉡에서 $x\ge\frac{a-3}{2}$

주어진 연립부등식의 해가 $x\ge2$이므로 ㉡의 해는 $x\ge2$이다.

따라서 $\frac{a-3}{2}=2$이므로 $a=7$이다.

10 답 해는 없다.

풀이 $\begin{cases}x+1\ge-4 & \cdots\cdots ㉠\\ 3(x+1)<2x-2 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

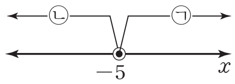
으로 놓으면

㉠에서 $x\ge-5$

㉡에서 $3x+3<2x-2$

$x<-5$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립부등식의 해는 없다.

11 답 $x<0$ 또는 $x>3$

풀이 $3|x-1|>x+3$에서

(i) $x\geq1$일 때

$3x-3>x+3$

$2x>6$

따라서 $x>3$이고, $x\geq1$과의 공통부분은 $x>3$이다.

(ii) $x<1$일 때

$-3x+3>x+3$

$-4x>0$

따라서 $x<0$이고, $x<1$과의 공통부분은 $x<0$이다.

(i), (ii)에서 해는 $x<0$ 또는 $x>3$이다.

다른 풀이 $3|x-1|>x+3$에서

$|x-1|>\frac{x+3}{3}$

$x-1<-\frac{x+3}{3}$ 또는 $x-1>\frac{x+3}{3}$

$3x-3<-x-3$ 또는 $3x-3>x+3$

$4x<0$ 또는 $2x>6$

따라서 $x<0$ 또는 $x>3$이다.

12 답 9

풀이 $2|x+2|\leq8$에서

$|x+2|\leq4$

$-4\leq x+2\leq4$

따라서 $-6\leq x\leq2$이므로 이를 만족시키는 정수는

-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2의 9개이다.

13 답 $a<x<c$ 또는 $d<x<f$

풀이 부등식 $f(x)g(x)>0$의 해는 $f(x)>0$, $g(x)>0$ 또는 $f(x)<0$, $g(x)<0$을 만족시키는 x의 값의 범위이다.

(i) $f(x)>0$, $g(x)>0$일 때

$f(x)>0$에서 $x<c$ 또는 $x>d$

$g(x)>0$에서 $a<x<f$

따라서 공통부분을 구하면

$a<x<c$ 또는 $d<x<f$

(ii) $f(x)<0$, $g(x)<0$일 때

$f(x)<0$에서 $c<x<d$

$g(x)<0$에서 $x<a$ 또는 $x>f$

따라서 공통부분은 없다.

(i), (ii)에서 해는 $a<x<c$ 또는 $d<x<f$이다.

14 답 11

풀이 $x^2-5x-24\leq0$에서

$(x+3)(x-8)\leq0$

따라서 $-3\leq x\leq8$이므로 $a=-3$, $b=8$에서 $b-a=11$이다.

15 답 $x\leq\frac{-2-\sqrt{13}}{3}$ 또는 $x\geq\frac{-2+\sqrt{13}}{3}$

풀이 $3(x^2-1)+4x\geq0$에서

$3x^2+4x-3\geq0$

이차방정식 $3x^2+4x-3=0$의 근이

$x=\frac{-2\pm\sqrt{13}}{3}$이므로

$3x^2+4x-3\geq0$의 해는

$3\left\{x-\left(\frac{-2-\sqrt{13}}{3}\right)\right\}\left\{x-\left(\frac{-2+\sqrt{13}}{3}\right)\right\}\geq0$

따라서 $x\leq\frac{-2-\sqrt{13}}{3}$ 또는 $x\geq\frac{-2+\sqrt{13}}{3}$이다.

16 답 $-\frac{1}{2}$

풀이 $4x^2+4x+1\leq0$에서

$(2x+1)^2\leq0$

이므로 $x=-\frac{1}{2}$

$2x^2+x+5<0$에서

$2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{39}{8}<0$

이므로 해는 없다.

따라서 $m=-\frac{1}{2}$, $n=0$이므로 $m+n=-\frac{1}{2}$이다.

17 답 6

풀이 이차부등식 $ax^2+bx+12\leq0$의 해가 $x\leq-1$ 또는 $x\geq4$이므로 $a<0$이다.

따라서 해가 $x\leq-1$ 또는 $x\geq4$이고 x^2의 계수가 a인 이차부등식은

$a\{x^2-(-1+4)x+(-1)\times4\}\leq0$

$ax^2-3ax-4a\leq0$

이므로 $ax^2+bx+12\leq0$과 계수를 비교하면

$-3a=b$, $-4a=12$에서 $a=-3$, $b=9$이다.

따라서 $a+b=6$이다.

다른 풀이 해가 $x\leq-1$ 또는 $x\geq4$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$x^2-(-1+4)x-4\geq0$

$x^2-3x-4\geq0$

이때 주어진 부등식은 $ax^2+bx+12\leq0$이므로

$x^2-3x-4\geq0$의 양변에 -3을 곱하면

$-3x^2+9x+12\leq0$

계수를 비교하면 $a=-3$, $b=9$이므로

$a+b=6$이다.

18 답 $-2<k<4$

풀이 이차부등식 $x^2-2(k-1)x+9>0$이 항상 성립하려면 이차방정식 $x^2-2(k-1)x+9=0$의 판별식을 D라고 할 때 $D<0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=\{-(k-1)\}^2-1\times9<0$

$k^2-2k-8<0$

$(k+2)(k-4)<0$

따라서 $-2<k<4$이다.

19 답 0

풀이 이차부등식 $(k+1)x^2-2(k+1)x+1\le0$이 단 하나의 해를 갖도록 하려면 $k+1>0$이고 이차방정식 $(k+1)x^2-2(k+1)x+1=0$의 판별식을 D라고 할 때 $D=0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=(k+1)^2-(k+1)\times1=0$

$k^2+k=0$

$k(k+1)=0$

따라서 $k=-1$ 또는 $k=0$

이때 $k+1>0$에서 $k>-1$이므로 $k=0$이다.

20 답 $-1<k<-\frac{1}{4}$

풀이 이차함수 $y=x^2+4kx-1$의 그래프가 직선 $y=-2x+(k-1)$보다 항상 위쪽에 있으려면

$x^2+4kx-1>-2x+(k-1)$

이어야 한다.

즉, $x^2+2(2k+1)x-k>0$이므로 이차방정식 $x^2+2(2k+1)x-k=0$의 판별식을 D라고 할 때 $D<0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=(2k+1)^2-1\times(-k)<0$

$4k^2+5k+1<0$

$(4k+1)(k+1)<0$

따라서 $-1<k<-\frac{1}{4}$이다.

21 답 $x\le-7$ 또는 $x\ge7$

풀이 $-x^2+2|x|+35\le0$에서

$x^2-2|x|-35\ge0$

이를 $|x|^2-2|x|-35\ge0$과 같이 생각하면

$(|x|+5)(|x|-7)\ge0$

이때 $|x|+5>0$이므로

$|x|-7\ge0$

$|x|\ge7$

따라서 $x\le-7$ 또는 $x\ge7$이다.

22 답 $x=-3$

풀이 $\begin{cases} x^2\ge x+12 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2(x^2+2x)-6\le0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

으로 놓으면

㉠에서 $x^2-x-12\ge0$

$(x+3)(x-4)\ge0$

$x\le-3$ 또는 $x\ge4$

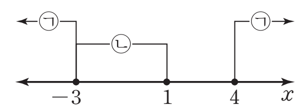
㉡에서 $2x^2+4x-6\le0$

$x^2+2x-3\le0$

$(x+3)(x-1)\le0$

$-3\le x\le1$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립부등식의 해는 $x=-3$이다.

23 답 1

풀이 $\begin{cases} 2x+3<x^2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2<6x-5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

으로 놓으면

㉠에서 $x^2-2x-3>0$

$(x+1)(x-3)>0$

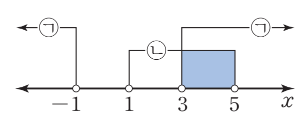
$x<-1$ 또는 $x>3$

㉡에서 $x^2-6x+5<0$

$(x-1)(x-5)<0$

$1<x<5$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립부등식의 해는 $3<x<5$이므로 이를 만족시키는 정수 x는 4의 1개이다.

24 답 $-4<a<1$

풀이 $\begin{cases} x^2+x-2<0 & \cdots\cdots ㉠ \\ (x-a)(x-a-2)<0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

으로 놓으면

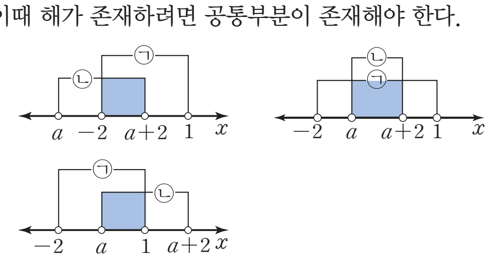
㉠에서 $(x+2)(x-1)<0$

$-2<x<1$

㉡에서 $a<a+2$이므로

$a<x<a+2$

이때 해가 존재하려면 공통부분이 존재해야 한다.



따라서 위의 그림과 같이 $-2<a+2<1$ 또는 $-2<a<1$이어야 한다.

즉, $-4<a<-1$ 또는 $-2<a<1$이므로 $-4<a<1$이다.

Ⅲ 경우의 수

Ⅲ-1 | 경우의 수 145-168쪽

01 답 (1) 6 (2) 3 (3) 4

풀이 (1) 나올 수 있는 모든 경우는 1, 2, 3, 4, 5, 6이므로 경우의 수는 6이다.

(2) 2의 배수의 눈이 나오는 경우는 2, 4, 6이므로 경우의 수는 3이다.

(3) 6의 약수의 눈이 나오는 경우는 1, 2, 3, 6이므로 경우의 수는 4이다.

02 답 (1) 9 (2) 5 (3) 3

풀이 (1) 나올 수 있는 모든 경우는 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9이므로 경우의 수는 9이다.

(2) 홀수가 적힌 공이 나오는 경우는 1, 3, 5, 7, 9이므로 경우의 수는 5이다.

(3) 9의 약수가 적힌 공이 나오는 경우는 1, 3, 9이므로 경우의 수는 3이다.

03 답 (1) 3 (2) 2 (3) 5

풀이 (1) 파란 공은 3개이므로 파란 공이 나오는 경우의 수는 3이다.

(2) 빨간 공은 2개이므로 빨간 공이 나오는 경우의 수는 2이다.

(3) 흰 공은 5개이므로 흰 공이 나오는 경우의 수는 5이다.

04 답 (1) 2 (2) 2

풀이 (1) 같은 면이 나오는 경우는 (앞면, 앞면), (뒷면, 뒷면)이므로 경우의 수는 2이다.

(2) 서로 다른 면이 나오는 경우는 (앞면, 뒷면), (뒷면, 앞면)이므로 경우의 수는 2이다.

05 답 (1) 12 (2) 6 (3) 6
(4) 12 (5) 4 (6) 2

풀이 (1)
A < A < B
        C
  B < A
        C
  C < A
        B
B < A < A
        C
  C — A
C < A < A
        B
  B — A

따라서 구하는 경우의 수는 12이다.

(2)
1 < 2 — 3
  3 — 2
2 < 1 — 3
  3 — 1
3 < 1 — 2
  2 — 1

따라서 구하는 자연수의 개수는 6이다.

(3) A를 가장 앞에 세우고 3명의 학생 B, C, D를 세우는 수형도를 그려 보면 다음과 같다.

B < C — D
  D — C
C < B — D
  D — B
D < B — C
  C — B

따라서 구하는 경우의 수는 6이다.

(4)
A < B < B — C
        C — B
  C — B — B
B < A < B — C
        C — B
  B < A — C
        C — A
  C < A — B
        B — A
C < A — B — B
  B < A — B
        B — A

따라서 구하는 경우의 수는 12이다.

(5) $a_1 \neq 4$, $a_3=3$에서 a_1은 1 또는 2, a_3은 3만 올 수 있으므로 수형도를 그려 보면 다음과 같다.

a_1 a_2 a_3 a_4
1 < 2 — 3 — 4
  4 — 3 — 2
2 < 1 — 3 — 4
  4 — 3 — 1

따라서 구하는 자연수의 개수는 4이다.

(6) A B C
B < C — A
  A — ~~C~~
C < A — B
  ~~B~~ — A

따라서 구하는 경우의 수는 2이다.

06 답 (1) 9 (2) 20

풀이 (1) 합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는 $5+4=9$

(2) 곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는 $5\times4=20$

07 답 (1) 10 (2) 24

풀이 (1) 합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는 $6+4=10$

(2) 곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는 $6\times4=24$

08 답 (1) 15 (2) 56

풀이 (1) 합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는 $7+8=15$

(2) 곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는 $7\times8=56$

09 답 (1) 14 (2) 90

풀이 (1) 합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$6+5+3=14$

(2) 곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는 $6\times5\times3=90$

10 답 (1) 15 (2) 16 (3) 38

풀이 (1) $A \to B \to D$의 경로로 가는 경우는

$3\times1=3$(가지)

$A \to C \to D$의 경로로 가는 경우는

$2\times2=4$(가지)

$A \to B \to C \to D$의 경로로 가는 경우는

$3\times1\times2=6$(가지)

$A \to C \to B \to D$의 경로로 가는 경우는

$2\times1\times1=2$(가지)

따라서 합의 법칙에 의하여 구하는 방법의 수는

$3+4+6+2=\underline{15}$

(2) $A \to B \to D$의 경로로 가는 경우는

$2\times2=4$(가지)

$A \to C \to D$의 경로로 가는 경우는

$3\times4=12$(가지)

따라서 합의 법칙에 의하여 구하는 방법의 수는

$4+12=16$

(3) $A \to B \to D$의 경로로 가는 경우는

$3\times2=6$(가지)

$A \to C \to D$의 경로로 가는 경우는

$2\times3=6$(가지)

$A \to B \to C \to D$의 경로로 가는 경우는

$3\times2\times3=18$(가지)

$A \to C \to B \to D$의 경로로 가는 경우는

$2\times2\times2=8$(가지)

따라서 합의 법칙에 의하여 구하는 방법의 수는

$6+6+18+8=38$

11 답 (1) 9 (2) 6 (3) 6

풀이 주사위의 눈의 수는 1, 2, 3, $\cdots$, 6이므로 눈의 수의 합은 2, 3, 4, $\cdots$, 12이다.

(1) 4의 배수가 될 때는 4 또는 8 또는 12이다.

(i) 눈의 수의 합이 4가 되는 경우는

(1, 3), (2, 2), (3, 1)의 3가지

(ii) 눈의 수의 합이 8이 되는 경우는

(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)의 5가지

(iii) 눈의 수의 합이 12가 되는 경우는

(6, 6)의 1가지

따라서 합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$3+5+1=\underline{9}$

(2) 4 이하가 될 때는 2 또는 3 또는 4이다.

(i) 눈의 수의 합이 2가 되는 경우는 (1, 1)의 1가지

(ii) 눈의 수의 합이 3이 되는 경우는

(1, 2), (2, 1)의 2가지

(iii) 눈의 수의 합이 4가 되는 경우는

(1, 3), (2, 2), (3, 1)의 3가지

따라서 합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$1+2+3=6$

(3) 6의 배수가 될 때는 6 또는 12이다.

(i) 눈의 수의 합이 6이 되는 경우는

(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)의 5가지

(ii) 눈의 수의 합이 12가 되는 경우는

(6, 6)의 1가지

따라서 합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$5+1=6$

12 답 (1) 6 (2) 5 (3) 7 (4) 16

풀이 (1) z의 계수가 가장 크므로 z를 기준으로 구한다.

