풍산자

유형기본서

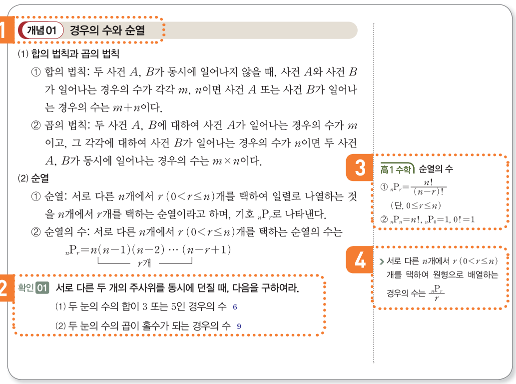
확률과 통계

구성과 특징

1 개념과 유형이 일목요연하게 정리
2 유형별 문항 학습으로 실전에 강함
3 친절하고 명쾌한 설명으로 혼자서도 학습 가능

개념

1. 수학의 기본 개념을 구조적으로 정리
2. 개념 확립에 도움이 되는 확인 문제
3. 학습할 개념의 바탕이 되는 이전 개념
4. 실전 적용에 활용 가능한 내용


1 개념 01 경우의 수와 순열

(1) 합의 법칙과 곱의 법칙

① 합의 법칙: 두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 A와 사건 B가 일어나는 경우의 수가 각각 m, n이면 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수는 $m+n$이다.

② 곱의 법칙: 두 사건 A, B에 대하여 사건 A가 일어나는 경우의 수가 m이고, 그 각각에 대하여 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n이면 두 사건 A, B가 동시에 일어나는 경우의 수는 $m\times n$이다.

(2) 순열

① 순열: 서로 다른 n개에서 $r\,(0<r\le n)$개를 택하여 일렬로 나열하는 것을 n개에서 r개를 택하는 순열이라고 하며, 기호 ${}_n\mathrm{P}_r$로 나타낸다.

② 순열의 수: 서로 다른 n개에서 $r\,(0<r\le n)$개를 택하는 순열의 수는

$$ {}_n\mathrm{P}_r=\underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}_{r\text{개}} $$

2 확인 01 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 다음을 구하여라.

(1) 두 눈의 수의 합이 3 또는 5인 경우의 수 6

(2) 두 눈의 수의 곱이 홀수가 되는 경우의 수 9

3 高1 수학 순열의 수

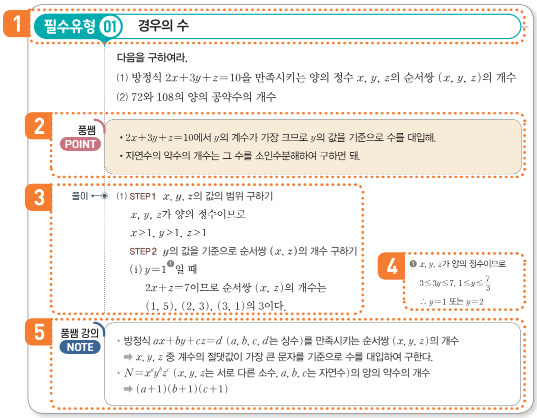
① ${}_n\mathrm{P}_r=\dfrac{n!}{(n-r)!}$ (단, $0\le r\le n$)

② ${}_n\mathrm{P}_n=n!$, ${}_n\mathrm{P}_0=1$, $0!=1$

4 서로 다른 n개에서 $r\,(0<r\le n)$개를 택하여 원형으로 배열하는 경우의 수는 $\dfrac{{}_n\mathrm{P}_r}{r}$

대표 유형

1. 반드시 알아야 할 유형을 필수유형과 발전유형으로 제시
2. 문제 해결을 위한 핵심 전략
3. 단계별 해결 방법 확인
4. 풀이 과정에 적용된 개념, 원리, 방법 등을 바로 확인
5. 연관 개념, 문제 풀이 비법, 보충 설명 등 제공


1 필수유형 01 경우의 수

다음을 구하여라.

(1) 방정식 $2x+3y+z=10$을 만족시키는 양의 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수

(2) 72와 108의 양의 공약수의 개수

2 풍쌤 POINT

• $2x+3y+z=10$에서 y의 계수가 가장 크므로 y의 값을 기준으로 수를 대입해.

• 자연수의 약수의 개수는 그 수를 소인수분해하여 구하면 돼.

