

풍산자 반복 수학

수학Ⅰ





풍산자 반복수학 이렇게 특별합니다.

1

한 권의 기본 개념과 연산 실력 완성!!

- 개념과 연산을 동시에 학습할 수 있도록 구성하여 기본 실력 완성
- 개념과 연산 유형의 집중학습으로 수학 실력을 쌓고 자신감을 기르며 실전에서는 킬러 문제에 시간을 할애

2

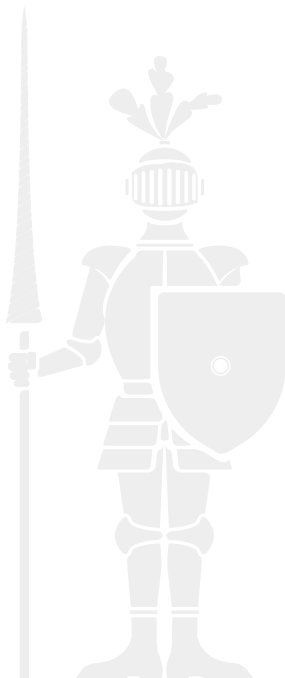
소단원별로 분석하여 체계적이고 최적인 주제별 구성!

- 소단원별로 학습 이해의 흐름에 맞춰 주제별 개념과 연산 유형을 체계적으로 학습
- 주제별 개념과 연산 학습으로 빈틈없는 기본 실력 향상

3

스스로 쉽게 학습할 수 있는 문제 연결 학습법!

- 개념과 공식 등을 이용하여 바로바로 적용하여 풀 수 있도록 구성하여 수학의 기본 개념과 연산을 스스로 완성
- 개념 정리부터 연산 유형까지 풀면서 저절로 원리를 터득



정확하고 빠른 풀이를 위한 반복 훈련서

풍산자 반복수학 이렇게 구성하였습니다.

1 주제별 개념 정리와 연산 유형

- 주제별로 중요한 개념 정리와 문제 풀이에 도움이 되는 참고, 보기, 보충 설명 제시
- 빈틈없는 개념과 연산학습이 이루어지도록 체계적으로 연산 유형 분류
- **풍생 POINT** 에서 연산 학습의 비법, 공식 등을 다시 한번 체크

01 거듭제곱근

1. 거듭제곱근의 개념
2. 거듭제곱근의 성질
3. 거듭제곱근의 계산

02 거듭제곱근의 성질

1. 거듭제곱근의 성질
2. 거듭제곱근의 계산

2 중단원 점검문제

- 실력을 점검하여 취약한 개념, 연산을 스스로 체크하고 보충 학습이 가능하도록 구성

3 정답과 풀이

- 문제 해결 과정이 보이는 자세하고 쉬운 풀이 제공

중단원 점검문제

1. 중단원 점검문제

지수함수와 로그함수

1. 지수함수와 로그함수



I

지수함수와 로그함수

1. 지수와 로그 006
2. 지수함수와 로그함수 032

II

삼각함수

1. 삼각함수의 뜻 064
2. 삼각함수의 그래프 080
3. 삼각함수의 활용 110

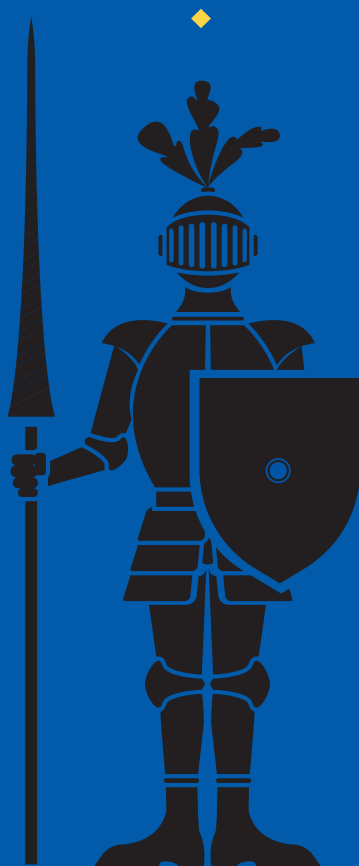
III

수열

1. 등차수열과 등비수열 126
2. 수열의 합 152
3. 수학적 귀납법 166

I

지수함수와 로그함수



1. 지수와 로그

2. 지수함수와 로그함수

거듭제곱근

1 거듭제곱

a 의 n 제곱: 실수 a 와 자연수 n 에 대하여 a 를 n 번 곱한 것, 즉 a^n

2 거듭제곱근

- ① a 의 n 제곱근: n 제곱하여 a 가 되는 수, 즉 $x^n=a$ 를 만족시키는 x
- ② a 의 거듭제곱근: a 의 제곱근, a 의 세제곱근, a 의 네제곱근, ...