(i) $z=1$일 때, $x+2y=10$이므로 순서쌍 (x, y)는

(8, 1), (6, 2), (4, 3), (2, 4)의 4개

(ii) $z=2$일 때, $x+2y=5$이므로 순서쌍 (x, y)는

(3, 1), (1, 2)의 2개

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 $4+2=\underline{6}$

(2) z의 계수가 가장 크므로 z를 기준으로 구한다.

(i) $z=1$일 때, $x+2y=8$이므로 순서쌍 (x, y)는

(6, 1), (4, 2), (2, 3)의 3개

(ii) $z=2$일 때, $x+2y=5$이므로 순서쌍 (x, y)는

(3, 1), (1, 2)의 2개

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 $3+2=5$

(3) y의 계수가 가장 크므로 y를 기준으로 구한다.

(i) $y=1$일 때, $x+2z=14$이므로 순서쌍 (x, z)는

(12, 1), (10, 2), (8, 3), (6, 4), (4, 5), (2, 6)의 6개

(ii) $y=2$일 때, $x+2z=4$이므로 순서쌍 (x, z)는

(2, 1)의 1개

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 $6+1=7$

(4) x의 계수가 가장 크므로 x를 기준으로 구한다.

(i) $x=1$일 때, $2y+z=16$이므로 순서쌍 (y, z)는

(1, 14), (2, 12), (3, 10), (4, 8), (5, 6), (6, 4), (7, 2)의 7개

(ii) $x=2$일 때, $2y+z=12$이므로 순서쌍 (y, z)는

(1, 10), (2, 8), (3, 6), (4, 4), (5, 2)의 5개

(iii) $x=3$일 때, $2y+z=8$이므로 순서쌍 (y, z)는

(1, 6), (2, 4), (3, 2)의 3개

(iv) $x=4$일 때, $2y+z=4$이므로 순서쌍 (y, z)는

(1, 2)의 1개

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 $7+5+3+1=16$

13 답 (1) 6 (2) 8 (3) 9 (4) 24

풀이 (1) a, b 각각에 대하여 x, y, z 중 하나가 곱해진다.

따라서 구하는 항의 개수는 $2\times\underline{3}=\underline{6}$

(2) a, b, c, d 각각에 대하여 x, y 중 하나가 곱해진다.

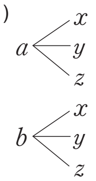
따라서 구하는 항의 개수는 $4\times2=8$

(3) 1, x, x^2 각각에 대하여 1, x^3, x^6 중 하나가 곱해진다.
따라서 구하는 항의 개수는 $3\times3=9$

(4) a, b 각각에 대하여 c, d, e 중 하나, f, g, h, i 중 하나가 곱해진다.
따라서 구하는 항의 개수는 $2\times3\times4=24$

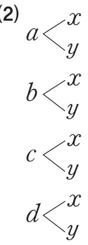
다른 풀이

(1)



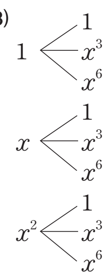
$\therefore$ 6가지

(2)



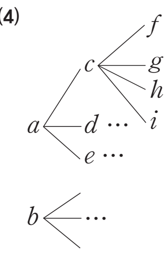
$\therefore$ 8가지

(3)



$\therefore$ 9가지

(4)



$\therefore$ 24가지

14 답 (1) 9 (2) 9 (3) 12 (4) 24

풀이 (1) 36을 소인수분해하면 $36=2^2\times3^2$이므로 36의 양의 약수는 2^2의 양의 약수인 1, 2, 2^2 중에서 하나의 수, 3^2의 양의 약수인 1, 3, 3^2 중에서 하나의 수를 각각 선택하여 곱한 수이다.

$\times$	1	2	2^2
1	1×1	1×2	1×2^2
3	3×1	3×2	3×2^2
3^2	$3^2\times1$	$3^2\times2$	$3^2\times2^2$

따라서 곱의 법칙에 의하여 36의 양의 약수의 개수는
$3\times3=9$

(2) 100을 소인수분해하면 $100=2^2\times5^2$이므로 100의 양의 약수는 2^2의 양의 약수인 1, 2, 2^2 중에서 하나의 수, 5^2의 양의 약수인 1, 5, 5^2 중에서 하나의 수를 각각 선택하여 곱한 수이다.
따라서 곱의 법칙에 의하여 100의 양의 약수의 개수는
$3\times3=9$

(3) 108을 소인수분해하면 $108=2^2\times3^3$이므로 108의 양의 약수는 2^2의 양의 약수인 1, 2, 2^2 중에서 하나의 수, 3^3의 양의 약수인 1, 3, 3^2, 3^3 중에서 하나의 수를 각각 선택하여 곱한 수이다.
따라서 곱의 법칙에 의하여 108의 양의 약수의 개수는
$3\times4=12$

(4) 360을 소인수분해하면 $360=2^3\times3^2\times5$이므로 360의 양의 약수는 2^3의 양의 약수인 1, 2, 2^2, 2^3 중에서 하나의 수, 3^2의 양의 약수인 1, 3, 3^2 중에서 하나의 수, 5의 양의 약수인 1, 5 중에서 하나의 수를 각각 선택하여 곱한 수이다.
따라서 곱의 법칙에 의하여 360의 양의 약수의 개수는
$4\times3\times2=24$

다른 풀이 자연수 $p^l\times q^m\times r^n$ (p, q, r는 서로 다른 소수, l, m, n은 자연수)의 양의 약수의 개수는
$(l+1)(m+1)(n+1)$이다.

(1) $36=2^2\times3^2$이므로 양의 약수의 개수는
$(2+1)\times(2+1)=9$

(2) $100=2^2\times5^2$이므로 양의 약수의 개수는
$(2+1)\times(2+1)=9$

(3) $108=2^2\times3^3$이므로 양의 약수의 개수는
$(2+1)\times(3+1)=12$

(4) $360=2^3\times3^2\times5$이므로 양의 약수의 개수는
$(3+1)\times(2+1)\times(1+1)=24$

15 답 (1) 48 (2) 48 (3) 72

풀이 (1) A에 칠할 수 있는 색은 4가지
B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지
C에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한 2가지
D에 칠할 수 있는 색은 A, C에 칠한 색을 제외한 2가지
따라서 구하는 방법의 수는
$4\times3\times2\times2=48$

(2) A에 칠할 수 있는 색은 4가지
B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지
C에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한 2가지
D에 칠할 수 있는 색은 B, C에 칠한 색을 제외한 2가지
따라서 구하는 방법의 수는
$4\times3\times2\times2=48$

(3) A에 칠할 수 있는 색은 4가지
B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지
C에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 3가지
D에 칠할 수 있는 색은 B, C에 칠한 색을 제외한 2가지
따라서 구하는 방법의 수는
$4\times3\times3\times2=72$

16 답 (1) ① 23 ② 19 (2) ① 44 ② 26
(3) ① 29 ② 24

풀이 (1) ① 100원짜리 1개로 지불할 수 있는 방법
➡ 0개, 1개의 2가지
50원짜리 2개로 지불할 수 있는 방법
➡ 0개, 1개, 2개의 3가지
10원짜리 3개로 지불할 수 있는 방법
➡ 0개, 1개, 2개, 3개의 4가지
이때 0원을 지불하는 것은 제외해야 하므로 지불할 수 있는 방법의 수는
$2\times3\times4-1=23$

② 100원짜리 1개로 만들 수 있는 금액
➡ 0원, 100원 …… ㉠
50원짜리 2개로 만들 수 있는 금액

➡ 0원, 50원, 100원 ...... ㉡

10원짜리 3개로 만들 수 있는 금액

➡ 0원, 10원, 20원, 30원

그런데 ㉠, ㉡에서 100원이 중복되므로 100원짜리 1개를 50원짜리 2개로 생각하면 구하는 금액의 수는 50원짜리 4개, 10원짜리 3개로 지불할 수 있는 방법의 수와 같다.

50원짜리 4개로 지불할 수 있는 방법

➡ 0개, 1개, 2개, 3개, 4개의 5가지

10원짜리 3개로 지불할 수 있는 방법

➡ 0개, 1개, 2개, 3개의 4가지

이때 0원을 지불하는 것은 제외해야 하므로 지불할 수 있는 금액의 수는

$5\times4-1=19$

(2) ① 500원짜리 2개로 지불할 수 있는 방법

➡ 0개, 1개, 2개의 3가지

100원짜리 2개로 지불할 수 있는 방법

➡ 0개, 1개, 2개의 3가지

50원짜리 4개로 지불할 수 있는 방법

➡ 0개, 1개, 2개, 3개, 4개의 5가지

이때 0원을 지불하는 것은 제외해야 하므로 지불할 수 있는 방법의 수는

$3\times3\times5-1=44$

② 500원짜리 2개로 만들 수 있는 금액

➡ 0원, 500원, 1000원

100원짜리 2개로 만들 수 있는 금액

➡ 0원, 100원, 200원 ...... ㉠

50원짜리 4개로 만들 수 있는 금액

➡ 0원, 50원, 100원, 150원, 200원 ...... ㉡

그런데 ㉠, ㉡에서 100원, 200원이 중복되므로 100원짜리 2개를 50원짜리 4개로 생각하면 구하는 금액의 수는 500원짜리 2개, 50원짜리 8개로 지불할 수 있는 방법의 수와 같다.

500원짜리 2개로 지불할 수 있는 방법

➡ 0개, 1개, 2개의 3가지

50원짜리 8개로 지불할 수 있는 방법

➡ 0개, 1개, 2개, ⋯, 8개의 9가지

이때 0원을 지불하는 것은 제외해야 하므로 지불할 수 있는 금액의 수는

$3\times9-1=26$

(3) ① 1000원짜리 1장으로 지불할 수 있는 방법

➡ 0장, 1장의 2가지

500원짜리 2개로 지불할 수 있는 방법

➡ 0개, 1개, 2개의 3가지

100원짜리 4개로 지불할 수 있는 방법

➡ 0개, 1개, 2개, 3개, 4개의 5가지

이때 0원을 지불하는 것은 제외해야 하므로 지불할 수 있는 방법의 수는

$2\times3\times5-1=29$

② 1000원짜리 1장으로 만들 수 있는 금액

➡ 0원, 1000원 ...... ㉠

500원짜리 2개로 만들 수 있는 금액

➡ 0원, 500원, 1000원 ...... ㉡

100원짜리 4개로 만들 수 있는 금액

➡ 0원, 100원, 200원, 300원, 400원

그런데 ㉠, ㉡에서 1000원이 중복되므로 1000원짜리 1장을 500원짜리 2개로 생각하면 구하는 금액의 수는 500원짜리 4개, 100원짜리 4개로 지불할 수 있는 방법의 수와 같다.

500원짜리 4개로 지불할 수 있는 방법

➡ 0개, 1개, 2개, 3개, 4개의 5가지

100원짜리 4개로 지불할 수 있는 방법

➡ 0개, 1개, 2개, 3개, 4개의 5가지

이때 0원을 지불하는 것은 제외해야 하므로 지불할 수 있는 금액의 수는

$5\times5-1=24$

다른 풀이 단위가 다른 화폐가 각각 p개, q개, r개일 때, 지불할 수 있는 방법의 수는 $(p+1)(q+1)(r+1)-1$이다.

(1) ① $(1+1)\times(2+1)\times(3+1)-1=23$

(2) ① $(2+1)\times(2+1)\times(4+1)-1=44$

(3) ① $(1+1)\times(2+1)\times(4+1)-1=29$

17 답 (1) ${}_4P_3$ (2) ${}_8P_4$ (3) ${}_5P_5$ (4) ${}_{10}P_1$

풀이 (1) 서로 다른 4개에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 방법의 수는 ${}_4P_3$

18 답 (1) 90 (2) 210 (3) 720 (4) 5 (5) 1 (6) 24

풀이 (1) ${}_{10}P_2=10\times9=90$

(2) ${}_7P_3=7\times6\times5=210$

(3) ${}_6P_6=6!=6\times5\times4\times3\times2\times1=720$

(6) $4!=4\times3\times2\times1=24$

19 답 (1) 6 (2) 4 (3) 5 (4) 6 (5) 7 (6) 9

풀이 (1) ${}_nP_2=30$에서 $n(n-1)=6\times5$이므로 $n=6$

(2) ${}_nP_n=24$에서

$n(n-1)\times\cdots\times2\times1=4\times3\times2\times1$이므로 $n=4$

(3) ${}_nP_3\times3!=360$에서 ${}_nP_3\times6=360$

${}_nP_3=60$에서 $n(n-1)(n-2)=5\times4\times3$이므로

$n=5$

(4) ${}_nP_2=5n$에서 $n(n-1)=5n$

${}_nP_2$에서 $n\geq2$이므로 $n-1=5$ $\therefore n=6$

(5) ${}_nP_4=20{}_nP_2$에서

$n(n-1)(n-2)(n-3)=20n(n-1)$

${}_nP_4$에서 $n\geq4$이므로 $(n-2)(n-3)=20$

$(n-2)(n-3)=5\times4$ $\therefore n=7$

(6) ${}_nP_3:{}_nP_2=7:1$에서 ${}_nP_3=7{}_nP_2$이므로

$n(n-1)(n-2)=7n(n-1)$

${}_nP_3$에서 $n\geq3$이므로 $n-2=7$ $\therefore n=9$

20 답 (1) 3 (2) 2 (3) 2 (4) 6 (5) 2 (6) 4

풀이 (1) ${}_5P_r=60=5\times4\times3$이므로 $r=\underline{3}$

(2) ${}_8P_r=56=8\times7$이므로 $r=2$

(3) ${}_{10}P_r=90=10\times9$이므로 $r=2$

(4) ${}_rP_r=720$에서

$r(r-1)\times\cdots\times3\times2\times1=6\times5\times4\times3\times2\times1$이므로

$r=6$

(5) ${}_9P_r\times5!=8640$에서 ${}_9P_r\times120=8640$

${}_9P_r=72=9\times8$이므로 $r=2$

(6) ${}_6P_r=15{}_4P_3$에서 ${}_6P_r=15\times4\times3\times2$

${}_6P_r=6\times5\times4\times3$이므로 $r=4$

21 답 (1) 72 (2) 6 (3) 90 (4) 336 (5) 20 (6) 24 (7) 380 (8) 24 (9) 120 (10) 60

풀이 (1) 서로 다른 9개에서 2개를 택하는 순열의 수와 같으므로 ${}_9P_2=9\times8=\underline{72}$

(2) ${}_3P_3=3!=3\times2\times1=6$

(3) ${}_{10}P_2=10\times9=90$

(4) ${}_8P_3=8\times7\times6=336$

(5) ${}_5P_2=5\times4=20$

(6) ${}_4P_4=4\times3\times2\times1=24$

(7) ${}_{20}P_2=20\times19=380$

(8) ${}_4P_3=4\times3\times2=24$

(9) ${}_5P_5=5\times4\times3\times2\times1=120$

(10) ${}_5P_3=5\times4\times3=60$

22 답 (1) 144 (2) 240 (3) 1440 (4) 48 (5) 288 (6) 1440

풀이 (1) 여학생 3명을 한 사람으로 생각하여 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $4!=24$

여학생 3명이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는 $24\times6=\underline{144}$

(2) A, B를 한 사람으로 생각하여 5명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $5!=120$