3 풀이 (1) STEP 1 x, y, z의 값의 범위 구하기

x, y, z가 양의 정수이므로

$x\ge1$, $y\ge1$, $z\ge1$

STEP 2 y의 값을 기준으로 순서쌍 (x, z)의 개수 구하기

(i) $y=1$❶일 때

$2x+z=7$이므로 순서쌍 (x, z)의 개수는

$(1, 5)$, $(2, 3)$, $(3, 1)$의 3이다.

4 ❶ x, y, z가 양의 정수이므로

$3\le3y\le7$, $1\le y\le\frac{7}{3}$

$\therefore y=1$ 또는 $y=2$

5 풍쌤 강의 NOTE

• 방정식 $ax+by+cz=d$ (a, b, c, d는 상수)를 만족시키는 순서쌍 (x, y, z)의 개수

➡ x, y, z 중 계수의 절댓값이 가장 큰 문자를 기준으로 수를 대입하여 구한다.

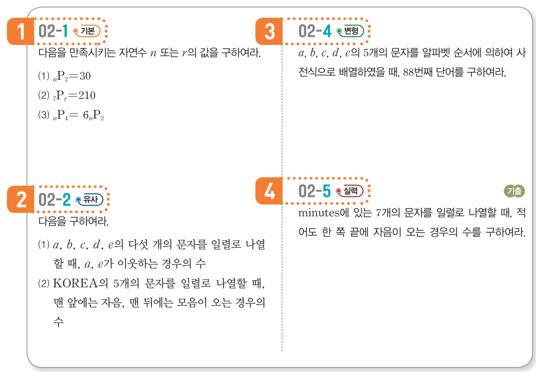
• $N=x^ay^bz^c$ (x, y, z는 서로 다른 소수, a, b, c는 자연수)의 양의 약수의 개수

➡ $(a+1)(b+1)(c+1)$

유사/변형/실력

1. 대표유형보다 낮은 난이도, 동일 출제 원리를 담은 문제
2. 대표유형과 동일 난이도, 동일 출제 원리를 담은 문제
3. 대표유형과 동일 난이도이지만 표현 방법을 바꾼 문제
4. 대표유형과 동일 출제 원리이지만 응용개념을 담은 문제

기출 수능/평가원/교육청 기출문제


1 02-1 기본

다음을 만족시키는 자연수 n 또는 r의 값을 구하여라.

(1) ${}_n\mathrm{P}_2=30$

(2) ${}_7\mathrm{P}_r=210$

(3) ${}_n\mathrm{P}_4=6{}_n\mathrm{P}_2$

2 02-2 유사

다음을 구하여라.

(1) a, b, c, d, e의 다섯 개의 문자를 일렬로 나열할 때, a, e가 이웃하는 경우의 수

(2) KOREA의 5개의 문자를 일렬로 나열할 때, 맨 앞에는 자음, 맨 뒤에는 모음이 오는 경우의 수

3 02-4 변형

a, b, c, d, e의 5개의 문자를 알파벳 순서에 의하여 사전식으로 배열하였을 때, 88번째 단어를 구하여라.

4 02-5 실력 기출

minutes에 있는 7개의 문자를 일렬로 나열할 때, 적어도 한 쪽 끝에 자음이 오는 경우의 수를 구하여라.

실전 연습

1 각 중단원별로 반드시 풀어야 할 문제를 수록하여 시험에 대비

서술형 서술형으로 출제 가능성이 높은 문항

기출 수능/평가원/교육청 기출문제

1 실전 연습 문제

01

크기와 모양이 같은 지우개 3개와 서로 다른 연필 2자루를 3개의 필통 A, B, C에 모두 넣는 경우의 수는?

(단, 비어 있는 필통이 있을 수 있다.)

① 70 ② 75 ③ 80 ④ 85 ⑤ 90

04

$4 \le a \le b \le c \le d \le 9$

의 모든 순서쌍 $(a, b$

① 122 ②

④ 134 ⑤

상위권 도약

1 각 중단원별로 상위권 실력을 완성할 수 있도록 난이도가 높은 문제를 구성

기출 수능/평가원/교육청 기출문제

1 상위권 도약 문제

01

다음 두 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구하여라.