3 실수 a 의 n 제곱근 중 실수인 것, 즉 $x^n=a$ 의 실근

$n \backslash a$	$a > 0$	$a = 0$	$a < 0$
n 이 짝수일 때	$\sqrt[n]{a}, -\sqrt[n]{a}$	0	없다.
n 이 홀수일 때	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$

▶ 거듭제곱과 거듭제곱근

a 는 x 의 n 제곱

$$x^n = a$$

x 는 a 의 n 제곱근

▶ a 의 n 제곱근

$\Rightarrow n$ 제곱하여 a 가 되는 수

▶ n 제곱근 a

n 제곱근 a 는 a 의 n 제곱근 중 a 와 부호가 같은 실수이며 1개이다.

정답과 풀이 002쪽

유형 01 거듭제곱근 구하기

01 다음 거듭제곱근을 구하여라.

(1) 8의 세제곱근

▶ 풀이 8의 세제곱근은 방정식 $x^3=8$ 의 근이므로
 $x^3-8=0, (x-2)(x^2+2x+4)=0$
 $\therefore x=2$ 또는 $x=$ _____

(2) -8의 세제곱근

(3) 16의 네제곱근

(4) 81의 네제곱근

유형 02 거듭제곱근 중 실수인 것 구하기

02 다음 거듭제곱근을 구하고, 그중에서 실수인 것을 말하여라.

(1) -1의 세제곱근

▶ 풀이 -1의 세제곱근은 방정식 $x^3=-1$ 의 근이므로
 $x^3+1=0, (x+1)(x^2-x+1)=0$
 $\therefore x=-1$ 또는 $x=\frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$
 이 중에서 실수인 것은 _____이다.

(2) -27의 세제곱근

(3) 1의 네제곱근

(4) 625의 네제곱근

▶ 풀이 POINT

a 의 n 제곱근

$\Rightarrow a$ 의 n 제곱근은 방정식 $x^n=a$ 의 근으로 복소수 범위에서 n 개가 존재한다.

거듭제곱근의 성질

1 거듭제곱근의 성질

$a > 0$, $b > 0$ 이고 m , n 이 2 이상의 자연수일 때,

$$\textcircled{1} \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\textcircled{2} \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\textcircled{3} (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\textcircled{4} \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

$$\textcircled{5} \sqrt[n^p]{a^{m^p}} = \sqrt[n]{a^m} \text{ (단, } p \text{는 자연수이다.)}$$

▶ $a > 0$ 이고 n 이 2 이상의 자연수일 때
 $(\sqrt[n]{a})^n = a$

정답과 풀이 002쪽

유형 03 $\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ 꼴의 계산

03 다음 식을 간단히 하여라.

$$(1) \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{4}$$

▶ 풀이 $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2 \times 4} = \sqrt[3]{2^3} = \underline{\hspace{1cm}}$

$$(2) \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{9}$$

$$(3) \sqrt[3]{16} \times \sqrt[3]{4}$$

$$(4) \sqrt[4]{3} \times \sqrt[4]{27}$$

$$(5) \sqrt[4]{\frac{1}{64}} \times \sqrt[4]{\frac{1}{4}}$$

유형 04 $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ 꼴의 계산

04 다음 식을 간단히 하여라.

$$(1) \frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$$

▶ 풀이 $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{\frac{81}{3}} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = \underline{\hspace{1cm}}$

$$(2) \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{16}}$$

$$(3) \frac{\sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{5}}$$

$$(4) \frac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{3}}$$

$$(5) \frac{\sqrt[4]{4}}{\sqrt[4]{64}}$$

유형 05 $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$, $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$ 꼴의 계산

05 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $(\sqrt[4]{4})^2$

▶ 풀이 $(\sqrt[4]{4})^2 = \sqrt[4]{4^2} = \sqrt[4]{2^4} = \underline{\hspace{1cm}}$

(2) $(\sqrt[6]{27})^2$

(3) $(\sqrt[8]{16})^2$

(4) $\left(\sqrt[8]{\frac{1}{81}}\right)^4$

06 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $\sqrt{\sqrt[3]{4}}$

▶ 풀이 $\sqrt{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{\sqrt{4}} = \sqrt[3]{2^2} = \underline{\hspace{1cm}}$

(2) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{27}}$

(3) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{256}}$

(4) $\sqrt{\sqrt[3]{81}}$

유형 06 $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^m}$ (p 는 자연수) 꼴의 계산

07 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $\sqrt[12]{8^4}$

▶ 풀이 $\sqrt[12]{8^4} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = \underline{\hspace{1cm}}$

(2) $\sqrt[6]{27^2}$

(3) $\sqrt[6]{\left(\frac{1}{4}\right)^9}$

(4) $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[6]{16}$

(5) $\sqrt[8]{16} \times \sqrt[4]{64}$

(6) $\sqrt[18]{8^2} \times \sqrt[6]{2}$

풍샘 POINT

계산할 때는 $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a} \neq \sqrt[1]{a}$ 임에 주의한다. (단, $a > 0$)

유형 07 복잡한 식의 계산

08 다음 식을 간단히 하여라. (단, $a > 0$)

(1) $\sqrt{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{a}}} \times \sqrt[4]{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}}}$

▶ 풀이 (주어진 식)

$$= \frac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[8]{a}} \times \frac{\sqrt[8]{a}}{\sqrt[12]{a}} = \frac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[12]{a}} = \frac{\sqrt[12]{a^2}}{\sqrt[12]{a}} = \underline{\hspace{1cm}}$$