A, B가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는 $120\times2=240$

(3) a와 c를 한 문자로 생각하여 6개를 일렬로 세우는 경우의 수는 $6!=720$

a와 c가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는 $720\times2=1440$

(4) 모음 e와 o를 한 문자로 생각하여 4개를 일렬로 세우는 경우의 수는 $4!=24$

e와 o가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는 $24\times2=48$

(5) 중학생 4명을 한 사람, 고등학생 3명을 한 사람으로 생각하여 2명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $2!=2$

중학생 4명이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $4!=24$

고등학생 3명이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는 $2\times24\times6=288$

(6) 국어책 3권을 한 권, 영어책 2권을 한 권으로 생각하여 5권을 일렬로 꽂는 경우의 수는 $5!=120$

국어책 3권의 자리를 바꾸어 꽂는 경우의 수는

$3!=6$

영어책 2권의 자리를 바꾸어 꽂는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는 $120\times6\times2=1440$

23 답 (1) 1440 (2) 72 (3) 480 (4) 14400 (5) 144

풀이 (1) 남학생 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $4!=24$

∨남∨남∨남∨남∨

남학생의 양 끝과 사이사이의 5개의 자리에 여학생 3명을 세우는 경우의 수는 ${}_5P_3=60$

따라서 구하는 경우의 수는 $24\times60=\underline{1440}$

(2) A, B를 제외한 학생 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $3!=6$

∨학∨학∨학∨

이들의 양 끝과 사이사이의 4개의 자리에 A, B 2명을 세우는 경우의 수는 ${}_4P_2=12$

따라서 구하는 경우의 수는 $6\times12=72$

(3) 4개의 자음 b, c, d, f를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $4!=24$

∨자∨자∨자∨자∨

자음의 양 끝과 사이사이의 5개의 자리에 모음 a, e 2개를 나열하는 경우의 수는 ${}_5P_2=20$

따라서 구하는 경우의 수는 $24\times20=480$

(4) 2학년 학생 5명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$5!=120$

∨2∨2∨2∨2∨2∨

2학년 학생 양 끝과 사이사이의 6개의 자리에 1학년 학생 3명을 세우는 경우의 수는 ${}_6P_3=120$

따라서 구하는 경우의 수는 $120\times120=14400$

(5) 과학책 3권을 일렬로 꽂는 경우의 수는 $3!=6$

∨과∨과∨과∨

과학책의 양 끝과 사이사이의 4개의 자리에 수학책 3권을 꽂는 경우의 수는 ${}_4P_3=24$

따라서 구하는 경우의 수는 $6\times24=144$

24 답 (1) 120 (2) 210 (3) 20 (4) 30 (5) 24

풀이 (1) 맨 앞에 A를 세우고 나머지 5명 중에서 4명을 택하여 일렬로 세우면 되므로 구하는 경우의 수는 ${}_5P_4=\underline{120}$

(2) 맨 뒤에 선생님을 세우고 나머지 7명 중에서 3명을 택하여 일렬로 세우면 되므로 구하는 경우의 수는 ${}_7P_3=210$

(3) 회장으로 F를 뽑고 나머지 5명 중에서 부회장 1명, 총무 1명을 뽑으면 되므로 구하는 경우의 수는 ${}_5P_2=20$

(4) 맨 뒤에 g를 나열하고 나머지 6개 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 ${}_6P_2=30$

(5) 맨 앞에 a를 나열하고 나머지 4개 중에서 3개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 ${}_4P_3=24$

25 답 (1) 576 (2) 70 (3) 84 (4) 108 (5) 3600

풀이 (1) (i) 6개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$6!=720$
(ii) 양 끝에 모두 모음이 오는 경우의 수는
(o, a, e 중 2개를 양 끝에 나열하는 경우의 수)
×(나머지 4개를 나열하는 경우의 수)
이므로 ${}_3P_2\times 4!=6\times 24=144$
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $720-144=576$

(2) (i) 10명의 학생 중에서 회장 1명, 부회장 1명을 뽑는 경우의 수는 ${}_{10}P_2=90$
(ii) 회장과 부회장이 모두 여학생인 경우의 수는
여학생 5명 중에서 회장 1명, 부회장 1명을 뽑는 경우의 수와 같으므로 ${}_5P_2=20$
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $90-20=70$

(3) (i) 5개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $5!=120$
(ii) 양 끝에 모두 자음이 오는 경우의 수는
(p, w, r 중 2개를 양 끝에 나열하는 경우의 수)
×(나머지 3개를 나열하는 경우의 수)
이므로 ${}_3P_2\times 3!=6\times 6=36$
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $120-36=84$

(4) (i) 5개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $5!=120$
(ii) a, b, c 중에서 어느 것도 이웃하지 않도록 나열하는 경우의 수는
(d, e를 나열하는 경우의 수)×
(d와 e 사이와 양 끝에 a, b, c를 나열하는 경우의 수)
이므로 $2!\times {}_3P_3=2\times 6=12$
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $120-12=108$

(5) (i) 7개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $7!=5040$
(ii) e, i, a 중에서 어느 것도 이웃하지 않도록 나열하는 경우의 수는
(s, p, c, l을 나열하는 경우의 수)
×(s, p, c, l 사이와 양 끝에 e, i, a를 나열하는 경우의 수)
이므로 $4!\times {}_5P_3=24\times 60=1440$
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $5040-1440=3600$

26 답 (1) 72 (2) 1152

풀이 (1) (i) 남 여 남 여 남 여로 서는 경우
남학생 자리에 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $3!$
여학생 자리에 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $3!$
이므로 $3!\times 3!=36$
(ii) 여 남 여 남 여 남으로 서는 경우
여학생 자리에 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $3!$
남학생 자리에 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $3!$
이므로 $3!\times 3!=36$
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $36+36=72$

(2) (i) 영 중 영 중 영 중 영 중으로 꽂는 경우
영어책 자리에 4권을 일렬로 꽂는 경우의 수는 $4!$
중국어책 자리에 4권을 일렬로 꽂는 경우의 수는 $4!$
이므로 $4!\times 4!=576$
(ii) 중 영 중 영 중 영 중 영으로 꽂는 경우
중국어책 자리에 4권을 일렬로 꽂는 경우의 수는 $4!$
영어책 자리에 4권을 일렬로 꽂는 경우의 수는 $4!$
이므로 $4!\times 4!=576$
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $576+576=1152$

27 답 (1) 12 (2) 144

풀이 (1) 고등학생 2명을 일렬로 세우고 양 끝과 그 사이에 중학생 3명을 세우면 된다.

중 고 중 고 중

따라서 구하는 경우의 수는 $2!\times 3!=12$

(2) 모음 u, i, e 3개를 일렬로 나열하고 양 끝과 그 사이에 자음 j, s, t, c 4개를 나열하면 된다.

자 모 자 모 자 모 자

따라서 구하는 경우의 수는 $3!\times 4!=144$

28 답 (1) 11 (2) 68

풀이 (1) a□□□ 꼴인 문자열의 개수는 $3!=6$
ba□□, bc□□ 꼴인 문자열의 개수는 $2\times 2!=4$
bd□□ 꼴인 문자열에서 $bdac$의 순서는 1번째이다.
따라서 $bdac$가 나타나는 순서는 $6+4+1=11$

(2) ㄱ□□□□, ㄴ□□□□ 꼴인 문자열의 개수는
$2\times 4!=48$
ㄷㄱ□□□, ㄷㄴ□□□, ㄷㄹ□□□ 꼴인 문자열의 개수는 $3\times 3!=18$
ㄷㅁ□□□ 꼴인 문자열의 순서는
ㄷㅁㄱㄴㄹ, ㄷㅁㄱㄹㄴ, ⋯
이므로 ㄷㅁㄱㄹㄴ은 2번째이다.
따라서 ㄷㅁㄱㄹㄴ이 나타나는 순서는
$48+18+2=68$

29 답 (1) $dacb$ (2) ㄹㄱㄷㄴㅁ

풀이 (1) a□□□ 꼴인 문자열의 개수는 $3!=6$
b□□□ 꼴인 문자열의 개수는 $3!=6$
c□□□ 꼴인 문자열의 개수는 $3!=6$
a 또는 b 또는 c를 시작으로 하는 문자열이 모두 18개이므로 20번째로 나타나는 문자열은 d□□□ 꼴인 문자열에서 2번째에 있다.
d□□□ 꼴인 문자열의 순서는 $dabc$, $dacb$, ⋯
따라서 구하는 문자열은 $dacb$이다.

(2) ㄱ□□□□ 꼴인 문자열의 개수는 $4!=24$
ㄴ□□□□ 꼴인 문자열의 개수는 $4!=24$
ㄷ□□□□ 꼴인 문자열의 개수는 $4!=24$
ㄱ 또는 ㄴ 또는 ㄷ을 시작으로 하는 문자열이 모두 72개이므로 75번째로 나타나는 문자열은 ㄹ□□□□ 꼴인 문자열에서 3번째에 있다.
ㄹ□□□□ 꼴인 문자열의 순서는
ㄹㄱㄴㄷㅁ, ㄹㄱㄴㅁㄷ, ㄹㄱㄷㄴㅁ, ⋯
따라서 구하는 문자열은 ㄹㄱㄷㄴㅁ이다.

30 답 (1) 48 (2) 120 (3) 300 (4) 720

풀이 (1) 백의 자리에는 0이 올 수 없으므로 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4의 4가지이다.

십의 자리와 일의 자리에는 백의 자리에 온 숫자를 제외한 4개의 숫자 중에서 2개를 택하여 일렬로 배열하면 되므로 ${}_4P_2=12$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$4\times\underline{12}=\underline{48}$

(2) 5개의 숫자 중에서 4개를 택하여 일렬로 배열하면 되므로 ${}_5P_4=120$

(3) 천의 자리에는 0이 올 수 없으므로 천의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4, 5의 5가지이다.

백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에는 천의 자리에 온 숫자를 제외한 5개의 숫자 중에서 3개를 택하여 일렬로 배열하면 되므로 ${}_5P_3=60$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$5\times60=300$

(4) 천의 자리에는 0이 올 수 없으므로 천의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6가지이다.

백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에는 천의 자리에 온 숫자를 제외한 6개의 숫자 중에서 3개를 택하여 일렬로 배열하면 되므로 ${}_6P_3=120$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$6\times120=720$

31 답 (1) 30 (2) 156

풀이 (1) (i) □□0 꼴

4개의 숫자 1, 2, 3, 4에서 서로 다른 2개의 숫자를 택하여 일렬로 배열하면 되므로 ${}_4P_2=\underline{12}$

(ii) □□2, □□4 꼴

백의 자리에는 0이 올 수 없으므로 3개의 숫자가 올 수 있고, 십의 자리에는 백의 자리와 일의 자리에 온 숫자를 제외한 3개의 숫자가 올 수 있으므로

$3\times3\times2=18$

(i), (ii)에서 구하는 짝수의 개수는 $12+18=\underline{30}$

(2) (i) □□□0 꼴

5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5에서 서로 다른 3개의 숫자를 택하여 일렬로 배열하면 되므로 ${}_5P_3=60$

(ii) □□□2, □□□4 꼴

천의 자리에는 0이 올 수 없으므로 4개의 숫자가 올 수 있고, 백의 자리와 십의 자리에는 천의 자리와 일의 자리에 온 숫자를 제외한 4개의 숫자에서 2개를 택하여 일렬로 배열하면 되므로 $4\times{}_4P_2\times2=96$

(i), (ii)에서 구하는 짝수의 개수는 $60+96=156$

32 답 (1) 15 (2) 72

풀이 (1) (i) □04, □20, □40 꼴

3개의 숫자에서 1개의 숫자를 택하면 되므로

${}_3P_1\times3=3\times3=9$

(ii) □12, □24, □32 꼴

백의 자리에는 0이 올 수 없으므로 2개의 숫자가 올 수 있다.

따라서 $2\times3=6$이다.

(i), (ii)에서 구하는 4의 배수의 개수는

$9+6=\underline{15}$

(2) (i) □□04, □□20, □□40 꼴

4개의 숫자에서 서로 다른 2개의 숫자를 택하여 일렬로 배열하면 되므로 ${}_4P_2\times3=36$

(ii) □□12, □□24, □□32, □□52 꼴

천의 자리에는 0이 올 수 없으므로 3개의 숫자가 올 수 있다.

따라서 $3\times3\times4=36$이다.

(i), (ii)에서 구하는 4의 배수의 개수는

$36+36=72$

33 답 (1) 14 (2) 16 (3) 36 (4) 60

풀이 (1) 1□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$

2□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$

31□□ 꼴인 자연수의 개수는 $2!=2$

따라서 3200보다 작은 자연수의 개수는

$6+6+\underline{2}=\underline{14}$

(2) 23□□ 꼴인 자연수의 개수는 $2!=2$

24□□ 꼴인 자연수의 개수는 $2!=2$

3□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$

4□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$

따라서 2300보다 큰 자연수의 개수는

$2+2+6+6=16$

(3) 1□□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $4!=24$

21□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$

23□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$

따라서 24000보다 작은 자연수의 개수는

$24+6+6=36$

(4) 34□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$

35□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$

4□□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $4!=24$

5□□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $4!=24$

따라서 34000보다 큰 자연수의 개수는

$6+6+24+24=60$

34 답 (1) ${}_5C_3$ (2) ${}_8C_2$ (3) ${}_4C_4$ (4) ${}_7C_6$ (5) ${}_9C_1$

풀이 (1) 서로 다른 5개에서 3개를 택하는 방법의 수는 $\underline{{}_5C_3}$

35 답 (1) 190 (2) 120 (3) 1 (4) 1 (5) 105 (6) 30

풀이 (1) ${}_{20}C_2=\frac{{}_{20}P_2}{2!}=\frac{20\times19}{2\times1}=\underline{190}$

(2) ${}_{10}C_3=\frac{{}_{10}P_3}{3!}=\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$

(5) ${}_{15}C_{13}={}_{15}C_2=\frac{{}_{15}P_2}{2!}=\frac{15\times14}{2\times1}=105$

(6) ${}_{30}C_{29}={}_{30}C_1=30$

36 답 (1) 6　(2) 6　(3) 7　(4) 8　(5) 10　(6) 15

풀이 (1) ${}_{n}C_{3}=20$에서 $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3\times2\times1}=20$이므로
$n(n-1)(n-2)=6\times5\times4$
따라서 $n=\underline{6}$이다.
(2) ${}_{n}C_{2}=15$에서 $\dfrac{n(n-1)}{2\times1}=15$이므로
$n(n-1)=6\times5$
따라서 $n=6$이다.
(3) ${}_{n}C_{3}=35$에서 $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3\times2\times1}=35$이므로
$n(n-1)(n-2)=7\times6\times5$
따라서 $n=7$이다.
(4) ${}_{n}C_{3}={}_{n}C_{n-3}$이므로 ${}_{n}C_{n-3}={}_{n}C_{5}$에서
$n-3=5$
따라서 $n=\underline{8}$이다.
(5) ${}_{n}C_{4}={}_{n}C_{n-4}$이므로 ${}_{n}C_{n-4}={}_{n}C_{6}$에서
$n-4=6$
따라서 $n=10$이다.
(6) ${}_{n}C_{7}={}_{n}C_{n-7}$이므로 ${}_{n}C_{n-7}={}_{n}C_{8}$에서
$n-7=8$
따라서 $n=15$이다.