(가) $a \times b \times c$는 홀수이다.
(나) $a \le b \le c \le 10$

03

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n+1}$의 전개

할 때, $\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{a_n}$의 값을

정답과 풀이

1 문제를 해결하는 데 필요한 핵심 아이디어

2 답을 구하는 데 필요한 단계적 사고 과정

3 실전에 도움이 되는 다양한 풀이

4 문제를 해결하는 데 필요한 확장 원리, 개념, 공식

04-6 답 720

1 해결전략 | 원형으로 둘러앉는 한 가지 방법에 대하여 부채꼴 모양의 탁자에서는 서로 다른 경우가 몇 가지 있는지 알아본다.

STEP 1 원탁에 둘러앉는 경우의 수 구하기

6명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$

2 STEP 2 원탁에 둘러앉은 한 가지 방법에 대하여 서로 다른 경우의 수 구하기

그런데 부채꼴 모양의 탁자에서는 원탁에 둘러앉은 한 가지 방법에 대하여 다음 그림과 같이 6가지의 서로 다른 경우가 존재한다.

STEP 3 조건을 만족시키는 경우의 수 구하기

따라서 구하는 경우의 수는

$120 \times 6=720$

3 다른 풀이

주어진 부채꼴 모양의 탁자에 6명이 둘러앉을 때, 회전하여 일치하는 경우가 없으므로 구하는 경우의 수는 6명을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.

따라서 구하는 경우의 수는 $6!=720$

가운데 정사각형을 색칠하는 경우의 수는 5이다.

STEP 2 기준이 되는 부분을 제외한 나머지 부분을 색칠하는 경우의 수 구하기

가운데 정사각형을 제외한 나머지 4개의 정삼각형을 색칠하는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

STEP 3 조건을 만족시키는 경우의 수 구하기

따라서 구하는 경우의 수는

$5 \times 6=30$

4 풍쌤의 비법

회전하여 일치하는 도형을 색칠하는 경우의 수는 다음과 같은 순서로 구한다.

① 기준이 되는 영역을 색칠하는 경우의 수를 구한다.
② 원순열을 이용하여 나머지 영역에 색칠하는 경우의 수를 구한다.
③ ①, ②에서 구한 경우의 수를 곱한다.

05-3 답 144

해결전략 | 기준이 되는 가운데 정오각형을 먼저 색칠하는 경우의 수를 구한 후, 나머지 부분을 원형으로 배열하는 경우의

확률과 통계

차례

I 경우의 수

Ⅱ

확률

Ⅲ 통계

01 여러 가지 순열

유형의 이해에 따라 ☐ 안에 ○, × 표시를 하고 반복하여 학습합니다.

		1st	2nd
필수유형 01	경우의 수	☐	☐
필수유형 02	순열	☐	☐
필수유형 03	원탁에 둘러앉는 경우의 수	☐	☐
발전유형 04	다각형 모양의 탁자에 둘러앉는 경우의 수	☐	☐
필수유형 05	평면도형에 색칠하는 경우의 수	☐	☐
필수유형 06	입체도형에 색칠하는 경우의 수	☐	☐
필수유형 07	중복순열의 수	☐	☐
필수유형 08	중복순열과 신호	☐	☐
필수유형 09	중복순열을 이용한 자연수의 개수	☐	☐
필수유형 10	중복순열과 함수의 개수	☐	☐
필수유형 11	같은 것이 있는 순열 – 문자	☐	☐
필수유형 12	같은 것이 있는 순열 – 자연수	☐	☐
필수유형 13	순서가 정해진 순열	☐	☐
필수유형 14	최단거리로 가는 경우의 수	☐	☐
발전유형 15	최단거리로 가는 경우의 수 – 복잡한 경우	☐	☐

01 여러 가지 순열

개념 01 경우의 수와 순열

(1) **합의 법칙과 곱의 법칙**

① 합의 법칙: 두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 A와 사건 B가 일어나는 경우의 수가 각각 m, n이면 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수는 $m+n$이다.

② 곱의 법칙: 두 사건 A, B에 대하여 사건 A가 일어나는 경우의 수가 m이고, 그 각각에 대하여 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n이면 두 사건 A, B가 동시에 일어나는 경우의 수는 $m\times n$이다.

(2) **순열**

① 순열: 서로 다른 n개에서 $r\,(0<r\le n)$개를 택하여 일렬로 나열하는 것을 n개에서 r개를 택하는 순열이라고 하며, 기호 ${}_n\mathrm{P}_r$로 나타낸다.