(2) $\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}} \times \sqrt{\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[6]{a}}}$

(3) $\sqrt[3]{\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}}} \times \sqrt{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{a}}} \times \sqrt[4]{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}}}$

09 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $\sqrt[3]{\frac{9^8 + 3^{11}}{9^4 + 3^{13}}}$

▶ 풀이 (주어진 식)

$$\begin{aligned} &= \sqrt[3]{\frac{(3^2)^8 + 3^{11}}{(3^2)^4 + 3^{13}}} = \sqrt[3]{\frac{3^{16} + 3^{11}}{3^8 + 3^{13}}} = \sqrt[3]{\frac{3^{11}(3^5 + 1)}{3^8(3^5 + 1)}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{3^{11}}{3^8}} = \sqrt[3]{3^3} = \underline{\hspace{1cm}} \end{aligned}$$

(2) $\sqrt[6]{\frac{8^4 + 4^8}{8^2 + 4^5}}$

(3) $\sqrt[4]{\frac{9^{10} + 27^8}{9^8 + 27^4}}$

유형 08 거듭제곱근의 크기 비교

10 세 수의 크기를 비교하여라.

(1) $\sqrt{2}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[6]{10}$

▶ 풀이 2, 3, 6의 최소공배수인 $\underline{\hspace{1cm}}$ 으로 근호 앞 수를 통일하면

$$\sqrt{2} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{8}$$

$$\sqrt[3]{4} = \sqrt[6]{4^2} = \sqrt[6]{16}$$

이때 $\sqrt[6]{8} < \sqrt[6]{10} < \sqrt[6]{16}$ 이므로

$$\underline{\hspace{1cm}} < \underline{\hspace{1cm}} < \underline{\hspace{1cm}}$$

(2) $\sqrt{3}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[6]{26}$

(3) $\sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{3}, \sqrt[6]{2}$

(4) $\sqrt{2}, \sqrt[5]{3}, \sqrt[4]{5}$

▶ 품셈 POINT

거듭제곱근의 크기를 비교할 때는 근호 앞 수를 같게 한다.

이때 $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$ 를 이용한다. (단, p 는 자연수이다.)

지수의 확장

1 0 또는 음의 정수인 지수의 정의 $a \neq 0$ 이고 n 이 양의 정수일 때,

① $a^0 = 1$

② $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

보기 $2^0 = 1, 2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$

2 유리수인 지수의 정의 $a > 0$ 이고 m, n ($n \geq 2$)이 정수일 때,

① $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

② $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

보기 $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{2} = \sqrt{2},$
 $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$

3 지수가 실수일 때의 지수법칙 $a > 0, b > 0$ 이고 m, n 이 실수일 때,

① $a^m a^n = a^{m+n}$

② $(a^m)^n = a^{mn}$

③ $(ab)^n = a^n b^n$

④ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

⑤ $a^m \div a^n = a^{m-n}$

유형 09 지수가 정수일 때의 지수법칙**11** 다음 식을 간단히 하여라. (단, $a \neq 0$)

(1) $a^4 \times a^2 \div a^{-2}$

▶ 풀이 (주어진 식) $= a^{4+2-(-2)} = \underline{\hspace{2cm}}$

(2) $(a^5 \div a^8)^{-2}$

(3) $a^{-2} \times (a^{-4})^2$

(4) $(a^{-3})^2 \times (a^4)^3 \div a^{-4}$

유형 10 지수가 유리수일 때의 지수법칙**12** 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $\left\{ \left(\frac{27}{8} \right)^{-\frac{5}{6}} \right\}^{\frac{2}{5}}$

▶ 풀이 (주어진 식) $= \left(\frac{27}{8} \right)^{-\frac{5}{6} \times \frac{2}{5}} = \left(\frac{27}{8} \right)^{-\frac{1}{3}}$
 $= \left\{ \left(\frac{3}{2} \right)^3 \right\}^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{3}{2} \right)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$

(2) $\left\{ \left(\frac{9}{25} \right)^{-\frac{7}{3}} \right\}^{\frac{6}{7}}$

(3) $7^{\frac{7}{4}} \times 7^{-\frac{5}{2}} \div 7^{-\frac{11}{4}}$

유형 11 거듭제곱근을 지수로 나타내기**13** 다음 식을 a^n 꼴로 나타내어라. (단, $a > 0$)

(1) $\sqrt[4]{\sqrt{a} \times \sqrt[5]{a}}$

▶ 풀이 (주어진 식)

$$\begin{aligned}
 &= \left(a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{5}}\right)^{\frac{1}{4}} \\
 &= \left(a^{\frac{7}{10}}\right)^{\frac{1}{4}} = \underline{\hspace{2cm}}
 \end{aligned}$$