37 답 (1) 3　(2) 7　(3) 2, 6　(4) 3, 7　(5) 6　(6) 10

풀이 (1) ${}_{7}C_{4}={}_{7}C_{3}$이므로 $r=\underline{3}$
(2) ${}_{12}C_{5}={}_{12}C_{7}$이므로 $r=7$
(3) ${}_{8}C_{r}=28=\dfrac{8\times7}{2\times1}$이므로 $r=\underline{2}$
또, ${}_{8}C_{2}={}_{8}C_{6}$이므로 $r=6$
따라서 $r=\underline{2}$ 또는 $r=6$이다.
(4) ${}_{10}C_{r}=120=\dfrac{10\times9\times8}{3\times2\times1}$이므로 $r=3$
또, ${}_{10}C_{3}={}_{10}C_{7}$이므로 $r=7$
따라서 $r=3$ 또는 $r=7$이다.
(5) ${}_{9}C_{r}={}_{9}C_{9-r}$이므로 ${}_{9}C_{9-r}={}_{9}C_{r-3}$에서
$9-r=r-3$, $2r=12$
따라서 $r=6$이다.
(6) ${}_{14}C_{r}={}_{14}C_{14-r}$이므로 ${}_{14}C_{14-r}={}_{14}C_{r-6}$에서
$14-r=r-6$, $2r=20$
따라서 $r=10$이다.

38 답 (1) 15　(2) 10　(3) 84　(4) 435　(5) 56

풀이 (1) 서로 다른 6개에서 2개를 택하는 조합의 수와 같으므로 ${}_{6}C_{2}=\dfrac{6\times5}{2\times1}=\underline{15}$
(2) ${}_{5}C_{2}=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$
(3) ${}_{9}C_{3}=\dfrac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$
(4) ${}_{30}C_{2}=\dfrac{30\times29}{2\times1}=435$
(5) ${}_{8}C_{3}=\dfrac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$

39 답 (1) 90　(2) 105

풀이 (1) 남학생 6명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는 ${}_{6}C_{2}=15$
여학생 4명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는 ${}_{4}C_{2}=6$
따라서 구하는 경우의 수는
$15\times6=\underline{90}$
(2) 검은 공 5개 중에서 1개를 뽑는 경우의 수는 ${}_{5}C_{1}=5$
흰 공 7개 중에서 2개를 뽑는 경우의 수는 ${}_{7}C_{2}=21$
따라서 구하는 경우의 수는
$5\times21=105$

40 답 (1) 24　(2) 77

풀이 (1) 남학생 6명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는
${}_{6}C_{3}=20$
여학생 4명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는
${}_{4}C_{3}={}_{4}C_{1}=\underline{4}$
따라서 구하는 경우의 수는
$20+4=\underline{24}$
(2) 검은 공 8개 중에서 5개를 뽑는 경우의 수는
${}_{8}C_{5}={}_{8}C_{3}=56$
흰 공 7개 중에서 5개를 뽑는 경우의 수는
${}_{7}C_{5}={}_{7}C_{2}=21$
따라서 구하는 경우의 수는
$56+21=77$

41 답 (1) 8　(2) 10　(3) 6　(4) 84　(5) 680　(6) 715

풀이 (1) 특정한 2명을 미리 뽑아 놓고 나머지 8명에서 $\underline{1}$명을 뽑으면 되므로 ${}_{8}C_{1}=\underline{8}$
(2) A를 미리 뽑아 놓고 나머지 5개에서 3개를 뽑으면 되므로 ${}_{5}C_{3}=10$
(3) 9의 약수는 1, 3, 9의 3개이므로 9개의 구슬 중에서 3개를 미리 뽑아 놓고 나머지 6개에서 1개를 뽑으면 되므로 ${}_{6}C_{1}=6$
(4) 특정한 남학생 1명을 미리 뽑아 놓고 나머지 9명에서 3명을 뽑으면 되므로 ${}_{9}C_{3}=84$
(5) 특정한 야구 선수 3명을 미리 뽑아 놓고 나머지 17명 중에서 3명을 뽑으면 되므로 ${}_{17}C_{3}=680$
(6) 특정한 고등학생 4명을 미리 뽑아 놓고 나머지 13명에서 4명을 뽑으면 되므로 ${}_{13}C_{4}=715$

42 답 (1) 56　(2) 10　(3) 126　(4) 330　(5) 220

풀이 (1) 특정한 2명을 제외한 나머지 8명에서 $\underline{3}$명을 뽑으면 되므로 ${}_{8}C_{3}=\underline{56}$
(2) F를 제외한 나머지 5개에서 3개를 뽑으면 되므로
${}_{5}C_{3}=10$
(3) 특정한 남학생 2명을 제외한 나머지 9명에서 5명을 뽑으면 되므로 ${}_{9}C_{5}={}_{9}C_{4}=126$

(4) 특정한 야구 선수 1명을 제외한 나머지 11명에서 4명을 뽑으면 되므로 ${}_{11}C_4=330$

(5) 특정한 초등학생 2명을 제외한 나머지 12명에서 3명을 뽑으면 되므로 ${}_{12}C_3=220$

43 답 (1) 266 (2) 80 (3) 465 (4) 364

풀이 (1) 전체 13명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_{13}C_3=286$

여학생 6명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_6C_3=20$

따라서 구하는 경우의 수는

$286-20=266$

(2) 전체 9권 중에서 3권을 뽑는 경우의 수는

${}_9C_3=84$

소설책 4권 중에서 3권을 뽑는 경우의 수는

${}_4C_3={}_4C_1=4$

따라서 구하는 경우의 수는

$84-4=80$

(3) 전체 12명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는

${}_{12}C_4=495$

수영 선수 6명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는

${}_6C_4={}_6C_2=15$

체조 선수 6명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는

${}_6C_4={}_6C_2=15$

따라서 구하는 경우의 수는

$495-(15+15)=465$

(4) 전체 15자루 중에서 3자루를 뽑는 경우의 수는

${}_{15}C_3=455$

사인펜 8자루 중에서 3자루를 뽑는 경우의 수는

${}_8C_3=56$

색연필 7자루 중에서 3자루를 뽑는 경우의 수는

${}_7C_3=35$

따라서 구하는 경우의 수는

$455-(56+35)=364$

44 답 (1) 18000 (2) 360 (3) 1440

풀이 (1) (i) 남학생 6명 중에서 2명, 여학생 5명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는 ${}_6C_2\times{}_5C_3=15\times10=150$

(ii) 뽑은 5명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $5!=120$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $150\times120=18000$

(2) (i) 중학생 4명 중에서 1명, 고등학생 6명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는 ${}_4C_1\times{}_6C_2=4\times15=60$

(ii) 뽑은 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $3!=6$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $60\times6=360$

(3) (i) 과학책 5권 중에서 2권, 사회책 4권 중에서 2권을 뽑는 경우의 수는 ${}_5C_2\times{}_4C_2=10\times6=60$

(ii) 뽑은 4권을 일렬로 꽂는 경우의 수는 $4!=24$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $60\times24=1440$

45 답 (1) 480 (2) 144 (3) 720

풀이 (1) (i) 8명 중에서 4명을 뽑을 때 A는 포함되고 B는 포함되지 않아야 하므로 6명 중 3명을 뽑는 경우의 수와 같다. 따라서 경우의 수는 ${}_6C_3=20$이다.

(ii) 뽑은 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $4!=24$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $20\times24=480$

(2) (i) 특정한 2명을 미리 뽑아 놓고 나머지 4명 중에서 2명을 뽑으면 되므로 ${}_4C_2=6$

(ii) 뽑은 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $4!=24$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $6\times24=144$

(3) (i) 특정한 2명을 제외한 나머지 6명에서 5명을 뽑으면 되므로 ${}_6C_5=6$

(ii) 뽑은 5명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $5!=120$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $6\times120=720$

46 답 (1) 28 (2) 15 (3) 36 (4) 14 (5) 22

풀이 (1) 8개의 점 중에서 2개를 택하는 조합의 수는 ${}_8C_2=28$

(2) 6개의 점 중에서 2개를 택하는 조합의 수는 ${}_6C_2=15$

(3) 9개의 점 중에서 2개를 택하는 조합의 수는 ${}_9C_2=36$

(4) 두 평행선 위의 점을 하나씩 택하여 연결하면 한 개의 직선을 만들 수 있으므로 ${}_3C_1\times{}_4C_1=3\times4=12$

주어진 평행선 2개를 포함하면 구하는 직선의 개수는

$12+2=14$

(5) 두 평행선 위의 점을 하나씩 택하여 연결하면 한 개의 직선을 만들 수 있으므로 ${}_4C_1\times{}_5C_1=4\times5=20$

주어진 평행선 2개를 포함하면 구하는 직선의 개수는

$20+2=22$

47 답 (1) 31 (2) 110 (3) 35 (4) 72

풀이 (1) 7개의 점 중에서 3개를 택하는 조합의 수는 ${}_7C_3=35$

일직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 조합의 수는 ${}_4C_3={}_4C_1=4$

따라서 구하는 삼각형의 개수는 $35-4=31$

(2) 10개의 점 중에서 3개를 택하는 조합의 수는 ${}_{10}C_3=120$

일직선 위에 있는 5개의 점 중에서 3개를 택하는 조합의 수는 ${}_5C_3=10$

따라서 구하는 삼각형의 개수는 $120-10=110$

(3) 7개의 점 중에서 3개를 택하는 조합의 수는 ${}_7C_3=35$

(4) 9개의 점 중에서 3개를 택하는 조합의 수는 ${}_9C_3=84$

일직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 조합의 수는 ${}_4C_3={}_4C_1=4$

따라서 구하는 삼각형의 개수는 $84-3\times4=72$

48 답 (1) 70 (2) 15 (3) 60 (4) 315

풀이 (1) 8개의 점 중에서 4개를 택하는 조합의 수는

${}_8C_4=70$

(2) 6개의 점 중에서 4개를 택하는 조합의 수는

${}_6C_4={}_6C_2=15$

(3) 5개의 평행선 중에서 2개, 4개의 평행선 중에서 2개를 택하면 하나의 평행사변형이 결정되므로 구하는 평행사변형의 개수는

${}_5C_2 \times {}_4C_2 = 10 \times 6 = \underline{60}$

(4) 7개의 평행선 중에서 2개, 6개의 평행선 중에서 2개를 택하면 하나의 평행사변형이 결정되므로 구하는 평행사변형의 개수는

${}_7C_2 \times {}_6C_2 = 21 \times 15 = 315$

49 답 (1) 6930 (2) 2520 (3) 105 (4) 15

풀이 (1) 11명에서 2명을 뽑고, 나머지 9명에서 4명을 뽑고, 나머지 5명에서 5명을 뽑는다.

따라서 구하는 방법의 수는

${}_{11}C_2 \times {}_9C_4 \times {}_5C_5 = 55 \times 126 \times 1 = \underline{6930}$

(2) 10명에서 2명을 뽑고, 나머지 8명에서 3명을 뽑고, 나머지 5명에서 5명을 뽑는다.

따라서 구하는 방법의 수는

${}_{10}C_2 \times {}_8C_3 \times {}_5C_5 = 45 \times 56 \times 1 = 2520$

(3) 7명에서 2명을 뽑고, 나머지 5명에서 2명을 뽑고, 나머지 3명에서 3명을 뽑는다.

이때 2개의 조의 사람 수가 같으므로 2!로 나누어 준다.

따라서 구하는 방법의 수는

${}_7C_2 \times {}_5C_2 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} = 21 \times 10 \times 1 \times \frac{1}{2} = 105$

(4) 6명에서 2명을 뽑고, 나머지 4명에서 2명을 뽑고, 나머지 2명에서 2명을 뽑는다.

이때 3개의 조의 사람 수가 같으므로 3!로 나누어 준다.

따라서 구하는 방법의 수는

${}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{3!} = 15 \times 6 \times 1 \times \frac{1}{6} = 15$

50 답 (1) 7560 (2) 630 (3) 20 (4) 113400

풀이 (1) 9송이의 꽃을 2송이, 3송이, 4송이로 3개의 꽃다발로 나누어 3명에게 선물하므로

$({}_9C_2 \times {}_7C_3 \times {}_4C_4) \times 3! = (36 \times 35 \times 1) \times 6 = \underline{7560}$

(2) 7개의 사탕을 1개, 2개, 4개의 3묶음으로 나누어 3명에게 선물하므로

$({}_7C_1 \times {}_6C_2 \times {}_4C_4) \times 3! = (7 \times 15 \times 1) \times 6 = 630$

(3) 3명씩 2개의 조로 분할하여 2대의 택시에 탑승시키고, 이때 2개의 조의 학생 수가 모두 같으므로

$\left({}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!}\right) \times 2! = \left(20 \times 1 \times \frac{1}{2}\right) \times 2 = 20$

(4) 관광객을 2명씩 5개의 조로 분할하여 5곳의 호텔에 투숙시키고, 이때 5개의 조의 사람 수가 모두 같으므로

$\left({}_{10}C_2 \times {}_8C_2 \times {}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{5!}\right) \times 5!$

$= \left(45 \times 28 \times 15 \times 6 \times 1 \times \frac{1}{120}\right) \times 120$

$= 113400$

중단원 점검문제 | Ⅲ-1 경우의 수 169-170쪽

01 답 7

풀이 (ⅰ) 카드에 적힌 숫자가 4의 배수인 경우

4, 8, 12, 16, 20의 5가지

(ⅱ) 카드에 적힌 숫자가 7의 배수인 경우

7, 14의 2가지

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는

$5+2=7$

02 답 25

풀이 $A \rightarrow B \rightarrow D$의 경로로 가는 경우는 $2 \times 3 = 6$(가지)

$A \rightarrow C \rightarrow D$의 경로로 가는 경우는 $3 \times 2 = 6$(가지)

$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$의 경로로 가는 경우는

$2 \times 1 \times 2 = 4$(가지)

$A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D$의 경로로 가는 경우는

$3 \times 1 \times 3 = 9$(가지)

따라서 합의 법칙에 의하여 구하는 방법의 수는

$6+6+4+9=25$

03 답 6

풀이 y의 계수가 크므로 y의 값을 기준으로 구한다.

(ⅰ) $y=1$일 때, $x<5$이므로 $x=1, 2, 3, 4$의 4개

(ⅱ) $y=2$일 때, $x<3$이므로 $x=1, 2$의 2개

(ⅲ) $y=3$일 때, $x<1$이므로 조건을 만족시키는 자연수 x는 없다.