② 순열의 수: 서로 다른 n개에서 $r\,(0<r\le n)$개를 택하는 순열의 수는

$$ {}_n\mathrm{P}_r=\underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}_{r\text{개}} $$

高1 수학 순열의 수

① ${}_n\mathrm{P}_r=\dfrac{n!}{(n-r)!}$ (단, $0\le r\le n$)

② ${}_n\mathrm{P}_n=n!$, ${}_n\mathrm{P}_0=1$, $0!=1$

확인 01 **서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 다음을 구하여라.**

(1) 두 눈의 수의 합이 3 또는 5인 경우의 수

(2) 두 눈의 수의 곱이 홀수가 되는 경우의 수

확인 02 **다음을 구하여라.**

(1) ${}_5\mathrm{P}_3$의 값

(2) 4개의 숫자 1, 2, 3, 4를 한 번씩 사용하여 만들 수 있는 두 자리 자연수의 개수

개념 02 원순열

(1) **원순열**

서로 다른 것을 원형으로 배열하는 순열을 원순열이라고 한다.

› 원순열에서는 회전하여 일치하는 것은 모두 같은 것으로 본다.

(2) **원순열의 수**

서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 원순열의 수는

$$ \frac{n!}{n}=(n-1)! $$

› 서로 다른 n개에서 $r\,(0<r\le n)$개를 택하여 원형으로 배열하는 경우의 수는 $\dfrac{{}_n\mathrm{P}_r}{r}$

(3) 다각형 모양의 탁자에 둘러앉는 경우의 수는

(원순열의 수)×(서로 다른 기준에 있는 위치의 수)

확인 03 **다음을 구하여라.**

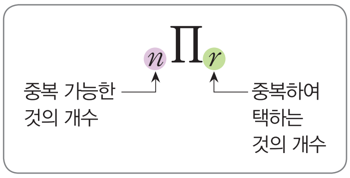
(1) A, B, C, D 4개의 문자를 일정한 간격을 두고 원형으로 배열하는 경우의 수

(2) 6명이 일정한 간격을 두고 원탁에 둘러앉는 경우의 수

개념 03 중복순열

(1) 중복순열

서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 순열을 중복순열이라고 하며, 기호 ${}_n\Pi_r$로 나타낸다.



> ${}_n\Pi_r$의 Π는 곱을 뜻하는 Product의 첫 글자 P에 해당하는 그리스 문자이다.

(2) 중복순열의 수

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복순열의 수는

$${}_n\Pi_r = \underbrace{n \times n \times n \times \cdots \times n}_{r\text{개}} = n^r$$

참고 ${}_nP_r$에서는 $0 \le r \le n$이어야 하지만 ${}_n\Pi_r$에서는 $r > n$인 경우도 있다.

확인 04 다음을 계산하여라.

(1) ${}_4\Pi_2$　　　　(2) ${}_3\Pi_5$

확인 05 4개의 숫자 1, 2, 3, 4에서 중복을 허락하여 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수를 구하여라.

개념 04 같은 것이 있는 순열

(1) 같은 것이 있는 순열

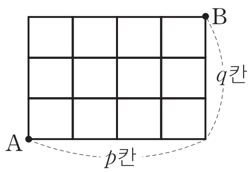
n개 중에서 서로 같은 것이 각각 p개, q개, $\cdots$, r개씩 있을 때, n개를 일렬로 나열하는 순열의 수는

$$\frac{n!}{p!q!\cdots r!} \quad (\text{단, } p+q+\cdots+r=n)$$

> 문자의 순서가 정해진 경우의 수는 순서가 정해진 문자를 모두 한 문자로 놓고 같은 것이 있는 순열의 수를 이용하여 구한다.

참고 오른쪽 그림과 같은 도로망에서 A지점에서 출발하여 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{(p+q)!}{p!q!}$$

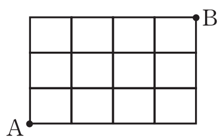


확인 06 다음을 구하여라.

(1) a, a, b, b를 일렬로 나열하는 경우의 수

(2) 1, 2, 2, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수

확인 07 오른쪽 그림과 같은 도로망이 있다. A지점에서 출발하여 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수를 구하여라.



필수유형 01 경우의 수

다음을 구하여라.