(2) $\sqrt[3]{\frac{a^2}{\sqrt{a}} \times \sqrt[4]{a}}$

(3) $\sqrt{a\sqrt{a^2}\sqrt[3]{a^3}}$

(4) $\sqrt{a^2\sqrt{a^2}\sqrt[3]{a^2}}$

(5) $\sqrt{a\sqrt[3]{a^2}\sqrt[4]{a}}$

▶ 풀이 POINT

근호 안에 근호가 있는 문제

⇒ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = a^{\frac{1}{mn}}$ 을 이용한다.**유형 12** 곱셈 공식을 이용하여 전개하기**14** 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)$ (단, $a > 0, b > 0$)

▶ 풀이 (주어진 식)

$$= \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 - \left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

(2) $\left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}\right)$ (단, $a > 0, b > 0$)

(3) $\left(a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}\right)^2 - \left(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}\right)^2$ (단, $a > 0$)

(4) $\left(2^{\frac{1}{2}} + 1\right)\left(2^{\frac{1}{2}} - 1\right)$

(5) $\left(3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{2}{3}}\right)^3 + \left(3^{\frac{1}{3}} + 3^{-\frac{2}{3}}\right)^3$

▶ 곱셈 POINT

지수 문제에서는 다음과 같은 곱셈 공식이 많이 이용된다.

① $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$

② $(A - B)(A^2 + AB + B^2) = A^3 - B^3$

③ $(A \pm B)^3 = A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3$ (복호동순)

유형 13 곱셈 공식을 이용하여 식의 값 구하기

15 $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 4$ 일 때, 다음 식의 값을 구하여라.
(단, $a > 0$)

(1) $a + a^{-1}$

▶ 풀이 $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 4$ 의 양변을 제곱하면
 $a + 2 + a^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$
 $\therefore a + a^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$

(2) $a^2 + a^{-2}$

(3) $a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}}$

(4) $a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}$

(5) $a - a^{-1}$

16 다음을 구하여라.

(1) $x = 2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}$ 일 때, $2x^3 - 6x$ 의 값

▶ 풀이 $x^3 = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3 + \left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^3 + 3 \times 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{-\frac{1}{3}} \left(2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}\right)$
 $= 2 + 2^{-1} + 3x$
 $= \frac{5}{2} + 3x$
따라서 $x^3 - 3x = \frac{5}{2}$ 이므로
 $2x^3 - 6x = 2(x^3 - 3x) = \underline{\hspace{2cm}}$

(2) $x = 3^{\frac{2}{3}} + 3^{-\frac{2}{3}}$ 일 때, $9x^3 - 27x$ 의 값

(3) $x = 2^{\frac{2}{3}} - 2^{-\frac{2}{3}}$ 일 때, $4x^3 + 12x$ 의 값

(4) $x = 3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}$ 일 때, $9x^3 + 27x$ 의 값

▶ 곱셈 POINT

- ① $a^{\frac{1}{2}} \pm a^{-\frac{1}{2}}$ 의 값이 주어졌을 때, $a \pm a^{-1}$ 의 식의 값은 양변을 제곱하여 구한다.
- ② $a^{\frac{1}{3}} \pm a^{-\frac{1}{3}}$ 꼴의 식이 주어진 경우는 양변을 세제곱하여 주어진 식의 값을 구한다.

17 다음을 구하여라.

(1) $9^x=2$ 일 때, $\left(\frac{1}{81}\right)^{-4x}$ 의 값

▶ 풀이 $\left(\frac{1}{81}\right)^{-4x} = (3^{-4})^{-4x} = 3^{16x}$
 $= (3^{2x})^8 = (9^x)^8 = 2^8 = \underline{\hspace{2cm}}$

(2) $2^x=3$ 일 때, $\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)^{2x}$ 의 값

(3) $25^x=4$ 일 때, $\left(\frac{1}{125}\right)^{-2x}$ 의 값

(4) $16^x=3$ 일 때, 32^{4x} 의 값

(5) $\left(\frac{1}{9}\right)^x=5$ 일 때, $\left(\frac{1}{27}\right)^{2x}$ 의 값

18 다음을 구하여라.

(1) $a^{-2}=4$ 일 때, $\frac{a+a^{-1}}{a-a^{-1}}$ 의 값 (단, $a>0$)

▶ 풀이 $\frac{a+a^{-1}}{a-a^{-1}}$ 의 분모, 분자에 각각 $a+a^{-1}$ 을 곱하면
 $\frac{(a+a^{-1})^2}{a^2-a^{-2}} = \frac{a^2+2+a^{-2}}{a^2-a^{-2}}$
 이때 $a^{-2}=4$, $a^2=\underline{\hspace{2cm}}$ 을 위의 식에 대입하면
 $\frac{a^2+2+a^{-2}}{a^2-a^{-2}} = \underline{\hspace{2cm}}$

(2) $a^{-2}=2$ 일 때, $\frac{a^3-a^{-3}}{a^3+a^{-3}}$ 의 값 (단, $a>0$)

(3) $a^{2x}=4$ 일 때, $\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}$ 의 값 (단, $a>0$)

(4) $a^{2x}=\sqrt{2}+1$ 일 때, $\frac{a^{3x}-a^{-x}}{a^x+a^{-3x}}$ 의 값 (단, $a>0$)

■ 품셈 POINT

a^{-x} , a^{-3x} 등을 포함한 유리식의 계산은 분모, 분자에 a^x , a^{3x} 등을 곱하여 구하는 식을 주어진 조건식의 꼴로 변형한다.