(ⅰ)~(ⅲ)에 의하여 구하는 순서쌍의 개수는

$4+2=6$

04 답 13

풀이 $(a+b+c)(p+q+r)$의 전개식에서 항의 개수는

$3 \times 3 = 9$

$(a+b)(s+t)$의 전개식에서 항의 개수는

$2 \times 2 = 4$

따라서 합의 법칙에 의하여 구하는 항의 개수는

$9+4=13$

05 답 540

풀이 A에 칠할 수 있는 색은 5가지

B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 4가지

C에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한 3가지

D에 칠할 수 있는 색은 A, C에 칠한 색을 제외한 3가지

E에 칠할 수 있는 색은 A, D에 칠한 색을 제외한 3가지

따라서 구하는 방법의 수는

$5 \times 4 \times 3 \times 3 \times 3 = 540$

06 답 4

풀이 ${}_nP_2 + 3{}_nP_1 = 24$에서 $n(n-1)+3n=24$

$n^2+2n-24=0$, $(n+6)(n-4)=0$

${}_nP_2$에서 $n \geq 2$이므로

$n=4$

07 답 90

풀이 서로 다른 10개에서 2개를 택하여 일렬로 나열하는 순열의 수와 같으므로

${}_{10}\mathrm{P}_2=90$

08 답 288

풀이 안경을 쓴 학생 3명을 한 사람으로 생각하고, 안경을 쓰지 않은 학생 4명을 한 사람으로 생각하여 2명을 한 줄로 세우는 경우의 수는 $2!=2$

안경을 쓴 학생 3명이 자리를 바꾸는 경우의 수는

$3!=6$

안경을 쓰지 않은 학생 4명이 자리를 바꾸는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 방법의 수는

$2\times6\times24=288$

09 답 24

풀이 맨 앞에 A, 맨 뒤에 F를 놓고 나머지 4개의 문자를 일렬로 나열하면 되므로

$4!=24$

10 답 36

풀이 1□□□ 꼴인 자연수의 개수는

${}_4\mathrm{P}_3=24$

20□□, 21□□ 꼴인 자연수의 개수는

$2\times{}_3\mathrm{P}_2=12$

따라서 2300보다 작은 자연수의 개수는

$24+12=36$

11 답 1

풀이 (i) $r-1=2r+6$이면 $r=-7$

(ii) ${}_8\mathrm{C}_{r-1}={}_8\mathrm{C}_{8-(r-1)}={}_8\mathrm{C}_{9-r}$이면

$9-r=2r+6$, $3r=3$

$r=1$

(i), (ii)에서 자연수 r의 값은 1이다.

12 답 84

풀이 a, b, c의 순서가 이미 정해져 있으므로 1부터 9까지의 서로 다른 9개의 자연수에서 순서를 생각하지 않고 3개를 뽑는 조합의 수와 같으므로

${}_9\mathrm{C}_3=84$

13 답 85

풀이 10개의 공 중에서 3개의 공을 뽑는 경우의 수는

${}_{10}\mathrm{C}_3=120$

3 이하의 수가 적힌 공을 제외한 7개의 공 중에서 3개의 공을 뽑는 경우의 수는

${}_7\mathrm{C}_3=35$

따라서 구하는 경우의 수는

$120-35=85$

14 답 14400

풀이 (i) 남학생 4명 중에서 2명, 여학생 6명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_2\times{}_6\mathrm{C}_3=6\times20=120$

(ii) 뽑은 5명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$5!=120$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$120\times120=14400$

15 답 23

풀이 8개의 점 중에서 2개를 택하는 조합의 수는

${}_8\mathrm{C}_2=28$

일직선 위에 있는 4개의 점 중에서 2개를 택하는 조합의 수는

${}_4\mathrm{C}_2=6$

반원의 지름에 해당하는 직선 1개를 포함하면 구하는 직선의 개수는

$28-6+1=23$

16 답 30240

풀이 9명의 학생을 2명, 2명, 2명, 3명의 4개의 조로 나누어 4개의 놀이기구에 탑승시키고, 이때 3개의 조의 학생 수가 모두 같으므로

$\left({}_9\mathrm{C}_2\times{}_7\mathrm{C}_2\times{}_5\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_3\times\frac{1}{3!}\right)\times4!$

$=\left(36\times21\times10\times1\times\frac{1}{6}\right)\times24=30240$

IV
행렬

IV-1 | 행렬과 그 연산 173-190쪽

01 답 (1) 2 (2) 3

02 답 (1) 10 (2) -3 (3) 9 (4) 4

풀이 (1) 제1행은 $(3\ \ \underline{5}\ \ 2)$이므로 구하는 값은
$3+\underline{5}+2=\underline{10}$

(2) 제3행은 $(-2\ \ 0\ \ -1)$이므로 구하는 값은
$-2+0+(-1)=-3$

(3) 제2열은 $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$이므로 구하는 값은
$5+4+0=9$

(4) 제3열은 $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$이므로 구하는 값은
$2+3+(-1)=4$

03 답 (1) 1×3 행렬 (2) 2×1 행렬
(3) 2×2 행렬, 정사각행렬
(4) 2×3 행렬

풀이 (1) 1개의 행과 3개의 열로 이루어졌으므로 1×3 행렬이다.

(2) 2개의 행과 1개의 열로 이루어졌으므로 2×1 행렬이다.

(3) 2개의 행과 2개의 열로 이루어졌으므로 2×2 행렬이다.
이 행렬은 행의 개수와 열의 개수가 같으므로 정사각행렬이다.

(4) 2개의 행과 3개의 열로 이루어졌으므로 2×3 행렬이다.

04 답 (1) 5 (2) 4 (3) 8 (4) -1

풀이 (1) $(1,\ 2)$ 성분은 제1행과 제2열이 만나는 위치에 있는 성분이므로 $\underline{5}$이다.

(2) $(2,\ 1)$ 성분은 제2행과 제1열이 만나는 위치에 있는 성분이므로 4이다.

(3) a_{13}, 즉 $(1,\ 3)$ 성분은 제1행과 제3열이 만나는 위치에 있는 성분이므로 8이다.

(4) a_{33}, 즉 $(3,\ 3)$ 성분은 제3행과 제3열이 만나는 위치에 있는 성분이므로 -1이다.

05 답 (1) 3 (2) 6 (3) 2 (4) -10

풀이 (1) $a_{12}=5,\ a_{32}=\underline{-2}$이므로 $a_{12}+a_{32}=\underline{3}$

(2) $a_{13}=2,\ a_{22}=4$이므로 $a_{13}+a_{22}=6$

(3) $a_{21}=1,\ a_{33}=-1$이므로 $a_{21}-a_{33}=2$

(4) $a_{23}=-3,\ a_{31}=7$이므로 $a_{23}-a_{31}=-10$

06 답 (1) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -1 & -3 & -5 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & -1 \\ 4 & 5 & 9 \end{pmatrix}$

풀이 (1) $i=1,\ 2,\ j=1,\ 2$를 $a_{ij}=i+j+1$에 대입하여 행렬 A의 각 성분을 구하면 다음과 같다.
$a_{11}=1+1+1=3,\ a_{12}=1+2+1=4,$
$a_{21}=2+1+1=4,\ a_{22}=2+2+1=5$
따라서 구하는 행렬 A는 $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$이다.

(2) $i=1,\ 2,\ j=1,\ 2,\ 3$을 $a_{ij}=i-2j-1$에 대입하여 행렬 A의 각 성분을 구하면 다음과 같다.
$a_{11}=1-2-1=-2,\ a_{12}=1-4-1=-4,$
$a_{13}=1-6-1=-6,$
$a_{21}=2-2-1=-1,\ a_{22}=2-4-1=-3,$
$a_{23}=2-6-1=-5$
따라서 구하는 행렬 A는 $\begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -1 & -3 & -5 \end{pmatrix}$이다.

(3) $i=1,\ 2,\ 3,\ j=1,\ 2$를 $a_{ij}=(-1)^{i+j}$에 대입하여 행렬 A의 각 성분을 구하면 다음과 같다.
$a_{11}=(-1)^2=1,\ a_{12}=(-1)^3=-1,$
$a_{21}=(-1)^3=-1,\ a_{22}=(-1)^4=1,$
$a_{31}=(-1)^4=1,\ a_{32}=(-1)^5=-1$
따라서 구하는 행렬 A는 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$이다.

(4) $i=j$일 때, $a_{ij}=1$이므로
$a_{11}=a_{22}=1$
$i\neq j$일 때, $a_{ij}=0$이므로
$a_{12}=a_{13}=a_{21}=a_{23}=0$
따라서 구하는 행렬 A는 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$이다.

(5) $i\geq j$일 때, $a_{ij}=i-j$이므로
$a_{11}=1-1=0,\ a_{21}=2-1=1,\ a_{22}=2-2=0$
$i<j$일 때, $a_{ij}=ij$이므로
$a_{12}=1\times 2=2,\ a_{13}=1\times 3=3,\ a_{23}=2\times 3=6$
따라서 구하는 행렬 A는 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$이다.

(6) $i>j$일 때, $a_{ij}=i+j$이므로
$a_{21}=2+1=3,\ a_{31}=3+1=4,\ a_{32}=3+2=5$
$i=j$일 때, $a_{ij}=ij$이므로
$a_{11}=1\times 1=1,\ a_{22}=2\times 2=4,\ a_{33}=3\times 3=9$
$i<j$일 때, $a_{ij}=i-j$이므로
$a_{12}=1-2=-1,\ a_{13}=1-3=-2,\ a_{23}=2-3=-1$
따라서 구하는 행렬 A는 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & -1 \\ 4 & 5 & 9 \end{pmatrix}$이다.

07 답 (1) $x=3$, $y=1$, $z=-2$ (2) $x=-1$, $y=0$, $z=-4$
(3) $x=2$, $y=2$, $z=1$ (4) $x=3$, $y=2$, $z=1$
(5) $x=2$, $y=1$, $z=2$ (6) $x=2$, $y=-1$, $z=-2$
(7) $x=4$, $y=0$, $z=-1$ (8) $x=2$, $y=5$, $z=2$

풀이 (1) 대응하는 성분이 각각 같아야 하므로
$x+y=4$, $z=-2$, $y-z=3$
따라서 $x=\underline{3}$, $y=\underline{1}$, $z=\underline{-2}$이다.

(2) 대응하는 성분이 각각 같아야 하므로
$3x-y=-3$, $2x-y=-2$, $4x+y=z$
따라서 $x=-1$, $y=0$, $z=-4$이다.

(3) 대응하는 성분이 각각 같아야 하므로
$x+2z=4$, $y=2$, $x-z=1$
따라서 $x=2$, $y=2$, $z=1$이다.

(4) 대응하는 성분이 각각 같아야 하므로
$x^2-y^2=5$ …… ㉠
$x+y=5$ …… ㉡
$z=1$
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$x=3$, $y=2$
따라서 $x=3$, $y=2$, $z=1$이다.

(5) 대응하는 성분이 각각 같아야 하므로
$x^2-1=3$ …… ㉠
$z=2y$ …… ㉡
$y+1=2$ …… ㉢
$x^2-x=yz$ …… ㉣
㉢에서 $y=1$
㉡에 $y=1$을 대입하면 $z=2$
㉠에서 $x^2=4$이므로
$x=-2$ 또는 $x=2$
㉣에 $y=1$, $z=2$를 대입하면
$x^2-x=2$, $(x+1)(x-2)=0$이므로
$x=-1$ 또는 $x=2$
따라서 $x=2$, $y=1$, $z=2$이다.

(6) 대응하는 성분이 각각 같아야 하므로
$x+y=1$ …… ㉠
$z^2+3z+4=2$ …… ㉡
$x-y=3$ …… ㉢
$z^2=4$ …… ㉣
㉠, ㉢을 연립하여 풀면
$x=2$, $y=-1$
㉣에서 $z=-2$ 또는 $z=2$ …… ㉤
㉤의 값 중에서 ㉡을 만족시키는 z의 값은
$z=-2$
따라서 $x=2$, $y=-1$, $z=-2$이다.

(7) 대응하는 성분이 각각 같아야 하므로
$x+z=3$ …… ㉠
$x+y=4$ …… ㉡
$x-z=5$ …… ㉢
㉠, ㉢을 연립하여 풀면
$x=4$, $z=-1$
㉡에 $x=4$를 대입하면 $y=0$
따라서 $x=4$, $y=0$, $z=-1$이다.

(8) 대응하는 성분이 각각 같아야 하므로
$x^2=4$ …… ㉠
$y-z=3$ …… ㉡
$x^2+x=6$ …… ㉢
$y+z=7$ …… ㉣
㉠에서 $x=2$ 또는 $x=-2$ …… ㉤
㉤의 값 중 ㉢을 만족시키는 x의 값은
$x=2$
㉡, ㉣을 연립하여 풀면
$y=5$, $z=2$
따라서 $x=2$, $y=5$, $z=2$이다.

08 답 (1) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
(3) $\begin{pmatrix} 5 & 9 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 9 & 3 & 6 \end{pmatrix}$
(5) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 6 & 0 & 7 \\ 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

풀이 (1) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1+3 & 2+0 \end{pmatrix}$
$=\underline{\begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix}}$

(2) $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-1 \\ -3+5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3+2 & 4+5 \\ -5+1 & 2+4 \end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix} 5 & 9 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 6 & -4 & 2 \end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix} 5-3 & 2+1 & -1+0 \\ 3+6 & 7-4 & 4+2 \end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 9 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8-5 & 4+1 \\ -3+2 & 2+0 \\ 0+3 & 1-7 \end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 9 & 4 & -5 \\ 7 & 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ -3 & -4 & 12 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix} 0+7 & 3+2 & 2+1 \\ 9-3 & 4-4 & -5+12 \\ 7+1 & 0+1 & 0+3 \end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 6 & 0 & 7 \\ 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

09 답 (1) $\begin{pmatrix}-1 & -4\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}-3 & 4\\-1 & 1\end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix}3 & 4 & 1\\-3 & -3 & -2\end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix}13 & 3\\-5 & 2\\-3 & 8\end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix}-2 & 3 & -5\\7 & 1 & 2\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

풀이 (1) $\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2 & -1-3\end{pmatrix}$
$=\underline{\begin{pmatrix}-1 & -4\end{pmatrix}}$

(2) $\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-3\\2-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}2 & 7\\-3 & 5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5 & 3\\-2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-5 & 7-3\\-3-(-2) & 5-4\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}-3 & 4\\-1 & 1\end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix}1 & 5 & 2\\-1 & -2 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\2 & 1 & 2\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}1-(-2) & 5-1 & 2-1\\-1-2 & -2-1 & 0-2\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}3 & 4 & 1\\-3 & -3 & -2\end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix}10 & 5\\-1 & 0\\2 & 9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3 & 2\\4 & -2\\5 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10-(-3) & 5-2\\-1-4 & 0-(-2)\\2-5 & 9-1\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}13 & 3\\-5 & 2\\-3 & 8\end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix}1 & 8 & 5\\7 & -6 & 3\\2 & 4 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 5 & 10\\0 & -7 & 1\\2 & 3 & -1\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}1-3 & 8-5 & 5-10\\7-0 & -6-(-7) & 3-1\\2-2 & 4-3 & 0-(-1)\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}-2 & 3 & -5\\7 & 1 & 2\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

10 답 (1) $\begin{pmatrix}1 & 3\\-2 & 1\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}1 & 3\\-2 & 1\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$

풀이 (1) $A+O=\begin{pmatrix}1 & 3\\-2 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}1+0 & 3+0\\-2+0 & 1+0\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}1 & 3\\-2 & 1\end{pmatrix}$

(2) $O+A=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 3\\-2 & 1\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}0+1 & 0+3\\0-2 & 0+1\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}1 & 3\\-2 & 1\end{pmatrix}$

(3) $-A=\begin{pmatrix}-1 & -3\\2 & -1\end{pmatrix}$이므로
$A+(-A)=\begin{pmatrix}1 & 3\\-2 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & -3\\2 & -1\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}1-1 & 3-3\\-2+2 & 1-1\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$

(4) $-A=\begin{pmatrix}-1 & -3\\2 & -1\end{pmatrix}$이므로
$(-A)+A=\begin{pmatrix}-1 & -3\\2 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 3\\-2 & 1\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}-1+1 & -3+3\\2-2 & -1+1\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$

11 답 (1) $\begin{pmatrix}4 & 7\\4 & 9\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}4 & 7\\4 & 9\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}7 & 9\\5 & 13\end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix}7 & 9\\5 & 13\end{pmatrix}$