(1) 방정식 $2x+3y+z=10$을 만족시키는 양의 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수

(2) 72와 108의 양의 공약수의 개수

풍쌤 POINT

(1) $2x+3y+z=10$에서 y의 계수가 가장 크므로 y의 값을 기준으로 수를 대입해.

(2) 자연수의 약수의 개수는 그 수를 소인수분해하여 구하면 돼.

풀이

(1) STEP1 x, y, z의 값의 범위 구하기

x, y, z가 양의 정수이므로

$x\geq1$, $y\geq1$, $z\geq1$

STEP2 y의 값을 기준으로 순서쌍 (x, z)의 개수 구하기

(i) $y=1$ ❶일 때

$2x+z=7$이므로 순서쌍 (x, z)의 개수는

$(1, 5)$, $(2, 3)$, $(3, 1)$의 3이다.

(ii) $y=2$ ❶일 때

$2x+z=4$이므로 순서쌍 (x, z)의 개수는

$(1, 2)$의 1이다.

STEP3 순서쌍 (x, y, z)의 개수 구하기

(i), (ii)에 의하여 구하는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$3+1=4$

(2) STEP1 72와 108의 공약수의 개수 구하는 방법 설명하기

72와 108의 양의 공약수의 개수는 72와 108의 최대공약수인 36의 양의 약수의 개수와 같다. ❷

STEP2 72와 108의 양의 공약수의 개수 구하기

$36=2^2\times3^2$이므로 구하는 양의 공약수의 개수는

$(2+1)\times(2+1)=9$

❶ x, y, z가 양의 정수이므로

$3\leq3y\leq7$, $1\leq y\leq\frac{7}{3}$

$\therefore$ $y=1$ 또는 $y=2$

❷ 두 자연수의 공약수는 두 수의 최대공약수의 약수와 같다.

답 (1) 4 (2) 9

풍쌤 강의 NOTE

- 방정식 $ax+by+cz=d$ (a, b, c, d는 상수)를 만족시키는 순서쌍 (x, y, z)의 개수
  ➡ x, y, z의 계수 a, b, c 중 절댓값이 가장 큰 문자를 기준으로 수를 대입하여 구한다.
- $N=x^a y^b z^c$ (x, y, z는 서로 다른 소수, a, b, c는 자연수)의 양의 약수의 개수
  ➡ $(a+1)(b+1)(c+1)$

01-1 유사

다음을 구하여라.

(1) 방정식 $x+2y+3z=8$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수

(2) 96과 144의 양의 공약수의 개수

01-2 변형

부등식 $2x+y\leq7$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수를 구하여라.

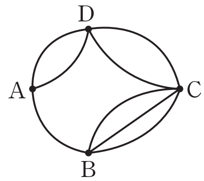
01-3 변형

100원짜리 동전 4개, 500원짜리 동전 3개, 1000원짜리 지폐 2장을 사용하여 거스름돈 없이 지불할 수 있는 경우의 수를 a, 지불할 수 있는 금액의 수를 b라고 할 때, $a-b$의 값을 구하여라.

(단, 0원을 지불하는 것은 제외한다.)

01-4 변형

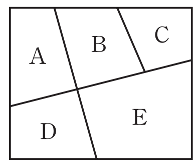
A, B, C, D의 네 지점이 오른쪽 그림과 같이 서로 연결되어 있다. A지점을 출발하여 C지점으로 가는 경우의 수를 구하여라. (단, 같은 지점은 두 번 지나지 않는다.)



01-5 변형

오른쪽 그림과 같이 나누어진 5개의 영역을 서로 다른 3가지의 색을 모두 사용하여 각 영역이 구분되도록 칠하려고 한다. 이때 가능한 경우의 수를 구하여라.

(단, 같은 색을 중복하여 사용할 수 있다.)



01-6 실력 기출

0을 한 개 이하 사용하여 만든 세 자리 자연수 중에서 각 자리의 수의 합이 3인 자연수는 111, 120, 210, 102, 201이다. 0을 한 개 이하 사용하여 만든 다섯 자리 자연수 중에서 각 자리의 수의 합이 5인 자연수의 개수를 구하여라.

필수유형 02 순열

다음을 구하여라.