19 다음을 구하여라.

(1) $3^x=32$, $24^y=256$ 일 때, $\frac{5}{x}-\frac{8}{y}$ 의 값

▶ 풀이 $3^x=32$ 에서 $3=32^{\frac{1}{x}}=(2^5)^{\frac{1}{x}}=2^{\frac{5}{x}}$ ㉠

$24^y=256$ 에서 $24=256^{\frac{1}{y}}=(2^8)^{\frac{1}{y}}=2^{\frac{8}{y}}$ ㉡

㉠ $\div$ ㉡을 하면 $\frac{3}{24}=2^{\frac{5}{x}-\frac{8}{y}}$

$$\frac{1}{8}=2^{\frac{5}{x}-\frac{8}{y}}, 2^{-3}=2^{\frac{5}{x}-\frac{8}{y}}$$

$$\therefore \frac{5}{x}-\frac{8}{y}=-3$$

(2) $4^x=27$, $36^y=81$ 일 때, $\frac{3}{x}-\frac{4}{y}$ 의 값

(3) $6^x=25$, $30^y=125$ 일 때, $\frac{2}{x}-\frac{3}{y}$ 의 값

(4) $20^x=64$, $5^y=128$ 일 때, $\frac{6}{x}-\frac{7}{y}$ 의 값

20 다음을 구하여라. (단, $xyz \neq 0$)

(1) $2^x=4^y=8^z$ 일 때, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}$ 의 값

▶ 풀이 $2^x=4^y=8^z=k$ 로 놓으면 $k>0$ 이고, $xyz \neq 0$ 에서 $k \neq 1$ 이다.

$$2^x=k \text{에서 } 2=k^{\frac{1}{x}} \quad \text{..... ㉠}$$

$$4^y=k \text{에서 } 4=k^{\frac{1}{y}} \quad \text{..... ㉡}$$

$$8^z=k \text{에서 } 8=k^{\frac{1}{z}} \quad \text{..... ㉢}$$

㉠ $\times$ ㉡ $\div$ ㉢을 하면

$$\frac{2 \times 4}{8}=k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}}, 1=k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}}$$

$k>0$ 이고, $k \neq 1$ 이므로

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=0$$

(2) $3^x=5^y=15^z$ 일 때, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}$ 의 값

(3) $2^x=5^y=10^z$ 일 때, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}$ 의 값

(4) $4^x=5^y=20^z$ 일 때, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}$ 의 값

▶ 풀이 POINT

주어진 조건식의 밑이 다르면 조건식을 변형하여 밑을 같게 한다. 이때 $a^x=k$ 는 $a=k^{\frac{1}{x}}$ 임을 이용한다.

로그의 정의

1 로그의 정의

$a > 0, a \neq 1$ 이고 $b > 0$ 일 때, $a^x = b$ 를 만족시키는 x 를 a 를 밑으로 하는 b 의 **로그**라 하고, 기호로 $x = \log_a b$ 와 같이 나타낸다. 이때 b 를 $\log_a b$ 의 **진수**라고 한다.

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$$

로그의 밑과 진수

$$\begin{array}{c} a^x = b \\ \downarrow \\ x = \log_a b \end{array} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{진수} \\ \uparrow \\ \text{밑} \end{array}$$

유형 16 로그의 정의를 이용한 계산

정답과 풀이 005쪽

21 다음 등식을 만족시키는 실수 x 의 값을 구하여라.

(1) $\log_2 x = \frac{1}{2}$

▶ 풀이 $\log_2 x = \frac{1}{2}$ 에서 $x = 2^{\frac{1}{2}} = \underline{\hspace{1cm}}$

(2) $\log_3 x = 4$

(3) $\log_5 x = \frac{5}{2}$

(4) $\log_9 x = \frac{3}{2}$

(5) $\log_2 (\log_4 x) = -2$

22 다음 등식을 만족시키는 실수 x 의 값을 구하여라.

(1) $\log_x 64 = -3$

▶ 풀이 $\log_x 64 = -3$ 에서 $x^{-3} = 64$
 $(x^{-3})^{-\frac{1}{3}} = 64^{-\frac{1}{3}}$
 $\therefore x = (2^6)^{-\frac{1}{3}} = \underline{\hspace{1cm}}$

(2) $\log_x 16 = 2$

(3) $\log_x \frac{1}{32} = -5$

(4) $\log_x 25 = 2$

▶ 품셈 POINT

로그의 밑이 지수의 밑이 된다.

⇒ $\log_a x = n$ 이면 $x = a^n$

로그의 밑과 진수 조건

1 로그의 밑과 진수 조건

$\log_a b$ 가 정의되기 위해서는 밑은 1이 아닌 양수이어야 하고, 진수는 양수이어야 한다. 즉,

① 밑의 조건: $a > 0, a \neq 1$

② 진수의 조건: $b > 0$

유형 17 로그의 밑과 진수 조건

정답과 풀이 006쪽

23 다음 로그의 값이 정의되기 위한 실수 x 의 값의 범위를 구하여라.