풀이 (1) $A+B=\begin{pmatrix}3 & 5\\4 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 3\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}3+1 & 5+2\\4+0 & 6+3\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}4 & 7\\4 & 9\end{pmatrix}$

(2) $B+A=\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 5\\4 & 6\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}1+3 & 2+5\\0+4 & 3+6\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}4 & 7\\4 & 9\end{pmatrix}$

(3) (1)에서 $A+B=\begin{pmatrix}4 & 7\\4 & 9\end{pmatrix}$이므로
$(A+B)+C=\begin{pmatrix}4 & 7\\4 & 9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 2\\1 & 4\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}4+3 & 7+2\\4+1 & 9+4\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}7 & 9\\5 & 13\end{pmatrix}$

(4) $B+C=\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 2\\1 & 4\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}1+3 & 2+2\\0+1 & 3+4\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}4 & 4\\1 & 7\end{pmatrix}$
이므로
$A+(B+C)=\begin{pmatrix}3 & 5\\4 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 4\\1 & 7\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}3+4 & 5+4\\4+1 & 6+7\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}7 & 9\\5 & 13\end{pmatrix}$

12 답 (1) $\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

풀이 (1) $A+B-C=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$=\underline{\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}}$

(2) $A-B+C=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

(3) $B+C=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

이므로

$A-(B+C)=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

(4) $B-A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

이므로

$(B-A)-C=\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

13 답 (1) $\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

풀이 (1) 양변에서 행렬 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$를 빼면

$X+\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$

이므로

$X=\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}}$

(2) 양변에서 행렬 $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$을 빼면

$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}+X-\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

이므로

$X=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$

(3) 양변에서 행렬 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$를 빼면

$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}+X-\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

이므로

$X=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$

(4) 양변에 행렬 $\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$를 더하면

$X-\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

이므로

$X=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$

(5) 양변에 행렬 X를 더하면

$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}-X+X=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}+X$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}+X=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

양변에서 행렬 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$를 빼면

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}+X-\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

이므로

$X=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

14 답 (1) $(-2 \quad 6)$ (2) $\begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -0.5 \\ 2.5 & -1.5 & 1 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

풀이 (1) $2(-1 \quad 3)=(2\times(-1) \quad 2\times3)=(-2 \quad 6)$

(2) $-3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (-3)\times2 \\ (-3)\times1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix}$

(3) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3}\times3 & \frac{1}{3}\times9 \\ \frac{1}{3}\times6 & \frac{1}{3}\times(-3) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

(4) $0.5\begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 0.5\times0 & 0.5\times4 & 0.5\times(-1) \\ 0.5\times5 & 0.5\times(-3) & 0.5\times2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -0.5 \\ 2.5 & -1.5 & 1 \end{pmatrix}$

(5) $0\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\times2 & 0\times(-4) \\ 0\times3 & 0\times1 \\ 0\times1 & 0\times2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

15 답 (1) $\begin{pmatrix} 6 & -12 \\ -6 & 18 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -20 & 40 \\ 20 & -60 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 2.4 & -4.8 \\ -2.4 & 7.2 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$

풀이 (1) $3A=3\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 3\times2 & 3\times(-4) \\ 3\times(-2) & 3\times6 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 6 & -12 \\ -6 & 18 \end{pmatrix}$

(2) $-10A=-10\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -10\times2 & -10\times(-4) \\ -10\times(-2) & -10\times6 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -20 & 40 \\ 20 & -60 \end{pmatrix}$

(3) $-\frac{1}{2}A=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\times2 & -\frac{1}{2}\times(-4) \\ -\frac{1}{2}\times(-2) & -\frac{1}{2}\times6 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

(4) $1.2A=1.2\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1.2\times2 & 1.2\times(-4) \\ 1.2\times(-2) & 1.2\times6 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 2.4 & -4.8 \\ -2.4 & 7.2 \end{pmatrix}$

(5) $1.5A=1.5\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1.5\times2 & 1.5\times(-4) \\ 1.5\times(-2) & 1.5\times6 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$

16 답 (1) $\begin{pmatrix} 15 & 9 \\ 3 & -12 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 6 & -20 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} 15 & 5 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$

풀이 (1) $2A+A=(2+1)A=3A$

$=3\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 3\times5 & 3\times3 \\ 3\times1 & 3\times(-4) \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 15 & 9 \\ 3 & -12 \end{pmatrix}$

(2) $4B-2B=(4-2)B=2B$

$=2\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 2\times0 & 2\times2 \\ 2\times1 & 2\times(-3) \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$

(3) $4A-4B=4(A-B)$

$=4\left\{\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\right\}$

$=4\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 4\times5 & 4\times1 \\ 4\times0 & 4\times(-1) \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

(4) $2(A+2B)=2A+4B$

$=2\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}+4\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 2\times5 & 2\times3 \\ 2\times1 & 2\times(-4) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4\times0 & 4\times2 \\ 4\times1 & 4\times(-3) \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 4 & -12 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 6 & -20 \end{pmatrix}$

(5) $3A-2(A+B)=3A-2A-2B$

$=A-2B$

$=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2\times0 & 2\times2 \\ 2\times1 & 2\times(-3) \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

(6) $(A-3B)+(2A+B)$

$=3A-2B$

$=3\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 3\times5 & 3\times3 \\ 3\times1 & 3\times(-4) \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2\times0 & 2\times2 \\ 2\times1 & 2\times(-3) \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 15 & 9 \\ 3 & -12 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 15 & 5 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$

17 답 (1) $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 2 & \frac{9}{2} \\ 2 & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 12 & -8 \\ -2 & -14 \end{pmatrix}$

풀이 (1) $2X+A=3A+4B$에서

$2X=2A+4B$

이므로

$X=A+2B$

$=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

(2) $2(X-A)=X+B$에서

$2X-2A=X+B$

따라서 $X=2A+B$

$$=2\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-4 & 6\\ 2 & 8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2 & 8\\ 3 & 9\end{pmatrix}$$

(3) $2X+A=3(A-B)$에서

$2X+A=3A-3B$이므로

$2X=2A-3B$

따라서 $X=A-\frac{3}{2}B$

$$=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}-\frac{3}{2}\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 3\\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-5 & 0\\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2}\end{pmatrix}$$

(4) $2B-X=X-(A+B)$에서

$2B-X=X-A-B$이므로

$2X=A+3B$

따라서 $X=\frac{1}{2}A+\frac{3}{2}B$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}+\frac{3}{2}\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & \frac{3}{2}\\ \frac{1}{2} & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 3\\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2 & \frac{9}{2}\\ 2 & \frac{7}{2}\end{pmatrix}$$

(5) $2(X-3A)=3X-2(A+B)$에서

$2X-6A=3X-2A-2B$

따라서 $X=-4A+2B$

$$=-4\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}8 & -12\\ -4 & -16\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 4\\ 2 & 2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}12 & -8\\ -2 & -14\end{pmatrix}$$

18 답 (1) $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

(2) $A=\begin{pmatrix}-8 & 3\\ 9 & 18\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -2 & -8\end{pmatrix}$

(3) $A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7 & 0\\ -1 & -7\end{pmatrix}$

(4) $A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

(5) $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

풀이 (1) $A+B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}$ …… ㉠

$A-B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 5 & 2\end{pmatrix}$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$2A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -1\\ 5 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 6 & 6\end{pmatrix}$

이므로 $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & 3\end{pmatrix}$

㉠−㉡을 하면

$2B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & -1\\ 5 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ -4 & 2\end{pmatrix}$

이므로 $B=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

(2) $A+B=\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 7 & 10\end{pmatrix}$ …… ㉠

$A+2B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 5 & 2\end{pmatrix}$ …… ㉡

2×㉠−㉡을 하면

$$A=2\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 7 & 10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & -1\\ 5 & 2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-8 & 2\\ 14 & 20\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & -1\\ 5 & 2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-8 & 3\\ 9 & 18\end{pmatrix}$$

㉡−㉠을 하면

$$B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 5 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 7 & 10\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -2 & -8\end{pmatrix}$$

(3) $3A+B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}$ …… ㉠

$2A+B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면

$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}$

2×㉠−3×㉡을 하면

$$-B=2\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2 & 6\\ 4 & 10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}9 & 6\\ 3 & 3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-7 & 0\\ 1 & 7\end{pmatrix}$$

이므로 $B=\begin{pmatrix}7 & 0\\ -1 & -7\end{pmatrix}$

(4) $2A-B=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ …… ㉠

$A+3B=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 4 & -3\end{pmatrix}$ …… ㉡

3×㉠+㉡을 하면

$$7A=3\begin{pmatrix}5 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 4 & -3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}15 & 9\\ 3 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 4 & -3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}14 & 14\\ 7 & 0\end{pmatrix}$$

이므로 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

㉠$-2\times$㉡을 하면

$$-7B=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -2 & 10 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 7 & -7 \\ -7 & 7 \end{pmatrix}$$

이므로 $B=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

(5) $4A-B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$ …… ㉠

$A+2B=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ …… ㉡

$2\times$㉠$+$㉡을 하면

$$9A=2\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 14 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 9 & 9 \\ 18 & 0 \end{pmatrix}$$

이므로 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

㉠$-4\times$㉡을 하면

$$-9B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}-4\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 12 & 20 \\ 16 & 8 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} -9 & -18 \\ -9 & -9 \end{pmatrix}$$

이므로 $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

19 답 (1) $x=-5,\ y=-1$ (2) $x=-1,\ y=-1$
(3) $x=2,\ y=1$ (4) $x=2,\ y=3$
(5) $x=2,\ y=-1$

풀이 (1) $2\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ x & -3 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} y & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2x & -6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3y & 9 \\ 18 & 6 \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} 4+3y & 7 \\ 2x+18 & 0 \end{pmatrix}$$

이므로 $\begin{pmatrix} 4+3y & 7 \\ 2x+18 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$4+3y=1,\ 2x+18=8$

따라서 $x=\underline{-5},\ y=\underline{-1}$이다.

(2) $2\begin{pmatrix} x^2 & -1 \\ y & 4 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} x & 2 \\ 1 & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x^2 & -2 \\ 2y & 8 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3x & 6 \\ 3 & 3y \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} 2x^2+3x & 4 \\ 2y+3 & 8+3y \end{pmatrix}$$

이므로 $\begin{pmatrix} 2x^2+3x & 4 \\ 2y+3 & 8+3y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$2x^2+3x=-1,\ 2y+3=1,\ 8+3y=5$

$2x^2+3x=-1$에서 $2x^2+3x+1=0$

$(2x+1)(x+1)=0$

이때 x는 정수이므로 $x=-1$

$2y+3=1,\ 8+3y=5$에서 $y=-1$

(3) $x\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3x & 2x \\ x & -3x \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} y & 0 \\ y & y \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} 3x+y & 2x \\ x+y & -3x+y \end{pmatrix}$$

이므로 $\begin{pmatrix} 3x+y & 2x \\ x+y & -3x+y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$3x+y=7,\ 2x=4,\ x+y=3,\ -3x+y=-5$

따라서 $x=2,\ y=1$이다.

(4) $x\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & -x \\ 2x & -3x \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} y & 2y \\ 2y & y \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} x+y & -x+2y \\ 2x+2y & -3x+y \end{pmatrix}$$

이므로 $\begin{pmatrix} x+y & -x+2y \\ 2x+2y & -3x+y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$x+y=5,\ -x+2y=4,\ 2x+2y=10,\ -3x+y=-3$

따라서 $x=2,\ y=3$이다.

(5) $x\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}-y\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & -x \\ 0 & 4x \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 5y & 7y \\ 3y & -2y \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} x-5y & -x-7y \\ -3y & 4x+2y \end{pmatrix}$$

이므로 $\begin{pmatrix} x-5y & -x-7y \\ -3y & 4x+2y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$x-5y=7,\ -x-7y=5,\ -3y=3,\ 4x+2y=6$

따라서 $x=2,\ y=-1$이다.

20 답 (1) ○ (2) × (3) ○ (4) ×

풀이 (1) $A=\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$, $B=(-1\quad 2)$라고 할 때

(행렬 A의 열의 개수)$=$(행렬 B의 행의 개수)

이므로 두 행렬의 곱셈 $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}(-1\quad 2)$가 정의된다.

(2) $A=(2\quad 3)$, $B=(4\quad -1)$이라고 할 때

(행렬 A의 열의 개수)$\neq$(행렬 B의 행의 개수)

이므로 두 행렬의 곱셈 $(2\quad 3)(4\quad -1)$이 정의되지 않는다.

(3) $A=(-4\quad 2)$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$이라고 할 때

(행렬 A의 열의 개수)$=$(행렬 B의 행의 개수)

이므로 두 행렬의 곱셈 $(-4\quad 2)\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$이 정의된다.

(4) $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $B=(3\quad 5)$라고 할 때

(행렬 A의 열의 개수)$\neq$(행렬 B의 행의 개수)

이므로 두 행렬의 곱셈 $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}(3\quad 5)$가 정의되지 않는다.

21 답 (1) (5) (2) $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $(-7 \quad 7)$

(4) $\begin{pmatrix} -16 \\ 4 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -10 & 1 \end{pmatrix}$

풀이 (1) $(1 \quad 3)\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}=(1\times(-1)+3\times2)$

$=\underline{(5)}$

(2) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}(3 \quad 1)=\begin{pmatrix} 2\times3 & 2\times1 \\ 1\times3 & 1\times1 \end{pmatrix}$

$=\underline{\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}$

(3) $(-1 \quad 2)\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

$=(-1\times3+2\times(-2) \quad -1\times1+2\times4)$

$=\underline{(-7 \quad 7)}$

(4) $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2\times2+3\times(-4) \\ 0\times2+(-1)\times(-4) \end{pmatrix}$

$=\underline{\begin{pmatrix} -16 \\ 4 \end{pmatrix}}$

(5) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 3\times(-2)+2\times0 & 3\times0+2\times1 \\ 5\times(-2)+1\times0 & 5\times0+1\times1 \end{pmatrix}$

$=\underline{\begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -10 & 1 \end{pmatrix}}$

22 답 (1) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (2) $(4 \quad 5)$

(3) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

풀이 (1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\times2+0\times3 \\ 0\times2+1\times3 \end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}}$

(2) $(4 \quad 5)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$=(4\times1+5\times0 \quad 4\times0+5\times1)=\underline{(4 \quad 5)}$

(3) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 2\times1+(-2)\times0 & 2\times0+(-2)\times1 \\ 1\times1+3\times0 & 1\times0+3\times1 \end{pmatrix}$

$=\underline{\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1\times(-2)+0\times1 & 1\times5+0\times(-1) \\ 0\times(-2)+1\times1 & 0\times5+1\times(-1) \end{pmatrix}$

$=\underline{\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}$

23 답 (1) $AE=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $EA=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $AE=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$, $EA=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$

(3) $AE=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$, $EA=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

(4) $AE=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $EA=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

풀이 (1) $AE=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$

$EA=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$

(2) $AE=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$

$EA=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$

(3) $AE=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

$EA=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

(4) $AE=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

$EA=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

24 답 (1) $x=-2,\ y=2,\ z=-8$ (2) $x=1,\ y=1,\ z=-1$

(3) $x=6,\ y=6,\ z=1$ (4) $x=2,\ y=-2,\ z=-7$

(5) $x=3,\ y=1,\ z=2$

풀이 (1) $\begin{pmatrix} x & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ y & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3x-y & -2x-1 \\ 2y & 2 \end{pmatrix}$

이므로 $\begin{pmatrix} 3x-y & -2x-1 \\ 2y & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$3x-y=z,\ -2x-1=3,\ 2y=4$

따라서 $x=\underline{-2},\ y=\underline{2},\ z=\underline{-8}$이다.