(1) 여학생 4명과 남학생 2명이 한 줄로 설 때, 여학생끼리 이웃하여 서는 경우의 수

(2) 어른 2명과 학생 3명이 한 줄로 설 때, 맨 앞과 맨 뒤에 어른이 서는 경우의 수

(3) 5개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4를 모두 사용하여 다섯 자리 자연수를 만들 때, 홀수의 개수

풍쌤 POINT

(1) 이웃하는 경우 ➡ 이웃하는 것을 하나로 생각하고 일렬로 나열해.

(2) 특정한 자리가 정해진 경우 ➡ 특정한 자리가 정해진 것을 먼저 나열하고 나머지를 일렬로 나열해.

풀이

(1) STEP 1 여학생 4명을 한 사람으로 생각하여 한 줄로 세우는 경우의 수 구하기

여학생 4명을 한 사람으로 생각하여 3명을 한 줄로 세우는 경우의 수는 $3!=6$❶

STEP 2 여학생끼리 자리를 바꾸는 경우의 수 구하기

여학생 4명끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $4!=24$❷

STEP 3 조건을 만족시키는 경우의 수 구하기

따라서 구하는 경우의 수는 $6\times24=144$

(2) STEP 1 학생 3명을 일렬로 세우는 경우의 수 구하기

먼저 맨 앞과 맨 뒤에 어른 2명을 고정시키고 학생 3명을 한 줄로 세우는 경우의 수는 $3!=6$

STEP 2 어른끼리 자리를 바꾸는 경우의 수 구하기

어른 2명끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

STEP 3 조건을 만족시키는 경우의 수 구하기

따라서 구하는 경우의 수는 $6\times2=12$

(3) STEP 1 일의 자리, 만의 자리에 올 수 있는 경우의 수 구하기

일의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 3❸의 2가지이다.

만의 자리에 올 수 있는 숫자는 0❹과 일의 자리에 온 숫자를 제외한 3가지이다.

STEP 2 천의 자리, 백의 자리, 십의 자리를 택하는 경우의 수 구하기

천의 자리, 백의 자리, 십의 자리에 올 수 있는 숫자는 남은 3개의 숫자를 일렬로 나열하면 되므로 $3!=6$

STEP 3 홀수의 개수 구하기

따라서 구하는 홀수의 개수는 $2\times3\times6=36$

❶ $n!=n(n-1)(n-2)\times\cdots\times2\times1$

❷ 이웃하는 경우는 그 안에서 일렬로 나열하는 경우도 생각한다.

❸ 홀수가 되려면 일의 자리에 홀수가 와야 한다.

❹ □□□□□
0이 올 수 없다.

답 (1) 144 (2) 12 (3) 36

풍쌤 강의 NOTE

이웃하게 나열하는 순열의 수

➡ (이웃하는 것을 하나로 묶어 일렬로 나열하는 경우의 수)×(한 묶음에서 자리를 바꾸는 경우의 수)

02-1 기본

다음을 만족시키는 자연수 n 또는 r의 값을 구하여라.

(1) ${}_{n}\mathrm{P}_{2}=30$

(2) ${}_{7}\mathrm{P}_{r}=210$

(3) ${}_{n}\mathrm{P}_{4}=6{}_{n}\mathrm{P}_{2}$

02-2 유사

다음을 구하여라.

(1) a, b, c, d, e의 다섯 개의 문자를 일렬로 나열할 때, a, e가 이웃하는 경우의 수

(2) KOREA의 5개의 문자를 일렬로 나열할 때, 맨 앞에는 자음, 맨 뒤에는 모음이 오는 경우의 수

(3) 5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5를 모두 사용하여 다섯 자리 자연수를 만들 때, 짝수의 개수

02-3 변형

남학생 4명과 여학생 4명이 한 줄로 서서 경기장에 입장을 하려고 할 때, 남녀가 교대로 입장하는 경우의 수를 구하여라.

02-4 변형

a, b, c, d, e의 5개의 문자를 알파벳 순서에 의하여 사전식으로 배열하였을 때, 88번째 문자열을 구하여라.

02-5 변형

minutes에 있는 7개의 문자를 일렬로 나열할 때, 적어도 한 쪽 끝에 자음이 오는 경우의 수를 구하여라.

02-6 실력

기출

집합 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에서 A로의 함수 f 중에서 다음 두 조건을 만족시키는 함수의 개수를 구하여라.

(가) 함수 f는 일대일대응이다.
(나) 정의역 A의 한 원소 n에 대하여
$f(n+1)-f(n)=5$이다.