(1) $\log_{x-2} (5-x)$

▶ 풀이 밑의 조건에서 $x-2 > 0, x-2 \neq 1$

$$\therefore x > 2, x \neq 3$$

..... ㉠

진수의 조건에서 $5-x > 0$

$$\therefore x < 5$$

..... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

_____ 또는 _____

(2) $\log_{6-x} (x-3)$

(3) $\log_2 (x^2-2x-24)$

(4) $\log_{x+1} (-x^2-x+6)$

(5) $\log_{x-1} (-x^2+6x-5)$

(6) $\log_{x-2} (-x^2+5x+14)$

(7) $\log_{x-3} (x^2-3x+2)$

(8) $\log_{x-3} (-x^2+11x-24)$

▶ 풀이 POINT

로그 문제에서는 항상 밑과 진수가 조건에 맞는지 확인한다.

→ $\log_a b$ 에서 $a > 0, a \neq 1$ 이고 $b > 0$ 이다.

로그의 기본 성질

1 로그의 기본 성질

$a > 0, a \neq 1, x > 0, y > 0$ 이고, n 이 실수일 때,

① $\log_a 1 = 0, \log_a a = 1$

$\Rightarrow$ 진수가 1인 로그는 0이고, 밑과 진수가 같은 로그는 1이다.

② $\log_a xy = \log_a x + \log_a y \quad \Rightarrow$ 진수의 곱하기는 로그의 더하기로 바뀐다.

③ $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \quad \Rightarrow$ 진수의 나누기는 로그의 빼기로 바뀐다.

④ $\log_a x^n = n \log_a x$ (단, n 은 실수이다.) $\Rightarrow$ 진수의 지수는 로그 앞으로 나온다.

보기

① $\log_3 1 = 0, \log_3 3 = 1$

② $\log_2 6 = \log_2 (2 \times 3)$
 $= \log_2 2 + \log_2 3$
 $= 1 + \log_2 3$

③ $\log_3 \frac{5}{3} = \log_3 5 - \log_3 3$
 $= \log_3 5 - 1$

④ $\log_3 9 = \log_3 3^2 = 2 \log_3 3$
 $= 2$

유형 18 로그의 계산 (1)

정답과 풀이 006쪽

24 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $\log_2 \frac{1}{4}$

> 풀이 $\log_2 \frac{1}{4} = \log_2 2^{-2} = -2 \log_2 2 = \underline{\hspace{2cm}}$

(2) $\log_2 1$

(3) $\log_3 243$

(4) $\log_5 5$

(5) $\log_2 \sqrt{2}$

(6) $\log_2 \frac{1}{2\sqrt{2}}$

(7) $\log_3 \sqrt[5]{27}$

(8) $\log_5 \sqrt[3]{25}$

(9) $\log_{\sqrt{2}} 8$

(10) $\log_{10} \sqrt{1000}$

25 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $\log_2 \frac{4}{3} + 2\log_2 \sqrt{12}$

▶ 풀이 $\log_2 \frac{4}{3} + 2\log_2 \sqrt{12} = \log_2 \frac{4}{3} + \log_2 (\sqrt{12})^2$
 $= \log_2 \frac{4}{3} + \log_2 12$
 $= \log_2 \left(\frac{4}{3} \times 12 \right)$
 $= \log_2 16 = \log_2 2^4 = \underline{\hspace{1cm}}$

(2) $\log_{15} 3 + \log_{15} 5$

(3) $\log_2 5 + \log_2 \frac{4}{5}$

(4) $\log_3 \frac{9}{2} + \log_3 6$

(5) $\log_3 75 + 2\log_3 \frac{1}{5}$

(6) $\log_2 100 - 2\log_2 \frac{5}{4}$

(7) $\log_5 \sqrt{10} + \frac{1}{2}\log_5 3 - \frac{3}{2}\log_5 \sqrt[3]{6}$

(8) $\log_5 3 - 2\log_5 \sqrt[4]{15} - \log_5 \sqrt{75}$

(9) $\log_2 \sqrt{3} - 2\log_2 \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log_2 6$

(10) $\log_3 2 + \log_3 \sqrt{6} - \frac{1}{2}\log_3 8$

(11) $\log_5 3 + \log_5 \sqrt{15} - \frac{1}{2}\log_5 27$

▶ **풍샘 POINT**

로그의 계산에서는 다음을 주의한다.

- ① $\log_a (x+y) \neq \log_a x + \log_a y$
- ② $\log_a (x-y) \neq \log_a x - \log_a y$
- ③ $(\log_a x)^k \neq k\log_a x$

로그의 여러 가지 성질

1 로그의 밑의 변환

$a > 0, a \neq 1, b > 0$ 일 때,

① $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ (단, $c > 0, c \neq 1$) $\Rightarrow$ 밑은 분모로 가고 진수는 분자로 간다.

② $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ (단, $b \neq 1$) $\Rightarrow$ 밑과 진수를 바꾸면 역수가 된다.

③ $\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b$ (단, $m \neq 0$ 이고, m, n 은 실수이다.)