(2) $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ y & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+xy & 3+x \\ -y & -1 \end{pmatrix}$

이므로 $\begin{pmatrix} 2+xy & 3+x \\ -y & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ z & -1 \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$2+xy=3,\ 3+x=4,\ -y=z$

따라서 $x=1,\ y=1,\ z=-1$이다.

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & -2 \\ -3 & z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y-6 & -2+2z \\ 3y-3x & -6+xz \end{pmatrix}$

이므로 $\begin{pmatrix} y-6 & -2+2z \\ 3y-3x & -6+xz \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$y-6=0,\ -2+2z=0,\ 3y-3x=0,\ -6+xz=0$

따라서 $x=6,\ y=6,\ z=1$이다.

(4) $\begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ y & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3x+y & 2x-3 \\ -3+2y & -8 \end{pmatrix}$

이므로 $\begin{pmatrix} 3x+y & 2x-3 \\ -3+2y & -8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ z & -8 \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$3x+y=4,\ 2x-3=1,\ -3+2y=z$

따라서 $x=2,\ y=-2,\ z=-7$이다.

(5) $\begin{pmatrix} x & -2 \\ 3 & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} xz-2 & x-2 \\ 3z+y & 3+y \end{pmatrix}$

이므로 $\begin{pmatrix} xz-2 & x-2 \\ 3z+y & 3+y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$xz-2=4$, $x-2=1$, $3z+y=7$, $3+y=4$
따라서 $x=3$, $y=1$, $z=2$이다.

25 답 $\begin{pmatrix}1\\8\end{pmatrix}$

풀이 $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$이므로

$$A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=2A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+3A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$
$$=2\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1\\8\end{pmatrix}$$

26 답 $\begin{pmatrix}6\\7\end{pmatrix}$

풀이 $\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$이므로

$$A\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}=2A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$$
$$=2\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}6\\7\end{pmatrix}$$

27 답 $\begin{pmatrix}11\\4\end{pmatrix}$

풀이 $\begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$이므로

$$A\begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix}=2A\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}+3A\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$$
$$=2\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}15\\6\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}11\\4\end{pmatrix}$$

28 답 (1) ① $\begin{pmatrix}3&-5\\5&8\end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix}1&-18\\18&19\end{pmatrix}$

(2) ① $\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix}5&10\\10&-5\end{pmatrix}$

(3) ① $\begin{pmatrix}3&-3\\-6&6\end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix}9&-9\\-18&18\end{pmatrix}$

(4) ① $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix}1&0\\-1&-1\end{pmatrix}$

풀이 (1) ① $A^2=AA=\begin{pmatrix}2&-1\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\1&3\end{pmatrix}$
$$=\begin{pmatrix}3&-5\\5&8\end{pmatrix}$$

② $A^3=A^2A=\begin{pmatrix}3&-5\\5&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\1&3\end{pmatrix}$
$$=\begin{pmatrix}1&-18\\18&19\end{pmatrix}$$

(2) ① $A^2=AA=\begin{pmatrix}1&2\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\2&-1\end{pmatrix}$
$$=\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}$$

② $A^3=A^2A=\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\2&-1\end{pmatrix}$
$$=\begin{pmatrix}5&10\\10&-5\end{pmatrix}$$

(3) ① $A^2=AA=\begin{pmatrix}1&-1\\-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-2&2\end{pmatrix}$
$$=\begin{pmatrix}3&-3\\-6&6\end{pmatrix}$$

② $A^3=A^2A=\begin{pmatrix}3&-3\\-6&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-2&2\end{pmatrix}$
$$=\begin{pmatrix}9&-9\\-18&18\end{pmatrix}$$

(4) ① $A^2=AA=\begin{pmatrix}1&0\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-1&-1\end{pmatrix}$
$$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

② $A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-1&-1\end{pmatrix}$
$$=\begin{pmatrix}1&0\\-1&-1\end{pmatrix}$$

29 답 (1) $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

풀이 (1) $E^2=EE=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

(2) (1)에서 $E^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$이므로

$E^3=E^2E$
$$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

(3) (2)에서 $E^3=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$이므로

$E^4=E^3E$
$$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

(4) $E^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $E^3=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $E^4=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, …이므로

E^n(n은 자연수)을 추정하면

$E^n=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

따라서 $E^{1000}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$이다.

30 답 (1) $\begin{pmatrix}1&4\\0&1\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}1&6\\0&1\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}1&8\\0&1\end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix}1&2000\\0&1\end{pmatrix}$

풀이 (1) $A^2=AA=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$
$$=\begin{pmatrix}1&4\\0&1\end{pmatrix}$$

(2) (1)에서 $A^2=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이므로

$A^3=A^2A$

$=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3) (2)에서 $A^3=\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이므로

$A^4=A^3A$

$=\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(4) $A^2=\begin{pmatrix} 1 & 2\times2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3=\begin{pmatrix} 1 & 3\times2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^4=\begin{pmatrix} 1 & 4\times2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

…이므로 A^n(n은 자연수)을 추정하면

$A^n=\begin{pmatrix} 1 & n\times2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

따라서 $A^{1000}=\begin{pmatrix} 1 & 1000\times2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2000 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이다.

31 답 (1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3000 & 1 \end{pmatrix}$

풀이 (1) $A^2=AA=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

(2) (1)에서 $A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$이므로

$A^3=A^2A$

$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$

(3) (2)에서 $A^3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$이므로

$A^4=A^3A$

$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}$

(4) $A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\times3 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3\times3 & 1 \end{pmatrix}$, $A^4=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4\times3 & 1 \end{pmatrix}$, …

이므로 A^n(n은 자연수)을 추정하면

$A^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n\times3 & 1 \end{pmatrix}$

따라서 $A^{1000}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1000\times3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3000 & 1 \end{pmatrix}$이다.

32 답 (1) $\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 27 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 81 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 3^{1000} & 0 \\ 0 & 2^{1000} \end{pmatrix}$

풀이 (1) $A^2=AA=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(2) (1)에서 $A^2=\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$이므로

$A^3=A^2A$

$=\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 27 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

(3) (2)에서 $A^3=\begin{pmatrix} 27 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$이므로

$A^4=A^3A$

$=\begin{pmatrix} 27 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 81 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(4) $A^2=\begin{pmatrix} 3^2 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix}$, $A^3=\begin{pmatrix} 3^3 & 0 \\ 0 & 2^3 \end{pmatrix}$, $A^4=\begin{pmatrix} 3^4 & 0 \\ 0 & 2^4 \end{pmatrix}$, …이므로

A^n(n은 자연수)을 추정하면

$A^n=\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$

따라서 $A^{1000}=\begin{pmatrix} 3^{1000} & 0 \\ 0 & 2^{1000} \end{pmatrix}$이다.

33 답 (1) $\begin{pmatrix} 3000a & 3000b \\ 1000a & 1000b \end{pmatrix}$ (2) $a=5$, $b=3$

풀이 (1) $XY=\begin{pmatrix} 3000 \\ 1000 \end{pmatrix}(a \quad b)=\begin{pmatrix} 3000a & 3000b \\ 1000a & 1000b \end{pmatrix}$

(2) 태호네 가족이 모두 경복궁을 관람할 때의 입장료가 15000원이므로

$3000a=15000 \qquad \therefore a=5$

예지네 가족이 모두 덕수궁을 관람할 때의 입장료가 3000원이므로

$1000b=3000 \qquad \therefore b=3$

34 답 $a=3$, $b=6$, $c=25$

풀이 $\begin{pmatrix} c \\ 24 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 25 \\ 24 \end{pmatrix}$이므로 $c=25$

$\begin{pmatrix} 8 & a \\ b & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 16+3a \\ 2b+12 \end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix} 16+3a \\ 2b+12 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 25 \\ 24 \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$16+3a=25$, $2b+12=24$

따라서 $a=3$, $b=6$이다.

35 답 풀이 참조

풀이 XY

$=\begin{pmatrix} 200 & 100 \\ 150 & 250 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2000 & 150 \\ 4000 & 250 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 200\times2000+100\times4000 & 200\times150+100\times250 \\ 150\times2000+250\times4000 & 150\times150+250\times250 \end{pmatrix}$

(1) XY의 (1, 1) 성분은 $200\times2000+100\times4000$이므로 공장 A에서 한 달 동안 생산한 자동차를 모두 팔았을 때의 매출 총액이다.

(2) XY의 (1, 2) 성분은 $200\times150+100\times250$이므로 공

장 A에서 한 달 동안 생산한 자동차를 모두 팔았을 때의 이익 총액이다.

(3) XY의 $(2,\ 1)$ 성분은 $150\times2000+250\times4000$이므로 공장 B에서 한 달 동안 생산한 자동차를 모두 팔았을 때의 매출 총액이다.

(4) XY의 $(2,\ 2)$ 성분은 $150\times150+250\times250$이므로 공장 B에서 한 달 동안 생산한 자동차를 모두 팔았을 때의 이익 총액이다.

36 답 풀이 참조

풀이 $YX=\begin{pmatrix}2000 & 1300\\ 2100 & 1200\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 3\\ 6 & 5\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2000\times4+1300\times6 & 2000\times3+1300\times5\\ 2100\times4+1200\times6 & 2100\times3+1200\times5\end{pmatrix}$

(1) YX의 $(1,\ 1)$ 성분은 $2000\times4+1300\times6$이므로 현주가 문구점 A에서 볼펜과 형광펜을 사고 지불해야 하는 금액이다.

(2) YX의 $(1,\ 2)$ 성분은 $2000\times3+1300\times5$이므로 미애가 문구점 A에서 볼펜과 형광펜을 사고 지불해야 하는 금액이다.

(3) YX의 $(2,\ 1)$ 성분은 $2100\times4+1200\times6$이므로 현주가 문구점 B에서 볼펜과 형광펜을 사고 지불해야 하는 금액이다.

(4) YX의 $(2,\ 2)$ 성분은 $2100\times3+1200\times5$이므로 미애가 문구점 B에서 볼펜과 형광펜을 사고 지불해야 하는 금액이다.

37 답 **(1)** ① $\begin{pmatrix}6 & 1\\ 5 & 16\end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix}14 & 7\\ 3 & 8\end{pmatrix}$

(2) ① $\begin{pmatrix}9 & 1\\ 6 & 4\end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix}12 & -2\\ 9 & 1\end{pmatrix}$

(3) ① $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

(4) ① $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

(5) ① $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 4 & 2\end{pmatrix}$

풀이 **(1)** ① $AB=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 5\\ -1 & 2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}6 & 1\\ 5 & 16\end{pmatrix}$

② $BA=\begin{pmatrix}4 & 5\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}14 & 7\\ 3 & 8\end{pmatrix}$

(2) ① $AB=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}9 & 1\\ 6 & 4\end{pmatrix}$

② $BA=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}12 & -2\\ 9 & 1\end{pmatrix}$

(3) ① $AB=\begin{pmatrix}5 & 5\\ 7 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

② $BA=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 5\\ 7 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

(4) ① $AB=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

② $BA=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

(5) ① $AB=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 6 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -4 & 2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

② $BA=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 6 & 3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 4 & 2\end{pmatrix}$

38 답 **(1)** $\begin{pmatrix}3 & -3\\ 1 & -9\end{pmatrix}$ **(2)** $\begin{pmatrix}1 & 5\\ -3 & -3\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}-1 & 15\\ 0 & -6\end{pmatrix}$ **(4)** $\begin{pmatrix}1 & -7\\ 1 & -3\end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix}1 & -3\\ -4 & 6\end{pmatrix}$ **(6)** $\begin{pmatrix}3 & -3\\ -3 & -9\end{pmatrix}$

풀이 **(1)** $(AB)C=ABC$

$=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}3 & -3\\ 1 & -9\end{pmatrix}$

(2) $AB+AC=A(B+C)$

$=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix}\right\}$

$=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1 & 5\\ -3 & -3\end{pmatrix}$

(3) $AC+BC=(A+B)C$

$=\left\{\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & -2\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2 & 5\\ -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-1 & 15\\ 0 & -6\end{pmatrix}$

(4) $AB-AC=A(B-C)$

$=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix}\right\}$

$=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 1 & -5\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1 & -7\\ 1 & -3\end{pmatrix}$

(5) $AC-BC=(A-B)C$

$$=\left\{\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&3\\0&-2\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}2&0\\-1&3\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\-1&3\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&-3\\-4&6\end{pmatrix}$$

(6) $A(3B)=3AB$

$$=3\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\0&-2\end{pmatrix}$$
$$=3\begin{pmatrix}1&-1\\-1&-3\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}3&-3\\-3&-9\end{pmatrix}$$

39 답 (1) $\begin{pmatrix}-5&7\\2&-2\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}-4&12\\0&0\end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix}-1&-2\\0&1\end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix}-1&-1\\2&-2\end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix}-4&4\\4&-10\end{pmatrix}$

풀이 (1) $ABA-ABC$

$$=AB(A-C)$$
$$=\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1\\-2&3\end{pmatrix}\right\}$$
$$=\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-3\\2&-2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-1&-2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-3\\2&-2\end{pmatrix}$$
$$=\underline{\begin{pmatrix}-5&7\\2&-2\end{pmatrix}}$$

(2) $(BC)A-A(CA)$

$$=B(CA)-A(CA)$$
$$=(B-A)CA$$
$$=\left\{\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}0&1\\-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-2&2\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-4&4\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-4&12\\0&0\end{pmatrix}$$

(3) $(4A)B-A(3B)=4AB-3AB=AB$

$$=\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-1&-2\\0&1\end{pmatrix}$$

(4) $(3A-B)C+A(B-3C)$

$$=3AC-BC+AB-3AC$$
$$=-BC+AB$$
$$=-\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-2&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$$
$$=-\begin{pmatrix}0&-1\\-2&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&-2\\0&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-1&-1\\2&-2\end{pmatrix}$$

(5) $A(B-C)+(C-A)B-C(A+B)$

$$=AB-AC+CB-AB-CA-CB$$
$$=-AC-CA$$
$$=-\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-2&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1\\-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}$$
$$=-\begin{pmatrix}4&-5\\-2&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1\\-2&7\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-4&4\\4&-10\end{pmatrix}$$

40 답 (1) ① $\begin{pmatrix}-5&1\\-6&-2\end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix}-5&1\\-6&-2\end{pmatrix}$

(2) ① $\begin{pmatrix}-4&4\\-4&0\end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix}-4&4\\-4&0\end{pmatrix}$

(3) ① $\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}$

풀이 (1) ① $A-B=\begin{pmatrix}1&2\\-3&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&1\\3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\-6&2\end{pmatrix}$

이므로

$$(A-B)^2=\begin{pmatrix}-1&1\\-6&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1\\-6&2\end{pmatrix}$$
$$=\underline{\begin{pmatrix}-5&1\\-6&-2\end{pmatrix}}$$

② $B-A=\begin{pmatrix}2&1\\3&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2\\-3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\6&-2\end{pmatrix}$이므로

$$(B-A)^2=\begin{pmatrix}1&-1\\6&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\6&-2\end{pmatrix}$$
$$=\underline{\begin{pmatrix}-5&1\\-6&-2\end{pmatrix}}$$

(2) ① $A-B=\begin{pmatrix}1&0\\2&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-2\\2&-2\end{pmatrix}$이므로

$$(A-B)^2=\begin{pmatrix}0&-2\\2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-2\\2&-2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-4&4\\-4&0\end{pmatrix}$$

② $B-A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2\\-2&2\end{pmatrix}$이므로

$$(B-A)^2=\begin{pmatrix}0&2\\-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2\\-2&2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-4&4\\-4&0\end{pmatrix}$$

(3) ① $A-B=\begin{pmatrix}1&1\\3&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2\\4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&1\end{pmatrix}$이므로

$$(A-B)^2=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\-1&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}$$

② $B-A=\begin{pmatrix}1&2\\4&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1\\3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}$이므로

$$(B-A)^2=\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}$$

41 답 (1) $x=-6,\ y=1$ (2) $x=-3,\ y=1$

(3) $x=-\frac{1}{2},\ y=3$ (4) $x=1,\ y=1$

풀이 (1) $AB=\begin{pmatrix}3&-2\\x&y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\-3&1\end{pmatrix}$
$$=\begin{pmatrix}12&-5\\2x-3y&-x+y\end{pmatrix}$$
$$BA=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-2\\x&y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6-x&-4-y\\-9+x&6+y\end{pmatrix}$$
이므로
$$\begin{pmatrix}12&-5\\2x-3y&-x+y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6-x&-4-y\\-9+x&6+y\end{pmatrix}$$
두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$12=6-x,\ -5=-4-y,\ 2x-3y=-9+x,$

$-x+y=6+y$

따라서 $x=\underline{-6},\ y=\underline{1}$이다.