$\Rightarrow$ 밑의 지수는 역수로 로그 앞에 나온다.

보기

① $\log_2 3 = \frac{\log_5 3}{\log_5 2}$

② $\log_2 3 = \frac{1}{\log_3 2}$

③ $\log_3 3^4 = \frac{4}{2} \log_3 3 = 2$

2 로그의 여러 가지 성질

$a > 0, b > 0$ 일 때,

① $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ (단, $c > 0, c \neq 1$) $\Rightarrow$ 양 끝의 수들은 바꿀 수 있다.

② $a^{\log_a b} = b$ (단, $a \neq 1$) $\Rightarrow$ 밑이 같으면 지울 수 있다.

보기

① $5^{\log_5 2} = 2^{\log_5 5}$

② $2^{\log_2 6} = 6$

유형 20 로그의 밑의 변환

26 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $\log_2 3 \times \log_3 5 \times \log_5 8$

▶ 풀이 (주어진 식)

$$= \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} \times \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 3} \times \frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 5} = \frac{\log_{10} 2^3}{\log_{10} 2} = \frac{3 \log_{10} 2}{\log_{10} 2}$$

$$= \underline{\hspace{2cm}}$$

(2) $\frac{1}{\log_{16} 8} + \frac{1}{\log_4 8}$

(3) $\log_{27} 9$

(4) $\log_4 3 - \log_2 \sqrt{3}$

▶ 풀이 POINT

밑이 다른 로그를 포함한 식의 계산

$\Rightarrow$ 밑의 변환 공식을 이용하여 밑을 통일한다.

유형 21 로그의 여러 가지 성질

27 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $4^{\log_4 5}$

▶ 풀이 $4^{\log_4 5} = 5^{\log_4 4} = \underline{\hspace{2cm}}$

(2) $8^{\log_2 3}$

(3) $9^{\log_3 4 + \log_3 2}$

(4) $4^{2 \log_2 5 - 2 \log_{\frac{1}{2}} 4 - 2 \log_5 10}$

28 $\log_{10} 2 = a$, $\log_{10} 3 = b$ 일 때, 다음을 a , b 로 나타내어라.

(1) $\log_{10} 5$

▶ 풀이 $\log_{10} 5 = \log_{10} \frac{10}{2} = \log_{10} 10 - \log_{10} 2 = \underline{\hspace{2cm}}$

(2) $\log_3 20$

(3) $\log_{10} 0.036$

(4) $\log_{18} 12$

(5) $\log_5 \frac{9}{2}$

(6) $\log_6 \sqrt{12}$

29 다음 물음에 답하여라.

(1) $\log_3 2 = a$, $\log_5 3 = b$ 일 때, $\log_{90} 150$ 을 a , b 로 나타내어라.

▶ 풀이 주어진 조건식의 로그의 밑을 3으로 통일하면

$$\log_5 3 = \frac{1}{\log_3 5} = b \quad \therefore \log_3 5 = \frac{1}{b}$$

$$\log_{90} 150 = \frac{\log_3 150}{\log_3 90} = \frac{\log_3 (2 \times 3 \times 5^2)}{\log_3 (2 \times 3^2 \times 5)}$$

$$= \frac{\log_3 2 + \log_3 3 + 2\log_3 5}{\log_3 2 + 2\log_3 3 + \log_3 5}$$

$$= \frac{a + 1 + \frac{2}{b}}{a + 2 + \frac{1}{b}}$$

$$= \underline{\hspace{2cm}}$$

(2) $\log_3 2 = a$, $\log_5 3 = b$ 일 때, $\log_{300} 450$ 을 a , b 로 나타내어라.

(3) $\log_3 2 = a$, $\log_7 3 = b$ 일 때, $\log_{42} 84$ 를 a , b 로 나타내어라.

(4) $\log_3 2 = a$, $\log_7 3 = b$ 일 때, $\log_{126} 256$ 을 a , b 로 나타내어라.

▶ **풍샘 POINT**

로그를 계산할 때는 먼저 밑을 통일한다.

$$\Rightarrow \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

로그의 성질을 이용한 여러 가지 문제

1 주어진 조건이나 관계식이 지수 꼴일 때

로그의 정의를 이용하여 주어진 조건이나 관계식을 로그 꼴로 바꾼다.

2 이차방정식의 두 근과 로그가 포함된 식이 결합되었을 때

이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 두 근의 합과 곱을 구한다.

▶ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때
 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \alpha\beta=\frac{c}{a}$

유형 23 지수 꼴로 관계식이 주어질 때

정답과 풀이 008쪽

30 $3^x=a, 3^y=b$ 일 때 다음을 x, y 로 나타내어라.

(1) $\log_{a^3} b$

▶ 풀이 $3^x=a, 3^y=b$ 에서 $x=\log_3 a, y=\log_3 b$
 $\therefore \log_{a^3} b = \frac{1}{3} \log_a b = \frac{1}{3} \times \frac{\log_3 b}{\log_3 a} = \underline{\hspace{2cm}}$

(2) $\log_{a^2} b^3$

(3) $\log_{\sqrt{a}} b^2$

(4) $\log_{\sqrt[3]{a}} \sqrt[3]{b}$

(5) $\log_{\sqrt[4]{a}} \frac{1}{b}$

31 $5^x=a, 5^y=b, 5^z=c$ 일 때, 다음을 x, y, z 로 나타내어라.