(2) $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$에서

$A^2-AB+BA-B^2=A^2-B^2$이므로

$-AB+BA=O \qquad \therefore AB=BA$
$$AB=\begin{pmatrix}2&x\\3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y&1\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2y-x&2+2x\\3y+1&1\end{pmatrix}$$
$$BA=\begin{pmatrix}y&1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&x\\3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2y+3&xy-1\\4&-x-2\end{pmatrix}$$
이므로
$$\begin{pmatrix}2y-x&2+2x\\3y+1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2y+3&xy-1\\4&-x-2\end{pmatrix}$$
두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$2y-x=2y+3,\ 2+2x=xy-1,\ 3y+1=4,\ 1=-x-2$

따라서 $x=-3,\ y=1$이다.

(3) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$에서

$A^2+AB+BA+B^2=A^2+2AB+B^2$이므로

$AB+BA=2AB \qquad \therefore AB=BA$
$$AB=\begin{pmatrix}3&-2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\x&y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6-2x&3-2y\\2+x&1+y\end{pmatrix}$$
$$BA=\begin{pmatrix}2&1\\x&y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-2\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&-3\\3x+y&-2x+y\end{pmatrix}$$
이므로
$$\begin{pmatrix}6-2x&3-2y\\2+x&1+y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&-3\\3x+y&-2x+y\end{pmatrix}$$
두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$6-2x=7,\ 3-2y=-3,\ 2+x=3x+y,\ 1+y=-2x+y$

따라서 $x=-\frac{1}{2},\ y=3$이다.

(4) $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$에서

$A^2-AB-BA+B^2=A^2-2AB+B^2$이므로

$AB+BA=2AB \qquad \therefore AB=BA$
$$AB=\begin{pmatrix}2&1\\-1&x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&y\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2y+1\\-2-x&-y+x\end{pmatrix}$$
$$BA=\begin{pmatrix}2&y\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\-1&x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-y&2+xy\\-3&-1+x\end{pmatrix}$$
이므로
$$\begin{pmatrix}3&2y+1\\-2-x&-y+x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-y&2+xy\\-3&-1+x\end{pmatrix}$$
두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$3=4-y,\ 2y+1=2+xy,\ -2-x=-3,$

$-y+x=-1+x$

따라서 $x=1,\ y=1$이다.

42 답 (1) $p=-4,\ q=1$ (2) $p=-4,\ q=3$

(3) $p=-2,\ q=-2$

풀이 (1) $A^2=AA=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11&4\\8&3\end{pmatrix}$이므로
$$A^2+pA+qE=\begin{pmatrix}11&4\\8&3\end{pmatrix}+p\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}+q\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}11&4\\8&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3p&p\\2p&p\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}q&0\\0&q\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}11+3p+q&4+p\\8+2p&3+p+q\end{pmatrix}$$
$\begin{pmatrix}11+3p+q&4+p\\8+2p&3+p+q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$이므로 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$11+3p+q=0,\ 4+p=0,\ 8+2p=0,\ 3+p+q=0$

따라서 $p=\underline{-4},\ q=\underline{1}$이다.

(2) $A^2=AA=\begin{pmatrix}1&0\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\4&9\end{pmatrix}$이므로
$$A^2+pA+qE=\begin{pmatrix}1&0\\4&9\end{pmatrix}+p\begin{pmatrix}1&0\\1&3\end{pmatrix}+q\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&0\\4&9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}p&0\\p&3p\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}q&0\\0&q\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1+p+q&0\\4+p&9+3p+q\end{pmatrix}$$
$\begin{pmatrix}1+p+q&0\\4+p&9+3p+q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$이므로 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$1+p+q=0,\ 4+p=0,\ 9+3p+q=0$

따라서 $p=-4,\ q=3$이다.

(3) $A^2=AA=\begin{pmatrix}0&-2\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-2\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-4\\-2&6\end{pmatrix}$

이므로

$A^2+pA+qE$
$$=\begin{pmatrix}2&-4\\-2&6\end{pmatrix}+p\begin{pmatrix}0&-2\\-1&2\end{pmatrix}+q\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2&-4\\-2&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-2p\\-p&2p\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}q&0\\0&q\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2+q&-4-2p\\-2-p&6+2p+q\end{pmatrix}$$
$\begin{pmatrix}2+q&-4-2p\\-2-p&6+2p+q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$이므로 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$2+q=0,\ -4-2p=0,\ -2-p=0,\ 6+2p+q=0$

따라서 $p=-2,\ q=-2$이다.

43 답 (1) $x=15$, $y=-4$ (2) $x=13$, $y=-12$
(3) $x=6$, $y=4$

풀이 (1) 케일리-해밀턴 정리에 의하여

$A^2-(3+1)A+(3\times1-1\times2)E=O$
$A^2-4A+E=O$
즉, $A^2=4A-E$
$A^3=A^2A$
$=(4A-E)A$
$=4A^2-A$
$=4(4A-E)-A$
$=15A-4E$

이므로 $x=15$, $y=-4$이다.

(2) 케일리-해밀턴 정리에 의하여

$A^2-(1+3)A+(1\times3-0\times1)E=O$
$A^2-4A+3E=O$
즉, $A^2=4A-3E$
$A^3=A^2A$
$=(4A-3E)A$
$=4A^2-3A$
$=4(4A-3E)-3A$
$=13A-12E$

이므로 $x=13$, $y=-12$이다.

(3) 케일리-해밀턴 정리에 의하여

$A^2-(0+2)A+\{0\times2-(-2)\times(-1)\}E=O$
$A^2-2A-2E=O$
즉, $A^2=2A+2E$
$A^3=A^2A$
$=(2A+2E)A$
$=2A^2+2A$
$=2(2A+2E)+2A$
$=6A+4E$

이므로 $x=6$, $y=4$이다.

중단원 점검문제 | Ⅳ-1 행렬과 그 연산 191-192쪽

01 답 0

풀이 $a_{11}=-1$, $a_{23}=2$, $a_{31}=3$이므로
$a_{11}-a_{23}+a_{31}=-1-2+3=0$

02 답 $\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}$

풀이 P_1 지역에서는 P_1 지역으로 다시 되돌아오는 노선이 1개, P_2 지역으로 가는 노선이 1개, P_3 지역으로 가는 노선이 2개이므로
$a_{11}=1$, $a_{12}=1$, $a_{13}=2$
P_2 지역에서는 P_1 지역으로 가는 노선이 1개, P_2 지역으로 다시 되돌아오는 노선이 2개, P_3 지역으로 가는 노선이 1개이므로
$a_{21}=1$, $a_{22}=2$, $a_{23}=1$
P_3 지역에서는 P_1 지역으로 가는 노선이 1개, P_2 지역으로 가는 노선이 1개, P_3 지역으로 다시 되돌아오는 노선이 0개이므로
$a_{31}=1$, $a_{32}=1$, $a_{33}=0$
따라서 구하는 행렬 A는 $\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}$이다.

03 답 17

풀이 대응하는 성분이 각각 같아야 하므로
$y+3=x+2y$, $3xy+6=-6$, $2x+y=2$
따라서 $x=-1$, $y=4$이므로
$x^2+y^2=(-1)^2+4^2=17$

04 답 -1

풀이 $A+B=\begin{pmatrix}2&1\\x&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&3x\\3&-1\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}6&1+3x\\x+3&2\end{pmatrix}$

$A+B$의 모든 성분의 합이 8이므로
$6+(1+3x)+(x+3)+2=8$
$4x+12=8$
$4x=-4$
따라서 $x=-1$이다.

05 답 1

풀이 $A-C=\begin{pmatrix}3&1\\2&5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&2\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1\\1&6\end{pmatrix}$

이므로

$B-(A-C)=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&-1\\1&6\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}0&1\\-1&-5\end{pmatrix}$

따라서 $a=0$, $b=1$, $c=-1$, $d=-5$이므로
$ad-bc=0\times(-5)-1\times(-1)=1$

06 답 $\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

풀이 $3(A+B)-A=2X+B$에서

$3A+3B-A=2X+B$이므로

$2X=2A+2B$

따라서

$X=A+B$

$=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

07 답 6

풀이 $xB+yC=x\begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} x & ax \\ 2x & bx \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -y & by \\ 0 & ay \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} x-y & ax+by \\ 2x & bx+ay \end{pmatrix}$

$A=xB+yC$이므로

$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x-y & ax+by \\ 2x & bx+ay \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$1=x-y$ …… ㉠

$3=ax+by$ …… ㉡

$-4=2x$ …… ㉢

$2=bx+ay$ …… ㉣

㉢에서 $x=-2$

$x=-2$를 ㉠에 대입하면 $y=-3$

$x=-2$, $y=-3$을 ㉡, ㉣에 각각 대입하면

$-2a-3b=3$, $-2b-3a=2$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=0$, $b=-1$

따라서 $xy+ab=6+0=6$이다.

08 답 1

풀이 $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & 0 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2y-6 & 18 \\ -5y-2x & 6x \end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix} 2y-6 & 18 \\ -5y-2x & 6x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 18 \\ -8 & -6 \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$2y-6=-2$, $-5y-2x=-8$, $6x=-6$

이므로 $x=-1$, $y=2$

따라서 $x+y=1$이다.

09 답 풀이 참조

풀이 $AB=\begin{pmatrix} 1200 & 1000 \\ 1500 & 1200 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1200\times3+1000\times3 & 1200\times3+1000\times4 \\ 1500\times3+1200\times3 & 1500\times3+1200\times4 \end{pmatrix}$

행렬 AB의 $(2,\ 1)$ 성분은 $1500\times3+1200\times3$이므로 상점 Q에서 재성이가 빵과 우유를 사고 지불해야 하는 금액이다.

10 답 $x=4$, $y=-1$

풀이 $AB=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ y & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4+y & -2 \\ 2+xy & -1 \end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ y & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2-x \\ 2y & y \end{pmatrix}$

$AB=BA$이므로

$\begin{pmatrix} 4+y & -2 \\ 2+xy & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2-x \\ 2y & y \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$4+y=3$, $-2=2-x$, $2+xy=2y$, $-1=y$

이므로 $x=4$, $y=-1$

11 답 7

풀이 $AB+AC=A(B+C)$

$=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ a & 1 \end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix} 3 & b \\ -4 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -7 & c \end{pmatrix}\right\}$

$=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & b \\ -11 & c \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 19 & b-c \\ 8a-11 & ab+c \end{pmatrix}$

이므로 $\begin{pmatrix} 19 & b-c \\ 8a-11 & ab+c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 19 & -3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$b-c=-3$, $8a-11=5$, $ab+c=6$

이므로 $a=2$, $b=1$, $c=4$

따라서 $a+b+c=7$이다.

12 답 26

풀이 A^2+B^2

$=AA+BB$

$=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -5 & -18 \\ 12 & 19 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 15 & 6 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 10 & -12 \\ 6 & 22 \end{pmatrix}$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$10-12+6+22=26$

13 답 30

풀이 $A^2=AA$

$=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3=A^2A$

$=\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^4=A^3A$

$=\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

즉, $A^2=\begin{pmatrix} 1 & 2\times3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3=\begin{pmatrix} 1 & 3\times3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$A^4=\begin{pmatrix} 1 & 4\times3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, …이므로 A^n(n은 자연수)을 추정하면

$A^n=\begin{pmatrix} 1 & n\times3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 3n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 90 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이므로 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$3n=90$

따라서 $n=30$이다.

14 답 8

풀이 $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$에서

$A^2-AB+BA-B^2=A^2-B^2$이므로

$-AB+BA=O$

즉, $AB=BA$

$AB=\begin{pmatrix} a & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & b \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a-1 & ab+1 \\ 7 & 2b-3 \end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix} 2 & b \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a+2b & 3b-2 \\ a-2 & -4 \end{pmatrix}$

이므로 $\begin{pmatrix} 2a-1 & ab+1 \\ 7 & 2b-3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a+2b & 3b-2 \\ a-2 & -4 \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$2a-1=2a+2b$, $ab+1=3b-2$, $7=a-2$, $2b-3=-4$

이므로 $a=9$, $b=-\frac{1}{2}$

따라서 $a+2b=8$이다.

15 답 $\begin{pmatrix} 16 & 16 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

풀이 $A^2-3AB+BA-3B^2=A(A-3B)+B(A-3B)$
$=(A+B)(A-3B)$

이때

$A+B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

$A-3B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$

이므로

$A^2-3AB+BA-3B^2=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 16 & 16 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

16 답 85

풀이 $A^2=AA=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 & -4 \\ 8 & -7 \end{pmatrix}$

이므로

$A^2+pA+qE$

$=\begin{pmatrix} -7 & -4 \\ 8 & -7 \end{pmatrix}+p\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}+q\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -7 & -4 \\ 8 & -7 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} p & -2p \\ 4p & p \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -7+p+q & -4-2p \\ 8+4p & -7+p+q \end{pmatrix}$

즉, $\begin{pmatrix} -7+p+q & -4-2p \\ 8+4p & -7+p+q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$이므로 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$-7+p+q=0$, $-4-2p=0$, $8+4p=0$, $-7+p+q=0$

이므로 $p=-2$, $q=9$

따라서 $p^2+q^2=4+81=85$이다.

다른 풀이 $A\neq kE$ (k는 실수)이므로 케일리-해밀턴 정리에 의하여

$A^2-(1+1)A+\{1\times1-(-2)\times4\}E=O$

$A^2-2A+9E=O$

따라서 $p=-2$, $q=9$이므로

$p^2+q^2=4+81=85$

참고 $A^2-pA+qE=O$ (p, q는 실수)를 만족시키는 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여 $A=kE$ (k는 실수) 꼴이면 $a+d=p$, $ad-bc=q$가 항상 성립하는 것은 아니다. 따라서 케일리-해밀턴 정리를 거꾸로 이용할 때에는 $A=kE$인 경우와 $A\neq kE$인 경우로 나누어 생각해야 한다.