(1) $\log_5 ab^2c^3$

▶ 풀이 $5^x=a, 5^y=b, 5^z=c$ 에서
 $x=\log_5 a, y=\log_5 b, z=\log_5 c$
 $\therefore \log_5 ab^2c^3 = \log_5 a + 2\log_5 b + 3\log_5 c$
 $= \underline{\hspace{2cm}}$

(2) $\log_5 \frac{a^2b}{c^2}$

(3) $\log_5 \frac{b^4c}{a^3}$

(4) $\log_{ab} c^3$

(5) $\log_{ab} \sqrt[3]{c}$

▶ 풍습 POINT

$a^x=b$ 꼴의 조건이 주어지면 먼저 로그의 정의를 이용하여 식을 변형한다.

$$a^x=b \Rightarrow x=\log_a b$$

32 1이 아닌 두 양수 a, b 에 대하여 $a^3b^2=1$ 일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $\log_a a^2b$

▶ 풀이 $a^3b^2=1$ 의 양변에 밑이 a 인 로그를 취하면
 $\log_a a^3b^2 = \log_a 1$
 $\log_a a^3 + \log_a b^2 = 0, 3 + 2\log_a b = 0$
 $\therefore \log_a b = -\frac{3}{2}$
 $\therefore \log_a a^2b = \log_a a^2 + \log_a b$
 $= 2 + \log_a b = 2 - \frac{3}{2} = \underline{\hspace{1cm}}$

(2) $\log_a a^3b^5$

33 1이 아닌 두 양수 a, b 에 대하여 $a^3=b^4$ 일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $16\log_a b$

(2) $\log_a a^3b$

■ **풍샘 POINT**

구해야 하는 식의 밑이 a 인 경우의 식의 값

⇒ 주어진 식의 양변에 밑이 a 인 로그를 취하여 $\log_a b$ 의 값을 구한다.

34 다음을 구하여라.

(1) $36^x=9, 4^y=27$ 일 때, $\frac{2}{x}-\frac{3}{y}$ 의 값

▶ 풀이 $36^x=9, 4^y=27$ 에서 $x=\log_{36} 9, y=\log_4 27$
 $\therefore \frac{2}{x}-\frac{3}{y} = \frac{2}{\log_{36} 9} - \frac{3}{\log_4 27} = \frac{2}{\log_{36} 3^2} - \frac{3}{\log_4 3^3}$
 $= \frac{1}{\log_{36} 3} - \frac{1}{\log_4 3}$
 $= \log_3 36 - \log_3 4 = \log_3 \frac{36}{4} = \log_3 9$
 $= \underline{\hspace{1cm}}$

(2) $80^x=16, 5^y=64$ 일 때, $\frac{2}{x}-\frac{3}{y}$ 의 값

(3) $150^x=25, 6^y=125$ 일 때, $\frac{4}{x}-\frac{6}{y}$ 의 값

(4) $56^x=8, 7^y=16$ 일 때, $\frac{3}{x}-\frac{4}{y}$ 의 값

35 이차방정식 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $\log_3 \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$

▶ 풀이 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 3, \alpha\beta = 1$$

$$\therefore \log_3 \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} = \log_3 \frac{1}{3} = \log_3 3^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$$

(2) $\log_3 (\alpha^{-1} + \beta^{-1})$

36 이차방정식 $x^2 - 2x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $\log_2 (\alpha^2 + \beta^2)$

(2) $\log_4 (\alpha + \alpha^{-1}) + \log_4 (\beta + \beta^{-1})$

37 다음 이차방정식의 두 근이 $\log_2 a, \log_2 b$ 일 때, $\log_a b + \log_b a$ 의 값을 구하여라.

(1) $x^2 - 8x + 4 = 0$

▶ 풀이 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_2 a + \log_2 b = 8, \log_2 a \times \log_2 b = 4$$

$$\therefore \log_a b + \log_b a$$

$$= \frac{\log_2 b}{\log_2 a} + \frac{\log_2 a}{\log_2 b}$$

$$= \frac{(\log_2 b)^2 + (\log_2 a)^2}{\log_2 a \times \log_2 b}$$

$$= \frac{(\log_2 a + \log_2 b)^2 - 2 \times \log_2 a \times \log_2 b}{\log_2 a \times \log_2 b}$$

$$= \frac{8^2 - 2 \times 4}{4} = \underline{\hspace{2cm}}$$

(2) $x^2 - 9x + 3 = 0$

38 다음 이차방정식의 두 근이 $\log_3 a, \log_3 b$ 일 때, $\log_a b + \log_b a$ 의 값을 구하여라.

(1) $x^2 - 5x + 1 = 0$

(2) $x^2 + 4x + 2 = 0$

▶ **풍샘 POINT**

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)의 두 근을 α, β 라고 할 때

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \alpha\beta = \frac{c}{a}$$